KAPITOLA II.

ZOBRAZENÍ ČÍSEL ŘETĚZCI

§ 5. Řetězce jako aparát k vyjádření reálných čísel

Věta 14. *Každému reálnému číslu α odpovídá jediný řetězec, který má za hodnotu toto číslo. Tento řetězec je konečný, je-li α číslo racionální; nekonečný, je-li α iracionální.*[5])

Důkaz. Označme a_0 největší celé číslo nepřevyšující α; není-li α celé číslo, pak vztah

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1} \tag{22}$$

dovoluje určit číslo r_1. Přitom je patrně $r_1 > 1$, ježto

Euklidův algo

$$\frac{1}{r_1} = \alpha - a_0 < 1;$$

obecně, není-li r_n celé číslo, označíme a_n největší celé číslo nepřevyšující r_n a určíme číslo r_{n+1} vztahem:

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}}. \tag{23}$$

Tento postup může být patrně opakován, pokud nenastane případ, že r_n je celé číslo; přitom patrně $r_n > 1$ $(n \geqq 1)$.

Vztah (22) ukazuje, že

$$\alpha = [a_0; r_0];$$

nechť dále

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, r_n]; \tag{24}$$

pak vztah (23) a vzorec (5) z kap. I ukazují, že

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, r_{n+1}]$$

(vzorec (24) platí pro všechna n samozřejmě za předpokladu, že $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ nejsou celá čísla).

Je-li číslo α racionální, jsou patrně i všechna r_n racionální. Snadno nahlédneme, že v tomto případě se náš postup skončí po konečném počtu kroků. Skutečně, je-li na př.

$$r_n = \frac{a}{b}, \text{ pak } r_n - a_n = \frac{a - ba_n}{b} = \frac{c}{b},$$

[5]) Připomínáme, že uvažujeme o řetězcích s celými prvky, při nichž $a_i > 0$ pro $i \geqq 1$ a poslední prvek každého konečného řetězce je různý od jedné. • Sr. • § 5. •

kde $c < b$, ježto $r_n - a_n < 1$. Vztah (23) dává

$$r_{n+1} = \frac{b}{c}$$

(není-li ovšem $c = 0$, t. j., není-li r_n celé číslo; pak by naše tvrzení bylo dokázáno). r_{n+1} má tedy menšího jmenovatele než r_n. Z toho také plyne, že po konečném počtu kroků přijdeme u posloupnosti $r_1, r_2, \ldots$ k celému číslu $r_n = a_n$; tehdy vzorec (24) ukazuje, že číslo α je znázorněno konečným řetězcem, jehož poslední prvek $a_n = r_n > 1$.

Je-li číslo α irracionální, jsou i všechna r_n irracionální a náš postup je nekonečný. Klademe-li

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

(kde je zlomek $\frac{p_n}{q_n}$ irreducibilní a $q_n > 0$), dostaneme na základě vzorce (24) a vzorce (16) kap. I.

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}} \quad (n \geqq 2).$$

Na druhé straně je patrně

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2}},$$

odkud

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})(r_n - a_n)}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})},$$

a tudíž

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Platí tedy

$$\frac{p_n}{q_n} \to \alpha \text{ pro } n \to \infty;$$

to však patrně také značí, že nekonečný řetězec $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ má za hodnotu dané číslo α.

Dokázali jsme tedy, že číslo α může být vždy vyjádřeno řetězcem. Řetězec je konečný, je-li číslo α racionální; nekonečný, je-li α irracionální. Zbývá nám dokázat jedinost získaného vyjádření. Poznamenejme především, že tato jedinost plyne v podstatě již z úvah v paragrafu 4 I. kap., kde jsme viděli, že známe-li hodnotu řetězce, můžeme postupně určit všechny jeho sblížené zlomky, a tudíž i všechny jeho prvky. Avšak jedinost možno dokázat i mnohem jednodušeji. Skutečně nechť

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a_0'; a_1', a_2', \ldots],$$

při čemž tyto řetězce mohou být jak konečné, tak nekonečné. Označme obecně $[x]$ největší celé číslo nepřevyšující x. Především je patrně $a_0 = [\alpha]$ a $a_0' = [\alpha]$, odkud plyne $a_0 = a_0'$; dále, jestliže jsme již stanovili, že

$$a_i = a_i' \ (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

je v označení snadno srozumitelném

$$\left.\begin{array}{l} p_i = p_i' \\ q_i = q_i' \end{array}\right\} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

a dle vzorce (16) z kap. I

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} = \frac{p_n' r_{n+1}' + p_{n-1}'}{q_n' r_{n+1}' + q_{n-1}} = \frac{p_n r_{n+1}' + p_{n-1}}{q_n r_{n+1}' + q_{n-1}},$$

odkud $r_{n+1} = r_{n+1}'$, a ježto $a_{n+1} = [r_{n+1}]$ a $a_{n+1}' = [r_{n+1}']$, také $a_{n+1} = a_{n+1}'$, t. j. dané řetězce jsou totožné, jak jsme chtěli dokázat.

Poznamenejme, že poslední úvaha by byla nemožná, kdybychom připouštěli konečné řetězce s posledním prvkem 1. Je-li totiž na př. $a_{n+1} = 1$ takový poslední prvek, je $r_n = a_n + 1$ a $a_n \neq [r_n]$.

Tak jsme se přesvědčili, že reálná čísla lze jednoznačně vyjádřit řetězci. Hlavní význam takového zobrazení tkví přirozeně v tom, že známe-li řetězec zobrazující reálné číslo, můžeme určit toto číslo s libovolnou předem danou přesností. Podle toho může při zobrazování reálných čísel aparát řetězců aspoň v principu činit nárok na touž úlohu, jako činí na př. i aparát desetinných nebo obecněji systematických zlomků (t. j. zlomků vyjádřených v nějaké číselné soustavě).

Jaké jsou hlavní výhody i nedostatky řetězců jako aparátu k zobrazení reálných čísel v porovnání s daleko rozšířenějšími systematickými zlomky? Abychom odpověděli na tuto otázku, nutno především podat přesný výčet požadavků, jež můžeme a musíme klásti na aparát tohoto druhu. Je patrné, že první a hlavní *theoretický* požadavek je, aby aparát pokud možno úplně vyjadřoval vlastnosti toho čísla, které zobrazuje, tak aby tyto vlastnosti mohly být dle možnosti úplně a jednoduše ukázány, jakmile je dáno zobrazení čísla oním aparátem.

Vzhledem k tomuto prvnímu požadavku mají řetězce nepochybně značnou přednost před zlomky systematickými (zejména desetinnými). O tom se postupně přesvědčíme v průběhu celé příští kapitoly. V jistém stupni je to ovšem patrné i z apriorních úvah. Zatím co je systematický zlomek spojen s určitou číselnou soustavou a tudíž nevyhnutelně v sobě obráží nejen absolutní vlastnosti čísla, jež zobrazuje, nýbrž i vzájemný vztah právě k oné zvolené číselné soustavě — řetězce nejsou ve spojení se žádnou číselnou soustavou a reprodukují dokonale vlastnosti čísel jimi zobrazených. Tak jsme již viděli, že racionálnost nebo iracionálnost vyjádřeného čísla je úplně určena konečností nebo nekonečností příslušného řetězce. Je známo, že pro systematické zlomky je odpovídající vztah značně složitější: konečnost nebo nekonečnost znázorňujícího zlomku závisí zde kromě povahy příslušného čísla i na tom, v jakém vztahu je ono číslo k číselné soustavě.

Avšak kromě hlavního theoretického požadavku, který jsme uvedli, je dlužno přirozeně ukázat u každého aparátu sloužícího k vyjádření čísel i požadavky *praktického* charakteru (některé z nich mohou ovšem mít i theoretický význam). Tak je velmi důležitý požadavek, aby aparát dovolil pokud možno jednoduše určit přibližnou hodnotu vyjádřeného čísla s předem daným stupněm přesnosti. Tomuto požadavku vyhovuje aparát řetězců plnou měrou a jistě lépe než aparát systematických zlomků; nadto brzo seznáme, že přibližné hodnoty poskytované tímto aparátem mají vlastnost *nejlepších přiblížení* v přirozeném, neobyčejně jednoduchém a důležitém smyslu.

Je však druhý ještě podstatnější praktický požadavek, který tento aparát naprosto nesplňuje. Potřeby počtu nutí nás požadovat od každého zobrazujícího aparátu, abychom mohli, známe-li zobrazení některých čísel, nalézt dosti snadno také zobrazení jednodušších funkcí těchto čísel. (Především jejich součtu a součinu.) Krátce řečeno: aparát vhodný v praktickém smyslu musí připouštět dostatečně jednoduchá *pravidla aritmetických úkonů*, bez čehož nemůže sloužit jako nástroj počtu. Je známo, jak vhodné jsou v tomto smyslu systematické zlomky. Naopak pro řetězce neexistují prakticky přijatelná pravidla pro aritmetické úkony. Již úloha určit řetězec pro součet řetězců zobrazujících sčítance je značně složitá a v početní praxi neproveditelná.

Přednosti a nevýhody řetězců, na něž jsme poukázali, při srovnání se systematickými zlomky ve značné míře předurčují i rozhraničení okruhů použití těchto dvou zobrazovacích aparátů. Jako se v početní praxi užívá skoro veskrz systematických zlomků, v theoretických úvahách při zkoumání aritmetických zákonů kontinua a aritmetických vlastností jednotlivých iracionálních čísel se s výhodou užívá aparátu řetězců, který je nejlepším a nenahraditelným nástrojem pro takový druh úvah. Vyšetřování tohoto aparátu v takovém směru je hlavní úlohou všeho dalšího výkladu.

§ 6. Sblížené zlomky jako nejlepší přiblížení

Chceme-li iracionální číslo α vyjádřit s určitým stupněm přesnosti ve tvaru obyčejného racionálního zlomku, můžeme k tomu přirozeně použít sblížených zlomků řetězce zobrazujícího čísla α. Stupeň dosažené přesnosti je stanoven větami 9 a 13 v I. kap.; máme totiž

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Úloha aproximace (přibližného vyjádření) iracionálních čísel pomocí racionálních zlomků se klade v jednodušším svém tvaru obyčejně tak, že se hledá racionální zlomek s nejmenším (kladným) jmenovatelem, lišící se od daného iracionálního čísla nejvýš o nějakou předem danou veličinu. Takto vytčená úloha může mít ostatně smysl i v případě, že dané číslo α je racionální. Tak, je-li α zlomek, jehož čitatel a jmenovatel jsou příliš velká čísla, může vznikat otázka o přibližném vyjádření tohoto čísla pomocí zlomku, jehož čitatel a jmenovatel by byla menší čísla. Z čistě praktického hlediska není mezi těmito dvěma případy (racionálního a iracionálního α) v podstatě rozdílu, neboť v praxi každé číslo je dáno jen s nějakým stupněm přesnosti.

Bezprostředně je patrné, že k řešení této úlohy je aparát systematických zlomků naprosto nevhodný, neboť takto získané aproximující zlomky mají jmenovatele určené výhradně z vybrané soustavy číselné (v případě desetinných zlomků jsou to mocniny čísla 10) a vůbec nezávislé na aritmetické povaze zobrazovaného čísla. Naproti tomu v případě řetězců jmenovatelé sblížených zlomků jsou zcela určeny číslem, znázorňovaným oním zlomkem, a tudíž máme všechny důvody očekávat, že tyto sblížené zlomky, spojené úzce a přirozeně se znázorňovaným číslem, budou též důležité při řešení úlohy o nejlepší aproximaci onoho čísla racionálními zlomky.

Řekneme, že racionální zlomek $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$ je *nejlepším přiblížením* reálného čísla α, leží-li každý racionální zlomek s týmž nebo menším jmenovatelem ve větší vzdálenosti od α, jinak řečeno, plyne-li z $0 < d \leqq b$, $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ nevyhnutelně

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| > \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|.$$

Věta 15. *Každé nejlepší přiblížení čísla α je jedním ze sblížených neb vsunutých zlomků řetězce zobrazujícího číslo α.*

Předběžná poznámka. Aby toto tvrzení nepřipouštělo výjimek, je nutné zavést sblížené zlomky řádu —1, takže položíme $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$ (jako jsme již učinili v paragrafu 2). Zlomek $\frac{1}{3}$ je totiž na př. — jak se snadno přesvědčíme — nejlepším přiblížením čísla $\frac{1}{4}$, není však mezi jeho sblíženými a vsunutými zlomky, ježto množina těchto zlomků, začneme-li se sblíženým zlomkem řádu 0, je vyčerpána dvěma zlomky $\frac{0}{1}$ a $\frac{1}{4}$; naproti tomu, připojíme-li zlomek $\frac{1}{0}$ jako sblížený zlomek řádu —1, je tímto souhrnem

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

a ten obsahuje zlomek $\frac{1}{3}$.

Důkaz. Nechť je $\frac{a}{b}$ nejlepší přiblížení čísla α; pak je především $\frac{a}{b} \geqq a_0$; v případě $\frac{a}{b} < a_0$ by totiž zlomek $\frac{a_0}{1}$, různý od $\frac{a}{b}$, se jmenovatelem ne větším než b, ležel k α blíže než $\frac{a}{b}$, v důsledku čehož by $\frac{a}{b}$ nebylo nejlepším přiblížením.

Zcela analogickou úvahou můžeme ukázat, že

$$\frac{a}{b} \leqq a_0 + 1.$$

Lze tedy skutečně připustit, že $a_0 < \frac{a}{b} < a_0 + 1$ (v případě $\frac{a}{b} = a_0$ nebo $\frac{a}{b} = a_0 + 1$ by věta byla dokázána, ježto $\frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$ je sblížený a $\frac{a_0 + 1}{1} = \frac{p_0 + p_{-1}}{q_0 + q_{-1}}$ je vsunutý zlomek čísla α).

Nesplývá-li zlomek $\frac{a}{b}$ se žádným sblíženým nebo vsunutým zlomkem čísla α, musí ležet mezi dvěma po sobě jdoucími takovými zlomky, t. j. při vhodně zvolených k a r ($k > 0$, $0 \leqq r < a_{k+1}$ nebo $k = 0$, $1 \leqq r < a_1$) mezi zlomky

$$\frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \quad \text{a} \quad \frac{p_k(r + 1) + p_{k-1}}{q_k(r + 1) + q_{k-1}},$$

v důsledku čehož

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}}\right| < \left|\frac{p_k(r+1)+p_{k-1}}{q_k(r+1)+q_{k-1}}-\frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}}\right| =$$

$$= \frac{1}{\{q_k(r+1)+q_{k-1}\}\,\{q_k r + q_{k-1}\}}.$$

Na druhé straně je však patrně

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}}\right| = \frac{m}{b(q_k r + q_{k-1})},$$

kde m je nějaké kladné číslo, tedy aspoň rovné 1. Je tudíž

$$\frac{1}{b(q_k r + q_{k-1})} < \frac{1}{\{q_k(r+1)+q_{k-1}\}\,\{q_k r + q_{k-1}\}},$$

odkud

$$q_k(r+1) + q_{k-1} < b.$$

Zlomek

$$\frac{p_k(r+1)+p_{k-1}}{q_k(r+1)+q_{k-1}}, \tag{25}$$

ježto tedy má menšího jmenovatele než zlomek $\frac{a}{b}$, leží blíže čísla α než zlomek

$$\frac{p_k r + p_{k-1}}{q_k r + q_{k-1}} \tag{26}$$

(neboť všeobecně na základě výsledků paragrafu 4 každý následující vsunutý zlomek leží blíže α než předcházející), tedy pak i blíže než zlomek $\frac{a}{b}$ ležící mezi (25) a (26). To však odporuje definici nejlepšího přiblížení. Tak je věta 15 dokázána.

Při definici pojmu nejlepšího přiblížení, který je podkladem této věty, jsme oceňovali blízkost racionálního zlomku $\frac{a}{b}$ k číslu α malostí rozdílu $\alpha - \frac{a}{b}$ (co do absolutní hodnoty), což je konec konců nejpřirozenější. Avšak v číselné theorii bývá často důležitější a příhodnější všímat si za tím účelem rozdílu $b\alpha - a$, který se liší jen činitelem b od předcházejícího a jehož malost (co do absolutní hodnoty) může tudíž rovněž sloužit jako kriterium blízkosti zlomku $\frac{a}{b}$ k číslu α. Tento přechod od jedné charakteristiky ke druhé se může zdát na první pohled triviálním a skutečně v mnohých případech triviální je, ale není tomu tak vždy, jak se brzy přesvědčíme. Činitel b, rozlišující mezi sebou obě nerovnosti, není totiž stálá veličina, nýbrž je ve vztahu s aproximací zlomku a mění se při její záměně.

Nazveme nyní nejlepší přiblížení, o nichž jsme mluvili ve větě 15, nejlepšími přiblíženími *prvního druhu*; dále nazveme racionální zlomek $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$ *nejlepším přiblížením druhého druhu* pro číslo α, plyne-li z $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, $0 < d \leqq b$ nevyhnutelně

$$|d\alpha - c| > |b\alpha - a|.$$

Nejlepší přiblížení druhého druhu se tudíž definuje pomocí rozdílu $|b\alpha - a|$ docela analogicky jako se definovalo nejlepší přiblížení prvního druhu pomocí rozdílu $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$.

Snadno se dokáže, že *každé nejlepší přiblížení druhého druhu je nutně zároveň nejlepší přiblížení prvního druhu.*

Kdybychom totiž měli

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| \leqq \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|, \quad \left(\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}, \quad d \leqq b\right),$$

pak násobením první a poslední nerovnosti bychom dostali

$$|d\alpha - c| \leqq |b\alpha - a|;$$

jinými slovy, kdyby zlomek $\frac{a}{b}$ nebyl nejlepším přiblížením prvního druhu, nemohl by být ani nejlepším přiblížením druhého druhu, čímž věta dokázána.

Opačné tvrzení by však bylo nesprávné: nejlepší přiblížení prvního druhu není vždy nejlepším přiblížením druhého druhu. Můžeme se na př. snadno přesvědčit, že zlomek $\frac{1}{3}$ je nejlepším přiblížením prvního druhu pro číslo $\frac{1}{5}$, není však nejlepším přiblížením druhého druhu, což vidíme z nerovnosti

$$|1 \cdot \tfrac{1}{5} - 0| < |3 \cdot \tfrac{1}{5} - 1|, \quad 1 < 3.$$

Z uvedených poznámek a věty 15 plyne, že všechna nejlepší přiblížení druhého druhu jsou dána přibližnými a vsunutými zlomky. Můžeme však — a to je hlavním podkladem úlohy, kterou má pro nejlepší přiblížení druhého druhu aparát řetězců — dokázat mnohem přesnější tvrzení.

Věta 16. *Každé nejlepší přiblížení druhého druhu je dáno sblíženým zlomkem.*

Důkaz. Nechť je zlomek $\frac{a}{b}$ nejlepším přiblížením druhého druhu čísla

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots],$$

jehož sblížené zlomky označíme $\frac{p_k}{q_k}$. Kdyby bylo $\frac{a}{b} < a_0$, měli bychom

$$|\,1 \cdot \alpha - a_0\,| < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leqq |b\alpha - a|, \quad 1 \leqq b,$$

t. j. $\frac{a}{b}$ by nebylo nejlepším přiblížením druhého druhu; je tedy $\frac{a}{b} \geqq a_0$. V takovém případě zlomek $\frac{a}{b}$, nesplývá-li s žádným ze sblížených zlomků, nutně buď leží mezi dvěma sblíženými zlomky $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ stejné parity, nebo je větší než $\frac{p_1}{q_1}$. V prvním případě

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| \geqq \frac{1}{bq_{k-1}}$$

a

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \left|\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k-1}},$$

odkud

$$b > q_k; \tag{27}$$

na druhé straně

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right| \geqq \left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}-\frac{a}{b}\right| \geqq \frac{1}{bq_{k+1}},$$

a tedy

$$|b\alpha-a| \geqq \frac{1}{q_{k+1}},$$

kdežto

$$|q_k\alpha-p_k| \leqq \frac{1}{q_{k+1}},$$

odkud

$$|q_k\alpha-p_k| \leqq |b\alpha-a|. \tag{28}$$

Vztahy (27) a (28) ukazují, že $\frac{a}{b}$ není nejlepší přiblížení druhého druhu.

Ve druhém případě $\left(\text{t. j., je-li } \frac{a}{b} > \frac{p_1}{q_1}\right)$ máme

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right| > \left|\frac{p_1}{q_1}-\frac{a}{b}\right| \geqq \frac{1}{bq_1},$$

odkud

$$|b\alpha-a| > \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1}.$$

Na druhé straně je patrně

$$|1\,.\,\alpha-a_0| \leqq \frac{1}{a_1},$$

takže

$$|b\,\alpha-a| > |1\,.\,\alpha-a_0|,\ 1 \leqq b,$$

což znovu odporuje pojmu nejlepšího přiblížení druhého druhu. Tak je věta 16 dokázána úplně.

Všimněme si nyní otázky, je-li možno věty 15 a 16 obrátit. Především, jak lze snadno nahlédnout, větu 15 nelze obrátit: vsunuté zlomky nejsou nutně nejlepšími přiblíženími prvního druhu; tak pro číslo $\alpha = \frac{4}{5}$ je zlomek $\frac{1}{1}$, jak lze snadno nahlédnout, vsunutým zlomkem. Není však nejlepším přiblížením (prvního druhu), neboť

$$|\tfrac{4}{5}-\tfrac{1}{1}| < |\tfrac{4}{5}-\tfrac{1}{2}|,\ 1 < 2.$$

Příkladů podobného druhu lze si představit libovolné množství, o čemž se čtenář může sám bez námahy přesvědčit.

Naproti tomu věta 16 připouští skoro úplné obrácení, což ovšem zvyšuje její mimořádný význam.

Věta 17. *Každý sblížený zlomek je nejlepším přiblížením druhého druhu; jedinou* (triviální) *výjimkou je*

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{2}, \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}.$$

Předběžná poznámka. V případě $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ není zlomek $\dfrac{p_0}{q_0} = \dfrac{a_0}{1}$ skutečně nejlepším přiblížením druhého druhu, neboť

$$|1 \cdot \alpha - (a_0 + 1)| = 1|1 \cdot \alpha - a_0|.$$

Důkaz. Všimněme si formy

$$|y\alpha - x|, \tag{29}$$

kde y probíhá hodnotami $1, 2, \ldots, q_k$ a x může nabývat libovolných celých hodnot. Označíme y_0 tu hodnotu y, při níž forma (29) po příslušném výběru x nabývá nejmenší možné hodnoty. (Je-li takových hodnot y několik, zvolíme za y_0 *nejmenší z nich.*) Tu hodnotu x, při níž $|y_0\alpha - x|$ nabývá onoho minima, označíme x_0. Snadno se přesvědčíme, že tato hodnota je *jediná*. Skutečně, kdybychom měli

$$\left|\alpha - \frac{x_0}{y_0}\right| = \left|\alpha - \frac{x_0'}{y_0}\right| \qquad (x_0 \neq x_0'),$$

bylo by patrně

$$\alpha = \frac{x_0 + x_0'}{2y_0}.$$

Tvrdíme, že tento zlomek je irreducibilní. Kdyby totiž bylo

$$x_0 + x_0' = lp, \; 2y_0 = lq \; (l > 1),$$

bylo by v případě $l > 2$

$$q < y_0, \quad \alpha = \frac{p}{q}, \; |q\alpha - p| = 0,$$

což odporuje definici y_0; je-li $l = 2$, pak $q = y_0$

$$|q\alpha - p| = |y_0\alpha - p| = 0 < |y_0\alpha - x_0|,$$

což odporuje definici x_0.

Rozvineme-li racionální číslo α v řetězec, dostaneme

$$\alpha = \frac{p_n}{q_n}, \; p_n = x_0 + x_0', \quad q_n = 2y_0 = a_nq_{n-1} + q_{n-2}, \quad a_n \geqq 2.$$

Je-li tedy $a_n > 2$ nebo je-li $a_n = 2$, $n > 1$, budeme mít $q_{n-1} < y_0$. Avšak

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| = \frac{1}{q_n} = \frac{1}{2y_0} \leqq \tfrac{1}{2} \leqq |y_0\alpha - x_0|,$$

což odporuje definici y_0. Je-li však $n = 1$, $a_n = 2$, je $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$, $y_0 = 1$ a máme opět případ, který jsme vyloučili.

Hodnoty y_0 a x_0 jsou tedy určeny jediným způsobem danými podmínkami. Z toho plyne bezprostředně, že $\frac{x_0}{y_0}$ je nejlepší přiblížení druhého druhu čísla α, jinak by nerovnosti

$$|b\alpha - a| \leqq |y_0\alpha - x_0| \qquad \left(\frac{a}{b} \neq \frac{x_0}{y_0},\ b \leqq y_0\right),$$

patrně odporovaly definici čísel x_0, y_0. Na základě věty 16 máme pak

$$x_0 = p_s,\ y_0 = q_s \quad (s \leqq k).$$

Je-li $s = k$, je věta dokázána. Bylo-li by však $s < k$, měli bychom

$$|q_s\alpha - p_s| > \frac{1}{q_s + q_{s+1}} \geqq \frac{1}{q_{k-1} + q_k},$$

$$|q_k\alpha - p_k| \leqq \frac{1}{q_{k+1}}.$$

Ježto pak na základě určení čísel $p_s = x_0$ a $q_s = y_0$ je

$$|q_s\alpha - p_s| \leqq |q_k\alpha - p_k|,$$

platí

$$\frac{1}{q_{k-1} + q_k} < \frac{1}{q_{k+1}},$$

t. j.

$$q_{k+1} < q_k + q_{k-1},$$

a to není možné na základě zákona o tvoření čísel q_k. Tak je věta 17 dokázána.

Ty vlastnosti aparátu řetězců, které jsme našli v tomto paragrafu, byly s historického hlediska prvním podnětem k odkrytí a zkoumání tohoto aparátu. Huygens si vytkl za cíl sestrojit pomocí ozubených kol model sluneční soustavy a byl tak přiveden k úloze stanovit počet zubů ozubených kol tak, aby poměr těchto čísel pro dvě do sebe zasahující kola (rovný poměru časů jejich úplného otočení) byl pokud možno blízký k poměru α časů oběhu daných planet. Zároveň samozřejmě počet zubů z technických důvodů nemohl být příliš velký. Tak vznikla otázka najít takový racionální zlomek, jehož čitatel a jmenovatel by nepřevyšoval danou mez a který by zároveň ležel pokud možno blízko danému číslu α. (Toto číslo může být theoreticky též iracionální, prakticky však je v daném případě dáno racionálním zlomkem, jehož čitatel a jmenovatel jsou čísla příliš veliká.) Viděli jsme již, že theorie řetězců poskytuje možnost úplně rozřešit úlohu takto danou.

§ 7. Řád přiblížení

V předcházejícím paragrafu jsme se zabývali oceněním malosti rozdílu $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$ u porovnání s jinými rozdíly podobného typu. Nyní se budeme zajímat o ocenění malosti téhož rozdílu sama o sobě, bez ohledu k jiným rozdílům tohoto tvaru. Přirozená cesta k ocenění, jak malá je velikost $\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right|$, je patrně ta, že srovnáváme onen rozdíl s libovolnou ubývající funkcí argumentu q_k. V tomto směru nás věta 9 kap. I ihned vede k nerovnosti[6])

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^2}. \tag{30}$$

Vzniká tudíž především otázka, není-li možno zesílit tuto nerovnost, t. j. zaměnit její pravou stranu jinou funkcí $f(q_k)$ jmenovatele q_k, která by při všech $n \geq 1$ hověla nerovnosti

$$f(n) < \frac{1}{n^2}.$$

Snadno nahlédneme, že chceme-li, aby takto zesílená nerovnost (30) byla splněna pro libovolné α při všech hodnotách k, není možno dosáhnout žádného podstatného zesílení v tomto směru. Přesněji řečeno, ať by bylo $\varepsilon > 0$ jakkoliv malé, lze vždy uvést takový případ, že

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1-\varepsilon}{q_k^2}.$$

Abychom se o tom přesvědčili, všimneme si čísla

$$\alpha = [0; n, 1, n] = \frac{n+1}{n(n+2)},$$

pro které

$$p_1 = 1,\ q_1 = n,\ p_3 = n+1,\ q_3 = n(n+2),$$

a tudíž

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| = \left|\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_1}{q_1}\right| = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{q_1^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}.$$

Stačí pak jen vybrat n v souhlase s nerovností

$$\frac{1}{1+\frac{2}{n}} > 1 - \varepsilon,$$

aby bylo

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| > \frac{1-\varepsilon}{q_1^2}.$$

Vzdáme-li se však požadavku, aby zesílená nerovnost byla splněna při libovolném α *bez výjimky pro všechny* hodnoty k, lze dojít — jak ihned ukážeme — k řadě zajímavých a důležitých tvrzení.

[6]) V případě $\alpha = \frac{p_k}{q_k}$ (kdy věta 9 je nepoužitelná, ježto neexistuje q_{k+1}), se nerovnost (30) stává triviální.

Věta 18. *Má-li číslo α sblížený zlomek řádu $k > 0$, platí nutně aspoň jedna z obou nerovností*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{2q_k^2}, \qquad \left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \frac{1}{2q_{k-1}^2}.$$

Důkaz. Ježto α leží mezi $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_k}{q_k}$, platí

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{2q_k^2} + \frac{1}{2q_{k-1}^2}.$$

(Poslední nerovnost vyjadřuje tu skutečnost, že geometrický střed veličin $\frac{1}{q_k^2}$ a $\frac{1}{q_{k-1}^2}$ je menší než jejich aritmetický střed; rovnost by byla možná jen pro $q_k = q_{k-1}$, což je v našem případě vyloučeno.) Odtud plyne ihned potvrzení věty.

Dokázané tvrzení je zvláště zajímavé proto, že připouští v jistém smyslu obrácení.

Věta 19. *Každý irreducibilní zlomek $\frac{a}{b}$ vyhovující nerovnosti*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}$$

je sblíženým zlomkem čísla α.

Důkaz. Na základě věty 16 stačí ukázat, že zlomek $\frac{a}{b}$ je pro číslo α nejlepším přiblížením druhého druhu. Nechť

$$|d\alpha - c| \leqq |b\alpha - a| < \frac{1}{2b} \qquad \left(d > 0, \frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}\right);$$

pak

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| < \frac{1}{2bd}$$

a tudíž

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| \leqq \left|\alpha - \frac{c}{d}\right| + \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2bd} + \frac{1}{2b^2} = \frac{b+d}{2b^2d}. \tag{31}$$

Na druhé straně, ježto $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, platí

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| \geqq \frac{1}{bd},$$

tudíž nerovnost (31) dává

$$\frac{1}{bd} < \frac{b+d}{2b^2d},$$

odkud $d > b$. Je tedy zlomek $\frac{a}{b}$ skutečně nejlepší přiblížení druhého druhu čísla α a věta 19 je dokázána.

Dalším zesílením věty 18 je další značně hlubší věta.

Věta 20. *Má-li číslo α sblížený zlomek řádu $k > 1$, platí nutně aspoň jedna z těchto tří nerovností:*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}, \qquad \left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_{k-1}^2}, \qquad \left|\alpha - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_{k-2}^2}.$$

Důkaz. Pro $k \geqq 1$ položme

$$\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \varphi_k, \quad \varphi_k + r_k = \psi_k.$$

Pomocná věta. *Je-li* $k \geqq 2$, $\psi_k \leqq \sqrt{5}$, $\psi_{k-1} \leqq \sqrt{5}$, *platí*

$$\varphi_k > \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Ježto totiž

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \varphi_n \tag{32}$$

a

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}},$$

platí

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}} + \frac{1}{r_{n+1}} = \varphi_n + r_n = \psi_n.$$

Proto podle podmínky pomocné věty

$$\varphi_k + r_k \leqq \sqrt{5}, \frac{1}{\varphi_k} + \frac{1}{r_k} \leqq \sqrt{5},$$

odkud

$$(\sqrt{5} - \varphi_k)\left(\sqrt{5} - \frac{1}{\varphi_k}\right) \geqq 1,$$

neboli (ježto φ_k je racionální číslo)

$$5 - \sqrt{5}\left(\varphi_k + \frac{1}{\varphi_k}\right) > 0,$$

odkud (ježto je $\varphi_k > 0$) dostaneme

$$(\tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \varphi_k)^2 < \tfrac{1}{4},$$

a tudíž

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \varphi_k < \tfrac{1}{2},$$

$$\varphi_k > \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

což dokazuje pomocnou větu.

Připusťme nyní, že v rozporu s naším tvrzením

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \geqq \frac{1}{\sqrt{5}q_n^2} \quad (n = k, k-1, k-2).$$

Dle vzorce (16) kap. I máme

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| =$$

$$= \frac{1}{q_n(q_n r_{n+1} + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n^2(r_{n+1} + \varphi_{n+1})} = \frac{1}{q_n^2 \psi_{n+1}},$$

a tudíž

$$\psi_{n+1} \leqq \sqrt{5} \quad (n = k,\ k-1,\ k-2).$$

Podle pomocné věty soudíme odtud, že

$$\varphi_k > \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),\ \varphi_{k+1} > \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

a tedy na základě rovnice (32)

$$a_k = \frac{1}{\varphi_{k+1}} - \varphi_k < \frac{2}{\sqrt{5} - 1} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1,$$

což není možné. Tento rozpor dokazuje patrně větu 20.

Věty 18 a 20 vzbuzují domněnku, že jsou počátkem řetězu tvrzení, který připouští další pokračování. Avšak tato domněnka je mylná. Všimněme si čísla

$$\alpha = [1; 1, 1, \ldots].$$

Položíme-li, jako obvykle, $\alpha = 1 + \frac{1}{r_1}$, dostaneme patrně $r_1 = \alpha$, odkud

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha},\ \alpha^2 - \alpha - 1 = 0,$$

a tudíž

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Ježto je patrně $r_n = \alpha$ při každém n, platí

$$\alpha = \frac{p_k\alpha + p_{k-1}}{q_k\alpha + q_{k-1}}$$

a tudíž

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k(q_k\alpha + q_{k-1})} = \frac{1}{q_k^2\left(\alpha + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right)}.$$

Avšak podle věty 6 kap. I máme

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [1; 1, 1, \ldots, 1] \to \alpha \quad (k \to \infty),$$

odkud

$$\frac{q_{k-1}}{q_k} = \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_k = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) + \varepsilon_k \ (\varepsilon_k \to 0 \text{ pro } k \to \infty).$$

Je tedy

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k^2(\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) + \varepsilon_k)} = \frac{1}{q_k^2(\sqrt{5}+\varepsilon_k)}.$$

To ukazuje, že ať je c jakékoliv číslo $< \frac{1}{\sqrt{5}}$, pro dostatečně velké k budeme mít nutně

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{c}{q_k^2}.$$

Není tedy možno nahradit konstantu $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ve větě 20 žádnou menší konstantou, chceme-li, aby odpovídající nerovnost byla splněna pro nekonečně mnoho hodnot k při libovolném α. Pro každou menší konstantu lze nalézt takové α (totiž $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$), které může vyhovovat oné nerovnosti jen pro konečný počet hodnot. Zejména je řetěz tvrzení počínající větami 18 a 20 přerušen touto poslední větou a nepřipouští dalšího pokračování.

§ 8. Obecné zákony aproximace

Dosud jsme se speciálně zajímali o přiblížení daná sblíženými zlomky a vysvětlili jsme řadu hlavních otázek spojených s touto úlohou. Ježto však jsme si při tom uvědomili, že sblížené zlomky jsou v jistém smyslu nejlepšími přiblíženími, můžeme počítat s tím, že získané výsledky nám dovolí studovat zevrubně zákony, kterými se řídí přiblížení iracionálních čísel racionálními čísly, nezávisle na libovolném speciálním zobrazujícím aparátu. Obrátíme se nyní k tomuto druhu úloh. V rámci této elementární monografie nemůžeme ovšem podat ani trochu úplný výklad základu příslušné theorie, nejen z nedostatku místa, ale hlavně i proto, že to má jen nepřímý vztah k naší úloze. Přirozeně se omezíme na to, že uvedeme řadu elementárních vět, které samy objasní užití řetězců na nauku o aritmetické povaze iracionálních čísel.

První otázku, jež se zde naskytuje, lze v souvislosti s výsledky předešlého paragrafu formulovat takto: pro která kladná c má nerovnost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2} \tag{33}$$

při libovolném reálném α nekonečně mnoho řešení v celých p a $q (q>0)$? Poslední výsledek předešlého paragrafu nás vede snadno k tomuto tvrzení:

Věta 21. *Nerovnost* (33) *má pro libovolné reálné α nekonečně mnoho řešení v celých p a q ($q < 0$), je-li $c \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Je-li $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$, bude mít nerovnost* (33) *při vhodné volbě α jen konečný počet takových řešení.*

První tvrzení je totiž bezprostředním důsledkem věty 20 (v případě, že $\alpha = \frac{a}{b}$ je racionální a tudíž má jen konečný počet sblížených zlomků, lze první tvrzení věty 21

dokázat triviálně, klademe-li $q = nb$, $p = na$, $n = 1, 2, \ldots$). Nechť tedy $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Položíme, jako v paragrafu 7,

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = [1; 1, 1, \ldots].$$

Hoví-li celá čísla p a q ($q > 0$) nerovnosti (33), pak dle věty 19 je $\frac{p}{q}$ sblíženým zlomkem čísla α. Ale na konci paragrafu 7 jsme shledali, že mezi těmito sblíženými zlomky je jen konečný počet takových, které hoví nerovnosti (33), předpokládáme-li $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Tak je naše tvrzení úplně dokázáno.

Tudíž všeobecně, t. j. přihlížíme-li ke všem možným reálným číslům α, není možno přestoupit řád přiblížení charakterisovaný veličinou $\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$. To však neznamená, že neexistují taková zvláštní iracionální čísla α, pro něž jsou možné aproximace značně vyššího řádu. Naopak jsou možnosti v tomto směru naprosto neomezené, o čemž je se možno přesvědčit především pomocí aparátu řetězců.

Věta 22. *Ať je dána jakákoliv kladná funkce $\varphi(q)$ přirozeného argumentu q, lze nalézt iracionální číslo α, pro něž nerovnost*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \varphi(q)$$

má nekonečně mnoho řešení v celých p a q ($q > 0$).

Důkaz. Utvoříme nekonečný řetězec α tak, že budeme vybírat jeho prvky tím způsobem, aby hověly nerovnostem

$$a_{k+1} > \frac{1}{q_k^2\,\varphi(q_k)} \qquad (k \geqq 0),$$

což lze ovšem učinit nekonečně mnoha způsoby (a_0 je možno při tom vybrat libovolně).
Pak bude pro libovolné $k \geqq 0$

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} = \frac{1}{q_k(a_{k+1}\, q_k + q_{k-1})} \leqq \frac{1}{a_{k+1} q_k^2} < \varphi(q_k),$$

což dokazuje větu.

Poznamenejme nyní, že v nejobecnějším případě nerovnosti

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leqq \frac{1}{q_k q_{k+1}},$$

neboli, což je totéž,

$$\frac{1}{q_k^2\left(a_{k+1} + 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right)} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leqq \frac{1}{q_k^2\left(a_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k}\right)}$$

dávají

$$\frac{1}{q_k^2(a_{k+1}+2)} < \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leqq \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}}, \tag{34}$$

odkud je patrné, že při daných $a_0, a_1, \ldots, a_k$ zlomek $\frac{p_k}{q_k}$ tím blíže aproximuje číslo α, čím je větší další prvek; ježto však sblížené zlomky jsou ve všech případech nejlepšími přiblíženími, přicházíme k důsledku, že lepší přiblížení racionálními zlomky připouštějí ta iracionální čísla, mezi jejichž prvky se vyskytují větší čísla. Tato poznámka kvalitativního charakteru je kvantitativně vyjádřena právě nerovnostmi (34). Zvláště budou mít nejslabší řád aproximace iracionální čísla s omezenými prvky. Tak se stává pochopitelným, proč jsme již častěji — ve snaze dostat iracionální číslo, které by nepřipouštělo přiblížení řádu vyššího než je daný — vybrali k tomu číslo

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1) = [1; 1, 1, \ldots];$$

ze všech iracionálních čísel má toto číslo patrně nejmenší možné prvky (nehledíme-li na a_0, které zde nemá žádnou zvláštní úlohu), a tudíž se nejslaběji aproximuje racionálními zlomky.

Ty specifické zvláštnosti aproximace, které jsou vlastní číslům s ohraničenými prvky, jsou úplně vyjádřeny tímto tvrzením, které po všem, co bylo poznamenáno, je skoro samozřejmé.

Věta 23. *Pro každé iracionální číslo α s omezenými prvky nemá nerovnost*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{c}{q^2} \tag{33}$$

při dostatečně malém c řešení v celých p a q ($q > 0$). Naproti tomu pro každé číslo α s neomezenou posloupností prvků má nerovnost (33) *nekonečně mnoho takových řešení.*

Jinak řečeno, iracionála s omezenými prvky připouští řád aproximace ne vyšší než $\frac{1}{q^2}$, naproti tomu iracionála s neomezenými prvky připouští libovolně vysoký řád aproximace.

Důkaz. Jsou-li mezi prvky řetězce zobrazujícího α prvky libovolně velké, lze pro libovolné $c > 0$ nalézt nekonečně mnoho hodnot k, při nichž

$$a_{k+1} > \frac{1}{c},$$

a tudíž podle druhé z nerovností (34) budeme mít pro nekonečně mnoho k

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{c}{q_k^2},$$

čímž je dokázáno druhé tvrzení věty.

Existuje-li takové $M > 0$, že

$$a_k < M \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

je podle první z nerovností (34) pro libovolné $k \geqq 0$

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{q_k^2 (M + 2)}.$$

Z toho dostaneme pro libovolnou dvojici celých čísel p a q ($q > 0$), určíme-li index k nerovnostmi

$$q_{k-1} < q \leqq q_k$$

a uvážíme-li, že všechny sblížené zlomky jsou nejlepšími přiblíženími prvního druhu,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geqq \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{q_k^2(M + 2)} =$$

$$= \frac{1}{q^2(M + 2)} \left(\frac{q}{q_k} \right)^2 > \frac{1}{q^2(M + 2)} \left(\frac{q_{k-1}}{q_k} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{q^2(M + 2)} \left(\frac{q_{k-1}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} \right)^2 >$$

$$> \frac{1}{q^2(M + 2)} \frac{1}{(a_k + 1)^2} > \frac{1}{(M + 2)(M + 1)^2 q^2}.$$

Zvolíme-li tudíž

$$c < \frac{1}{(M + 2)(M + 1)^2},$$

nemůže být nerovnost (33) splněna ani pro jednu z dvojic čísel p a q ($q > 0$). Tím je dokázáno i první tvrzení naší věty.

Dosud jsme oceňovali blízkost aproximace malostí rozdílu $\alpha - \frac{p}{q}$. Mohli bychom si však i zde, podobně jako jsme to činili v paragrafu 6, všímat místo toho rozdílu $q\alpha - p$ a ve všech větách námi dokazovaných provést příslušnou změnu formulace. Tato prostá poznámka ihned vede k novému významnému hledisku při problému, který studujeme.

Jednoduchá lineární homogenní rovnice se dvěma neznámými x, y,

$$\alpha x - y = 0, \tag{35}$$

kde α je dané iracionální číslo, nemůže být přesně řešena celými čísly.[7]) Je však možno dát za úlohu přibližné řešení této rovnice, t. j. výběr takových celých čísel x, y, pro něž rozdíl dostihuje určitého stupně malosti. Je patrné, že všechny předešlé věty tohoto paragrafu mohou být vykládány jako věty o zákonitostech řídících přibližná řešení

[7]) Nehledě ovšem k triviálnímu řešení $x = y = 0$.

rovnice (35) celými čísly tohoto druhu. Tak na př. věta 21 ukazuje, že vždy existuje nekonečně mnoho takových celých čísel x a y ($x > 0$), pro něž

$$|\alpha x - y| < \frac{C}{x}, \tag{36}$$

je-li C kladné číslo ne menší než $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

S tohoto nového hlediska je přirozené přejít od homogenní rovnice (35) k nehomogenní rovnici

$$\alpha x - y = \beta, \tag{37}$$

kde β je libovolně dané reálné číslo, a zkoumat možnost i charakter jejího přibližného řešení celými čísly x, y; jinak řečeno zabývat se zákonitostmi vznikajícími při otázce učinit rozdíl $\alpha x - y - \beta$ pokud možno malým při vhodném výběru celých čísel x, y.

Tato otázka byla nejprve položena velikým ruským učencem P. L. Čebyševem, který také podal první hlavní výsledky spojené s touto rovnicí. Později intensivně pokračovalo její zkoumání, hlavně v sovětské aritmetické škole.

První základní zvláštnost odlišující nehomogenní případ od homogenního tkví v tom, že — aby bylo možno učinit veličinu $|\alpha x - y - \beta|$ pro libovolné β libovolně malou vhodným výběrem celých čísel x a y — je podstatným požadavkem, aby číslo α bylo *iracionální* (kdežto v homogenním případě se veličina $|\alpha x - y|$ může stát libovolně malou při *libovolném* α).

Skutečně, je-li $\alpha = \frac{a}{b}$, kde $b > 0$ a a jsou celá čísla, pak — položíme-li $\beta = \frac{1}{2b}$ — budeme při libovolných celých x a y mít

$$|\alpha x - y - \beta| = \left| \frac{2(ax - by) - 1}{2b} \right| \geqq \frac{1}{2b},$$

ježto $|2(ax - by) - 1|$ jako liché celé číslo je aspoň rovno 1.

Budeme tudíž v dalším stále považovat číslo α za iracionální. Při této podmínce, jak se hned přesvědčíme, nejen je možno veličinu $|\alpha x - y - \beta|$ učinit libovolně malou, nýbrž analogie s homogenním případem jde ještě mnohem dále.

Věta 24 (Čebyševova). *Pro libovolné iracionální číslo α a libovolné reálné číslo β má nerovnost*

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{3}{x}$$

nekonečně mnoho řešení celými čísly x a y ($x > 0$).

Předběžná poznámka. Je patrné, že tento výsledek je zcela analogický s odpovídající vlastností homogenní rovnice vyjádřené větou 21. Rozdíl je jen v tom, že místo konstanty $\frac{1}{\sqrt{5}}$ je zde konstanta 3; řád aproximace zůstává týž jako dříve. Poznamenejme ještě, že číslo 3 není zde nejmenší možné a že přesná hodnota dolní meze (infimum) těch čísel, kterými je lze zaměnit bez porušení správnosti věty 24, je podstatně menší.

Důkaz. Nechť je $\frac{p}{q}$ libovolný sblížený zlomek čísla α; pak je

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\delta}{q^2} \qquad (0 < |\delta| < 1). \tag{38}$$

Dále můžeme, ať je β jakékoliv reálné číslo, určit takové celé číslo t, že

$$|q\beta - t| \leqq \tfrac{1}{2},$$

odkud

$$\beta = \frac{t}{q} + \frac{\delta'}{2q} \qquad (|\delta'| \leqq 1). \tag{39}$$

Ježto čísla p a q jsou nesoudělná, existuje dvojice celých čísel x, y hovící vztahům[8])

$$\tfrac{1}{2}q \leqq x < \tfrac{3}{2}q, \; px - qy = t.$$

Avšak v tomto případě budeme mít na základě vztahů (38) a (39)

$$|\alpha x - y - \beta| = \left| \frac{xp}{q} + \frac{x\delta}{q^2} - y - \frac{t}{q} - \frac{\delta'}{2q} \right| =$$
$$= \left| \frac{x\delta}{q^2} - \frac{\delta'}{2q} \right| < \frac{x}{q^2} + \frac{1}{2q},$$

a ježto

$$q > \tfrac{2}{3}x,$$

bude

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{9}{4x} + \frac{3}{4x} = \frac{3}{x}.$$

Protože lze zvolit číslo q libovolně velké a protože platí $x \geqq \frac{1}{2}q$, je také x libovolně velké; tak je patrně věta dokázána.

Avšak úloha o přibližném řešení rovnice (37) celými čísly může být dána ještě v jiném tvaru, snad dokonce trochu přirozenějším. Ježto podstata úlohy tkví v tom, učinit veličinu $|\alpha x - y - \beta|$ pokud možno malou pomocí výběru nepříliš velkých celých čísel x, y, je nejpřirozenější položit úlohu takto. Víme (podle právě dokázané věty 24),

---

[8]) *Důkaz* tohoto tvrzení. Je-li $\frac{r}{s}$ sblížený zlomek čísla α bezprostředně předcházející $\frac{p}{q}$, platí

$$qr - ps = \varepsilon = \pm 1, \; q(\varepsilon rt) - p(\varepsilon st) = t\varepsilon^2 = t$$

a pro libovolné celé k

$$p(kq - \varepsilon st) - q(kp - \varepsilon rt) = t;$$

k lze však zvolit tak, že

$$\tfrac{1}{2}q \leqq x = kq - \varepsilon st < \tfrac{3}{2}q.$$

• Srovnej • § 6. •

že je možno, je-li dáno libovolně velké kladné číslo n, pro libovolné iracionální α a libovolné reálné β stanovit celá čísla $x > 0$, y hovící nerovnosti

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n}. \tag{40}$$

Avšak věta 24 nám nedává obecně poučení o tom, v jakých mezích je třeba hledat tato čísla, abychom dosáhli potřebné přesnosti charakterisované velikostí $\frac{1}{n}$. Toho by bylo na př. dosaženo, kdybychom mohli najít číslo N, závislé na n, nezávislé však ani na α ani na β, takové, že nerovnosti (40) bylo by možno vyhovět při doplňující podmínce

$$|x| \leqq N.$$

Je patrné, že nová formulace úlohy se podstatně liší od formulace, jíž jsme se dosud zabývali. Byla-li dříve (jako ve větě 24) přesnost aproximace určena v závislosti na velikosti čísla x, nyní určujeme tuto přesnost předem a tážeme se naopak, jak velké je nutno zvolit číslo x, aby bylo dosaženo oné dané přesnosti. V souhlase s tímto rozdílem ve formulaci úlohy nabývá i odpověď podstatně jiného charakteru; zejména dostaneme různé výsledky pro homogenní a nehomogenní případ.

V případě homogenní rovnice ($\beta = 0$) má vytčená úloha zcela jednoduché řešení.

Věta 25. *Ať jsou $n \geqq 1$ a α jakákoliv reálná čísla, lze nalézt celá čísla x, y hovící nerovnostem*

$$0 < x \leqq n, \quad |\alpha x - y| < \frac{1}{n}.$$

Důkaz. Je-li α racionální, $\alpha = \frac{a}{b}$ a $0 < b \leqq n$, dokáže se věta triviálně, klademe-li $x = b$, $y = a$. Není-li možno α znázornit v takovém tvaru, t. j. je-li α buď iracionální číslo, nebo racionální zlomek se jmenovatelem převyšujícím n, pak, určíme-li index k vztahem

$$q_k \leqq n < q_{k+1}$$

(kde $\frac{p_k}{q_k}$ značí sblížené zlomky čísla α), dostaneme

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leqq \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k n},$$

tudíž

$$|\alpha q_k - p_k| < \frac{1}{n}, \quad 0 < q_k \leqq n,$$

což dokazuje větu.

Nyní musíme přirozeně položit otázku, není-li možno i v případě nehomogenní rovnice (37) stanovit týž řád aproximace. Jinými slovy, je-li možno dokázat, že pro libovolné iracionální číslo α lze nalézt takové kladné číslo C, že při libovolných reálných číslech $n \geqq 1$ a β existují celá čísla x a y vyhovující nerovnostem

$$0 < x \leqq Cn, \quad |\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n}.$$

Přitom patrně potřebujeme dokonce méně než to, co bylo dokázáno pro homogenní případ, ježto připouštíme závislost C na α, kdežto v homogenním případě $C = 1$ je absolutní konstantou.) Není nesnadno uvést některé apriorní úvahy proti možnosti takového předpokladu; především pro racionální α je patrně nesprávný, neboť v tomto případě, jak jsme viděli výše, nemůžeme obecně (t. j. při libovolném β) volit veličinu $|\alpha x - y - \beta|$ libovolně malou. To dovoluje očekávat, že, je-li α iracionální, avšak je aproximováno neobyčejně blízce racionálními čísly, pak veličina $|\alpha x - y - \beta|$, třeba může být dle věty 24 učiněna libovolně malou, vyžaduje k tomu nicméně při vhodně zvoleném β a daném stupni přesnosti značně větších hodnot x a y. Avšak tyto úvahy dovolují dále předpokládat, že přiblížení rozdílu $\alpha x - y$ k libovolnému reálnému číslu β se dosáhne tím snadněji, čím slaběji je číslo α aproximováno racionálními zlomky, t. j. čím nesnadněji se dosáhne přiblížení veličiny $\alpha x - y$ k nule; to však se své strany vyžaduje, jak víme, aby prvky čísla nerostly příliš rychle. Všechny tyto předběžné úvahy jsou nejen potvrzeny, nýbrž i přesněji kvantitativně vyjádřeny větou:

Věta 26. *Aby existovalo reálné číslo C s tou vlastností, že při libovolných reálných $n \geqq 1$ a β lze nalézt dvojici celých čísel x a y $(x > 0)$ hovící nerovnosti*

$$x \leqq Cn, \quad |\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n},$$

je nutné a postačí, aby se iracionální číslo α dalo vyjádřit řetězcem s omezenými prvky.

Důkaz. Nechť je

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

a nechť $a_i < M\,(i = 1, 2, \ldots)$; nechť je dále $m \geqq 1$ a β libovolné reálné číslo. Označíme-li $\frac{p_k}{q_k}$ sblížené zlomky čísla α, určíme index k nerovností

$$q_k \leqq m < q_{k+1};$$

pak

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{m q_k},$$

neboli

$$\alpha = \frac{p_k}{q_k} + \frac{\delta}{m q_k} \quad (|\delta| \leqq 1). \tag{41}$$

Dále zvolíme celé číslo t tak, aby bylo

$$|\beta q_k - t| \leqq \tfrac{1}{2},$$

odkud

$$\beta = \frac{t}{q_k} + \frac{\delta'}{2 q_k} \quad (|\delta'| \leqq 1). \tag{42}$$

Konečně, jako při důkazu věty 24, určeme dvojici celých čísel x, y, jež hoví vztahu

$$x p_k - y q_k = t, \quad 0 < x \leqq q_k.$$

Z (41), (42) a (43) plyne

$$|\alpha x - y - \beta| = \left| \frac{xp_k}{q_k} - y - \frac{t}{q_k} + \frac{x\delta}{mq_k} - \frac{\delta'}{2q_k} \right| =$$

$$= \left| \frac{x\delta}{mq_k} - \frac{\delta'}{2q_k} \right| < \frac{x}{mq_k} + \frac{1}{2q_k} \leqq \frac{1}{m} + \frac{1}{2q_{k+1}} \left(\frac{q_{k+1}}{q_k} \right) <$$

$$< \frac{1}{m} + \frac{1}{2m} (a_{k+1} + 1) < \frac{1}{m} + \frac{M+1}{2m} = \frac{M+3}{2m}.$$

Dosud zůstávalo číslo $m \geqq 1$ naprosto libovolné. Položíme-li nyní, při daném $n \geqq 1$, $m = \frac{1}{2}(M + 3)\,n$, budeme mít patrně $m \geqq 1$. Tudíž podle předcházejícího, volíme-li x a y, jak bylo naznačeno,

$$0 < x \leqq q_k \leqq m = \tfrac{1}{2}(M + 3)\,n,$$

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n},$$

čímž je dokázána první část věty.

Abychom dokázali druhou část, připustíme, že mezi prvky a_k čísla α jsou prvky libovolně velké. V takovém případě, jak ukazuje věta 23, ať je ε jakkoliv malé kladné číslo, lze nalézt celá čísla $q > 0$, p hovící nerovnosti

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon^2}{q^2},$$

odkud

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\delta\varepsilon^2}{q^2} \qquad (|\delta| < 1).$$

Položme nyní $n = \dfrac{q}{\varepsilon}$ a $\beta = \dfrac{1}{2q}$. Pro libovolná celá x, y $(0 < x \leqq Cn)$ pak dostaneme

$$|\alpha x - y - \beta| = \left| \frac{xp}{q} - y - \frac{1}{2q} + \frac{x\delta\varepsilon^2}{q^2} \right| = \left| \frac{2(xp - yq) - 1}{2q} + \frac{x\delta\varepsilon^2}{q^2} \right| >$$

$$> \frac{|2(xp - yq) - 1|}{2q} - \frac{x\varepsilon^2}{q^2} \geqq \frac{1}{2q} - \frac{C\varepsilon}{q} = \frac{1 - 2C\varepsilon}{2q} = \frac{1 - 2C\varepsilon}{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{n}.$$

Ať by bylo C jakkoliv velké, pro dostatečně malé ε budeme však mít $\dfrac{1 - 2C\varepsilon}{2\varepsilon} > 1$, a tudíž, pro libovolná celá x, y $(0 < x \leqq Cn)$

$$|\alpha x - y - \beta| > \frac{1}{n},$$

čímž je dokázána i druhá část věty.

Shrňme výsledky, kterých jsme dosáhli. Sledujeme-li přibližná řešení rovnice (37) celými čísly, je dlužno považovat za „normální" případ ten, kdy přesnosti charakterisované veličinou $\dfrac{1}{n}$ může být dostiženo pro libovolné $n \geqq 1$ při některém $x < Cn$, kde C je konstanta (která může záviset na α). Homogenní rovnice (t. j. rovnice, kterou dostaneme pro $\beta = 0$) má vždy normální řešení (věta 25). Věta 26 ukazuje, že obecná (nehomogenní) rovnice připouští normální řešení v tom a jen v tom případě, nemá-li příslušná homogenní rovnice „nadnormální" řešení, t. j. nelze-li ji splnit pro libovolné $\varepsilon > 0$ a vhodně vybrané n s přesností $\frac{1}{n}$ celými čísly $x > 0, y$, z nichž $x < \varepsilon n$. S tohoto hlediska může se výsledek našich úvah považovat za zvláštní případ zákona o řešení lineálních rovnic (algebraických, integrálních, atd.): *nehomogenní rovnice se v obecném případě řeší „normálně", nepřipouští-li homogenní rovnice „nadnormální" řešení.*

Poznamenejme ještě, že ve větě 26 jsme požadovali nezávislost C na β. Bylo by možno zachovat týž výsledek a při tom připustit, že C je funkcí β; toliko důkaz (jeho druhé části) by byl poněkud složitější.

§ 9. Aproximace algebraických irracionálních čísel. Transcendentní čísla Liouvilleova

Nechť je

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{44}$$

mnohočlen stupně n s *celými* koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Číslo α, které je kořenem takového mnohočlenu, se nazývá *algebraickým.* Ježto každé racionální číslo $\alpha = \frac{a}{b}$ může být určeno jako kořen rovnice prvního stupně $bx - a = 0$, je pojem algebraického čísla patrně přirozeným zevšeobecněním pojmu racionálního čísla. Hoví-li dané algebraické číslo rovnici $f(x) = 0$ stupně n a nehoví žádné rovnici nižšího stupně (s celými koeficienty), nazývá se *algebraickým číslem stupně n.* Zejména lze racionální čísla definovat jako algebraická čísla prvního stupně. Číslo $\sqrt{2}$, které je kořenem mnohočlenu $x^2 - 2$, je algebraickým číslem druhého stupně nebo, jak se říká, *kvadratickým iracionálním číslem* (kvadratickou irracionálou). Podobným způsobem se definují irracionální čísla kubická, čtvrtého stupně atd. Všechna čísla nealgebraická se nazývají *transcendentní*; mezi ně patří na př. čísla e a π. Vzhledem k význačné úloze, kterou mají algebraická čísla v současné theorii čísel, bylo věnováno mnoho speciálních úvah otázce jejich vlastností vztahujících se na jejich aproximaci racionálními zlomky. Prvním význačným výsledkem v tomto směru byla tato věta, nazývaná větou Liouvilleovou.

Věta 27. *Pro každé reálné irracionální algebraické číslo α stupně n existuje takové kladné číslo C, že při libovolných celých p a q $(q > 0)$ platí*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n}.$$

Důkaz. Nechť je α kořenem mnohočlenu (44). Jak známo z algebry, lze psát

$$f(x) = (x - \alpha) f_1(x), \tag{45}$$

kde $f_1(x)$ je mnohočlen stupně $n - 1$. Přitom lze snadno nahlédnout, že $f_1(\alpha) \neq 0$. Skutečně, v případě $f_1(\alpha) = 0$ by bylo možno mnohočlen $f_1(x)$ dělit (beze zbytku) $x - \alpha$ a mnohočlen $f(x)$ tedy dělit $(x - \alpha)^2$; avšak v takovém případě derivaci $f'(x)$ by bylo možno dělit $x - \alpha$, t. j. bylo by $f'(\alpha) = 0$, což není možné, neboť $f'(x)$ je mnohočlen stupně $n - 1$ s celými koeficienty a α algebraické číslo stupně n. Máme tedy

$$f_1(\alpha) \neq 0,$$

a tudíž lze nalézt takové kladné číslo δ, že

$$f_1(x) \neq 0 \quad (\alpha - \delta \leqq x \leqq \alpha + \delta).$$

Nechť p a q $(q > 0)$ je libovolná dvojice celých čísel. Je-li $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqq \delta$, je $f_1\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, a tudíž, klademe-li do identity (45) $x = \frac{p}{q}$, najdeme

$$\frac{p}{q} - \alpha = \frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{f_1\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{a_0 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + \ldots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n}{f_1\left(\frac{p}{q}\right)} =$$

$$= \frac{a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \ldots + a_np^n}{q^nf_1\left(\frac{p}{q}\right)}.$$

Čitatel posledního zlomku je celé číslo různé od nuly, ježto jinak by bylo $\alpha = \frac{p}{q}$, kdežto α je dle podmínky vyslovené ve větě iracionální. Tudíž tento čitatel je absolutní hodnotou roven aspoň 1. Označíme-li M horní mez (supremum) funkce $f_1(x)$ v intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, dostaneme tudíž z poslední rovnice nerovnost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqq \frac{1}{Mq^n}.$$

V případě však, že

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \delta,$$

máme tím spíše

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{\delta}{q^n};$$

označíme-li tedy C libovolné kladné číslo menší než δ i $\frac{1}{M}$, bude platit ve všech případech (t. j. pro libovolná celá $p, q, q > 0$)

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n},$$

což dokazuje větu 27.

Věta Liouvilleova patrně tvrdí, že algebraická čísla nepřipouštějí takové aproximace racionálními zlomky, která by svou přesností převyšovala nějaký řád závislý v podstatě na stupni daného algebraického čísla. Hlavní historický význam této věty je ten, že ona první umožnila dokázat existenci transcendentních čísel a podala konkretní příklady takových čísel. K tomu, jak shledáme, stačí ustanovit číslo, které je iracionální a dá se neobyčejně blízce aproximovat racionálními čísly. V tom směru, jak známe z věty 22, nejsou naše možnosti nijak ohraničeny.

Konkretně věta 27 ukazuje, že existují-li pro libovolné $C > 0$ a libovolné přirozené n celá čísla p a q $(q > 0)$ hovící nerovnosti:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqq \frac{C}{q^n}, \tag{46}$$

je číslo α transcendentní. Pomocí aparátu řetězců lze však velmi snadno sestrojit taková čísla. K tomu je nutno jen, když už byly vybrány prvky $a_0, a_1, \ldots, a_k$, určit sblížený zlomek $\frac{p_k}{q_k}$ a zvolit

$$a_{k+1} > q_k^{k-1},$$

neboť pak

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2 a_{k+1}} < \frac{1}{q_k^{k+1}}.$$

V důsledku toho je pak patrně splněna nerovnost (46) pro všechny dostatečně velké hodnoty k při libovolném $C > 0$ a libovolném přirozeném čísle n.

§ 10. Kvadratická iracionální čísla a periodické řetězce

Pro kvadratické iracionály ukazuje věta 27, že existuje takové kladné číslo C (závislé na α), pro něž nemůže mít nerovnost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2}$$

řešení v celých p a q $(q > 0)$. Podle věty 23 plyne odtud, že jsou prvky každé kvadratické iracionály omezeny. Avšak pro kvadratické iracionály již dávno před Liouvillem našel Lagrange mnohem obsažnější vlastnost jich vyjádření řetězci, která nad to je charakteristická. Ukazuje se, že posloupnost prvků kvadratické iracionály je periodická, a že naopak každý periodický řetězec dá se vyjádřit kvadratickou iracionálou. Tento paragraf se bude zabývat důkazem tohoto tvrzení.

Řekneme, že řetězec

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

je *periodický*, existují-li taková celá kladná čísla k_0 a h, že při libovolném $k \geqq k_0$ platí

$$a_{k+h} = a_k;$$

analogicky jako u desetinných zlomků budeme značit takový periodický zlomek takto:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}, \overline{a_{k_0}, a_{k_0+1}, \ldots, a_{k_0+h-1}}]. \tag{47}$$

Věta 28. *Každý periodický řetězec zobrazuje kvadratické iracionální číslo a naopak, každá kvadratická iracionála je zobrazena periodickým řetězcem.*

Důkaz. První tvrzení se dokáže několika slovy. Je totiž patrné, že zbytky periodického řetězce (47) vyhovují vztahu

$$r_{k+h} = r_k \quad (k \geqq k_0).$$

Podle vzorce (16) kap. I máme tedy pro $k \geqq k_0$:

$$\alpha = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_{k+h} + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_{k+h} + q_{k+h-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}}, \quad (48)$$

odkud

$$\frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}}.$$

Číslo r_k vyhovuje tedy kvadratické rovnici s celými koeficienty, a je tudíž kvadratickou iracionálou. Pak první z rovnic (48) ukazuje, že také α je kvadratickou iracionálou.

Důkaz obráceného tvrzení je trochu složitější. Nechť číslo α vyhovuje kvadratické rovnici

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \quad (49)$$

s celými koeficienty. Dosadíme-li do této rovnice místo α jeho vyjádření zbytkem řádu n,

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}},$$

vidíme, že r_n vyhovuje rovnici

$$A_n r_n^2 + B_n r_n + C_n = 0, \quad (50)$$

kde A_n, B_n, C_n jsou celá čísla daná vzorci

$$\left.\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2, \\ B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}, \\ C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2, \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

odkud zejména plyne

$$C_n = A_{n-1}. \quad (52)$$

Pomocí těchto vzorců lze snadno bezprostředně ověřit, že

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (b^2 - 4ac)(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2})^2 = b^2 - 4ac, \quad (53)$$

t. j. že diskriminant rovnice (50) je pro všechna n týž a je roven diskriminantu rovnice (49).

Dále ježto

$$\left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{1}{q_{n-1}^2},$$

platí

$$p_{n-1} = \alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}} \qquad (|\delta_{n-1}| < 1).$$

První ze vzorců (51) nám tudíž dává

$$A_n = a\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2 + b\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right) q_{n-1} + c q_{n-1}^2 =$$

$$= (a\alpha^2 + b\alpha + c)\, q_{n-1}^2 + 2a\alpha\delta_{n-1} + a\frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\delta_{n-1}.$$

Odtud podle rovnice (49)

$$|A_n| = \left|2a\alpha\delta_{n-1} + a\frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\delta_{n-1}\right| < 2|a\alpha| + |a| + |b|,$$

a dále podle rovnice (52)

$$|C_n| = |A_{n-1}| < 2|a\alpha| + |a| + |b|.$$

Jsou tedy koeficienty A_n a C_n rovnice (50) omezeny co do absolutní hodnoty a tak při změně n mohou nabývat jen konečného počtu hodnot. Podle (53) odtud plyne, že i B_n může nabývat jen konečného počtu různých hodnot.

Můžeme se tudíž při vzrůstu n od 1 do ∞ setkat jen s konečným počtem různých rovnic (50; v takovém případě může r_n nabývat jen konečného počtu různých hodnot, a je tudíž pro vhodně zvolená k a h

$$r_k = r_{k+h}.$$

To ukazuje, že řetězec zobrazující α je periodický. Tím je dokázána i druhá část naší věty.

Pro algebraické iracionály vyšších stupňů nejsou známy vlastnosti jejich zobrazujících řetězců analogické s tím, co právě dokázáno. Vůbec vše, co je známo o aproximaci algebraických iracionál vyšších stupňů racionálními zlomky, je vyčerpáno elementárními důsledky věty Liouvilleovy a některých novějších vět, jež ji zesilují. Nutno říci, že až dosud není znám ani pro jediné algebraické číslo vyššího než druhého stupně rozklad v řetězec. Není známo, může-li mít takový rozklad omezené prvky; rovněž není známo, může-li být naopak posloupnost prvků neomezená atd. Vůbec otázky spojené s rozkladem algebraických čísel vyššího stupně v řetězce jsou mimořádně nesnadné a nebyly dosud zkoumány.