KAPITOLA I.

VLASTNOSTI APARÁTU

§ 1. Úvod

Řetězcem budeme nazývat výraz tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}} \qquad (1)$$

nekonečný

Zde značí písmena $a_0, a_1, a_2, \dots$ při nejobecnějším pojetí předmětu nezávisle proměnné; je-li třeba, je možno stanovit, že tyto proměnné probíhají hodnoty nějakého oboru. Tak je možno považovat $a_0, a_1, a_2, \dots$ za reálná nebo komplexní čísla, nebo za funkce jedné či několika proměnných atd. V souhlase s cílem naší knihy budeme považovat $a_1, a_2, \dots$ stále za *kladná čísla*; a_0 může být *libovolné* reálné číslo. Tato čísla nazveme *prvky* daného řetězce. Počet prvků může být konečný nebo nekonečný. V prvním případě napíšeme daný řetězec ve tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+ \cfrac{1}{a_n}}}} \qquad (2)$$

konečný

a nazveme jej *konečným* řetězcem, přesněji řetězcem s n členy, nebo n-členným řetězcem (takže n-členný řetězec má $n + 1$ prvků). Ve druhém případě napíšeme řetězec ve tvaru (1) a nazveme jej *nekonečným*.

Každý konečný řetězec je výsledkem konečného počtu racionálních úkonů nad jeho prvky. Za našich předpokladů o prvcích vyjadřuje tudíž konečný řetězec reálné číslo. Jsou-li speciálně všechny prvky řetězce čísla racionální, je i sám řetězec racionálním číslem.

Naproti tomu nekonečnému řetězci nemůžeme bezprostředně přiřadit žádnou číselnou hodnotu. Sám o sobě představuje nanejvýš — neučiníme-li dalších úmluv — pouze formální způsob psaní, podobně jako nekonečná řada, neučiníme-li ustanovení o její konvergenci. Nicméně může být předmětem matematických úvah.

V dalším budeme nekonečný řetězec (1) psát ve tvaru

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] \qquad (3)$$

a konečný řetězec (2) ve tvaru

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]. \qquad (4)$$

Bude tedy počet členů konečného řetězce roven počtu symbolů (prvků) za středníkem.

Řetězec

$$s_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k],$$

kde $0 \leqq k \leqq n$, nazveme *úsekem* řetězce (4). Podobně nazveme s_k při libovolném $k \geqq 0$ úsekem nekonečného řetězce (3). Libovolný úsek libovolného (konečného neb nekonečného) řetězce je patrně konečný řetězec.

Dále nazveme řetězec

$$r_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots, a_n]$$

zbytkem konečného řetězce (4). Podobně řetězec

$$r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots]$$

budeme nazývat zbytkem nekonečného řetězce (3). Všechny zbytky konečného řetězce jsou patrně rovněž konečné řetězce, kdežto zbytky nekonečného řetězce jsou opět nekonečné řetězce.

Pro konečné řetězce platí vztah

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k] \quad (0 \leqq k \leqq n), \tag{5}$$

jak plyne přímo z definice. Analogický vztah

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k] \quad (k \geqq 0)$$

pro nekonečné řetězce může mít význam jen jako (triviální) formální způsob psaní, ježto číselná hodnota prvku r_k na pravé straně této rovnice, vyjádřeného nekonečným řetězcem, není (zatím) definována.

§ 2. Sblížené zlomky

Každý konečný řetězec

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n],$$

jako výsledek konečného počtu racionálních úkonů nad jeho prvky, je racionální funkcí těchto prvků a dá se tudíž vyjádřit jako podíl dvou mnohočlenů

$$\frac{P(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{Q(a_0, a_1, \ldots, a_n)}$$

v $a_0, a_1, \ldots, a_n$ s celými koeficienty. Nabývají-li prvky číselných hodnot, je řetězec vyjádřen ve tvaru obyčejného zlomku $\frac{p}{q}$; avšak takové vyjádření není patrně jediné. Pro další je důležité, abychom měli nějak definované vyjádření konečného řetězce ve tvaru obyčejného zlomku — vyjádření, které nazveme *kanonické*. Takové vyjádření určíme pomocí indukce.

Pro řetězec $[a_0] = a_0$ s počtem členů 0 zvolíme jako kanonické vyjádření zlomek $\frac{a_0}{1}$.

Nechť je nyní dáno kanonické vyjádření pro řetězce s počtem členů menším než n. V n-členném řetězci $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ můžeme dle vzorce (5) položit

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; r_1] = a_0 + \frac{1}{r_1};$$

zde

$$r_1 = [a_1; a_2, \ldots, a_n]$$

je n — 1-členný řetězec, pro který je tedy kanonické vyjádření již určeno; nechť má tvar

$$r_1 = \frac{p'}{q'};$$

pak

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{q'}{p'} = \frac{a_0p' + q'}{p'}.$$

Tento zlomek zvolíme za kanonické vyjádření řetězce $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$; položíme-li

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = \frac{p}{q},$$

$$r_1 = [a_1; a_2, \ldots, a_n] = \frac{p'}{q'},$$

dostaneme tudíž pro čitatele a jmenovatele kanonického vyjádření vztahy

$$p = a_0p' + q', \ q = p'. \tag{6}$$

Zároveň vidíme, že byla takto jednoznačně určena kanonická vyjádření pro konečné řetězce s libovolným počtem členů.

V theorii řetězců mají zvláště důležitou úlohu kanonická vyjádření úseků daného (konečného neb nekonečného) řetězce $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$; kanonické vyjádření úseku

$$s_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$$

onoho řetězce označíme $\frac{p_k}{q_k}$ a nazveme je *sblíženým zlomkem řádu k* daného řetězce α. Pojem je definován zcela jednoznačně pro konečné i nekonečné řetězce α. Rozdíl je pouze v tom, že konečný řetězec má konečný počet sblížených zlomků, kdežto nekonečný řetězec jich má nekonečně mnoho. Pro n-členný řetězec α je patrně

$$\frac{p_n}{q_n} = \alpha;$$

takový řetězec má celkem $n + 1$ sblížených zlomků (řádů $0, 1, 2, \ldots, n$).

Věta 1. (Zákon znázornění sblížených zlomků.) *Pro libovolné* $k \geq 2$

$$\left.\begin{aligned} p_k &= a_kp_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k &= a_kq_{k-1} + q_{k-2}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Důkaz. V případě $k = 2$ se vzorce (7) ověří bezprostředně. Předpokládejme jejich platnost pro všechna $k < n$; všimněme si řetězce

$$[a_1; a_2, \ldots, a_n]$$

a označme $\frac{p_r'}{q_r'}$ jeho sblížené zlomky řádu r. Podle vzorce (6)

$$p_n = a_0 p_{n-1}' + q_{n-1}',$$
$$q_n = p_{n-1}',$$

a ježto dle našeho předpokladu

$$p_{n-1}' = a_n p_{n-2}' + p_{n-3}',$$
$$q_{n-1}' = a_n q_{n-2}' + q_{n-3}'$$

(zde je a_n a nikoliv a_{n-1}, ježto řetězec $[a_1; a_2, \ldots, a_n]$ začíná a_1 a nikoliv a_0), je dle vzorce (6)

$$\begin{aligned} p_n &= a_0(a_n p_{n-2}' + p_{n-3}') + (a_n q_{n-2}' + q_{n-3}') = \\ &= a_n(a_0 p_{n-2}' + q_{n-2}') + (a_0 p_{n-3}' + q_{n-3}') = \\ &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n p_{n-2}' + p_{n-3}' = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Právě stanovené rekurentní vzorce (7), vyjadřující čitatele a jmenovatele sblíženého zlomku řádu n pomocí prvku a_n a pomocí čitatelů a jmenovatelů dvou předcházejících sblížených zlomků, jsou formálním základem celé theorie řetězců.

Poznámka. Někdy je vhodné zavést také sblížený zlomek řádu —1, při čemž se položí $p_{-1} = 1$ a $q_{-1} = 0$. Při této dohodě (a jen při ní) zachovává vzorec (7) platnost i pro $k = 1$.

Věta 2. *Pro všechna $k \geqq 0$*

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k. \tag{8}$$

Důkaz. Násobíme-li vzorce (7) resp. q_{k-1} a p_{k-1} a odečteme pak první od druhého, najdeme

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}),$$

a ježto

$$q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1} = 1,$$

je věta dokázána.

Důsledek. *Pro všechna $k \geqq 1$*

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}. \tag{9}$$

Věta 3. *Pro všechna $k \geqq 1$*

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k.$$

Důkaz. Násobíme-li vzorce (7) resp. q_{k-2} a p_{k-2} a odečteme pak první od druhého, dostaneme pomocí věty 2:

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = a_k(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = (-1)^{k-1} a_k,$$

jak jsme chtěli dokázat.

Důsledek. *Pro všechna* $k \geqq 2$

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k\, q_{k-2}}. \tag{10}$$

Řada jednoduchých výsledků, které jsme dostali, dovoluje nám snadno odvodit velmi důležité důsledky o vzájemném rozložení sblížených zlomků daného řetězce. Rovnice (10) totiž ukazuje, že sblížené zlomky sudých řádů tvoří rostoucí posloupnost, kdežto sblížené zlomky lichých řádů tvoří klesající posloupnost (samozřejmě za předpokladu, že všechny prvky počínaje a_1 jsou kladné). Ježto dle rovnice (9) je každý zlomek lichého řádu větší než zlomek sudého řádu bezprostředně následující, je patrně i každý sblížený zlomek lichého řádu nutně větší než libovolný sblížený zlomek sudého řádu, takže docházíme k tomuto závěru:

Věta 4. *Sblížené zlomky sudého řádu tvoří rostoucí posloupnost, kdežto sblížené zlomky lichého řádu tvoří posloupnost klesající. Přitom libovolný sblížený zlomek lichého řádu je větší než libovolný sblížený zlomek sudého řádu.*

Speciálně je patrně pro konečný řetězec α každý sblížený zlomek sudého řádu menší než α, kdežto každý sblížený zlomek lichého řádu je větší než α (ovšem s výjimkou posledního sblíženého zlomku rovného α).

Zakončíme tento paragraf důkazem dvou jednoduchých, avšak velmi důležitých tvrzení, týkajících se čitatelů a jmenovatelů sblížených zlomků.

Věta 5. *Pro všechna* k $(1 \leqq k \leqq n)$

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}; \tag{11}$$

(zde p_i, q_i, r_i se vztahuje na řetězec na levé straně rovnice).

Důkaz. Dle vzorce (5)

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k].$$

Řetězec na pravé straně této rovnice má patrně jako sblížené zlomky řádu $k - 2$ a $k - 1$ resp. zlomek $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Pro jeho sblížený zlomek řádu k, $\frac{p'_k}{q'_k}$, je dle vzorce (7)

$$p'_k = p_{k-1} r_k + p_{k-2}, \quad q'_k = q_{k-1} r_k + q_{k-2}.$$

Ježto

$$\frac{p'_k}{q'_k} = [a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, r_k] = [a_0, a_1, \ldots, a_n],$$

je věta dokázána.

Věta 6. *Pro každé $k \geq 1$*

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1].$$

Důkaz. Pro $k = 1$ je tento vztah patrný, ježto nabývá tvaru

$$\frac{q_1}{q_0} = a_1.$$

Nechť $k > 1$ a nechť je již dokázáno, že

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = [a_{k-1}; a_{k-2}, \ldots, a_1]. \tag{12}$$

Na základě vztahu (7) máme

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \left[a_k; \frac{q_{k-1}}{q_{k-2}}\right]$$

a odtud na základě vzorců (5) a (12):

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1],$$

jak jsme chtěli dokázat.

§ 3. Nekonečné řetězce

Každému nekonečnému řetězci

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] \tag{13}$$

odpovídá nekonečná posloupnost sblížených zlomků

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}, \ldots \tag{14}$$

Každý sblížený zlomek je reálné číslo. V případě, že posloupnost (14) má limitu α, označíme přirozeně toto číslo stejným znakem α jako řetězec a budeme psát:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots].$$

Řetězec (13) se v tomto případě nazývá *konvergentní.* Nemá-li posloupnost (14) limitu, řekneme, že řetězec (13) *diverguje.*

Konvergentní řetězce jsou svými vlastnostmi v mnohém ohledu analogické s konečnými řetězci. Jejich základní vlastnost, dovolující jít velmi daleko v této analogii, je vyjádřena tímto tvrzením:

Věta 7. *Konverguje-li nekonečný řetězec (13), konverguje i každý jeho zbytek; naopak, konverguje-li aspoň jeden ze zbytků řetězce (13), konverguje také řetězec (13).*

Důkaz. Označme $\frac{p_k}{q_k}$ sblížené zlomky daného řetězce (13) a $\frac{p'_k}{q'_k}$ sblížené zlomky libovolného jeho zbytku, na příklad r_n.

Na základě vzorce (11) dostaneme patrně

$$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n+k}] = \frac{p_{n-1}\dfrac{p_k'}{q_k'} + p_{n-2}}{q_{n-1}\dfrac{p_k'}{q_k'} + q_{n-2}} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{15}$$

Odtud plyne bezprostředně, že konverguje-li zbytek r_n, t. j. má-li zlomek $\frac{p_k'}{q_k'}$ při $k \to \infty$ limitu, kterou označíme také r_n, má při tom zlomek $\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}$ limitu, a to α, která je rovna

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}; \tag{16}$$

řešíme-li však vztah (15) vzhledem k $\frac{p_k'}{q_k'}$, přesvědčíme se právě týmž postupem o správnosti opačného závěru, čímž je dovršen důkaz věty 7.

Poznamenáváme, že vzorec (16) stanovený pro konvergentní řetězce je zcela analogický se vzorcem (11), který jsme dříve dokázali pro konečné řetězce; pro konvergentní řetězce platí tedy věta analogická s větou 5 pro konečné řetězce.

Pro konvergentní nekonečné řetězce plyne patrně z věty 4 předešlého paragrafu toto tvrzení:

Věta 8. *Hodnota konvergentního nekonečného řetězce je větší než libovolný sblížený zlomek sudého řádu a menší než libovolný sblížený zlomek lichého řádu.*

Důsledek věty 2 předešlého paragrafu nás vede dále na základě věty 8 k dalšímu výsledku, který má základní význam v aritmetických užitích theorie řetězců.

Věta 9. *Hodnota α konvergentního nekonečného řetězce (13) vyhovuje při libovolném $k \geqq 0$ nerovnosti:*[1]

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

Věta 9 platí i pro konečný řetězec

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

pro všechna $k < n$, při čemž v případě $k = n - 1$ se nerovnost změní v rovnost, ježto $\alpha = \frac{p_n}{q_n}$.

[1]) Poznamenáváme, že za učiněných předpokladů platí $q_k > 0$ pro všechna $k \geqq 0$, neboť $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ a odtud dle druhého ze vzorců (7) se najde pomocí indukce $q_k > 0$ pro všechna $k > 1$.

Je-li α hodnota konvergentního nekonečného řetězce (13), nazveme prvky tohoto řetězce také *prvky čísla* α; podobně sblížené zlomky, úseky a zbytky řetězce (13) nazveme resp. sblíženými zlomky, úseky a zbytky čísla α. Podle věty 7 všechny zbytky konvergentního řetězce (13) mají určitou reálnou hodnotu.

Pro nekonečné řetězce lze se přirozeně ptát na kriteria konvergence, podobně jako u nekonečných řad; v případě, jímž se zabýváme, t. j., když $a_i > 0$ pro $i \geqq 1$, lze uvést neobyčejně jednoduché a vhodné kriterium konvergence.

Věta 10. *Ke konvergenci řetězce (13) je nutné a ~~postačí, aby řada~~*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{17}$$

byla divergentní.

Důkaz. Podle věty 4 je patrné, že ke konvergenci řetězce je nutné a postačí, aby ty dvě posloupnosti, o nichž se mluví v oné větě, měly tutéž limitu (existence limity pro každou posloupnost zvláště plyne samozřejmě z věty 4 ve všech případech). A to, jak ukazuje vzorec (9), platí tehdy a jen tehdy, když

$$q_k q_{k+1} \to \infty \qquad (k \to \infty). \tag{18}$$

Podmínka (18) je tudíž nutná a postačující ke konvergenci daného řetězce.

Nechť řada (17) konverguje. Podle druhého vzorce (7)

$$q_k > q_{k-2} \qquad (k \geqq 1).$$

Pro libovolné k máme tudíž buď $q_k > q_{k-1}$, nebo $q_{k-1} > q_{k-2}$. V prvním případě druhý ze vzorců (7) dává

$$q_k < a_k q_k + q_{k-2},$$

a odtud při dostatečně velkých k (když $a_k < 1$, což na základě konvergence řady (17) nutně platí pro $k \geqq k_0$),

$$q_k < \frac{q_{k-2}}{1 - a_k};$$

v druhém případě týž vzorec dává pro $a_k < 1$

$$q_k < (1 + a_k)\, q_{k-1} < \frac{q_{k-1}}{1 - a_k};$$

pro všechna $k \geqq k_0$ tudíž platí

$$q_k < \frac{1}{1 - a_k} q_l,$$

kde $l < k$. Je-li $l \geqq k_0$, lze na q_l užít téže nerovnosti. Pokračujeme-li v těchto úvahách, dojdeme patrně k nerovnosti

$$q_k < \frac{q_s}{(1 - a_k)(1 - a_l) \dots (1 - a_r)}, \tag{19}$$

kde $k > l > \ldots > r \geqq k_0$ a $s < k_0$. Avšak na základě předpokládané konvergence řady (17) nekonečný součin

$$\prod_{n=k_0}^{\infty} (1 - a_n)$$

je patrně konvergentní, t. j. má kladnou hodnotu, kterou označíme λ. Patrně

$$(1 - a_k)(1 - a_l) \ldots (1 - a_r) \geqq \prod_{n=k_0}^{\infty}(1 - a_n) = \lambda;$$

označíme-li tudíž Q největší z čísel $q_0, q_1, \ldots, q_{k_0-1}$, můžeme na základě nerovnosti (19) soudit, že

$$q_k < \frac{Q}{\lambda} \quad (k \geqq k_0),$$

tudíž

$$q_{k+1}q_k < \frac{Q^2}{\lambda^2} \quad (k \geqq k_0);$$

vztah (18) neplatí, takže je daný řetězec divergentní.

Nechť nyní řada (17) diverguje. Ježto $q_k > q_{k-2}$ pro všechna $k \geqq 2$, tu, označíme-li c menší z čísel q_0, q_1, budeme mít $q_k \geqq c$ pro libovolné $k \geqq 0$; druhý ze vzorců (7) nám tudíž dává

$$q_k \geqq q_{k-2} + ca_k \quad (k \geqq 2).$$

Postupné užití této nerovnosti nám dává

$$q_{2k} \geqq q_0 + c\sum_{n=1}^{k} a_{2n},$$

a

$$q_{2k+1} \geqq q_1 + c\sum_{n=1}^{k} a_{2n+1},$$

odkud

$$q_{2k} + q_{2k+1} > q_0 + q_1 + c\sum_{n=1}^{2k+1} a_n;$$

jinak řečeno, pro všechna k

$$q_k + q_{k-1} > c\sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Svrchu jsme dokázali tuto nerovnost pro lichá k, je však patrné, že týmž způsobem ji lze dokázat i pro sudá k.

Odtud však plyne, že v součinu q_kq_{k-1} aspoň jeden z činitelů převyšuje $\frac{1}{2}c\sum_{n=1}^{k} a_n$. Protože druhý činitel v žádném případě není menší než c, dostaneme

$$q_kq_{k-1} > \tfrac{1}{2}c^2\sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Na základě předpokládané divergence řady (17) plyne odtud vztah (18) a tudíž konvergence daného řetězce. Tím je věta 10 dokázána úplně.

§ 4. Řetězce s přirozenými prvky

Počínaje tímto paragrafem až do konce knihy budeme předpokládat, že prvky a_1, a_2, ... daného řetězce jsou *přirozená čísla* (t. j. celá kladná čísla). Pokud jde o a_0, budeme předpokládat, že je to rovněž celé číslo, ne však nutně kladné.

Je-li takový řetězec nekonečný, je na základě věty 10 vždy konvergentní. Můžeme tudíž nadále bez dalších výhrad považovat každý nekonečný řetězec za konvergentní a mluvit o jeho „hodnotě" nebo „velikosti".

Je-li takový řetězec konečný a je-li poslední jeho prvek $a_n = 1$, je patrně $r_{n-1} = a_{n-1} + 1$ celé číslo. Tak můžeme v tomto případě napsat daný n-členný řetězec $[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, 1]$ ve tvaru $n - 1$-členného řetězce $[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1} + 1]$, při čemž v tomto novém tvaru je poslední prvek patrně větší než jednotka.

Vzhledem k této poznámce můžeme v dalším vyloučit z úvah konečné řetězce, jejichž poslední prvek je roven 1 (ovšem s výjimkou 0-členného řetězce [1])[2]). Tato poznámka má velký význam při otázce jednoznačnosti znázornění čísel řetězci (viz kap. II, § 5).

Čitatelé a jmenovatelé sblížených zlomků jsou patrně v případě, jímž se zabýváme, čísla celá (pro p_{-1}, q_{-1}, p_0, q_0 je to bezprostředně patrné a pro další to plyne ze vzorců (7)). Mimo to máme toto velmi důležité tvrzení.

Věta 11. *Sblížené zlomky jsou irreducibilní.*[3])

Důkaz plyne bezprostředně ze vzorce (8), ježto každý společný dělitel čísel p_n a q_n je zároveň dělitelem výrazu $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}$.

Druhý ze vzorců (7) ukazuje, že pro každé $k \geqq 2$ platí $q_k > q_{k-1}$; posloupnost

$$q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$$

je tudíž stále rostoucí. O řádu růstu čísel q_k lze dokázat značně silnější tvrzení.

Věta 12. *Pro každé $k \geqq 2$* [4]) *platí*

$$q_k \geqq 2^{\frac{1}{2}(k-1)}.$$

Důkaz. Pro $k \geqq 2$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geqq q_{k-1} + q_{k-2} \geqq 2q_{k-2};$$

postupné užití této nerovnosti dává

$$q_{2k} \geqq 2^k q_0 = 2^k, \quad q_{2k+1} \geqq 2^k q_1 \geqq 2^k;$$

tyto nerovnosti dokazují patrně větu.

Jmenovatelé sblížených zlomků nerostou tudíž pomaleji než podle zákona geometrické posloupnosti.

---

[2]) • Sr. s tím, co je řečeno v • § 5. •

[3]) • t. j. není možno je zkrátit. •

[4]) Zde a všude v dalším je si ovšem nutno v případě *konečného* řetězce všímat jen těch hodnot k, pro než má q_k smysl.

Vsunuté zlomky. Nechť je $k \geqq 2$ a i libovolné celé kladné číslo. Rozdíl

$$\frac{p_{k-1}(i+1)+p_{k-2}}{q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}}-\frac{p_{k-1}i+p_{k-2}}{q_{k-1}i+q_{k-2}},$$

který je rovný, jak se snadno zjistí,

$$\frac{(-1)^k}{[q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}][q_{k-1}i+q_{k-2}]},$$

má pro všechna $i \geqq 0$ totéž znamení, závislé pouze na paritě čísla k. Z toho plyne, že zlomky

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}},\ \frac{p_{k-2}+p_{k-1}}{q_{k-2}+q_{k-1}},\ \frac{p_{k-2}+2p_{k-1}}{q_{k-2}+2q_{k-1}},\ \ldots,\ \frac{p_{k-2}+a_kp_{k-1}}{q_{k-2}+a_kq_{k-1}}=\frac{p_k}{q_k} \tag{20}$$

při sudém k vzrůstají, při lichém k klesají (sr. větu 4). Krajní z nich jsou sblížené zlomky stejné parity; členy mezi nimi ležící (existují-li, t. j. je-li $a_k > 1$) nazveme *vsunuté zlomky*. V aritmetickém užití mají tyto vsunuté zlomky značný význam, třebaže ne takový jako zlomky sblížené. Abychom si lépe objasnili jejich vzájemné rozložení a zákon jejich postupného tvoření, je účelné zavést pojem tak zvané *medianty* dvou zlomků.

Mediantou dvou zlomků $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ s kladnými jmenovateli se nazývá zlomek

$$\frac{a+c}{b+d}.$$

Pomocná věta. *Medianta dvou zlomků leží vždy (velikostí) mezi nimi.*

Důkaz. Nechť je $\frac{a}{b} \leqq \frac{c}{d}$; pak je $bc - ad \geqq 0$, a tudíž

$$\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{b(b+d)} \geqq 0, \quad \frac{a+c}{b+d}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{d(b+d)} \leqq 0,$$

což jsme chtěli dokázat.

Vidíme ihned, že každý ze vsunutých zlomků z posloupnosti (20) je mediantou předcházejícího zlomku a zlomku $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, postupujeme-li v posloupnosti (20) tak, že při postupném tvoření mediant jdeme od sblíženého zlomku $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ směrem ke sblíženému zlomku $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Konečný krok tohoto postupu nastane, když utvořená medianta splyne s $\frac{p_k}{q_k}$. Tento poslední zlomek leží tedy mezi $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$, což již víme z věty 4. Víme rovněž, že hodnota α daného řetězce leží mezi $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ a $\frac{p_k}{q_k}$ a že zlomky $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_k}{q_k}$, jichž řády jsou oba stejné parity, leží na téže straně čísla α. Odtud plyne, že celá posloupnost (20) leží na téže straně čísla α, kdežto zlomek $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ na druhé jeho straně. Zejména zlomky $\frac{p_{k-1}+p_{k-2}}{q_{k-1}+q_{k-2}}$ a $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ leží vždy na různých stranách α. Jinak řečeno, hodnota řetězce leží vždy mezi libovolným sblíženým zlomkem a mediantou utvořenou z tohoto zlomku a zlomku předcházejícího. (Doporučujeme čtenáři, aby si udělal schematický náčrtek zobrazující vzájemné rozložení všech těchto čísel.)

Tato poznámka poskytuje jednoduchý způsob, jímž je možno, známe-li sblížené zlomky $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ a $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, utvořit další sblížený zlomek $\frac{p_k}{q_k}$, neznáme-li prvek a_k (užijeme-li zato znalosti velikosti řetězce α). Utvoříme totiž nejprve mediantu obou daných zlomků, pak mediantu právě vzniklé medianty s $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ atd., sestrojujíce po každé mediantu právě vzniklé medianty a zlomku $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Víme již, že tyto po sobě jdoucí medianty se budou z počátku blížit k α; poslední medianta této posloupnosti, ležící na téže straně od α jako výchozí zlomek $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$, je $\frac{p_k}{q_k}$. Víme totiž již, že $\frac{p_k}{q_k}$ bude mezi těmito mediantami a bude ležet na téže straně α jako $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$; zbývá nám pak dokázat pouze, že další medianta bude již ležet na druhé straně α. Avšak další medianta je $\frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}$ a ta leží podle výše uvedené poznámky již na druhé straně čísla α.

Další, ještě důležitější důsledek objasněného vzájemného rozložení čísla α a jeho sblížených a vsunutých zlomků se dostane z těchto úvah. Vsunutý zlomek $\frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}}$, ležící mezi $\frac{p_k}{q_k}$ a α, leží blíže k $\frac{p_k}{q_k}$ než α, t. j.

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \left| \frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})}$$

(znamení rovnosti zde není možné, ježto by to znamenalo, že

$$\alpha = \frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} = \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}, \quad a_{k+2} = 1,$$

t. j. α by byl konečný řetězec s posledním prvkem 1; to je případ, který jsme na samém začátku vyloučili z úvah).

Tak přicházíme k tomuto důležitému tvrzení:

Věta 13. *Pro všechna* $k \geq 0$

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{q_k(q_{k+1} + q_k)}. \tag{21}$$

Nerovnost (21), která poskytuje *dolní* mez pro rozdíl $\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right|$, doplňuje takto nerovnost stanovenou větou 9, poskytující *horní* mez téhož rozdílu.