Neurčité rovnice

5. Pythagorova rovnice

In: Jan Vyšín (author): Neurčité rovnice. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1949. pp. 25–28.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402870

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

5. PYTHAGOROVA ROVNICE

Nejdůležitější z jednoduchých neurčitých rovnic 2. stupně je rovnice

$$x^2 + y^2 = z^2; \tag{5,1}$$

její řešení (omezíme se jen na celá kladná čísla) jsou t. zv. ***čísla pythagorejská***. Geometrický význam řešení rovnice (5,1) je zřejmý: hledáme pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými stranami. Budeme nejprve určovati jen taková řešení rovnice (5,1), kde x, y, z jsou nesoudělná: ostatní z nich snadno dostaneme. Je-li totiž $\delta > 1$ největší společný dělitel čísel x, y, z, můžeme psáti $x = \delta x'$, $y = \delta y'$, $z = \delta z'$, kde x', y', z' jsou nesoudělná. Dosadíme-li do rovnice (5,1) za x, y, z a krátíme δ^2, vyjde $x'^2 + y'^2 = z'^2$, t. j. x', y', z' jsou řešením (5,1) předpokládané vlastnosti.

Po tomto omezení je patrné, že x, y nejsou obě čísla sudá: neboť pak by bylo také z^2 i z číslo sudé a x, y, z by měla proti předpokladu společného dělitele 2. Avšak čísla x, y nemohou být také obě lichá: neboť pak bychom mohli psáti $x = 2\xi + 1$, $y = 2\eta + 1$, $z^2 = x^2 + y^2 = 4(\xi^2 + \eta^2 + \xi + \eta) + 2$: číslo z by bylo sudé, nikoli však dělitelné čtyřmi, což — jak víme — je nemožné.

Čísla x, y jsou tedy různé parity, z je liché. Zvolme si označení tak, aby x bylo sudé, y liché. Rovnici (5,1) upravme na tvar

$$(z + y)(z - y) = x^2. \tag{5,2}$$

Z rovnice (5,2) dostaneme, dělíme-li ji čtyřmi:

$$\tfrac{1}{2}(z + y) \cdot \tfrac{1}{2}(z - y) = \tfrac{1}{4}x^2. \tag{5,3}$$

Čísla z, y jsou lichá, čísla $\frac{1}{2}(z + y)$, $\frac{1}{2}(z - y)$ jsou celá a nesoudělná. Neboť kdyby tato čísla měla společného prvočinitele p, bylo by $\frac{1}{2}(z + y) = \alpha p$, $\frac{1}{2}(z - y) = \beta p$ (α, β celá), t. j. $z = (\alpha + \beta)\,p$, $y = (\alpha - \beta)\,p$. Měla by tedy čísla z, y a podle rovnice (5,2) i číslo x společného dělitele $p > 1$ proti předpokladu.

Rovnice (5,3) ukazuje, že celé číslo $\frac{1}{4}x^2$ je rozloženo v součin dvou nesoudělných činitelů: to znamená, že každý z těchto dvou činitelů musí být čtverec celého čísla. Neboť je-li na př. q prvočinitel čísla

$\frac{1}{2}(z + y)$, je q také prvočinitelem čísla $\frac{1}{4}x^2$ i $\frac{1}{2}x$. Rovnice (5,3) je dělitelna sudou mocninou čísla q, $\frac{1}{2}(z - y)$ však není dělitelno číslem q, je tedy prvočinitel q v rozkladu čísla $\frac{1}{2}(z + y)$ v sudé mocnině. Tento úsudek platí o všech prvočinitelích čísla $\frac{1}{2}(z + y)$ (a ovšem i $\frac{1}{2}(z - y)$), je proto každé z těchto dvou čísel čtvercem celého čísla.

Položíme tedy $\frac{1}{2}(z + y) = u^2$, $\frac{1}{2}(z - y) = v^2$, pak je $\frac{1}{4}x^2 = u^2v^2$; z těchto vztahů vyjádříme x, y, z. Všecka nesoudělná řešení rovnice (5,1) vyjdou v tvaru

$$x = 2uv,\ y = u^2 - v^2,\ z = u^2 + v^2,$$

kde $u > v$, u, v jsou nesoudělná a téže parity (proč?). *Všechna řešení rovnice* (5,1) *dostaneme pak z rovnic:*

$$x = 2kuv,\ y = k(u^2 - v^2),\ z = k(u^2 + v^2), \qquad (5,4)$$
$$k \text{ celé, } u > v \text{ nesoudělná a téže parity.}$$

Dosazením se snadno přesvědčíme, že obráceně každá trojice čísel x, y, z, která vyjde z rovnic (5,4) při libovolné volbě k, u, v, je řešením rovnice (5,1). Na př. pro $u = 2$, $v = 1$, $k = 1$, vyjde známá trojice $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$, pro $u = 3$, $v = 2$, $k = 1$ trojice 12, 5, 13, a pod.

Obě uvedené trojice čísel náleží do skupiny nejstarších známých řešení, pro něž $z = x + 1$. Z rovnic (5,4) plyne z této podmínky $k(u - v)^2 = 1$, t. j. $u - v = 1$, $k = 1$: pak je $x = 2v(v + 1)$, $y = 2v + 1$, $z = 2v(v + 1) + 1$.

Skupinu dalších úloh si vyslovíme *geometricky*: Hledejme kosoúhlé trojúhelníky s celočíselnými stranami tak, aby jedna z výšek, na př. v_c, dělila příslušnou stranu (c) ve dva úseky celočíselných délek. Úloha má smysl i pro tupoúhlé trojúhelníky (viz obr. 4). Vyjádříme podmínku rovnicí:

$$a^2 - c_1^2 = b^2 - c_2^2. \qquad (5,5)$$

Tato rovnice se má řešiti celými čísly. Označíme-li společnou hodnotu obou stran rovnice (5,5) $v_c^2 = t$, pak víme podle kap. 4, že řešení této rovnice dostaneme ze dvou rozkladů čísla t ve dva různé činitele téže parity (kdyby činitelé byli stejní, vyšlo by c_1 nebo c_2 rovné nule a trojúhelník by byl pravoúhlý proti předpokladu). Jsou-li oba rozklady čísla t stejné, vyjde $a = b$, $c_1 = c_2$, trojúhelník je rovnoramenný, jsou-li rozklady různé, je $a \neq b$, trojúhelníky jsou dva: ostroúhlý a tupoúhlý. Při řešení rovnice (5,5) vycházíme vždy z čísla t: na př. pro $t = 15 = 1 \,.\, 15 = 3 \,.\, 5$ dostaneme $a = 8$, $c_1 = 7$, $b = 4$, $c_2 = 1$: výsledné trojúhelníky mají strany $a = 8$, $b = 4$, $c = 8$ (ostroúhlý), $a' = 8$, $b' = 4$, $c' = 6$ (tupoúhlý). Pro $t = 21 = 1 \,.\, 21 = 3 \,.\, 7$ vyjdou trojúhelníky 11, 5, 12, a 11, 5, 8.

Na řešení rovnice (5,5) převádíme řešení rovnice

$$x^2 + y^2 = z^2 + u^2$$

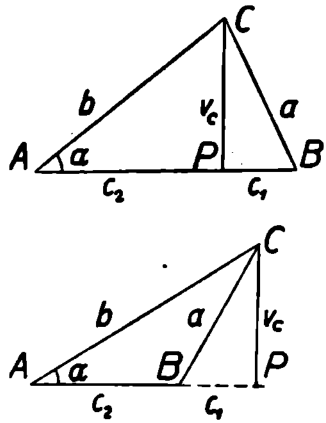
tím, že ji upravíme na tvar $x^2 - z^2 = u^2 - y^2$.

V probrané geometrické úloze jsme nepožadovali, aby výška v_c byla vyjádřena celým číslem. To nastane jen tehdy, je-li $t = v_c^2$ čtverec celého čísla, který rozložíme dvojím způsobem v součin dvou různých činitelů, ovšem téže parity (proč?). Nejmenší číslo t, pro které lze provést dva různé rozklady, je $t = 64 = 2 \,.\, 32 = 4 \,.\, 16$. Vyjde $a = 17$, $c_1 = 15$, $b = 10$, $c_2 = 6$, t. j. trojúhelník (tupoúhlý) $a = 17$, $b = 10$, $c = 21$, $v_c = 8$. Tento trojúhelník má obsah 84, jsou tedy všechny jeho výšky vyjádřeny racionálními čísly.

Uvedený trojúhelník náleží do zajímavé skupiny trojúhelníků. Z trigonometrie znáte kosinovou větu: je vyjádřena rovnicí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos\alpha$$

a dvěma dalšími vzniklými cyklickou záměnou prvků. Z těchto rovnic je patrné, že v trojúhelníku s celočíselnými stranami jsou kosiny všech úhlů racionální čísla. Je-li mimo to ještě jedna z výšek (na př. v_c) racionální, pak je také obsah vyjádřen racionálním číslem a jsou tedy všecky výšky racionální. Siny všech úhlů trojúhelníku jsou také racionální čísla, neboť na př. $\sin\alpha = \frac{v_c}{b}$ (obr. 4). Trojúhelník s racionálními stranami, jehož všecky úhly mají racionální siny a kosiny, se nazývá *racionální* čili *Heronův*.



Obr. 4.

Znásobíme-li všecky délky (strany,

výšky, úseky vyťaté na stranách výškami) racionálního trojúhelníka vhodným číslem, dosáhneme toho, že všechny tyto délky budou vyjádřeny celými čísly. Jak takové trojúhelníky vyhledáme, ukázali jsme na hořejším příkladě.

Povšimněme si ještě následujícího: jsou-li kosinus i sinus úhlu α racionální čísla, můžeme psáti $\cos\alpha = \dfrac{k}{m}$, $\sin\alpha = \dfrac{l}{m}$, kde k, l, m jsou čísla celá. Ze základní rovnice $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ plyne $k^2 + l^2 = m^2$, t. j. k, l, m jsou (až na znaménka) pythagorejská čísla. V uvedeném příkladě racionálního trojúhelníku $a = 17$, $b = 10$, $c = 21$ je $\sin\alpha = \dfrac{2P}{bc} = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$,*) $\sin\beta = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{15}{17}$,*) $\sin\gamma = \frac{84}{85}$, $\cos\gamma = \frac{13}{85}$.*)

Cvičení **32.** Najděte pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými stranami, jejichž delší odvěsna je aritmetickým průměrem kratší odvěsny a přepony.

33. Dvě protínající se kružnice, jejichž poloměry jsou vyjádřeny celými čísly, mají společnou tětivu délky 30. Určete je tak, aby vzdálenost středu byla co nejmenší.

34. Který racionální trojúhelník má výšku 2,25? [*Návod*: hledejte racionální trojúhelníky s výškou 4 . 2,25 = 9, 8 . 2,25 = 18.]

35. Pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými stranami je racionální. Ukažte, že jeho výška není vyjádřena celým číslem. [*Návod*: vyjádřete $w = \dfrac{ab}{c} = \dfrac{2k^2uv(u^2 - v^2)}{u^2 + v^2}$: je-li p prvočinitel čísla u a je-li w celé číslo, je též prvočinitelem čísla v; to však nenastane.]

36. Určete tětivové čtyrúhelníky s celočíselnými stranami a jedním pravým úhlem. [*Návod*: uvažte, že se každý takový čtyrúhelník skládá ze dvou pravoúhlých trojúhelníků se společnou přeponou.]

37. Určete pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými stranami o daném obvodu (na př. $2s = 72$).

38. Řešte rovnici

$$x^2 + 4y^2 = (x + y + z)^2.$$

*) Trojúhelník 17, 21, 10 je tupoúhlý, protože platí $21^2 > 10^2 + 17^2$, jsou tedy kosiny i siny všech jeho úhlů až na $\cos\gamma$ *kladná* čísla. Obecně, jak známo platí: trojúhelník, jehož nejdelší strana je c, je ostroúhlý (pravoúhlý, tupoúhlý) podle toho, je-li $c^2 \lesseqqgtr a^2 + b^2$.