Řetězové zlomky

Metrická teorie řetězců

In: Aleksandr Ja. Chinčin (author); Karel Rychlík (translator): Řetězové zlomky. (Czech). : Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 47–99.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402847

KAPITOLA III.

METRICKÁ THEORIE ŘETĚZCŮ

§ 11. Úvod

V celé předešlé kapitole jsme viděli, že reálná čísla se mohou velmi lišit svými aritmetickými vlastnostmi. Mimo základní rozdělení reálných čísel na racionální a iracionální, na algebraická a transcendentní, je možná řada značně přesnějších dalších rozdělení těchto čísel podle celé řady znaků charakterisujících jejich aritmetickou povahu a především podle charakteru té aproximace racionálními čísly, kterou ona čísla připouštějí. Ve všech takových případech jsme se doposud spokojili prostým stanovením, zda čísla mající nějakou aritmetickou vlastnost skutečně existují. Tak víme, že existují čísla, připouštějící přibližné vyjádření racionálními zlomky $\frac{p}{q}$ jen s přesností, jejíž řád není vyšší než $\frac{1}{q^2}$ (takové jsou na př. všechny kvadratické iracionály). Víme však také, že existují čísla dovolující aproximaci vyššího stupně (věta 22, kap. II). Přirozeně se nám naskýtá otázka, které z obou opačných vlastností je třeba přiznat větší „obecnost", který z oněch dvou typů reálných čísel se „častěji vyskytuje".

Chceme-li dát takto kladené otázce přesnou formulaci, musíme mít na zřeteli, že po každé, když jsme vyslovili nějakou vlastnost reálných čísel (na př. iracionálnost, nebo transcendentnost, nebo vyjádřitelnost s omezenou posloupností prvků atd.), souhrn všech reálných čísel se rozpadá vzhledem k této vlastnosti na dvě množiny: 1. množinu čísel majících danou vlastnost a 2. množinu čísel bez této vlastnosti. Otázka, kterou chceme klást, se převede na úlohu porovnat tyto dvě množiny s cílem stanovit, která z nich obsahuje více čísel a která méně. Množiny reálných čísel lze však spolu srovnávat s různých hledisek a pomocí různých charakteristik. Můžeme klást otázku, jaká je jejich mohutnost, jejich míra i řada různých zevšeobecnění této míry. Nejzajímavější jak svou methodou, tak svými výsledky je *metrická* problematika, zabývající se *mírou* číselných množin, daných různými vlastnostmi čísel, jež se v nich vyskytují. Tato nauka, kterou možno nazvat *metrickou aritmetikou kontinua*, prošla v poslední době značným rozvojem a vedla k mnohým jednoduchým a zajímavým zákonitostem. Jako u každé nauky o aritmetické povaze iracionálních čísel, i zde je aparát řetězců přirozeným a nejlepším nástrojem studia; abychom však vybudovali tento aparát jako nástroj metrické theorie čísel, t. j. abychom ho užili ke studiu míry množin, daných aritmetickými vlastnostmi čísel, jež se v nich vyskytují, musíme patrně především podrobit onen aparát sám podrobné a všestranné metrické analyse; jinými slovy, musíme se naučit *určit míru množin čísel, jejichž rozklad v řetězec má předem dané vlastnosti.* Otázky tohoto druhu mohou mít velmi různý charakter. Můžeme se ptát, jaká je míra množiny čísel, pro něž $a_4 = 2$, nebo pro něž $q_{10} < 1000$, nebo která mají omezenou posloupnost prvků, nebo mezi jejichž prvky nejsou sudá čísla atd., atd. Souhrn method sloužících k řešení úloh podobného druhu tvoří *metrickou theorii řetězců*, jejímž počátkům a elementárnímu použití je věnována tato kapitola. Ježto se přičtením libovolného celého čísla k danému reálnému číslu jeho podstatné aritmetické vlastnosti nemění, omezíme se přitom v dalším na reálná čísla ležící v intervalu (0, 1) (t. j. položíme všude $a_0 = 0$). V metrické theorii je takové omezení na konečný interval ostatně nutné, chceme-li, aby míra množiny nebyla v obecném případě nekonečně velká.

Předpokládáme, že čtenář je obeznámen s hlavními větami theorie míry lineárních množin.[9])

§ 12. Prvky jako funkce zobrazeného čísla

Každé reálné číslo α lze jediným způsobem vyjádřit řetězcem

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

Každý prvek a_n je tudíž jednoznačně určen tím, že je dáno číslo α, t. j. je jednoznačnou funkcí α:

$$a_n = a_n(\alpha).$$

Ke zbudování metrické theorie řetězců je prvním krokem takové zkoumání této funkce, které by nám dovolilo utvořit si aspoň obecnou představu o jejím průběhu. Tomu je věnován tento paragraf.

Jak jsme již poznamenali v paragrafu 11, položíme všude $a_0 = 0$; abychom zkrátili označení, budeme při tom místo

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \dots]$$

psát kratčeji

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots];$$

položíme tudíž

$$[a_1, a_2, \dots] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}$$

Všimněme si nejdříve prvního prvku a_1 jako funkce α. Ježto

$$\frac{1}{\alpha} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}},$$

je patrně $a_1 = \left[\frac{1}{\alpha}\right]$, t. j. a_1 je největší celé číslo nepřevyšující $\frac{1}{\alpha}$. Je tudíž

[9]) Vědomosti více než dostačující k porozumění této kapitoly jsou obsaženy v knize: P. S. Alexandrov a A. N. Kolmogorov, Vvedenije v teoriju funkcij dejstvitel'nogo peremennogo, 1933, kap. VI. • V české literatuře: Čech. •

$$a_1 = 1 \text{ pro } 1 \leqq \frac{1}{\alpha} < 2, \text{ t. j. } \tfrac{1}{2} < \alpha \leqq 1,$$

$$a_1 = 2 \text{ pro } 2 \leqq \frac{1}{\alpha} < 3, \text{ t. j. } \tfrac{1}{3} < \alpha \leqq \tfrac{1}{2},$$

$$a_1 = 3 \text{ pro } 3 \leqq \frac{1}{\alpha} < 4, \text{ t. j. } \tfrac{1}{4} < \alpha \leqq \tfrac{1}{3}, \text{ atd.;}$$

obecně

$$a_1 = k \text{ pro } k \leqq \frac{1}{\alpha} < k + 1, \text{ t. j. } \frac{1}{k+1} < \alpha \leqq \frac{1}{k}.$$

Funkce $a_1 = a_1(\alpha)$ má tedy nespojitost pro všechny ty hodnoty α, při nichž $\frac{1}{\alpha}$ je celé číslo a roste do nekonečna při $\alpha \to \infty$. Její grafické zobrazení je dáno v obr. 1.

Poznamenejme ještě, že a_1 je konstantní v každém z intervalů $\left(\frac{1}{k+1} < \alpha \leqq \frac{1}{k}\right)$, které nazveme intervaly *prvního pořadí*, a že

$$\int_0^1 a_1(\alpha)\, d\alpha = +\infty,$$

ježto tento integrál se dá patrně vyjádřit divergentní řadou

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}.$$

Přejděme nyní ke studiu funkce $a_2(\alpha)$. K tomu si všimněme nejprve libovolného pevného intervalu prvního pořadí

$$\frac{1}{k+1} < \alpha \leqq \frac{1}{k}.$$

V tomto intervalu je však $a_1 = k$, a tudíž

$$\alpha = \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{r_2}},$$

při čemž $1 \leqq r_2 < \infty$ a $a_2 = [r_2]$. Když r_2 roste od 1 do ∞, α roste od $\frac{1}{k+1}$ do $\frac{1}{k}$, probíhá tudíž daný interval prvního pořadí. Přitom je patrné, že

$$a_2 = 1 \text{ pro } 1 \leqq r_2 < 2, \text{ t. j. } \frac{1}{k+1} \leqq \alpha < \frac{1}{k+\frac{1}{2}},$$

$$a_2 = 2 \text{ pro } 2 \leqq r_2 < 3, \text{ t. j. } \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \leqq \alpha < \frac{1}{k+\frac{1}{3}},$$

$$a_2 = 3 \text{ pro } 3 \leqq r_2 < 4, \text{ t. j. } \frac{1}{k+\frac{1}{3}} \leqq \alpha < \frac{1}{k+\frac{1}{4}},$$

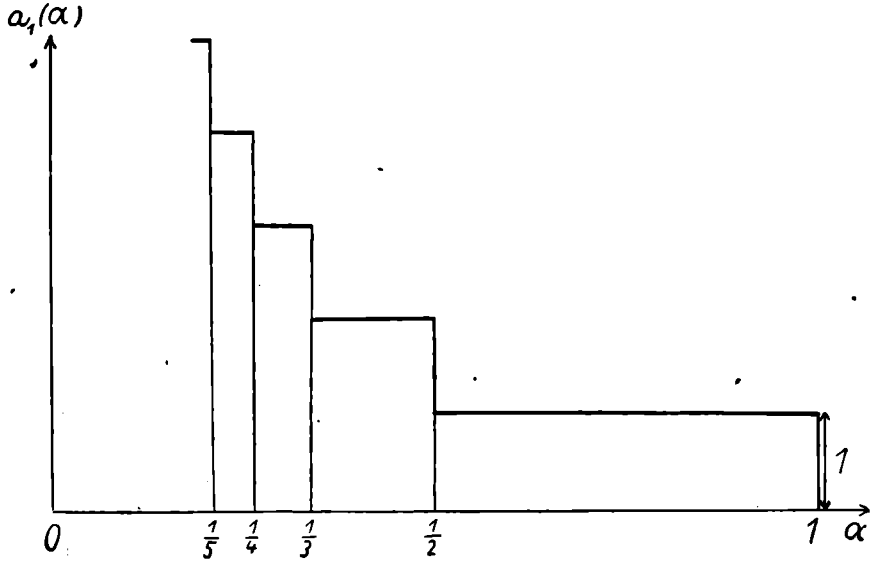
a obecně

$$a_2 = l \text{ pro } l \leqq r_2 < l + 1, \text{ t. j. } \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{l}} \leqq \alpha < \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{l+1}}.$$

V intervalu prvního pořadí $\frac{1}{k+1} < \alpha \leqq \frac{1}{k}$ má tedy grafické znázornění funkce $a_2(\alpha)$ tvar vyobrazený na obr. 2.

Funkce $a_2(\alpha)$ je stálá v každém z intervalů

$$\left(\frac{1}{k+\frac{1}{l}}, \frac{1}{k+\frac{1}{l+1}}\right),$$



Obr. 1.

které nazveme intervaly *druhého pořadí*. Každý interval prvního pořadí se tudíž rozpadá na spočetnou množinu intervalů druhého pořadí jdoucích *zleva napravo* (připomínáme, že intervaly prvního pořadí tvoří posloupnost jdoucí *zprava nalevo*). Množina bodů, v nichž je $a_1 = k$, je jeden interval prvního pořadí; množina bodů, v nichž $a_2 = l$, je spočetná množina intervalů druhého pořadí (po jednom v každém intervalu prvního pořadí). Každý interval prvního pořadí je určen podmínkou tvaru $a_1 = k$; každý interval druhého pořadí podmínkou tvaru $a_1 = k$, $a_2 = l$.

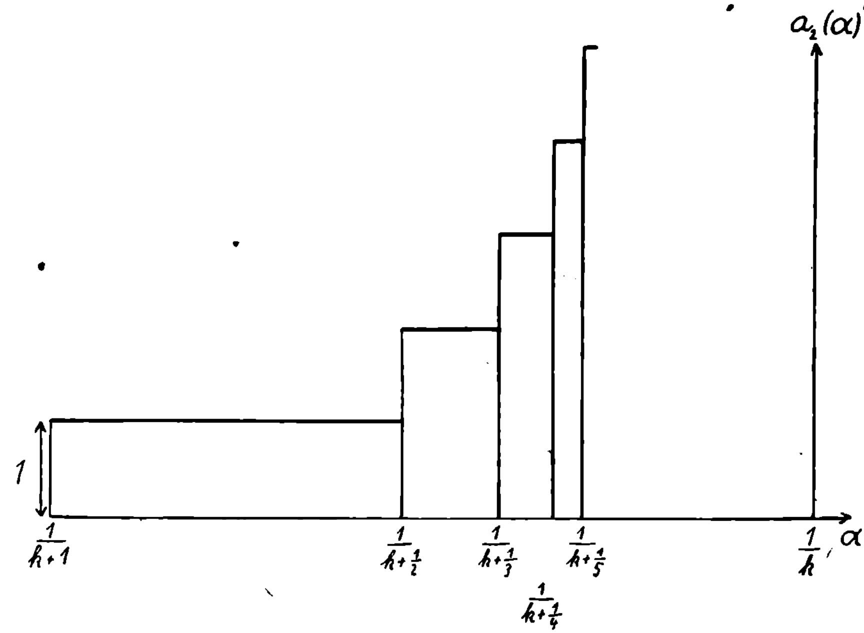
Definujme nyní již obecně interval *pořadí n* a sledujme průběh funkcí $a_1(\alpha), a_2(\alpha), \ldots, a_n(\alpha)$. Každá soustava hodnot

$$a_1 = k_1, a_2 = k_2, \ldots, a_n = k_n \tag{54}$$

určuje interval J_n pořadí n. Abychom mohli sledovat průběh funkce $a_{n+1}(\alpha)$ v intervalu J_n, poznamenejme, že libovolné číslo α tohoto intervalu lze znázornit ve tvaru

$$\alpha = [k_1, k_2, \ldots, k_n, r_{n+1}], \tag{55}$$

kde r_{n+1} nabývá všech možných hodnot od 1 do ∞. Naopak, při libovolném r_{n+1} ($1 < r_{n+1} < \infty$) nám výraz (55) dává číslo α, pro něž jsou splněny podmínky (54) a které tudíž patří do intervalu J_n. Ježto $a_{n+1} = [r_{n+1}]$, vidíme, že uvnitř každého z intervalů



Obr. 2.

pořadí n nabývá $a_{n+1}(\alpha)$ všech celých hodnot od 1 do ∞. Abychom si utvořili přesnější obraz, označíme jako obvykle $\frac{p_k}{q_k}$ sblížený zlomek čísla α. Pak je

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}},$$

při čemž, probíhá-li α daný interval J_n, r_{n+1} roste od 1 do ∞, kdežto p_{n-1}, q_{n-1}, p_n, q_n zůstávají stálými, protože tato čísla jsou určena čísly $a_1, a_2, \ldots, a_n$, která mají pro všechny body z intervalu J_n tytéž hodnoty. Zejména klademe-li $r_{n+1} = 1$ a $r_{n+1} \to \infty$, dostaneme jako koncové body intervalu J_n body

$$\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \text{ a } \frac{p_n}{q_n}.$$

Protože

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{q_n(q_n r_{n+1} + q_{n-1})},$$

je α monotonní funkcí r_{n+1} v intervalu $(1, \infty)$. Tedy i naopak r_{n+1} a také a_{n+1} je monotonní funkcí α v intervalu

$$J_n = \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right).$$

Když tedy α probíhá interval J_n, $a_{n+1}(\alpha)$ probíhá postupně hodnoty 1, 2, ... a rozkládá přitom interval J_n na spočetnou množinu intervalů pořadí $n + 1$. Ty jsou po sobě rozloženy zprava nalevo při sudém n a zleva napravo při lichém n.

Tak je objasněno sestrojení funkce $a_n(\alpha)$ aspoň po kvalitativní stránce. Nazveme interval (0, 1) (jediným) intervalem pořadí 0 a především jej pokryjeme postupně sítí stále jemnějších intervalů, takže do každého již sestrojeného intervalu pořadí n vložíme posloupnost intervalů pořadí $n + 1$.

Posloupnost jde zprava nalevo, je-li n sudé, a zleva napravo, je-li n liché. Funkce $a_{n+1}(\alpha)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ je stálá v každém z těchto intervalů pořadí $n + 1$. Je monotonní a nabývá všech celých hodnot od 1 do ∞ v každém z intervalů pořadí n. Každé soustavě hodnot

$$a_1 = k_1, a_2 = k_2, \ldots, a_n = k_n$$

odpovídá právě jeden interval pořadí n a naopak. Obecnější soustava hodnot

$$a_{m_1} = k_1, a_{m_2} = k_2, \ldots, a_{m_s} = k_s$$

určuje obecně spočetnou množinu intervalů.

První otázka, kterou přirozeně klade metrická theorie řetězců, je určení míry množiny těch bodů bodů úsečky (0, 1), pro něž $a_n = k$. Víme již, že tato množina je vždy tvořena soustavou intervalů. Jde tudíž jen o určení součtu délek těchto intervalů.

Označíme všude v dalším

$$E\begin{pmatrix} n_1, n_2, \ldots, n_s \\ k_1, k_2, \ldots, k_s \end{pmatrix}$$

množinu bodů intervalu (0, 1), pro něž jsou splněny podmínky

$$a_{n_1} = k_1, a_{n_2} = k_2, \ldots, a_{n_s} = k_s.$$

Zde, jak se samo sebou rozumí, všechna n_i a k_j jsou přirozená čísla, při čemž všechna n_i jsou mezi sebou různá. Již víme, že taková množina je vždy dána soustavou intervalů. Zvláště množina

$$E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n \end{pmatrix}$$

je — jak víme — interval pořadí n, charakterisovaný vztahy

$$a_i = k_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Vždy však máme

$$\sum_{k_l=1}^{\infty} E\begin{pmatrix} n_1, \ldots, n_{l-1}, n_l, n_{l+1}, \ldots, n_s \\ k_1, \ldots, k_{l-1}, k_l, k_{l+1}, \ldots, k_s \end{pmatrix} =$$

$$= E\begin{pmatrix} n_1, \ldots, n_{l-1}, n_{l+1}, \ldots, n_s \\ k_1, \ldots, k_{l-1}, k_{l+1}, \ldots, k_s \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Konečně označíme $\mathfrak{M}E$ míru množiny E.

Všimněme si nyní libovolného intervalu

$$J_n = E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, n \\ k_1, & k_2, & \ldots, k_n \end{pmatrix}$$

pořadí n a intervalu v něm obsaženého

$$J_{n+1}^{(s)} = E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, n, & n+1 \\ k_1, & k_2, & \ldots, k_n, & s \end{pmatrix}$$

pořadí $n + 1$. Víme již, že koncovými body intervalu J_n jsou body

$$\frac{p_n}{q_n} \text{ a } \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}},$$

kde obecně značí $\frac{p_k}{q_k}$ sblížený zlomek řádu k řetězce

$$[k_1, k_2, \ldots, k_n].$$

Na druhé straně pro všechny body intervalu $J_{n+1}^{(s)}$ máme

$$a_{n+1} = [r_{n+1}] = s,$$

odkud

$$s \leqq r_{n+1} < s + 1.$$

Budou tudíž ze všech bodů

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}}$$

intervalu J_n patřit do intervalu $J_{n+1}^{(s)}$ ty, pro něž $s \leqq r_{n+1} < s + 1$, odkud plyne zejména, že koncovými body intervalu $J_{n+1}^{(s)}$ jsou body

$$\frac{p_n s + p_{n-1}}{q_n s + q_{n-1}} \text{ a } \frac{p_n(s+1) + p_{n-1}}{q_n(s+1) + q_{n-1}}.$$

Odtud

$$\mathfrak{M}J_n = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2\left(1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)},$$

$$\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} = \left| \frac{p_n s + p_{n-1}}{q_n s + q_{n-1}} - \frac{p_n(s+1) + p_{n-1}}{q_n(s+1) + q_{n-1}} \right| =$$

$$= \frac{1}{(q_n s + q_{n-1})(q_n(s+1) + q_{n-1})} =$$

$$= \frac{1}{q_n^2 s^2 \left(1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)},$$

a tudíž

$$\frac{\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M}J_n} = \frac{1}{s^2} \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{\left(1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)\left(1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n}\right)};$$

zde je druhý činitel na pravé straně patrně vždy menší než 2 a větší než $\frac{1}{3}$ (na základě toho, že

$$\frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{1 + \frac{q_{n-1}}{s q_n}} \geqq 1 \quad \text{a} \quad 1 + \frac{1}{s} + \frac{q_{n-1}}{s q_n} < 3).$$

Dostáváme tedy

$$\frac{1}{3s^2} < \frac{\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M}J_n} < \frac{2}{s^2}. \tag{57}$$

To ukazuje, že v libovolném intervalu pořadí n ten interval pořadí $n + 1$, který je charakterisován hodnotou $a_{n+1} = s$, zaujímá část daného intervalu řádu $\frac{1}{s^2}$. Je velmi důležité, že hranice stanovené nerovnostmi (57) vůbec nezávisí ani na číslech $k_1, k_2, \ldots, k_n$, ani dokonce na pořadí n a jsou určeny jen číslem s. Přepíšeme-li tyto nerovnosti ve tvaru

$$\frac{\mathfrak{M}J_n}{3s^2} < \mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} < \frac{2\mathfrak{M}J_n}{s^2},$$

sečteme přes všechny intervaly J_n pořadí n (neboli, což je totéž, přes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ v mezích od 1 do ∞) a poznamenáme nakonec, že je při tom patrně

$$\Sigma \mathfrak{M}J_n = 1 \quad \text{a} \quad \Sigma \mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)} = \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} n+1 \\ s \end{pmatrix},$$

najdeme

$$\frac{1}{3s^2} < \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} n+1 \\ s \end{pmatrix} < \frac{2}{s^2},$$

čímž je v prvním přiblížení řešena také vytčená úloha. Vidíme, že *míra množiny bodů, v nichž některý předem určený prvek má danou hodnotu s, leží vždy mezi $\frac{1}{3s^2}$ a $\frac{2}{s^2}$ (a je to tudíž zejména veličina řádu $\frac{1}{s^2}$).*

§ 13. Metrický odhad vzrůstu prvků

Nyní již máme dostatečné množství látky k řešení úloh o míře množin, v jejichž určení se vyskytuje nekonečný počet prvků. Jako první příklad takové úlohy dokážeme toto jednoduché tvrzení.

Věta 29. *Množina všech čísel intervalu* (0, 1) *s omezenými prvky má míru nulovou.*

Důkaz. Označme E_M množinu čísel intervalu (0, 1), jejichž všechny prvky jsou menší než M. Nechť je J_n libovolný interval pořadí n, jehož body jsou podrobeny podmínkám

$$a_i < M \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{58}$$

Body intervalu J_n vyhovující doplňující podmínce $a_{n+1} = k$ určují interval pořadí $n + 1$, který označíme $J_{n+1}^{(k)}$. Dle první z rovnic (57) je

$$\mathfrak{M} J_{n+1}^{(k)} > \frac{1}{3k^2} \mathfrak{M} J_n,$$

odkud

$$\mathfrak{M} \sum_{k \geq M} J_{n+1}^{(k)} > \tfrac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{k \geq M} \frac{1}{k^2} >$$

$$> \tfrac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(M + i)^2} > \tfrac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \int_{M+1}^{\infty} \frac{du}{u^2} =$$

$$= \frac{1}{3(M + 1)} \mathfrak{M} J_n;$$

ježto však

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_{n+1}^{(k)} = J_n,$$

je tudíž

$$\mathfrak{M} \sum_{k<M} J_{n+1}^{(k)} > \left(1 - \frac{1}{3(M + 1)}\right) \mathfrak{M} J_n = \tau \mathfrak{M} J_n, \tag{59}$$

kde položeno

$$\tau = 1 - \frac{1}{3(M + 1)},$$

při čemž je patrně $\tau < 1$, je-li $M > 0$.

Označíme-li $E_M^{(n)}$ množinu čísel intervalu (0, 1) charakterisovanou podmínkami (58), vidíme z nerovnosti (59), že část množiny $E_M^{(n+1)}$ obsažená v některém z intervalů J_n pořadí n má míru menší než $\tau \mathfrak{M} J_n$. Protože patrně interval pořadí n, který nepatří do množiny $E_M^{(n)}$ (t. j. nevyhovuje podmínkám (58)) nemůže obsahovat ani jeden bod množiny $E_M^{(n+1)}$, dostaneme, sčítáme-li nerovnost (59) přes všechny intervaly pořadí n, které se vyskytují v množině $E_M^{(n)}$,

$$\mathfrak{M} E_M^{(n+1)} < \tau \mathfrak{M} E_M^{(n)}. \tag{60}$$

Postupné užití této nerovnosti nám poskytuje patrně

$$\mathfrak{M}E_M^{(n+1)} < \tau^n \mathfrak{M}E_M^{(1)} \quad (n \geqq 1),$$

odkud

$$\mathfrak{M}E_M^{(n)} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

ježto $\tau < 1$. Avšak svrchu definovaná množina E_M je patrně obsažena v každé z množin $E_M^{(n)}$, takže

$$\mathfrak{M}E_M = 0.$$

Položíme-li nyní

$$\sum_{M=1}^{\infty} E_M = E,$$

dostaneme

$$\mathfrak{M}E \leqq \sum_{M=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_M = 0.$$

Každé číslo s ohraničenými prvky patří patrně do množiny E_M při dostatečně velkém M, a tedy zřejmě do množiny E, čímž je věta dokázána.

Víme (věta 23, kap. II), že čísla s omezenými prvky jsou taková čísla α, která připouštějí přibližné vyjádření racionálními zlomky ne lepší než dle zákona

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2} \tag{61}$$

(k nimž patří, mezi jiným, všechny kvadratické iracionály). Vidíme nyní, že všechna taková čísla tvoří jen množinu míry 0; jinými slovy, *skoro všechna* (t. j. všechna s vyloučením množiny nulové míry) čísla připouštějí lepší aproximaci racionálními zlomky. Je patrné, že hlavní úlohou metrické theorie aproximací je otázka, jaká je míra množiny čísel připouštějících daný stupeň přiblížení pomocí racionálních zlomků. Zejména, jaký je nejlepší zákon aproximace přípustný pro *skoro všechna* čísla; jinými slovy, v jaké míře může být zlepšen zákon daný nerovnostmi (61), zanedbáme-li množinu čísel α s mírou 0. Řešení této úlohy podáme v příštím paragrafu; zde ještě dokážeme toto tvrzení:

Věta 30. *Nechť je $\varphi(n)$ libovolná kladná funkce přirozeného argumentu n; nerovnost*

$$a_n = a_n(\alpha) \geqq \varphi(n) \tag{62}$$

je splněna pro skoro všechna α v nekonečném počtu případů, je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ divergentní; naproti tomu je nerovnost (62) *splněna pro skoro všechna α nanejvýš v konečném počtu případů, je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ konvergentní.*

Předběžná poznámka. Položíme-li funkci $\varphi(n)$ rovnou kladné konstantě M, odvodíme z věty 30, že množina E_M, jíž jsme užili při důkazu věty 29, je nulové míry. Tak je možno větu 29 považovat za jeden z jednodušších speciálních případů věty 30.

Důkaz. První tvrzení věty se dokáže zcela analogicky jako věta 29. Nechť je J_{m+n} interval pořadí $m + n$, pro jehož všechny body

$$a_{m+i} < \varphi(m + i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{63}$$

(na $a_1, a_2, \ldots, a_m$ neklademe žádné podmínky). Zachováme-li označení zavedená při důkazu věty 29, najdeme analogicky s nerovností (59)

$$\mathfrak{M} \sum_{k<\varphi(m+n+1)} J_{m+n+1}^{(k)} < \left(1 - \frac{1}{3(1 + \varphi(m + n + 1))}\right) \mathfrak{M} J_{m+n}.$$

Sčítáme-li tuto nerovnost přes všechny intervaly pořadí $m + n$ podrobené podmínkám (63) a označíme-li $E_{m,n}$ množinu všech čísel intervalu $(0, 1)$, jež vyhovují těmto podmínkám, najdeme patrně

$$\mathfrak{M} E_{m,n+1} < \left(1 - \frac{1}{3(1 + \varphi(m + n + 1))}\right) \mathfrak{M} E_{m,n}.$$

Postupné užití této nerovnosti však dává

$$\mathfrak{M} E_{m,n} < \mathfrak{M} E_{m,1} \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{3(1 + \varphi(m + i))}\right).$$

Diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$, pak i řada

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{3(1 + \varphi(m + i))}$$

při libovolném m patrně diverguje a odtud plyne, jak známe z theorie nekonečných součinů, že součin

$$\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{3(1 + \varphi(m + i))}\right)$$

má za limitu 0 při $n \to \infty$. Tudíž při libovolném m máme

$$\mathfrak{M} E_{m,n} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Avšak každé číslo α, při němž

$$a_{m+i} < \varphi(m + i) \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

patří patrně do všech množin

$$E_{m,n} = (n = 1, 2, \ldots);$$

má proto množina všech takových čísel, kterou označíme E_m, nutně míru 0. Klademe-li konečně

$$E_1 + E_2 + \ldots + E_m + \ldots = E,$$

vidíme, že $\mathfrak{M} E = 0$. Avšak každé číslo α, pro něž nerovnost (62) je splněna jen pro konečný počet případů, musí patrně při dosti velkém m patřit do množiny E_m, a tedy i do množiny E. Tak je dokázáno první tvrzení věty.

Nechť nyní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)}$ konverguje. Nechť je J_n jeden z intervalů pořadí n a nechť je $J_{n+1}^{(k)}$ interval pořadí $n + 1$ obsažený v J_n a definovaný doplňující podmínkou $a_{n+1} = k$. Podle druhé z nerovností (57) máme

$$\mathfrak{M}J_{n+1}^{(k)} < \frac{2}{k^2}\mathfrak{M}J_n,$$

odkud

$$\mathfrak{M}\sum_{k \geqq \varphi n+1} J_{n+1}^{(k)} < 2\mathfrak{M}J_n \sum_{k \geqq \varphi(n+1)} \frac{1}{k^2} \leqq$$

$$\leqq 2\mathfrak{M}J_n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\varphi(n+1)+i)^2} <$$

$$< 2\mathfrak{M}J_n\left(\frac{1}{\varphi(n+1)} + \int_{\varphi(n+1)}^{\infty}\frac{du}{u^2}\right) = \frac{4\mathfrak{M}J_n}{\varphi(n+1)}.$$

Označíme-li F_n množinu čísel intervalu (0, 1), pro něž $a_n \geqq \varphi(n)$, a sčítáme-li získanou nerovnost dle všech intervalů J_n pořadí n, najdeme

$$\mathfrak{M}F_{n+1} < \frac{4}{\varphi(n+1)},$$

ježto $\sum\mathfrak{M}J_n = 1$. Míry množin $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ tvoří tudíž konvergentní řadu. Označíme-li F množinu takových čísel intervalu (0, 1), která patří do nekonečného počtu množin F_m, budeme mít[10])

$$\mathfrak{M}F = 0.$$

Avšak množina F je patrně právě množinou čísel, pro něž nerovnost (62) je splněna v nekonečně mnoha případech. Tak je dokázáno i druhé tvrzení věty.

§ 14. Metrický odhad vzrůstu jmenovatelů sblížených zlomků. Hlavní věta metrické theorie aproximace

Věta 31. *Existuje taková kladná absolutní konstanta B, že skoro všude platí pro dostatečně velká n*

$$q_n = q_n(\alpha) < e^{Bn}.$$

Předběžná poznámka. V paragrafu 4, kap. I (věta 12) jsme viděli, že jmenovatelé q_n pro *všechna* čísla α vzrůstají, roste-li n, a to ne pomaleji než členy nějaké geometrické posloupnosti s absolutně stálým podílem. Věta 31 ukazuje, že pro *skoro všechna* α jme-

---

[10]) Je to známé tvrzení metrické theorie množin. Zde však je *důkaz*: je zřejmé, že množina F pro libovolné m je obsažena v množině $\sum\limits_{n=m}^{\infty} F_n$, jejíž míra nepřevyšuje $\sum\limits_{n=m}^{\infty} \mathfrak{M}F_n$, a tudíž při dosti velkém m se může učinit libovolně malou.

novatelé q_n rostou ne rychleji než členy nějaké geometrické posloupnosti rovněž s absolutně stálým podílem.

Tento stav věcí možno vyjádřit také takto: existují takové dvě absolutní konstanty a, A ($1 < a < A$), že pro skoro všechna čísla α z intervalu $(0, 1)$ při dostatečně velkém n platí

$$a < \sqrt[n]{q_n} < A.$$

Skutečně platí značně silnější tvrzení: existuje taková absolutní konstanta γ, že platí skoro všude

$$\sqrt[n]{q_n} \to \gamma \quad (n \to \infty).$$

Avšak důkaz této věty je značně složitější a vyžaduje k provedení těch hlubších pomocných prostředků, se kterými se seznámíme v paragrafech 15 a 16. Bohužel, rámec této knihy nedovoluje v ní umístit tento důkaz. Avšak pro náš bližší hlavní cíl — větu 32 — je vlastnost čísel q_n, o níž mluví věta 31, zcela dostačující.

Důkaz. Označme $E_n(g)$ ($n > 0, g \geqq 1$) množinu čísel intervalu $(0, 1)$, pro něž

$$a_1 a_2 \dots a_n \geqq g.$$

Je patrné, že tato množina představuje soustavu intervalů pořadí n; délka libovolného z těchto intervalů je rovna, jak víme z paragrafu 12,

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n^2} < \frac{1}{(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1)^2},$$

ježto po sobě jdoucí užití samozřejmé nerovnosti

$$q_n > a_n q_{n-1}$$

dává

$$q_n > a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1.$$

Tudíž

$$\mathfrak{M} E_n(g) < \sum_{a_1 a_2 \dots a_n \geqq g} \frac{1}{a_n^2 a_{n-1}^2 \dots a_2^2 a_1^2}, \tag{64}$$

kde se sčítání vztahuje na všechny kombinace přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$, jež vyhovují nerovnosti $a_1 a_2 \dots a_n \geqq g$. Abychom odhadli tento součet, poznamenejme, že

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \frac{1}{a_i(a_i + 1)} \leqq 2^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(a_i + 1)} =$$

$$= 2^n \prod_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{a_i+1} \frac{dx_i}{x_i^2} = 2^n \int_{a_1}^{a_1+1} \int_{a_2}^{a_2+1} \dots \int_{a_n}^{a_n+1} \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2},$$

a tudíž

$$\sum_{a_1 a_2 \ldots a_n \geqq g} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} \right\} \leqq 2^n J_n(g),$$

kde $J_n(g)$ je n-násobný integrál

$$\int\int \ldots \int \frac{\mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n}{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2},$$

vztahující se na obor

$$x_i \geqq 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_1 x_2 \ldots x_n \geqq g.$$

Při $g \leqq 1$ přejde tento obor patrně v obor $1 \leqq x_i < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a dostaneme

$$J_n(g) = \left(\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \right)^n = 1 \ (g \leqq 1). \tag{65}$$

Dokážeme nyní, že pro $g > 1$ platí

$$J_n(g) = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\log g)^i}{i!}; \tag{66}$$

skutečně pro $n = 1$ tato rovnice nabývá tvaru

$$\int_g^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{g},$$

t. j. je správná. Připustíme-li, že tato rovnice platí pro $n = k$, dostaneme

$$J_{k+1}(g) = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x_{k+1}}{x_{k+1}^2} J_k\left(\frac{g}{x_{k+1}}\right) = \frac{1}{g} \int_0^g J_k(u)\, \mathrm{d}u = \frac{1}{g} \left\{ \int_0^1 J_k(u)\, \mathrm{d}u + \int_1^g J_k(u)\, \mathrm{d}u \right\}.$$

Vyjádříme-li v prvním integrálu $J_k(u)$ dle vzorce (65) a ve druhém dle vzorce (66), o němž jsme pro $n = k$, $g \geqq 1$ učinili předpoklad, že je dokázán, dostáváme

$$J_{k+1}(g) = \frac{1}{g} \left\{ 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\log g)^{i+1}}{(i+1)!} \right\} = \frac{1}{g} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\log g)^i}{i!},$$

což jsme chtěli dokázat. Je tudíž

$$\mathfrak{M}\, E_n(g) < \frac{2^n}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\log g)^i}{i!}.$$

Zvláště klademe-li $g = e^{An}$, kde $A > 1$ je konstanta, dostaneme

$$\mathfrak{M}\, E_n(e^{An}) < e^{n(\log 2 - A)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(An)^i}{i!}.$$

V součtu, který dostaneme, je — jak lze snadno nahlédnout — každý člen menší než

$$\frac{(An)^n}{n!}.$$

Užijeme-li proto k odhadu faktoriálů Stirlingova vzorce a označíme-li v dalším C_1, C_2 kladné absolutní konstanty, dostaneme

$$\mathfrak{M}E_n(e^{An}) < e^{n(\log 2 - A)}\, n\, \frac{(An)^n}{n!} < C_1 e^{n(\log 2 - A)} \frac{n(An)^n}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} < C_2\sqrt{n}e^{-n(A - \log A - \log 2 - 1)}.$$

Je-li však A dostatečně velké, platí

$$A - \log A - \log 2 - 1 > 1,$$

takže $\mathfrak{M}E_n(e^{An})$ je menší než n-tý člen konvergentní řady. Ježto je tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_n(e^{An})$$

konvergentní, leží každé číslo intervalu (0, 1) s vyloučením množiny nulové míry nanejvýš v konečném počtu množin $E_n(e^{An})$. To však značí, že pro skoro všechna čísla intervalu (0, 1) máme nutně pro dostatečně velká n

$$a_1 a_2 \ldots a_n < e^{An}.$$

Ježto však

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} < 2a_n q_{n-1},$$

a tudíž

$$q_n < 2^n a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1,$$

je skoro všude při dostatečně velkém n

$$q_n < 2^n e^{An} = e^{Bn},$$

kde klademe $B = A + \log 2$. Tím je věta 31 dokázána.

Získaný výsledek, který je i sám o sobě značně zajímavý, je obzvláště důležitý v daném okamžiku, ježto dovoluje podat jednoduché řešení základní úlohy metrické theorie aproximací vytčené již v předcházejícím paragrafu.

Věta 32. *Nechť je $f(x)$ kladná spojitá funkce kladného argumentu x, při čemž je $xf(x)$ funkce nerostoucí. Pak má nerovnost*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{f(q)}{q} \tag{67}$$

pro skoro všechna α nekonečně mnoho řešení v celých číslech p a q ($q > 0$), je-li integrál

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \tag{68}$$

divergentní; naproti tomu má nerovnost (67) *pro skoro všechna α jen konečný počet řešení celými p a q ($q > 0$), je-li integrál* (68) *konvergentní.*

Předběžná poznámka. Zvláště na základě věty 32 má na př. nerovnost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \log q}$$

skoro všude nekonečně mnoho řešení, naproti tomu má nerovnost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2 \log^{1+\varepsilon} q}$$

pro každé kladné $\varepsilon > 0$ skoro všude jen konečný počet řešení. Po těchto příkladech si můžeme udělat představu o tom, pokud se změní obecný zákon přiblížení, zanedbáme-li množinu míry nulové.

Důkaz. 1. Nechť integrál (68) diverguje. Položíme

$$\varphi(x) = e^{Bx} f(e^{Bx}),$$

kde B je konstanta vyskytující se ve větě 31. Pak integrál

$$\int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{B} \int_{Ba}^{BA} f(u)\,\mathrm{d}u,$$

kde $A > a > 0$, roste nade všechny meze při $A \to \infty$, ježto však funkce $\varphi(x)$ dle podmínky věty neroste, řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$$

diverguje. Dle věty 30 z toho soudíme, že nerovnost

$$a_{i+1} \geqq \frac{1}{\varphi(i)}$$

je skoro všude splněna pro nekonečně mnoho hodnot i. Je-li tato nerovnost splněna, máme

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \leqq \frac{1}{q_i q_{i+1}} \leqq \frac{1}{a_{i+1} q_i^2} \leqq \frac{\varphi(i)}{q_i^2}. \tag{69}$$

Dle věty 31 máme skoro všude pro dosti velká i

$$q_i < e^{Bi},$$

odkud

$$i > \frac{\log q_i}{B}.$$

Nerovnost (69) tedy skoro všude při dostatečně velkém i vede k nerovnosti

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| \leqq \frac{\varphi\left(\frac{\log q_i}{B}\right)}{q_i^2} = \frac{f(q_i)}{q_i}.$$

Tato poslední nerovnost je splněna tudíž skoro všude pro nekonečně mnoho hodnot i, čímž je dokázáno první tvrzení věty.

2. Připustíme nyní, že integrál (68) a tudíž i řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(n)$$

konverguje. Označíme E_n množinu čísel α v intervalu (0, 1), která při vhodně zvoleném celém k hoví nerovnosti

$$\left|\alpha - \frac{k}{n}\right| < \frac{f(n)}{n}$$

[množina E_n je sjednocením intervalů délky $\frac{2f(n)}{n}$ majících středy v bodech $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$, intervalů $\left(0, \frac{f(n)}{n}\right)$ a $\left(1 - \frac{f(n)}{n}, 1\right)$]. Máme

$$\mathfrak{M}E_n \leqq 2f(n)$$

(znak $<$ platí v případě $f(n) > \frac{1}{2}$). Tudíž je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_n$$

konvergentní. Z toho soudíme, jako již vícekrát, že skoro každé číslo intervalu (0, 1) může patřit nanejvýš do konečného počtu množin E_n, a to patrně značí, že skoro všechna čísla α úsečky (0, 1) při dostatečně velkém celém kladném q a libovolném celém p hoví nerovnosti

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqq \frac{f(q)}{q},$$

čímž je dokázáno i druhé tvrzení věty.

V příštím paragrafu se seznámíme s methodou, která dovoluje řešit značně hlubší úlohy metrické theorie řetězců.

§ 15. Gaussův problém a Kuzminova věta

V tomto paragrafu si všimneme problému, který byl historicky první úlohou metrické theorie řetězců. Tato úloha, položená již Gaussem, byla rozřešena až v roce 1928.

Položíme-li, jako obyčejně,

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots],$$

$$r_n = r_n(\alpha) = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots],$$

pak $z_n = z_n(\alpha)$ nechť značí hodnotu řetězce

$$[0; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots],$$

to znamená

$$z_n = r_n - a_n.$$

Z toho plyne, že vždy

$$0 \leqq z_n < 1.$$

Označíme $m_n(x)$ míru množiny čísel α z intervalu (0, 1), pro něž

$$z_n(\alpha) < x.$$

V jednom ze svých dopisů Laplaceovi tvrdil Gauss, že se mu podařil důkaz věty, dle níž

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} \quad (0 \leqq x < 1);$$

tamtéž poukázal na to, že by bylo žádoucí podat odhad řádu malosti rozdílu

$$m_n(x) - \frac{\log(1+x)}{\log 2} \tag{70}$$

při velkých hodnotách n, což se mu, dle jeho slov, zcela nezdařilo. Gaussův důkaz, jak se zdá, nikde nebyl uveřejněn. Jiná řešení tohoto problém rovněž nebyla známa až do roku 1928, kdy vyšel důkaz Gaussova tvrzení nalezený R. O. Kuzminem; zároveň našel R. O. Kuzmin i velmi dobrý odhad pro rozdíl (70). Úlohou tohoto paragrafu je vyložit tyto výsledky R. O. Kuzmina, jakož i některá jejich zevšeobecnění nutná pro další.[11])

Již Gaussovi bylo známo, že posloupnost funkcí

$$m_0(x), m_1(x), m_2(x), \ldots, m_n(x), \ldots$$

vyhovuje funkční rovnici

$$m_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \right\} \quad (0 \leqq x \leqq 1,\ n \geqq 0). \tag{71}$$

Podle zřejmého vztahu

$$z_n = \frac{1}{a_{n+1} + z_{n+1}}$$

je totiž splněna nerovnost $z_{n+1} < x$ v tom a jenom v tom případě, jsou-li při vhodně zvoleném celém kladném k splněny nerovnosti

$$\frac{1}{k+x} < z_n \leqq \frac{1}{k}.$$

Protože pak míra množiny těch čísel, která splňují onu nerovnost, je patrně

$$m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right),$$

[11]) R. O. Kuzmin, podobně jako Gauss, formuluje získané výsledky v pojmech theorie pravděpodobnosti, což ovšem nemění jejich metrický obsah.

plyne odtud vztah (71).

Lze si snadno ihned ověřit, že funkce

$$\varphi(x) = C \log(1 + x)$$

vyhovuje při libovolném konstantním C vztahu

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi\left(\frac{1}{k+x}\right) \right\},$$

což pravděpodobně posloužilo také Gaussovi jako pokyn k správnému vyjádření limity funkcí $m_n(x)$ při $n \to \infty$.

Formální derivování vzorce (71) dává

$$m'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} m'_n\left(\frac{1}{k+x}\right). \tag{72}$$

Snadno se přesvědčíme, že vztah (72) je skutečně splněn. Ježto totiž patrně $z_0(\alpha) = \alpha$, je $m_0(x) = x$ a tudíž $m'_0(x) = 1$. Je-li však obecně při libovolném n funkce $m'_n(x)$ omezená a spojitá, je řada na pravé straně vztahu (72) stejnoměrně konvergentní v intervalu (0, 1). Součet této řady je tudíž také omezený a spojitý a roven $m'_{n+1}(x)$ dle známé věty o derivování řad po členech. Tak se vztah (72) dokáže pomocí indukce.

Rovnice (72) je značně vhodnější pro úvahy než rovnice (71). Na ni se vztahuje hlavní výsledek R. O. Kuzmina, k jehož důkazu nyní přistoupíme.

Věta 33. *Nechť je*

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

posloupnost reálných funkcí definovaných v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, *které v něm vyhovují vztahu*

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} f_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \quad (n \geqq 0). \tag{73}$$

Je-li pro $0 \leqq x \leqq 1$

$$0 < f_0(x) < M \quad a \quad |f'_0(x)| < \mu,$$

pak

$$f_n(x) = \frac{a}{1+x} + \vartheta A e^{-\lambda\sqrt{n}} \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

kde

$$a = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 f_0(z)\, dz, \quad |\vartheta| < 1,$$

λ *je absolutní kladná konstanta a* A *kladná konstanta závislá jen na* M *a* μ.

Vzhledem ke složitosti důkazu předešleme několik elementárních pomocných vět.

Pomocná věta 1. *Pro libovolné* $n \geqq 0$

$$f_n(x) = \sum^{(n)} f_0\left(\frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}\right) \frac{1}{(q_n + x q_{n-1})^2}, \tag{74}$$

kde $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right)$ *je libovolný interval pořadí n a kde se sčítání provádí přes všechny intervaly pořadí n (neboli, což je totéž, přes prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n$ v mezích od 1 do ∞).*

Důkaz. Pro $n = 0$ je vztah (74) triviální, ježto v tomto případě je jediný interval $(0, 1)$, při čemž $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$. Předpokládáme-li však, že vztah (74) platí pro nějaké n, dostaneme dle základní rovnice (73)

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} f_n\left(\frac{1}{k+x}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \sum^{(n)} f_0 \left(\frac{p_n + \frac{1}{k+x} p_{n-1}}{q_n + \frac{1}{k+x} q_{n-1}}\right) \frac{1}{\left(q_n + \frac{1}{k+x} q_{n-1}\right)^2} =$$

$$= \sum^{(n)} \sum_{k=1}^{\infty} f_0 \left(\frac{(p_n k + p_{n-1}) + x p_n}{(q_n k + q_{n-1}) + x q_n}\right) \frac{1}{\{(q_n k + q_{n-1}) + x q_n\}^2} =$$

$$= \sum^{(n+1)} f_0 \left(\frac{p_{n+1} + x p_n}{q_{n+1} + x q_n}\right) \frac{1}{(q_{n+1} + x q_n)^2},$$

což jsme chtěli dokázat.

Pomocná věta 2. *Za podmínek věty* (33) *platí pro* $n \geqq 0$

$$|f'_n(x)| < \frac{\mu}{2^{n-3}} + 4M.$$

Důkaz. Derivujeme-li po členech vztah (74), dostaneme

$$f'_n(x) = \sum^{(n)} f'_0(u) \frac{(-1)^{n-1}}{(q_n + x q_{n-1})^4} - 2 \sum^{(n)} f_0(u) \frac{q_{n-1}}{(q_n + x q_{n-1})^3},$$

kde je položeno

$$u = \frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}$$

a oprávněnost derivování po členech plyne ze stejnoměrné konvergence obou součtů na pravé straně pro $0 \leqq x \leqq 1$. Poznamenáme-li, že

$$\frac{1}{(q_n + x q_{n-1})^2} < \frac{2}{q_n(q_n + q_{n-1})}$$

a že dle věty 12, kap. I

$$q_n(q_n + q_{n-1}) > q_n^2 > 2^{n-1},$$

přihlížíme-li pak ke zřejmému vztahu

$$\sum^{(n)} \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} = \sum^{(n)} \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = 1,$$

dostaneme na základě podmínek věty (33)

$$|f_n'(x)| < \frac{\mu}{2^{n-3}} + 4M,$$

což jsme chtěli dokázat.

Pomocná věta 3. *Je-li*

$$\frac{t}{1+x} < f_n(x) < \frac{T}{1+x} \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

je i

$$\frac{t}{1+x} < f_{n+1}(x) < \frac{T}{1+x} \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Důkaz. Za podmínek pomocné věty dává základní vztah (73)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t}{1+\dfrac{1}{k+x}} \frac{1}{(k+x)^2} < f_{n+1}(x) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T}{1+\dfrac{1}{k+x}} \frac{1}{(k+x)^2},$$

neboli

$$t\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)} < f_{n+1}(x) < T\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+1)},$$

neboli, což je však totéž,

$$t\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right) < f_{n+1}(x) < T\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1}\right),$$

neboli konečně

$$\frac{t}{1+x} < f_{n+1}(x) < \frac{T}{1+x},$$

což jsme chtěli dokázat.

Pomocná věta 4.

$$\int_0^1 f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 f_0(z)\,\mathrm{d}z \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Důkaz. Dle základního vztahu (73) pro $n > 0$

$$\int_0^1 f_n(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_{n-1}\left(\frac{1}{k+z}\right) \frac{\mathrm{d}z}{(k+z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u,$$

odkud plyne úplnou indukcí tvrzení pomocné věty 4.

Důkaz věty 33. Funkce $f_0(x)$ je dle předpokladu schopná derivace, a tudíž i spojitá pro $0 \leqq x \leqq 1$. Ježto dle předpokladu je kladná v onom intervalu, má v něm i kladné minimum, které označíme m. Z podmínek $m \leqq f_0(x) < M (0 \leqq x \leqq 1)$ plyne patrně

$$\frac{m}{2(1+x)} < f_0(x) < \frac{2M}{1+x} \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

neboli

$$\frac{g}{1+x} < f_0(x) < \frac{G}{1+x} \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

kde je položeno

$$g = \tfrac{1}{2}m, \; G = 2M.$$

Položíme nyní

$$f_n(x) - \frac{g}{1+x} = \varphi_n(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1, \; n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dle pomocné věty 3 funkce $F(x) = \dfrac{g}{1+x}$ vyhovuje rovnici

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{k+x}\right) \frac{1}{(k+x)^2}$$

(což se snadno ověří také bezprostředně). Odtud patrně plyne, že posloupnost funkcí

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

vyhovuje rovnici (73), a tudíž pro ni platí i všechny důsledky odvozené z oné rovnice, zvláště vztah (74). Položíme-li tudíž jako dříve pro krátkost

$$u = \frac{p_n + xp_{n-1}}{q_n + xq_{n-1}},$$

dostaneme

$$\varphi_n(x) = \overset{(n)}{\Sigma} \varphi_0(u) \frac{1}{(q_n + xq_{n-1})^2},$$

odkud podle zřejmých nerovností

$$q_n + xq_{n-1} \leqq q_n + q_{n-1} < 2q_n \quad \text{a} \quad \varphi_0(u) > 0$$

najdeme

$$\varphi_n(x) > \tfrac{1}{2} \overset{(n)}{\Sigma} \varphi_0(u) \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}. \tag{75}$$

Na druhé straně nám poskytuje věta o střední hodnotě

$$\tfrac{1}{2} \int_0^1 \varphi_0(z) \, dz = \tfrac{1}{2} \overset{(n)}{\Sigma} \varphi_0(u') \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}, \tag{76}$$

kde u' je jeden z bodů intervalu $\left(\dfrac{p_n}{q_n}, \dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right)$ a $\dfrac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}$ je délka tohoto intervalu. Vztahy (75) a (76) nám dávají

$$\varphi_n(x) - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)\,dz > \tfrac{1}{2}\sum^{(n)}((\varphi_0(u) - \varphi_0(u'))\frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}. \tag{77}$$

Ježto však patrně

$$|\varphi_0(x)| \leqq |f_0'(x)| + g < \mu + g \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

je i

$$|\varphi_0(u) - \varphi_0(u')| < (\mu + g)|u - u'| < \frac{\mu + g}{q_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{\mu + g}{q_n^2} < \frac{\mu + g}{2^{n-1}},$$

a proto nám nerovnost (77) dává

$$\varphi_n(x) > \tfrac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)\,dz - \frac{\mu + g}{2^n} = l - \frac{\mu + g}{2^n},$$

kde je položeno

$$l = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)\,dz.$$

Dostaneme tak:

$$f_n(x) > \frac{g}{1 + x} + l - \frac{\mu + g}{2^n} > \frac{g + l - 2^{-n+1}(\mu + g)}{1 + x} = \frac{g_1}{1 + x}.$$

Zcela stejně, všimneme-li si posloupnosti funkcí

$$\psi_n(x) = \frac{G}{1 + x} - f_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

a provedeme-li analogické úsudky, přijdeme k nerovnosti

$$f_n(x) < \frac{G - l' + 2^{-n+1}(\mu + G)}{1 + x} = \frac{G_1}{1 + x},$$

kde klademe

$$l' = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \psi_0(z)\,dz.$$

Ježto $l > 0$ a $l' > 0$, je při dostatečně velkém n

$$g < g_1 < G_1 < G$$

a

$$G_1 - g_1 < G - g - (l + l') + 2^{-n+2}(\mu + G).$$

Ježto však

$$l + l' = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{G - g}{1 + z}\,dz = (G - g)\frac{\log 2}{2},$$

platí

$$G_1 - g_1 < (G - g)\,\delta + 2^{-n+2}(\mu + G),$$

kde

$$\delta = 1 - \frac{\log 2}{2} < 1$$

je kladná absolutní konstanta.

Shrňme výsledek, který jsme získali. *Z podmínek*

$$\frac{g}{1+x} < f_0(x) < \frac{G}{1+x}, \; |f_0'(x)| < \mu$$

dostaneme, že při dostatečně velkém n platí

$$\frac{g_1}{1+x} < f_n(x) < \frac{G_1}{1+x},$$

kde

$$g < g_1 < G_1 < G, \; G_1 - g_1 < (G - g)\,\delta + 2^{-n+2}(\mu + G).$$

Zvolíme-li nyní jako výchozí funkci $f_n(x)$ místo $f_0(x)$ a opakujeme provedený postup úsudků, přijdeme zřejmě ke vztahu

$$\frac{g_2}{1+x} < f_{2n}(x) < \frac{G_2}{1+x},$$

při čemž

$$g_1 < g_2 < G_2 < G_1,$$
$$G_2 - g_2 < \delta(G_1 - g_1) + 2^{-n+2}(\mu_1 + G_1),$$

kde μ_1 je kladné číslo, pro něž

$$|f_n'(x)| < \mu_1 \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Pokračujíce v tomto postupu, dojdeme obecně ke vztahu

$$\frac{g_r}{1+x} < f_{rn}(x) < \frac{G_r}{1+x} \quad (0 \leqq x \leqq 1;\; r = 0, 1, 2, \ldots),$$

při čemž pro $r > 0$

$$g_{r-1} < g_r < G_r < G_{r-1},$$
$$G_r - g_r < \delta(G_{r-1} - g_{r-1}) + 2^{-n+2}(\mu_{r-1} + G_{r-1}), \tag{78}$$

kde μ_{r-1} je kladné číslo, pro něž

$$|f'_{(r-1)n}(x)| < \mu_{r-1} \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Podle pomocné věty 2 můžeme položit

$$\mu_r = \frac{\mu}{2^{rn-3}} + 4M \quad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

a tudíž, bylo-li zvoleno n dostatečně velké,

$$\mu_r < 5M \quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Postupné užití nerovnosti (78) pro $r = 1, 2, \ldots, n$ nám tedy dává

$$G_n - g_n < (G - g)\,\delta^n + 2^{-n+2}\{(\mu + 2M)\,\delta^{n-1} + \\ + 7M\delta^{n-2} + 7M\delta^{n-3} + \ldots + 7M\delta + 7M\}.$$

Ježto $\delta < 1$ je absolutní konstanta, plyne odtud patrně

$$G_n - g_n < Be^{-\lambda n},$$

kde $\lambda > 0$ je absolutní konstanta, $B > 0$ však závisí jen na M a μ.

Odtud plyne především, že existuje obecně limita

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} g_n = a$$

a že

$$\left| f_{n^2}(x) - \frac{a}{1+x} \right| < Be^{-\lambda n} \quad (0 \leqq x \leqq 1), \tag{79}$$

odkud zejména

$$\int_0^1 f_{n^2}(z)\,\mathrm{d}z \to a \log 2 \quad (n \to \infty),$$

a tudíž dle pomocné věty 4

$$a = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 f_0(z)\,\mathrm{d}z.$$

Nechť je konečně $n^2 \leqq N < (n+1)^2$. Protože podle nerovnosti (79) platí

$$\frac{a - 2Be^{-\lambda n}}{1+x} < f_{n^2}(x) < \frac{a + 2Be^{-\lambda n}}{1+x},$$

je na základě pomocné věty 3

$$\frac{a - 2Be^{-\lambda n}}{1+x} < f_N(x) < \frac{a + 2Be^{-\lambda n}}{1+x},$$

neboli

$$\left| f_N(x) - \frac{a}{1+x} \right| < 2Be^{-\lambda n} = Ae^{-\lambda(n+1)} < Ae^{-\lambda\sqrt{N}},$$

kde je položeno $A = 2Be^{\lambda}$. Tuto nerovnost, stanovenou pro dostatečně velká N, je zřejmě možno patřičným zvětšením konstanty A učinit platnou pro všechna $N \geqq 0$, čímž je dokázána věta 33 úplně.

Vrátíme-li se nyní ke Gaussovu problému a položíme-li

$$f_n(x) = m_n'(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

máme $f_0(x) \equiv 1$, čímž jsou všechny podmínky věty 33 splněny. Tak dostaneme

$$\left| m_n'(x) - \frac{1}{(1+x)\log 2} \right| < Ae^{-\lambda\sqrt{n}} \quad (0 \leqq x \leqq 1), \tag{80}$$

odkud najdeme integrováním

$$\left| m_n(x) - \frac{\log(1+x)}{\log 2} \right| < Ae^{-\lambda\sqrt{n}} \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

kde A a λ jsou kladné absolutní konstanty. Tak je patrně nejen dokázáno Gaussovo tvrzení, nýbrž je nalezen i dobrý odhad zbytkového členu.

Užijeme nyní tohoto výsledku k odhadu míry množiny bodů, pro něž $a_n = k$, pro velké hodnoty n. Ježto patrně podmínka $a_n = k$ je ekvivalentní s nerovnostmi

$$\frac{1}{k+1} < z_{n-1} \leqq \frac{1}{k},$$

platí

$$\mathfrak{M}E\binom{n}{k} = m_{n-1}\left(\frac{1}{k}\right) - m_{n-1}\left(\frac{1}{k+1}\right) = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} m'_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x,$$

odkud podle nerovnosti (80)

$$\left| \mathfrak{M}E\binom{n}{k} - \frac{\log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)}{\log 2} \right| < \frac{A}{k(k+1)}\, e^{-\lambda\sqrt{n-1}}. \tag{81}$$

Odtud dostáváme nyní speciálně pro veličinu $\mathfrak{M}E\binom{n}{k}$, pro niž jsme stanovili v paragrafu 13 jen dosti hrubé nerovnosti, přesný limitní vztah

$$\mathfrak{M}E\binom{n}{k} \to \frac{\log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)}{\log 2} \quad (n \to \infty).$$

Tak na př. míra množiny bodů, pro něž $a_n = 1$, konverguje při $n \to \infty$ k číslu

$$\frac{\log 4 - \log 3}{\log 2}.$$

Avšak věta 33 umožňuje zároveň s důkazem Gaussova tvrzení dostat i obecnější velmi důležitý výsledek. A ten se budeme snažit v dalším odvodit. Označme $M_n(x)$ míru množiny čísel, která jsou z nějakého daného intervalu pořadí k a vyhovují nadto podmínce $z_{k+n} < x$; jinak řečeno, $M_n(x)$ je míra množiny čísel z intervalu (0, 1), jež vyhovují podmínkám

$$a_1 = r_1,\ a_2 = r_2, \ldots, a_k = r_k;\ z_{k+n} < x, \tag{82}$$

kde $r_1, r_2, \ldots, r_k$ jsou daná přirozená čísla, kdežto $n \geqq 0$ a x $(0 \leqq x \leqq 1)$ se mohou libovolně měnit.

Aby byly splněny podmínky (82), je patrně nutné a postačující, aby byly splněny podmínky

$$a_1 = r_1,\ a_2 = r_2, \ldots, a_k = r_k;\ \frac{1}{r+x} < z_{k+n-1} \leqq \frac{1}{r},$$

kde r je nějaké přirozené číslo. Odtud plyne

$$M_n(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[M_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right) - M_{n-1}\left(\frac{1}{r+x}\right) \right] \quad (n \geqq 1,\ 0 \leqq x \leqq 1);$$

podle toho posloupnost funkcí

$$M_0'(x),\ M_1'(x),\ \ldots,\ M_n'(x),\ \ldots$$

vyhovuje rovnici (73).

Libovolné číslo α z intervalu $\left(\frac{p_k}{q_k}, \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}\right)$ lze znázornit ve tvaru

$$\alpha = \frac{p_k r_{k+1} + p_{k-1}}{q_k r_{k+1} + q_{k-1}},$$

neboli, ježto

$$z_k = \frac{1}{r_{k+1}},$$

$$\alpha = \frac{p_k + z_k p_{k-1}}{q_k + z_k q_{k-1}}.$$

Pro $z_k < x$ musí číslo α ležet mezi $\frac{p_k}{q_k}$ a $\frac{p_k + x p_{k-1}}{q_k + x q_{k-1}}$, odkud

$$M_0(x) = \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + x p_{k-1}}{q_k + x q_{k-1}} \right| = \frac{x}{q_k(q_k + x q_{k-1})}. \tag{83}$$

Položíme-li nyní

$$M_n(x) = \mathfrak{M}\, E \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & k \\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k \end{pmatrix} \chi_n(x) \quad (n \geqq 0,\ 0 \leqq x \leqq 1),$$

dostaneme novou posloupnost funkcí

$$\chi_0(x),\ \chi_1(x),\ \chi_2(x),\ \ldots,\ \chi_n(x),\ \ldots;$$

přitom patrně funkce $\chi_n'(x)$, které se liší jen konstantním činitelem od příslušných funkcí $M_n'(x)$, rovněž vyhovují rovnici (73). Ježto patrně

$$\mathfrak{M} E \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & k \\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k \end{pmatrix} = \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}} \right| = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k-1})},$$

dává nám rovnice (83)

$$\chi_0(x) = \frac{(q_k + q_{k-1})\, x}{q_k + q_{k-1} x},$$

odkud

$$\chi_0'(x) = \frac{q_k(q_k + q_{k-1})}{(q_k + q_{k-1} x)^2}$$

a

$$\chi_0''(x) = -\frac{2 q_k q_{k-1}(q_k + q_{k-1})}{(q_k + q_{k-1} x)^3};$$

je tudíž

$$\tfrac{1}{2} < \chi_0'(x) < 2, \ |\chi_0''(x)| < 4 \ (0 \leqq x \leqq 1).$$

To ukazuje, že lze na posloupnost funkcí $\chi_n'(x)$ užít věty 33, při čemž čísla A a λ jsou absolutními konstantami, t. j. obzvláště nezávislými na $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Tak dostáváme

$$\chi_n'(x) = \frac{M_n'(x)}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k\end{pmatrix}} = \frac{1}{(1+x)\log 2} + \vartheta A e^{-\lambda\sqrt{n}}, \ |\vartheta| < 1.$$

Integrujeme-li však tento vztah v mezích od $\dfrac{1}{r+1}$ do $\dfrac{1}{r}$, kde r je libovolné přirozené číslo, dostaneme pro $|\vartheta'| < 1$:

$$\frac{M_n\left(\frac{1}{r}\right) - M_n\left(\frac{1}{r+1}\right)}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k\end{pmatrix}} = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} + \frac{\vartheta' A}{r(r+1)} e^{-\lambda\sqrt{n}};$$

ježto však patrně

$$M_n\left(\frac{1}{r}\right) - M_n\left(\frac{1}{r+1}\right) = \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k, & k+n+1\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k, & r\end{pmatrix},$$

je

$$\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k, & k+n+1\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k, & r\end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\log\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} + \frac{\vartheta' A e^{-\lambda\sqrt{n}}}{r(r+1)}\right) \mathfrak{W}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k\end{pmatrix}.$$

Konečně můžeme sečíst tento vztah dle některého (libovolného) z čísel $r_1, r_2, \ldots, r_k$ v mezích od 1 do ∞. Ve výsledku takového sčítání odpovídající indexy prostě odpadnou, na obou stranách vztahu, takže místo posloupnosti po sobě jdoucích indexů $1, 2, \ldots, k$ dostaneme posloupnost libovolných indexů $n_1, n_2, \ldots, n_t$, při čemž v ostatních svých rysech zůstane vztah nezměněn. Tak docházíme k tomuto tvrzení:

Věta 34. *Existují takové dvě kladné absolutní konstanty A a λ, že pro $n_1 < n_2 < \ldots < n_t < n_{t+1}$ a pro libovolná celá kladná $r_1, r_2, \ldots, r_t, r$ platí*

$$\left|\frac{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}n_1, & n_2, & \ldots, & n_t, & n_{t+1}\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_t, & r\end{pmatrix}}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}n_1, & n_2, & \ldots, & n_t\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_t\end{pmatrix}} - \frac{\log\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2}\right| < \frac{A}{r(r+1)} e^{-\lambda\sqrt{n_{t+1} - n_t - 1}}.$$

Tento výsledek ukazuje, že netoliko míra množiny čísel intervalu (0, 1), pro něž $a_n = r$, má pro $n \to \infty$ určitou limitu, nýbrž že k téže limitě konverguje také poměr

$$\frac{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}n_1, & n_2, & \ldots, & n_t, & n_{t+1}\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_t, & r\end{pmatrix}}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}n_1, & n_2, & \ldots, & n_t\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_t\end{pmatrix}}.$$

§ 16. Střední hodnoty

Výsledek předešlého paragrafu nám poskytuje možnost dokázat toto obecnější tvrzení.

Věta 35. *Nechť je $f(r)$ nezáporná funkce přirozeného argumentu r a nechť existují takové kladné konstanty C a δ, že*

$$f(r) < Cr^{1-\delta} \quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Pak pro všechna čísla z intervalu $(0, 1)$ — *s vyloučením nanejvýše množiny míry nulové — platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a_k) = \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2}. \tag{84}$$

Předběžná poznámka. Konvergence řady na pravé straně rovnice (84) vyplývá samozřejmě z podmínky uložené funkci $f(r)$.

Důkaz. Položme

$$\int_0^1 f(a_k)\, \mathrm{d}\alpha = u_k, \quad \int_0^1 (f(a_k) - u_k)^2\, \mathrm{d}\alpha = b_k,$$

$$\int_0^1 (f(a_i) - u_i)(f(a_k) - u_k)\, \mathrm{d}\alpha = g_{ik},$$

$$\sum_{k=1}^{n} (f(a_k) - u_k) = s_n = s_n(\alpha).$$

Existence všech napsaných integrálů plyne snadno z předpokládaných vlastností funkce $f(r)$. Ježto totiž platí

$$\{f(r)\}^2 < C^2 r^{1-2\delta},$$

má smysl

$$\int_0^1 \{f(a_k)\}^2\, \mathrm{d}\alpha = \sum_{r=1}^{\infty} \{f(r)\}^2 \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}k\\r\end{pmatrix} < 2C^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^{1-2\delta}}{r^2} = C_1,$$

odkud dle nerovnosti Bunjakovského-Schwarzovy snadno plyne existence i všech výše uvedených integrálů. Zejména odtud plyne, že

$$\left.\begin{aligned} b_k &= \int_0^1 \{f(a_k)\}^2\, \mathrm{d}\alpha - u_k < C_1, \\ u_k &= \int_0^1 f(a_k)\, \mathrm{d}\alpha < \sqrt{\int_0^1 \{f(a_k)\}^2\, \mathrm{d}\alpha} < \sqrt{C_1}. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Dále máme zřejmě při $k > i$:

$$g_{ik} = \int_0^1 f(a_i) f(a_k)\, d\alpha - u_i u_k = \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r) f(s)\, \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i, k \\ r, s \end{pmatrix} - u_i u_k. \tag{86}$$

Avšak dle věty 34 a závěrečných nerovností paragrafu 12

$$\left| \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i, k \\ r, s \end{pmatrix} - \frac{\log\left(1 + \frac{1}{s(s+2)}\right)}{\lg 2} \mathfrak{M}E\binom{i}{r} \right| <$$

$$< \frac{Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}}{s(s+1)} \mathfrak{M}E\binom{i}{r} < 3Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s}, \tag{87}$$

$$\left| \mathfrak{M}E\binom{k}{s} - \frac{\log\left(1 + \frac{1}{s(s+2)}\right)}{\log 2} \right| < \frac{Ae^{-\lambda\sqrt{k-1}}}{s(s+1)} < 3Ae^{-\lambda\sqrt{k-1}}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s}. \tag{88}$$

Násobíme-li však nerovnost (88) číslem $\mathfrak{M}E\binom{i}{r}$ a srovnáme výsledek s nerovností (87), najdeme

$$\left| \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i, k \\ r, s \end{pmatrix} - \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s} \right| < 6Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s}.$$

Podle toho dává nám vztah (86):

$$\left| g_{ik} - \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r) f(s)\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s} + u_i u_k \right| <$$

$$< 6Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r) f(s)\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s}.$$

Poznamenáme-li, že

$$\sum_{r,s=1}^{\infty} f(r) f(s)\, \mathfrak{M}E\binom{i}{r}\, \mathfrak{M}E\binom{k}{s} = u_i u_k$$

a užijeme-li druhé z nerovností (85) k odhadu pravé strany, dostaneme odtud

$$|g_{ik}| < 6Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} u_i u_k < 6AC_1 e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}. \tag{89}$$

Užijeme-li odhadů (85) a (89), najdeme pro $n > m > 0$:

$$\int_0^1 (s_n - s_m)^2\, d\alpha = \int_0^1 \{ \sum_{k=m+1}^{n} (f(a_k) - u_k) \}^2\, d\alpha =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} \int_0^1 \{f(a_k) - u_k\}^2\, d\alpha + 2\sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} \int_0^1 \{f(a_i) - u_i\}\{f(a_k)^2 - u_k\}\, d\alpha =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} b_k + 2\sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} g_{ik} <$$

$$< C_1(n-m) + 12AC_1 \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}} < C_2(n-m), \tag{90}$$

kde C_2 je nová kladná konstanta.

Označíme e_n množinu čísel intervalu $(0, 1)$, pro něž

$$|s_n| \geqq \varepsilon n,$$

kde ε je libovolně daná kladná konstanta. Patrně je

$$\int_0^1 s_n^2 \, d\alpha \geqq \int_{e_n} s_n^2 \, d\alpha \geqq \varepsilon^2 n^2 \mathfrak{M} e_n,$$

a podle toho nerovnost (90) dává (při $m = 0$)

$$\mathfrak{M} e_n \leqq \frac{\int_0^1 s_n^2 \, d\alpha}{\varepsilon^2 n^2} < \frac{C_2}{\varepsilon^2 n}.$$

Konverguje tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M} e_{n^2}$$

a tudíž, jak víme, skoro všechna čísla intervalu $(0, 1)$ patří nanejvýš do konečného počtu množin e_{n^2} $(n = 1, 2, \ldots)$. To znamená, že pro skoro všechna čísla intervalu $(0, 1)$ při dostatečně velkém n platí

$$\frac{s_{n^2}}{n^2} < \varepsilon.$$

Protože však ε lze voliti libovolně malé, je skoro všude

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n^2}}{n^2} = 0. \tag{91}$$

Dále pro $n^2 \leqq N < (n+1)^2$ vzorec (90) dává

$$\int_0^1 (s_N - s_{n^2}) \, d\alpha < C_2(N - n^2) < C_2(2n+1) \leqq 3C_2 n.$$

Označíme-li $e_{n^2,N}$ množinu čísel intervalu $(0, 1)$, pro něž $|s_N - s_{n^2}| \geqq \varepsilon n^2$, a klademe-li

$$\sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} e_{n^2,N} = E_n,$$

budeme pak mít pro $n^2 \leqq N < (n+1)^2$:

$$\int_0^1 (s_N - s_{n^2})^2 \, d\alpha \geqq \int_{e_{n,N}} (s_N - s_{n^2})^2 \, d\alpha > \varepsilon^2 n^4 \mathfrak{M} e_{n,N},$$

$$\mathfrak{M} e_{n,N} < \frac{3C_2}{\varepsilon^2 n^3},$$

$$\mathfrak{M}E_n \leqq \sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} \mathfrak{M}e_{n,N} < \frac{3C_2(2n+1)}{\varepsilon^2 n^3} \leqq \frac{9C_2}{\varepsilon^2 n^2};$$

proto $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_n$ konverguje. Skoro každé číslo intervalu (0, 1) patří tudíž, jak víme, nanejvýš do konečného počtu množin E_n, a tedy i nanejvýš do konečného počtu množin $e_{n,N}$. To však značí, že skoro všechna čísla intervalu (0, 1) vyhovují pro dosti velké n a pro $n^2 \leqq N < (n+1)^2$ vztahu

$$|s_N - s_{n^2}| < \varepsilon n^2.$$

Jinak řečeno, skoro všude pro dostatečně velké n a $n^2 \leqq N < (n+1)^2$ platí

$$\frac{|s_N - s_{n^2}|}{n^2} < \varepsilon;$$

a ježto ε je libovolně malé, je skoro všude

$$\frac{s_N}{n^2} - \frac{s_{n^2}}{n^2} \to 0 \ [n \to \infty,\ n^2 \leqq N < (n+1)^2].$$

Podle vztahu (91) plyne odtud patrně, že je skoro všude

$$\frac{s_N}{n^2} \to 0 \ [n \to \infty,\ n^2 \leqq N < (n+1)^2],$$

a tedy tím spíše

$$\frac{s_N}{N} \to 0 \ (N \to \infty).$$

Jinými slovy, je skoro všude

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k \to 0 \ (N \to \infty). \tag{92}$$

Avšak dle vzorce (81) předešlého paragrafu

$$\left| u_k - \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\log\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} \right| = \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \left| \mathfrak{M}E\binom{k}{r} - \frac{\log\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} \right| <$$

$$\leqq A e^{-\lambda\sqrt{k-1}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(r)}{r(r+1)} < A_1 e^{-\lambda\sqrt{k}},$$

kde A_1 je nová kladná konstanta. Proto

$$u_k \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\log\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} \ (k \to \infty),$$

a platí tedy také

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r) \frac{\log\left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} \ (N \to \infty).$$

Vzhledem k tomu vztah (92) nám dává

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k) \to \sum_{r=1}^{\infty} f(r)\frac{\log\left(1+\frac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2},$$

skoro všude v intervalu (0, 1), čímž je dokázána věta 35.

Dokázané tvrzení dovoluje stanovit celou řadu vlastností řetězců, platných pro skoro všechna iracionální čísla. Položme na příklad

$$f(r) = 1 \text{ pro } r = k \quad \text{a} \quad f(r) = 0 \text{ pro } r \neq k,$$

kde k je (libovolné) přirozené číslo. V tomto případě patrně součet

$$\psi_n(k) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

představuje číslo udávající, kolikrát se vyskytuje číslo k mezi n prvními prvky daného řetězce. Avšak vztah

$$\frac{\psi_n(k)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

nám dává jakoby *hustotu* čísla k mezi prvními n prvky daného řetězce; konečně limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_n(k)}{n} = d(k),$$

existuje-li, lze přirozeně vyložit jako *hustotu čísla k v celé posloupnosti prvků daného řetězce.*

Ježto námi definovaná funkce $f(r)$ vyhovuje patrně všem podmínkám věty 35, soudíme na základě této věty, že *pro libovolné k tato hustota skoro všude existuje a skoro všude má tutéž hodnotu.* Táž věta nadto dává možnost vypočíst tuto hustotu. Patrně je skoro všude

$$d(1) = \frac{\log 4 - \log 3}{\log 2},\quad d(2) = \frac{\log 9 - \log 8}{\log 2},\quad d(3) = \frac{\log 16 - \log 15}{\log 2},$$

atd. Libovolné přirozené číslo vyskytuje se tudíž v průměru stejně často jako prvek při rozvoji skoro všech čísel.

Další zajímavý výsledek dostaneme, klademe-li

$$f(r) = \log r \quad (r = 1, 2, 3, \ldots);$$

všechny podmínky věty 35 jsou při tom splněny; nacházíme tudíž, že skoro všude

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log a_i \to \sum_{r=1}^{\infty} \log r\,\frac{\log\left(1+\frac{1}{r(r+2)}\right)}{\log 2} \quad (n\to\infty),$$

neboli, což je totéž,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \to \prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{r(r+2)}\right)^{\frac{\log r}{\log 2}}.$$

Tudíž geometrický průměr prvních n prvků má skoro všude pro $n \to \infty$ za limitu absolutní konstantu

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)^{\frac{\log r}{\log 2}} = 2,6 \ldots$$

Je patrné, že věta 35 dovoluje stanovit analogické výsledky i pro celou řadu jiných středních hodnot. Pokud však jde o aritmetický průměr

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i, \tag{93}$$

nelze jej studovat touto methodou, protože příslušná funkce $f(r) = r$ nevyhovuje podmínkám věty 35. Lze však snadno nahlédnout z elementárnějších úvah, že není možno, aby výraz (93) měl skoro všude konečnou limitu. Podle věty 30 (§ 13) máme totiž skoro všude pro nekonečně mnoho hodnot

$$a_n > n \log n,$$

pak tím spíše

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > n \log n,$$

odkud

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i > \log n.$$

Je tedy veličina (93) skoro všude neomezená a tudíž, jak jsme tvrdili, nemůže mít konečnou limitu.

POZNÁMKY PŘEKLADATELOVY

§ 1. Schema pro výpočet sblížených zlomků (k § 2)

Při výpočtu sblížených zlomků ze vzorců (7) (§ 2) je výhodné užít schematu

k	-1	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$
a_k		a_0	a_1	a_2		a_k	
p_k	p_{-1}	p_0	p_1	p_2		$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$	
q_k	q_{-1}	q_0	q_1	q_2		$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$	

Příklad pro výpočet hodnoty řetězce [2; 3, 2, 1, 4, 2, 3]; dostaneme tak schema:

k	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_k		2	3	2	1	4	2	3
p_k	1	2	7	16	23	108	239	825
q_k	0	1	3	7	10	47	104	359

Zde na př. $239 = 2 \,.\, 108 + 23$, $104 = 2 \,.\, 47 + 10$.

$$[2; 3, 2, 1, 4, 2, 3] = \frac{825}{359}.$$

§ 2. Konvergence pravidelných řetězců (k § 4)

Snadno můžeme dokázat bez použití věty 10 (§ 3), že každý nekonečný pravidelný řetězec (definici viz v Překladatelově předmluvě) konverguje. Dle § 4 posloupnost $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots$ je stále rostoucí. Ježto jsou to celá kladná čísla, roste q_k do nekonečna s k. Z věty 4 (§ 2) plyne, že posloupnost sblížených zlomků sudého (lichého) řádu, která je rostoucí (klesající) a omezená shora (zdola), má limitu. Ze vzorce 9 (§ 2) pak plyne rovnost obou těchto limit, ježto $q_k q_{k-1} \to \infty$ (pro $k \to \infty$), tedy $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}} = 0$.

§ 3. Neúplné dělení. Celá část reálného čísla

Libovolné celé číslo a je buď násobkem celého kladného čísla b, nebo padne mezi dva po sobě jdoucí násobky qb a $(q + 1)\,b$. Lze tedy psát

$$a = qb + r, \tag{1}$$

kde r je jedno z čísel

$$0, 1, 2, \ldots, b - 1. \tag{2}$$

V tomto vyjádření se nazývá q *(neúplným) podílem a r nejmenším nezáporným zbytkem.*

Poznamenejme, že jsou-li čísla a a b ($b > 0$) ve vzorci (1) dána, jsou čísla q a r stanovena jednoznačně, takže každé celé číslo a lze psát jediným způsobem ve tvaru $qb + r$, kde r je jedno z čísel (2).

Příklady. Při „neúplném dělení" čísla 321 číslem 74 dostáváme $321 = 4 \cdot 74 + 25$ a při „neúplném dělení" čísla -46 číslem 17 dostáváme $-46 = -3 \cdot 17 + 5$.

Dělíme-li na obou stranách ve vzorci (1) číslem b, vidíme, že jej lze psát též ve tvaru

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b},$$

kde q, neúplný podíl, je největší celé číslo $\leqq \dfrac{a}{b}$ a $\dfrac{r}{b}$ je buď 0, neb kladné číslo < 1. Částečné podíly q se často vyskytují v číselné theorii a bylo pro ně zavedeno označení

$$g = \left[\frac{a}{b}\right].$$

$\left[\dfrac{a}{b}\right]$ se nazývá *celou částí* zlomku.

Samozřejmě $[n] = n$ pro celé n.

Příklady. $\left[\dfrac{5}{3}\right] = 1, \left[\dfrac{1}{3}\right] = 0, \left[-\dfrac{1}{3}\right] = -1.$

Rozšíříme nyní pojem celé části na reálná čísla. Při reálném α je $[\alpha]$, *celá část* α, největší celé číslo $\leqq \alpha$, tedy celé číslo g, pro něž $g \leqq \alpha < g + 1$. Pro rozdíl $\alpha - [\alpha]$ je tedy $0 \leqq \alpha - [\alpha] < 1$.

Příklady. $[\sqrt{2}] = 1$, $[e] = 2$, $[\pi] = 3$.

Pro $[\alpha]$ platí: $[\alpha + n] = [\alpha] + n$, je-li n celé.

$\left[\dfrac{\alpha}{k}\right] = \left[\dfrac{[\alpha]}{k}\right]$ pro celé kladné k.[1])

Příklad 1. $\left[\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right] = \left[\dfrac{[1 + \sqrt{5}]}{2}\right] = \left[\dfrac{1 + [\sqrt{5}]}{2}\right] = \left[\dfrac{1 + 2}{2}\right] = \left[\dfrac{1}{2} + 1\right] = 1.$

---

[1]) Viz na př.: Rychlík [*1*, 10]. (Takto se poukazuje na spisy v abecedním seznamu literatury.)

Příklad 2. $\left[\frac{\sqrt{37}+11}{14}\right] = \left[\frac{[\sqrt{37}]+11}{14}\right] = \left[\frac{6+11}{14}\right] = \left[\frac{17}{14}\right] = 1.$

• § 4. Euklidův algoritmus (k § 5)

Nechť značí x_0, x_1 dvě celá čísla, při čemž x_1 je kladné. Proveďme neúplné dělení čísla x_0 číslem x_1 s nejmenším nezáporným zbytkem x_2 a s neúplným podílem a_0, takže

$$x_0 = a_0 x_1 + x_2, \quad 0 \leqq x_2 < x_1.$$

$a_0 = \left[\frac{x_0}{x_1}\right]$ a je $a_0 = 0$ pro $0 \leqq x_0 < x_1$, jinak má a_0 totéž znaménko jako x_0. „Nevyjde-li dělení" (není-li x_0 dělitelné x_1), je tedy $x_2 > 0$; proveďme další neúplné dělení x_1 číslem x_2 s nejmenším nezáporným zbytkem x_3 a neúplným podílem $a_1 = \left[\frac{x_1}{x_2}\right]$, takže

$$x_1 = a_1 x_2 + x_3, \quad 0 \leqq x_3 < x_2;$$

nevyjde-li opět dělení, proveďme neúplné dělení x_2 číslem x_3. Pokračujeme-li v tomto postupu, dostaneme postupně

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 x_1 + x_2, \\ x_1 &= a_1 x_2 + x_3, \\ x_2 &= a_2 x_3 + x_4, \\ &\dots \end{aligned} \tag{1}$$

kde a_k, x_k jsou, počínaje $k = 1$, celá kladná čísla a platí

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots \tag{2}$$

Celá čísla x_k klesají při $k \geqq 1$, jsou však stále $\geqq 0$. Celý postup se tedy skončí po konečném počtu kroků tím, že konečně dělení vyjde, tedy zbytek bude $= 0$. Nechť je to zbytek x_{n+2}; předpokládejme pak, že je $n > 0$, takže první dělení nevyšlo. Pak jsou v (1) poslední dvě rovnice

$$x_{n-1} = a_{n-1} x_n + x_{n+1}, \quad a_{n-1} = \left[\frac{x_{n-1}}{x_n}\right], \tag{1'}$$

$$x_n = a_n x_{n+1}, \quad a_n = \left[\frac{x_n}{x_{n+1}}\right] = \frac{x_n}{x_{n+1}};$$

protože je $n > 0$, je $x_n > x_{n+1}$, takže poslední neúplný podíl x_n je > 1, tedy aspoň roven 2.

Popsaný postup není nic jiného než známý *Euklidův algoritmus*, jehož se užívá k určení největšího společného dělitele čísel x_0 a x_1. Tím je, jak lze snadno nahlédnout, x_{n+1}.[2])

[2]) Bližší o této otázce viz na př. Rychlík [*1*, 40].

Položme $\frac{x_0}{x_1} = \alpha$, $\frac{x_k}{x_{k+1}} = r_k$ pro $k \geqq 1$, takže vzhledem k (2) je vždy $r_k > 1$. Rovnice (1) přecházejí v rovnice

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 + \frac{1}{r_1}, & a_0 &= [\alpha], \\ r_1 &= a_1 + \frac{1}{r_2}, & a_1 &= [r_1], \\ &\dots \\ r_{n-1} &= a_{n-1} + \frac{1}{r_n}, & a_{n-1} &= [r_{n-1}], \\ r_n &= a_n, & a_n &= r_n. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Pro $n = 0$ je α celé číslo, $\alpha = a_0$.

Tak je udán postup, jak rozvinout racionální číslo v pravidelný řetězec.

Euklidův algoritmus poskytuje pro racionální necelé číslo řetězec, jehož poslední prvek je $\geqq 2$. Existuje jediné takové znázornění (§ 5).

Schematicky budeme (1) a (1′) psát

$$\frac{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}}{a_0, a_1, \quad \dots, \quad a_{n-1}, a_n}.$$

Příklad 1. $\alpha = \frac{96}{65}$.

$$\frac{96, 65, 31, 3, 1}{1, 2, 10, 3}$$

$$96 = 1 \cdot 65 + 31, \; 65 = 2 \cdot 31 + 3, \; 31 = 10 \cdot 3 + 1, \; 3 = 3 \cdot 1.$$

Řetězec pro racionální číslo $\frac{96}{65}$ je $[1; 2, 10, 3]$.

Příklad 2. $\alpha = \frac{1260}{456}$.

$$\frac{1260, 456, 348, 108, 24, 12}{2, 1, 3, 4, 2};$$

zde čísla 1260 a 456 mají největšího společného dělitele 12. Po zkrácení dostáváme

$$\alpha = \frac{105}{38} = [2; 1, 3, 4, 2].$$

§ 5. Pravidelné řetězce (k § 4, 5)

O konečných pravidelných řetězcích pro necelá čísla se ve spise předpokládá, že jejich poslední prvek je $\geqq 2$.

Nebudeme se nyní omezovat na takové řetězce. Pak platí věta, že lze racionální číslo rozvinout, a to jediným způsobem, v pravidelný řetězec, jehož poslední prvek je roven 1. Takový rozvoj dostáváme z řetězce, jehož poslední prvek je $\geqq 2$, podle vzorce

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1].$$

Pro celá racionální čísla platí $a_0 = [a_0 - 1; 1]$; na př. $0 = [-1; 1]$.

Z obou napsaných sobě rovných řetězců má druhý o jeden prvek více než první, takže počet prvků je u jednoho z nich sudý, u druhého lichý. Lze tedy volit za počet prvků jak sudé, tak liché číslo. Platí pak tato věta:

Každé racionální číslo lze rozvinout jediným způsobem v pravidelný řetězec, je-li předepsána parita počtu prvků.

§ 6. Řešení lineární diofantické rovnice $ax - by = c$

Jako důležité použití theorie řetězců uvádíme řešení diofantické rovnice

$$ax \overset{+}{-} by = c; \tag{1}$$

přitom jsou a, b, c daná celá čísla a máme určit neznámé x, y tak, aby to byla celá čísla.

Je-li d největší společný dělitel čísel a, b, je třeba k řešitelnosti, aby c bylo dělitelné d. Pak lze rovnici (1) číslem d krátit a lze tedy předpokládat, že $d = 1$. Možno tedy beze všeho předpokládat, že čísla a, b jsou nesoudělná. Dále je možno předpokládat, že $b > 0$ (dosáhne se toho po případě změnou znaménka v rovnici (1)). Případ $b = 1$ je triviální, takže lze předpokládat, že $b > 1$.

Rozviňme $\frac{a}{b}$ v pravidelný řetězec

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n];$$

označme sblížené zlomky

$$\frac{p_k}{q_k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Pak je

$$\frac{a}{b} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Protože tyto zlomky jsou irreducibilní a mají kladné jmenovatele, je $a = p_n$, $b = q_n$. Je však (věta 2, § 2)

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n, \text{ t. j. } a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

a dále

$$a((-1)^{n-1} q_{n-1} c) \overset{+}{-} b((-1)^{n-1} p_{n-1} c) = c.$$

Je tedy řešením

$$x_0 = (-1)^{n-1} q_{n-1} c, \quad y_0 = (-1)^{n-1} p_{n-1} c. \tag{2}$$

Lze však volit n tak, aby $n - 1$ bylo sudé, t. j. n liché (tedy aby řetězec pro $\frac{a}{b}$ měl lichý počet členů n, t. j. aby počet prvků $a_0, a_1, \ldots, a_n$, který je $n + 1$, byl sudý). Pak je

$$x_0 = q_{n-1}c, \quad y_0 = p_{n-1}c.$$

Když jsme tak pomocí nauky o řetězcích dostali *jedno* řešení x_0, y_0, takže je

$$ax_0 - by_0 = c, \tag{3}$$

lze snadno určit *všechna* řešení. K tomu odečtěme od rovnice (1) rovnici (3). Tak dostaneme

$$a(x - x_0) - b(y - y_0) = 0,$$

t. j.

$$\frac{a}{b} = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Ježto zlomek $\frac{a}{b}$ je irreducibilní, plyne odtud

$$y - y_0 = ta, \quad x - x_0 = tb \quad (\textit{obecné řešení}),$$

kde t je libovolné celé číslo.

Příklad 1. $5x - 3y = 1$.

$$\frac{5}{3} = [1; 1, 2] = [1; 1, 1, 1].$$

Schema k určení sblížených zlomků je

	1	1	1	1
0	1	2	3	5
1	1	1	2	3

Odtud $x_0 = 2$, $y_0 = 3$; obecné řešení je pak $x = 2 + 3t$, $y = 3 + 5t$.
Kladná řešení dostáváme pro $t \geqq 0$.
Kdybychom užili řetězce [1; 1, 2], bylo by příslušné schema

	1	1	2
1	1	2	5
0	1	1	3

a dostali bychom $x_0 = -1$, $y_0 = -2$; obecné řešení je $x = -1 + 3t$, $y = -2 + 5t$.
Kladná řešení dostáváme pro $t \geqq 1$.

Příklad 2.

$$96x + 65y = 1000.$$

Pišme tuto rovnici ve tvaru

$$-96x - 65y = -1000.$$

K rozvití $-\frac{96}{65}$ v řetězec užijeme schematu

$$\frac{-96,\ 65,\ 34,\ 31,\ 3,\ 1}{-2,\ 1,\ 1,\ 10,\ 3}$$

Tak dostáváme řetězec pro $-\frac{96}{65}$:

$$-\frac{96}{65} = [-2; 1, 1, 10, 3] = [-2; 1, 1, 10, 2, 1].$$

Schema k určení sblížených zlomků je pak

	—2	1	1	10	2	1
1	—2	—1	—3	—31	—65	—96
0	1	1	2	21	44	65

Je tedy

$$x_0 = 44 \cdot -1000 = -44\,000,\ y_0 = -65 \cdot -1000 = 65\,000.$$

Obecné řešení je

$$x = -44\,000 + 65t,\ y = 65\,000 - 96t.$$

Řešení s kladnými x a y dostaneme pro

$$-44\,000 + 65t > 0,\ 65\,000 - 96t > 0,$$

t. j. při

$$t > \frac{44\,000}{65} \text{ a zároveň } t < \frac{65\,000}{96},$$

neboli

$$\frac{44\,000}{65} < t < \frac{65\,000}{96}.$$

Ježto

$$\left[\frac{44\,000}{65}\right] = 676,\ \left[\frac{65\,000}{96}\right] = 677,$$

jsou tyto nerovnosti splněny jedině pro $t = 677$.

Klademe-li tedy v obecném řešení $t = 677$, dostáváme jediné řešení dané diofantické rovnice kladnými x, y: $x = 5$, $y = 8$.

Obecné řešení lze pak psát ve tvaru

$$x = 5 + 65t',\ y = 8 - 96t'.$$

• § 7. Řešení lineární kongruence $ax \equiv b \pmod{m}$

Řešení kongruence

$$ax \equiv b \pmod{m}, \tag{1}$$

kde $m > 1$ a a, m jsou nesoudělná čísla, je úkol ekvivalentní s řešením diofantické rovnice

$$ax - my = b. \tag{2}$$

Rozviňme $\frac{a}{m}$ v řetězec, takže $\frac{a}{m} = \frac{p_n}{q_n}$.

Pak podle vzorce (2) předešlého paragrafu je

$$x_0 = (-1)^{n-1} q_{n-1} b, \quad y_0 = (-1)^{n-1} p_{n-1} b$$

řešením diofantické rovnice (2), a tedy vzorec pro x_0 poskytuje řešení kongruence (1).

Rozvineme-li $\frac{a}{m}$ v řetězec se sudým (lichým) počtem prvků při $b > 0$ ($b < 0$), bude b mít totéž znaménko jako $(-1)^{n-1}$, takže bude $(-1)^{n-1} b = |b|$.

Tak dostáváme řešení

$$x \equiv q_{n-1} |b|.$$

Příklad 1.

$$7x \equiv 2 \pmod{11}.$$

Zde $b = 2 > 0$, rozvineme tedy $\frac{7}{11}$ v řetězec se sudým počtem prvků $\frac{7}{11} = [0; 11, 1, 2, 1]$. K určení sblížených zlomků máme schema

	0	1	1	1	2	1
1	0	1	1	2	5	7
0	1	1	2	3	8	11

Bude tedy

$$x \equiv 8 \cdot 2 \equiv 16 \equiv 5 \pmod{11}.$$

Příklad 2.

$$7x \equiv -2 \pmod{11}.$$

Ježto $b = -2 < 0$, rozvineme $\frac{7}{11}$ v řetězec s lichým počtem prvků $\frac{7}{11} = [0; 1, 1, 1, 3]$.

Schema pro výpočet sblížených zlomků je

	0	1	1	1	3
1	0	1	1	2	7
0	1	1	2	3	11

Je tedy řešením

$$x \equiv 3 \cdot |-2| \equiv 6 \pmod{11}.$$

Příklad 3.

$$5x \equiv 7 \pmod{63}.$$

Ježto $b = 7 > 0$, rozvineme v řetězec se sudým počtem prvků

$$\frac{5}{63} = [0; 12, 1, 1, 1, 1].$$

Schema pro výpočet sblížených zlomků je

	0	12	1	1	1	1
1	0	1	1	2	3	5
0	1	12	13	25	38	63

Je tedy

$$x \equiv 38 \cdot 7 \equiv 266 \equiv 14 \pmod{63}.$$

§ 8. Vztahy $\gtrless$ mezi řetězci. Rozvoj desetinného zlomku v řetězec

Všimněme si nyní, který ze dvou neidentických pravidelných řetězců má větší hodnotu. Nechť je

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

konečný řetězec. S ním chceme porovnat řetězec

$$\beta = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots],$$

který může být konečný nebo nekonečný. Označme zbytky prvého řetězce r_n, druhého s_n. Nejprve je $r_n = a_n$;

$$s_n = [a_n; a_{n+1}, \ldots] > a_n; \text{ tedy } r_n < s_n;$$

z rovnic

$$r_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{r_n}, \quad s_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{s_n},$$

$$r_{n-2} = a_{n-2} + \frac{1}{r_{n-1}}, \quad s_{n-2} = a_{n-2} + \frac{1}{s_{n-1}},$$

plyne pak postupně

$$r_{n-1} > s_{n-1},$$
$$r_{n-2} < s_{n-2},$$

při čemž se znaky $\gtrless$ střídají. Poslední z těchto nerovností je $\alpha > \beta$ nebo $\alpha < \beta$, podle toho, je-li počet prvků $n + 1$ sudý nebo lichý (neboli počet členů řetězce n lichý nebo sudý). Tak dostáváme tuto větu.

Připojíme-li ke konečnému řetězci další konečný nebo nekonečný počet prvků, zmenší (resp. zvětší) se jeho hodnota dle toho, byl-li původní počet prvků $n + 1$ sudý (resp. lichý), neboli dle toho, byl-li původní počet členů řetězce n lichý (nebo sudý).

Budeme se dále zabývat řetězci

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots],$$
$$\beta = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_n, \ldots],$$

při čemž nechť je $b_n > a_n$. Je-li pak na př.

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, 1], \; \beta = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1],$$

víme již (§ 4), že $\alpha = \beta$. Tento případ nyní vyloučíme ze svých úvah. Jsou-li opět r_k, s_k zbytky obou řetězců, je nejprve

$$s_n \geqq b_n \geqq a_n + 1 \geqq r_n;$$

je tedy $s_n \geqq r_n$ a rovnost nastává jen ve vyloučeném případě. Skutečně je tedy $s_n > r_n$ a z toho plyne jako dříve, že $\alpha > \beta$ nebo $\alpha < \beta$, podle toho, je-li $n + 1$ sudé nebo liché. To vede k větě:

Liší-li se dva neidentické pravidelné řetězce jen tak, že jsou tvaru

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, 1], \; [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1],$$

mají stejnou hodnotu. Jinak mají různé hodnoty a je — značí-li n ($\geqq 0$) počet společných počátečních prvků — větší ten, který při sudém (lichém) n má větší (resp. menší) n-tý člen.

Z toho plyne zejména, že se pravidelný řetězec zvětší, zvětší-li se některý z prvků $a_0, a_2, a_4, \ldots$, aneb zmenší-li se některý z prvků $a_1, a_3, a_5, \ldots$

Dále dostáváme větu:

Souhlasí-li pravidelné řetězce pro reálná čísla β, γ v prvních n prvcích, počíná řetězec pro každé číslo α ležící mezi β a γ rovněž těmito n prvky. Další prvek leží nutně mezi[3]) odpovídajícími si prvky řetězců pro β a γ.

Kdyby tomu tak nebylo, bylo by podle předešlého nutně číslo α buď větší než každé z čísel β a γ, nebo menší než každé z nich; neleželo by tedy α mezi nimi.

Poslední věta má význam, jde-li o to, rozvinout v pravidelný řetězec číslo α, pro něž známe jen několik počátečních desetinných míst. Neboť potom také jsou stanovena dvě racionální čísla, mezi nimiž α leží. Rozvineme-li tato dvě racionální čísla v řetězce a shodují-li se v prvních n prvcích, počíná rozvoj čísla α v řetězec také těmito n prvky. Abychom se vyhnuli zbytečnému počítání, rozvinujeme ovšem obě racionální čísla současně v řetězce a skončíme počet, jakmile se objeví odchylka.

Příklad. Pro Ludolfovo číslo π platí nerovnosti

$$3{,}141\,592\,653\,58 < \pi < 3{,}141\,592\,653\,59.$$

Nalezneme

$$3{,}141\,592\,653\,58 = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 1, \ldots],$$
$$3{,}141\,592\,653\,59 = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \ldots].$$

---

[3]) Včetně hranic.

Ježto se tyto řetězce shodují v prvních osmi prvcích, je též

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \ldots]$$

a zároveň je patrné, že nejbližší prvek je buď 1, nebo 2. Kdybychom vyšli od většího počtu desetinných míst, zjistili bychom, že nejbližší prvek je skutečně 2.

Obecný zákon pro prvky čísla π není znám. Naproti tomu je možno číslo e vyjádřit řetězcem jednoduchého tvaru

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \ldots, 1, 2k, 1, \ldots].$$[4])

• § 9. Nejlepší přiblížení (k § 6)

Dle věty 15 je každý zlomek, který je nejlepším přiblížením (prvního druhu) čísla α, buď sblíženým, nebo vsunutým zlomkem. Sblížené zlomky jsou až na triviální výjimku vesměs nejlepšími přiblíženími (věta 17). O tom, které vsunuté zlomky jsou také nejlepším přiblížením, nás poučuje věta:

Vsunutý zlomek $\dfrac{p_{k-2} + rp_{k-1}}{q_{k-2} + rp_{k-1}}$ *(existující jen pro* $a_k > 1$) *je tehdy a jen tehdy nejlepším přiblížením, je-li* $2r > a_k$, *nebo též, je-li* $2r = a_k$ *a zároveň*

$$[a_k; a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1] > [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots];$$

naproti tomu pro $2r < a_k$ *nedostáváme nejlepší přiblížení.*[5])

Vidíme, že ze zlomků vsunutých, ležících mezi $\dfrac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\dfrac{p_k}{q_k}$:

$$\frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{q_{k-2} + q_{k-1}}, \quad \frac{p_{k-2} + 2p_{k-1}}{q_{k-2} + 2q_{k-1}}, \quad \ldots, \quad \frac{p_{k-2} + (a_k - 1)\,q_{k-1}}{q_{k-2} + (a_k - 1)\,q_{k-1}},$$

poskytuje jen druhá polovina nejlepší přiblížení. Je-li $a_k - 1$ liché, bude střední zlomek nejlepším přiblížením dle toho, platí-li $[a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1] > [a_k, a_{k+1}, \ldots]$ nebo ne.

Tato věta nám umožňuje vypsat posloupnost všech nejlepších přiblížení čísla α, a to tak, že každý další zlomek leží blíže k α než předcházející. Zlomky jsou pak samy sebou uspořádány dle rostoucích jmenovatelů; jsou částečně větší, částečně menší než α. Přechod od větších než α k menším než α a naopak nastává při zlomcích sblížených. Jsou-li $\dfrac{a}{b}$ a $\dfrac{c}{d}$ dva po sobě jdoucí zlomky této posloupnosti, je mezi všemi zlomky, které leží blíže k α než $\dfrac{a}{b}$, právě $\dfrac{c}{d}$ zlomek s nejmenším jmenovatelem.

Příklad. Objasníme si to při Ludolfově čísle π. Nalezli jsme

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, \ldots].$$

---

[4]) Jednoduché odvození viz na př.: Perron [*2*, 109—111].
[5]) H. J. Stephen Smith. Viz na př.: Perron [*1*, 60].

Sblížené zlomky jsou tedy

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103\,993}{33\,102}, \frac{104\,348}{33\,215}, \ldots,$$

kdežto vsunuté zlomky mají tvar

$$\frac{3r+1}{r}, \frac{22r'+3}{7r'+1}, \frac{355r''+333}{113r''+106}, \ldots$$

$$1 \leqq r \leqq 6,\ 1 \leqq r' \leqq 14,\ 1 \leqq r''' \leqq 291, \ldots$$

Zlomky tvaru $\frac{333r''+22}{106r''+7}$ odpadají, ježto $a_3 = 1$, takže již pro $r'' = 1$ se dostane zlomek sblížený. Vsunuté zlomky jsou nejlepšími přiblíženími pro

$r = 4, 5, 6$; tedy $\frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}$,

$r' = 8, 9, 10, 11, 13, 14$; tedy $\frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{99}$,

$r''' = 147, 148, \ldots$; tedy $\frac{52\,518}{16\,717}, \frac{52\,873}{16\,850}, \ldots$

Poskytuje-li již hodnota $r''' = 146$ nejlepší přiblížení, závisí na tom, je-li splněna nerovnost

$$[a_4; a_3, a_2, a_1] > [a_4; a_5; a_6, \ldots];$$

je to však

$$[292; 1, 15, 7] > [292; 1, 1, \ldots].$$

Ona nerovnost je tedy dle § 8 skutečně splněna; je tedy již zlomek $\frac{52\,163}{16\,604}$ vznikající pro $r''' = 146$ nejlepším přiblížením. Tudíž jsou nejlepšími přiblíženími po řadě

$$\underline{\frac{3}{1}}, \overline{\frac{13}{4}}, \overline{\frac{16}{5}}, \overline{\frac{19}{6}}, \overline{\frac{22}{7}},$$

$$\underline{\frac{179}{57}}, \underline{\frac{201}{64}}, \underline{\frac{223}{71}}, \underline{\frac{245}{78}}, \underline{\frac{267}{85}}, \underline{\frac{289}{92}}, \underline{\frac{311}{99}}, \underline{\frac{333}{106}},$$

$$\overline{\frac{355}{113}}, \underline{\frac{52\,163}{16\,604}}, \underline{\frac{52\,518}{16\,717}}, \underline{\frac{52\,873}{16\,830}}, \ldots$$

při čemž čára pod zlomky značí, že jsou menší než π, čára nad zlomky, že jsou větší než π. Mezi těmito zlomky si zaslouží pozornosti jako obzvláště příznivé přiblížení zlomek $\frac{22}{7}$; neboť abychom se hodnotě π ještě více přiblížili, je třeba jmenovatele značně zvětšit, ze 7 na 57. Obzvláště výborným přiblížením je však zlomek $\frac{355}{113}$; zde jmenovatel není příliš veliký, abychom se však více přiblížili číslu π, nutno provést značné zvětšení jmenovatele, až na 16 604, a přitom je zisk nepatrný; neboť chyba se tím, jak dále uvedená tabulka ukazuje, zmenší jen asi o 2‰. Naproti tomu je zlomek $\frac{333}{106}$, ač je to „nejlepší přiblížení" a dokonce sblížený zlomek, dosti nepříznivý. Neboť se malým zvětšením jmenovatele, na 113, chyba značně zmenší. Vidíme, že dostaneme obzvláště příznivé aproximace při velikých prvcích a_k, zde při 15 a 292.

$$\frac{22}{7} = 3{,}142\,857, \text{ chyba } \pi - \frac{22}{7} = -0{,}001;$$
$$\frac{223}{71} = 3{,}140\,845, \text{ chyba} = +\,0{,}000\,7;$$
$$\frac{333}{106} = 3{,}141\,509\,4, \text{ chyba} = +\,0{,}000\,08;$$
$$\frac{355}{113} = 3{,}141\,592\,920\,35, \text{ chyba} = -\,0{,}000\,000\,266\,76;$$
$$\frac{52\,163}{16\,604} = 3{,}141\,592\,387\,376, \text{ chyba} = +\,0{,}000\,000\,266\,21.$$

Je zajímavé, že některé z těchto zlomků byly známy jako dobré aproximace pro π již dříve, než byly studovány řetězce. Tak Archimedes našel, že π leží mezi $\frac{22}{7}$ a $\frac{223}{71}$. Adrián Metius (1571—1635) zná zlomky $\frac{333}{106}$ a $\frac{355}{113}$.

§ 10. Kvadratické irracionály (k § 10)

1. Při $k_0 = 0$ se řetězec nazývá *ryze periodický*. Jinak při $k_0 > 0$ se nazývá *neryze periodický*. Prvky $a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}$ tvoří *předperiodí* a $a_{k_0}, a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+h-1}$ *periodu*.

Ryze periodický řetězec má tvar $[\overline{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}}]$, takže předperiodí odpadá. Ryze periodický zlomek můžeme považovat za neryze periodický a neryze periodický za neryze periodický s delším předperiodím. Je patrně na př.

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}, \overline{a_{k_0}, a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+h-1}}] =$$
$$= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}, a_{k_0}, \overline{a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+h-1}, a_{k_0}}].$$

2. Jsou-li k_0 a h malá čísla, je možno stanovit kvadratickou rovnici pro hodnotu periodického řetězce přímo, bez užití theorie řetězců.

Příklad 1.

$$\alpha = [\overline{2; 3}].$$

Pak je

$$\alpha = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\alpha}} = 2 + \frac{\alpha}{3\alpha + 1} = \frac{7\alpha + 2}{3\alpha + 1},$$

takže α je kořenem kvadratické rovnice

$$x(3x + 1) = 7x + 2, \text{ t. j. } 3x^2 - 6x - 2 = 0.$$

Je tedy $[\overline{2; 3}] = \frac{1}{3}(3 + \sqrt{15})$; druhý kořen této rovnice je záporný, takže nevyhovuje.

Příklad 2.

$$\alpha = [1; \overline{1, 3}].$$

Pak je

$$\alpha - 1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \ldots,}}}}$$

t. j.

$$\frac{1}{\alpha - 1} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \ldots}} = 1 + \frac{1}{3 + (\alpha - 1)} = 1 + \frac{1}{\alpha + 2} = \frac{\alpha + 3}{\alpha + 2}.$$

Je tedy α kořenem kvadratické rovnice

$$x + 2 = (x - 1)(x + 3), \text{ t. j. } x^2 + x - 5 = 0;$$

tak dostáváme $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{21})$, ježto $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{21}) < 0$.

3. Pro ryze periodický zlomek je $\alpha = r_0 = r_h$, takže dle vzorce (48) (§ 10) je

$$\alpha = \frac{p_{h-1}\alpha + p_{h-2}}{q_{h-1}\alpha + q_{h-2}}.$$

α je tedy kořenem kvadratické rovnice

$$q_{h-1}x^2 + (q_{h-2} - p_{h-1})\,x - p_{h-2} = 0.$$

Příklad.

$$\alpha = [\overline{1; 2, 3, 4}].$$

Zde je $h = 4$ a rovnice pro α je

$$q_3x^2 + (q_2 - p_3)\,x - p_2 = 0.$$

Potřebné sblížené hodnoty dává schema:

k	-1	0	1	2	3
a_k		1	2	3	4
p_k	1	1	3	10	43
q_k	0	1	2	7	30

Kvadratická rovnice pro α je tedy $30x^2 - 36x - 10 = 0$ a po zkrácení dvěma

$$15x^2 - 18x - 5 = 0.$$

Odtud vypočteme

$$\alpha = \frac{9 + 2\sqrt{39}}{15}.$$

4. Pro neryze periodický zlomek je

$$\alpha = \frac{p_{k_0-1}r_{k_0} + p_{k_0-2}}{q_{k_0-1}r_{k_0} + q_{k_0-2}},$$

kde r_{k_0} je ryze periodický zlomek

$$r_{k_0} = [a_{k_0}; a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+h-1}],$$

který již dovedeme vypočíst.

Příklad.

$$\alpha = [2; 3, \overline{10, 1, 1, 1}].$$

Zde je

$$\alpha = \frac{p_1 r_2 + p_0}{q_1 r_2 + q_0} = \frac{7r_2 + 2}{3r_2 + 1},$$

kde r_2 je ryze periodický řetězec $r_2 = [\overline{10; 1, 1, 1}]$.

Zde je $h = 4$; prvky řetězce r_2 označme $a_k^{(2)}$ a čitatele a jmenovatele jeho sblížených zlomků $p_k^{(2)}$, $q_k^{(2)}$.

Pro r_2 máme kvadratickou rovnici

$$q_3^{(2)}x^2 + (q_2^{(2)} - p_3^{(2)})\,x - p_2^{(2)} = 0.$$

Určeme potřebné sblížené hodnoty pomocí schematu:

k	—1	0	1	2	3
$a_k^{(2)}$		10	1	1	1
$p_k^{(2)}$	1	10	11	21	32
$q_k^{(2)}$	0	1	1	2	3

Kvadratická rovnice pro r_2 je tedy $3x^2 - 30x - 21 = 0$ nebo po zkrácení třemi

$$x^2 - 10x - 7 = 0.$$

Odtud plyne

$$r_2 = 5 + \sqrt{32} = 5 + 4\sqrt{2}.$$

Dosazením do vzorce pro α dostáváme

$$\alpha = [2; 3, \overline{10, 1, 1, 1}] = \frac{35 + 28\sqrt{2} + 2}{25 + 12\sqrt{2} + 1} = \frac{20 - \sqrt{2}}{8}.$$

5. Zobrazení kvadratické iracionály řetězcem ukážeme na příkladech.

Příklad 1. $\sqrt{59}$.

$$\alpha = \sqrt{59} = 7 + (\sqrt{59} - 7), \quad ([\sqrt{59}] = 7),$$

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{59} - 7} = \frac{\sqrt{59} + 7}{10} = 1 + \frac{\sqrt{59} - 3}{10}, \left(\left[\frac{\sqrt{59} + 7}{10}\right] = 1\right)^{6)},$$

$$r_2 = \frac{10}{\sqrt{59} - 3} = \frac{\sqrt{59} + 3}{5} = 2 + \frac{\sqrt{59} - 7}{5}, \left(\left[\frac{\sqrt{59} + 3}{5}\right] = 2\right),$$

$$r_3 = \frac{5}{\sqrt{59} - 7} = \frac{\sqrt{59} + 7}{2} = 7 + \frac{\sqrt{59} - 7}{2}, \left(\left[\frac{\sqrt{59} + 7}{2}\right] = 7\right),$$

$$r_4 = \frac{2}{\sqrt{59} - 7} = \frac{\sqrt{59} + 7}{5} = 2 + \frac{\sqrt{59} - 3}{5}, \left(\left[\frac{\sqrt{59} + 7}{5}\right] = 2\right),$$

$$r_5 = \frac{5}{\sqrt{59} - 3} = \frac{\sqrt{59} + 3}{10} = 1 + \frac{\sqrt{59} - 7}{10}, \left(\left[\frac{\sqrt{59} + 3}{10}\right] = 1\right),$$

$$r_6 = \frac{10}{\sqrt{59} - 7} = \sqrt{59} + 7 = 14 + (\sqrt{59} - 7), \quad ([\sqrt{59} + 7] = 14),$$

$$r_7 = \frac{1}{\sqrt{59} - 7} = r_1.$$

$$\sqrt{59} = [7; \overline{1, 2, 7, 2, 1, 14}].$$

Zde je šestičlenná perioda 1, 2, 7, 2, 1, 14 a předperiodí o jednom čísle 7.

Příklad 2.

$$\alpha = \frac{11 + \sqrt{37}}{14} = 1 + \frac{\sqrt{37} - 3}{14}, \left(\left[\frac{\sqrt{37} + 11}{14}\right] = 1\right)^{7)}.$$

$$r_1 = \frac{14}{\sqrt{37} - 3} = \frac{\sqrt{37} + 3}{2} = 4 + \frac{\sqrt{37} - 5}{2}, \left(\left[\frac{\sqrt{37} + 3}{2}\right] = 4\right),$$

$$r_2 = \frac{2}{\sqrt{37} - 5} = \frac{\sqrt{37} + 5}{6} = 1 + \frac{\sqrt{37} - 1}{6}, \left(\left[\frac{\sqrt{37} + 5}{6}\right] = 1\right),$$

$$r_3 = \frac{6}{\sqrt{37} - 1} = \frac{\sqrt{37} + 1}{6} = 1 + \frac{\sqrt{37} - 5}{6}, \left(\left[\frac{\sqrt{37} + 1}{6}\right] = 1\right),$$

$$r_4 = \frac{6}{\sqrt{37} - 5} = \frac{\sqrt{37} + 5}{2} = 5 + \frac{\sqrt{37} - 5}{2}, \left(\left[\frac{\sqrt{37} + 5}{2}\right] = 5\right),$$

$$r_5 = \frac{2}{\sqrt{37} - 5} = \frac{\sqrt{37} + 5}{6} = r_2.$$

---

6) Viz • § 3.
7) Viz • § 3.

Je tedy

$$\alpha = \frac{11 + \sqrt{37}}{14} = [1; 4, \overline{1, 1, 5}].$$

Pro kvadratickou irracionálu konjugovanou s α, $\alpha' = \dfrac{11 - \sqrt{37}}{14}$, která s α je kořenem kvadratické rovnice s celými koeficienty

$$7x^2 - 11x + 3 = 0,$$

platí

$$\alpha' = \frac{-\sqrt{37} + 11}{14} = 0 + \frac{-\sqrt{37} + 11}{14},$$

$$r_1' = \frac{14}{-\sqrt{37} + 11} = \frac{\sqrt{37} + 11}{6} = 2 + \frac{\sqrt{37} - 1}{6},$$

$$r_2' = \frac{6}{\sqrt{37} - 1} = \frac{\sqrt{37} + 1}{6} = r_3 = \overline{[1, 5, 1]}.$$

Je tedy $\alpha' = [0; 2, \overline{1, 5, 1}]$, což však můžeme psát též v tvaru $\alpha' = [0; 2, 1, \overline{5, 1, 1}]$. Perioda kvadratické irracionály konjugované α' je složena z týchž čísel jako perioda irracionály α, ale v obráceném pořádku. (Platí pro kvadratické irracionály obecně.)[8])

§ 11. Geometrické zobrazení řetězců

Body v rovině, jejichž pravoúhlé souřadnice jsou celá čísla, tvoří *bodovou mříž.* Budeme si všímat jen mřížových bodů v horní polorovině. Reálné číslo α zobrazíme polopřímkou $p(\alpha)$ s rovnicí $x = \alpha y$, procházející počátkem a ležící v horní polorovině ($y \geqq 0$). Je-li α racionální číslo dané irreducibilním zlomkem $\alpha = \dfrac{a}{b}$ (a, b nesoudělná, $b > 0$), lze α zobrazit též mřížovým bodem (a, b). Je to první bod (horní poloroviny) různý od počátku, který leží na polopřímce $p(\alpha)$.

Takové racionální číslo lze též zobrazit vektorem, jehož počátečním bodem je bod O a koncovým bodem bod (a, b).

Nechť je α číslo reálné s rozvojem v pravidelný řetězec $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Hledejme body odpovídající sblíženým zlomkům. Označme A_k bod zobrazující sblížený zlomek $\dfrac{p_k}{q_k}$, t. j. bod o souřadnicích (p_k, q_k).

[8]) Výpočet možno ještě zkrátit pomocí vět z theorie periodických pravidelných řetězců. Z rozsáhlé literatury o těchto otázkách budiž uvedeno: Bieberbach-Bauer, Cahen, Dickson, Kraitchik, Perron *1*, Petr, Serret, Sierpiński, W. Weber, Wertheim.

Existují tabulky pravidelných řetězců pro $\sqrt{D}$, kde D je celé kladné číslo (Patz, kde je uvedena starší literatura o tabulkách podobného druhu).

Mimo sblížený zlomek $\frac{p_{-1}}{q_{-1}}$ připojíme ještě sblížený zlomek $\frac{p_{-2}}{q_{-2}}$ s $p_{-2} = 0, q_{-2} = 1$. Pak je

$$\left.\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k &= a_k q_{k-2} + q_{k-2}. \end{aligned}\right\} (k = 0,1,2,\ldots) \tag{1}$$

(Vzorce (7) § 2.) Tyto dvě rovnice lze psát jako jedinou vektorovou rovnici

$$\overrightarrow{OA_k} = a_k . \overrightarrow{OA_{k-1}} + \overrightarrow{OA_{k-2}}, \tag{1'}$$

značí-li $\overrightarrow{OA_k}$ vektor s počátečním bodem O a koncovým bodem A_k. Ježto $\overrightarrow{A_{k-2}A_k} = \overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OA_{k-2}} = a_k\overrightarrow{OA_{k-1}}$, je vektor $\overrightarrow{A_{k-2}A_k}$ rovnoběžný s vektorem $\overrightarrow{OA_{k-1}}$ a při $k \geq 1$ stejného smyslu.

Zlomky vsunuté mají čitatele $ip_{k-1} + p_{k-2}$ a jmenovatele $iq_{k-1} + q_{k-2}$ s $0 < i < a_k$, takže zobrazující vektory jsou $i\overrightarrow{OA_{k-1}} + \overrightarrow{OA_{k-2}}$. Zobrazující body vsunutých zlomků jsou mřížové body ležící uvnitř úsečky $A_{k-2}A_k$.

Konstrukce A_k pomocí vzorce (1′) vyžaduje znalost a_k, má však také tento význam: koncový bod vektoru $a_k\overrightarrow{OA_{k-1}} + \overrightarrow{OA_{k-2}}$ padá ještě na tutéž stranu polopřímky $p(\alpha)$ jako bod A_{k-2}, kdežto koncový bod vektoru $(a_k + 1)\overrightarrow{OA_{k-1}} + \overrightarrow{OA_{k-2}}$ je již na druhé straně polopřímky $p(\alpha)$. (Srovnej § 4.)

Polopřímka $p(\alpha)$ dělí polorovinu ve dvě části. V každé z nich vznikne lomená čára, konvexní vzhledem k $p(\alpha)$. Rohy obou těchto čar jsou body zobrazující sblížené zlomky řetězce pro α; dolní (resp. horní) lomená čára počíná v bodě A_{-2} (resp. A_{-1}) a má za rohy body zobrazující sblížené zlomky se sudými (resp. lichými) indexy. Vsunuté zlomky jsou znázorněny mřížovými body, které leží uvnitř stran obou lomených čar. Mezi oběma lomenými čarami neleží další mřížové body. Je-li α irracionální, jsou obě lomené čáry nekonečné. Pro racionální α lze zvolit jako koncový bod buď dolní, nebo horní lomené čáry bod zobrazující α (α je vyjádřeno irreducibilním zlomkem s kladným jmenovatelem), dle toho, jak zvolíme paritu počtu prvků řetězce pro α.[9])

§ 12. Zevšeobecněné řetězce

Lze také zkoumat výrazy

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}}, \tag{1}$$

[9]) 1. Tato geometrická theorie řetězců byla vyvinuta Kleinem. Viz též Cahen, Rychlík [2]. Další literaturu viz Koksma [38].

2. Od Humberta pochází geometrická theorie řetězců, která užívá modulového obrazce. Literaturu viz Koksma [30 až 43].

3. Jiné geometrické znázornění řetězců: Lettenmeyer.

které se nazývají konečnými zevšeobecněnými řetězci a píší se ve tvaru

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}}}, \tag{2}$$

nebo stručněji

$$a_0 + \frac{b_1 |}{| a_1} + \frac{b_2 |}{| a_2} + \ldots + \frac{b_n |}{| a_n}. \tag{3}$$

Položíme-li

$$\left.\begin{aligned} p_{-1} &= 1, & q_{-1} &= 0, \\ p_0 &= a_0, & q_0 &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{k+1} &= a_{k+1}p_k + b_{k+1}p_{k-1} \\ q_{k+1} &= a_{k+1}q_k + b_{k+1}q_{k-1} \end{aligned}\right\} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

bude

$$a_0 + \frac{b_1 |}{| a_1} + \frac{b_2 |}{| a_2} + \ldots + \frac{b_k |}{| a_k} = \frac{p_k}{q_k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Tak možno určit obyčejný zlomek rovný danému řetězci. Vzorci (8) (§ 2) odpovídá

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} b_1 b_2 \ldots b_k,$$

vzorci (9) (§ 2) pak

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = (-1)^{k-1} \frac{b_1 b_2 \ldots b_k}{q_k q_{k-1}}.$$

Nekonečné zevšeobecněné řetězce a jejich konvergenci lze definovat podobně jako v § 3.[10])

[10]) Viz Koksma (hlavně literatura), Perron, Wall (s rozsáhlým seznamem literatury). Úvod do této theorie viz též Cahen.