Cyklické zobrazení bodových transformací

In: Ladislav Seifert (author): Cyklografie. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků v Praze, 1949. pp. 64–76.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402835

V. CYKLICKÉ ZOBRAZENÍ BODOVÝCH TRANSFORMACÍ

Každé prostorové transformaci, kde bodu odpovídá bod, přísluší v průmětně π transformace, při které cyklu odpovídá cykl. Je-li prostorová transformace kolineace, pak přímce odpovídá přímka, rovině rovina, což se v π jeví tak, že lineární řadě cyklů odpovídá lineární řada a cyklickému poli opět cyklické pole. Nás zajímají transformace, které vedou k novým vztahům v geometrii cyklů a to jsou zřejmě ty, které nechávají nezměněnu základní kuželosečku C v rovině nevlastní. Grupa těchto *automorfních kolineací křivky C* tvoří obdobu tak zvané *hlavní grupy* euklidovské geometrie.

Hlavní grupa euklidovské geometrie v prostoru obsahuje ∞^7 afinních transformací (t. j. transformace závisí na sedmi parametrech), jež nechávají v klidu absolutní kuželosečku J danou v pravoúhlé soustavě rovnicemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0.$$

Útvar geometrický je obecnou transformací této grupy převeden v podobný. Tato hlavní grupa obsahuje jako podgrupu *grupu pohybovou*, jež obsahuje ∞^6 transformací, které nechávají nezměněné (invariantní) i délky, převádějí tedy útvar v útvar shodný. Hlavní grupu lze složiti z pohybů a podobností centrálních. Zajímavou úlohu v prostoru hraje *pravoúhlá symetrie dle roviny.* Pohyb (přemístění útvaru v prostoru) lze vytvořiti sudým počtem symetrií po sobě jdoucích. Lichý počet symetrií dává *překlopení* (shodnost se změnou smyslu). *Pohyby* a *překlopení* tvoří *smíšenou grupu*. Nejjednodušší pohyby jsou: *Translace* čili *posouvání*, při kterém celá nevlastní rovina zůstává v klidu, *rotace* kolem přímky a *pohyb šroubový.* *)

Nahraďme nyní absolutní kuželosečku reálnou kuželosečkou C v rovině nevlastní ω. Místo euklidovské geometrie dostáváme *pseudogeometrii* a její hlavní grupa L_7 sestává ze všech reálných afinních

*) KADEŘÁVEK-KLÍMA-KOUNOVSKÝ: Deskriptivní geometrie, II, str. 912.

transformací, pro které křivka C je invariantní. Každá taková transformace indukuje na C projektivnost. Omezíme se jen na dvě nejjednodušší transformace a to ty, jež odpovídají posouvání a symetrii dle roviny v euklidovském prostoru.

5,1. Dilatace. Pošinutí čili translace je pohyb, při kterém současně všechny body opisují dráhy rovnoběžné a stejně dlouhé. Pošinutí je dáno vektorem, jehož počáteční bod je původní poloha jednoho bodu, koncový bod jeho poloha výsledná. Pošinutí lze vždy rozložiti v pošinutí rovnoběžné s průmětnou π a pošinutí kolmé ku π. Prvému odpovídá pošinutí cyklů v průmětně a nemá zajímavosti. Pošinutí ve směru kolmém k průmětně vede k transformaci cyklů, již zoveme *dilatací*. Je-li vektor (úsečka daná délkou i znaménkem) udávající pošinutí ve směru osy OZ d, pak bod $A(x, y, z)$ přejde v $A'(x, y, z + d)$ a příslušný cykl (A) o poloměru z přejde v cykl o poloměru $z + d$. Bod v průmětně přejde v cykl o poloměru d. Jsou-li A, B body na „isotropické" přímce, mají cykly (A), (B) vlastní dotyk a přejdou dilatací v cykly (A'), (B'), které se opět dotýkají. Dilatace je *dotyková transformace*. Tečnová vzdálenost cyklů (A), (B), kterým v prostoru patří body $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, jest dána výrazem (1,6)

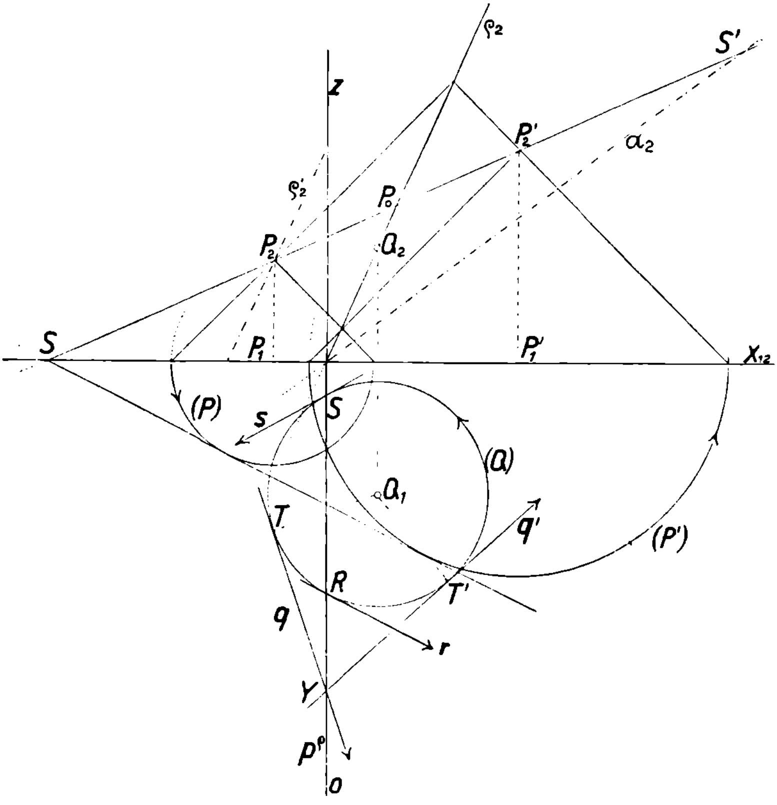
$$t^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2,$$

který transformací $z' = z + d$ se nemění. *Tečnová vzdálenost dvou cyklů je tedy při dilataci invariantem.*

5,2. Laguerrova inverse. Uvažujeme o transformaci, jež v naší pseudogeometrii tvoří obdobu euklidovské symetrie dle roviny ϱ.

V *euklidovské* symetrii je bodu P přiřaděn bod P', takže PP' je kolmé k rovině ϱ čili nevlastní bod P_∞ přímky PP' a nevlastní přímka r_∞ roviny ϱ jsou polárně sdruženy k absolutní kuželosečce J v rovině nevlastní. Dále jest $\overline{PP_0} = \overline{P_0P'}$, kde P_0 je průsečík přímky PP' s rovinou ϱ.

Buď nyní dána v naší *pseudogeometrii* opět rovina ϱ s nevlastní přímkou r_∞ a buď R_∞ pól přímky r_∞ k základní kuželosečce C. Bodu P přiřaďme P', takže PP' jde bodem R_∞ a $\overline{PP_0} = \overline{P_0P'}$, kde P_0 je opět průsečík PP' s ϱ. Máme tedy *perspektivní afinitu* se samodružnou rovinou ϱ a směrem R_∞ neboli *šikmou symetrii*, jež v naší pseudogeometrii hraje tutéž úlohu jako kolmá symetrie v geometrii euklidovské. Jak se jeví tato „symetrie" v cyklickém zobrazení? Volme promítací rovinu přímky PP' za druhou průmětnu (obr. 34). PP' je polární přímka kuželu $P(P)$ k rovině $\varrho' \parallel \varrho$. Z obrázku je ihned patrno, že kužele $P(P)$ a $P'(P')$ sekou ϱ v téže kuželosečce. Přidružené cykly



Obr. 34.

(P), (P') mají stopu p^ϱ za chordálu. V uvažované afinitě odpovídá přímce bodem P přímka bodem P', která se s ní seče na ϱ, speciálně přímce na kuželi $P(P)$ přímka kuželu $P'(P')$. *Komplex přímek sekoucích základní kuželosečku C jest při této transformaci invariantní*, jinak řečeno „*isotropická*" *přímka přechází opět v přímku* „*isotropickou*".

Společné tečné paprsky cyklů (P), (P') jako stopy rovin s odchylkou 45° jdoucích přímkou PP' *mají stálý směr*, poněvadž paprsky afinity PP', QQ' atd. jsou spolu rovnoběžné. Je-li Q bod roviny ϱ, splývá s Q', tedy *cykly cyklického pole* (ϱ) *odpovídají samy sobě*; paprsek afinity bodem Q má za stopník pól přímky p^ϱ ku (Q), tečny r, s v průsečících p^ϱ s (Q) udávají směr společných tečných paprsků přidružených cyklů.

Jsou-li body A, B na přímce „isotropické“, t. j. sekoucí C, přejdou afinitou v body A', B', které jsou opět na jiné přímce sekoucí C. Cykly (A), (B) se dotýkaly, také se dotýkají cykly (A'), (B'). Naše transformace zachovává dotyk, je to *dotyková transformace*.

Cykl (P) může přejíti v bod, padne-li P' do π. Místo bodů P, kterým odpovídají body P' v π je rovina α, jež v uvažované afinitě odpovídá rovině π (v obraze $\overline{SP_0} = \overline{P_0S'}$).

Chceme-li uvažovanou afinitu vyjádřiti analyticky, volme osy pravoúhlé soustavy jak ukazuje obr. 34. Pak rovina ϱ má rovnici $z = \dfrac{x}{\lambda}$ a směr paprsků afinity je $z = \lambda x$.*) Jsou-li dva přiřazené body $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ jest dle toho

$$y = y', \quad \frac{z' + z}{x' + x} = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{z' - z}{x' - x} = \lambda.$$

Z těchto rovnic snadno vypočteme

$$x' = -\frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2}x + \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2}z, \quad y' = y, \quad z' = -\frac{2\lambda}{1 - \lambda^2}x + \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2}z$$

nebo, píšeme-li $\lambda = \operatorname{cotg}\alpha$,

$$x' = \frac{x}{\cos 2\alpha} - z\operatorname{tg}2\alpha, \quad y' = y, \quad z' = x\operatorname{tg}2\alpha - \frac{z}{\cos 2\alpha}.$$

Buďte $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ dva body a $A'(x_1', y_1', z_1')$, $B'(x_2', y_2', z_2')$ body jim odpovídající; pak ukazuje snadný výpočet, že

$$(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 - (z_1' - z_2')^2 =$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2,$$

tedy výraz

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$$

je *absolutní invariant*. Nazývejme d cyklografickou vzdáleností bodů

*) Je-li $\lambda = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \alpha)$, jest $1 : \lambda = \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \alpha)$.

A, B. V průmětně π jí odpovídá tečnová vzdálenost cyklů (A), (B). *V Laguerrově inversi je tečnová vzdálenost invariantní.*

Uvažovanou transformaci v průmětně π lze také považovati za transformaci, jež převádí paprsek v jiný paprsek. Buď α rovina v prostoru, α' rovina přiřaděná v kosoúhlé symetrii. Obě se sekou v přímce a na samodružné rovině ϱ. Dotýká-li se rovina α křivky C, dotýká se i rovina α' křivky C a průsečnici a odpovídá řada cyklů o společných tečných paprscích a', a''. Tímto způsobem je paprsku a' přiřaděn paprsek a'', neboť a' je stopa jediné „isotropické“ roviny α (1,2), která seče rovinu ϱ v přímce a a touto prochází ještě druhá „isotropická“ rovina α'' se stopou a''. Máme tedy v průmětně π involuční paprskovou transformaci. Přiřaděné paprsky se sekou na stopě p^ϱ, rovnoběžným paprskům odpovídají opět paprsky rovnoběžné.

Je-li odchylka roviny ϱ větší než 45°, pak jsou v ϱ dvě osnovy paprsků a s odchylkou 45°. Pro takový paprsek splývají stopy „isotropických“ rovin, $a' \equiv a'' \perp a_1$, a máme tedy v π dvě osnovy paprsků samodružných. Je-li Q bod v ϱ, seče cykl (Q) stopu $o \equiv p^\varrho$ ve dvou reálných bodech R, S a jejich tečné paprsky r, s jsou samodružné (obr. 34). Libovolnému jinému tečnému paprsku q cyklu (Q) patří tečný paprsek q' téhož cyklu a seče se s ním na stopě p^ϱ. Tečné paprsky cyklu (Q) si tedy navzájem odpovídají a tvoří involuci s osou o.

Ještě jednu vlastnost naší transformace nutno uvésti. Buď (Q) samodružný cykl q, q' pár korespondujících paprsků. Dle (1,4) jest

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{oq} \,.\, \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{oq'} = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\widehat{or} = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\widehat{os}$$

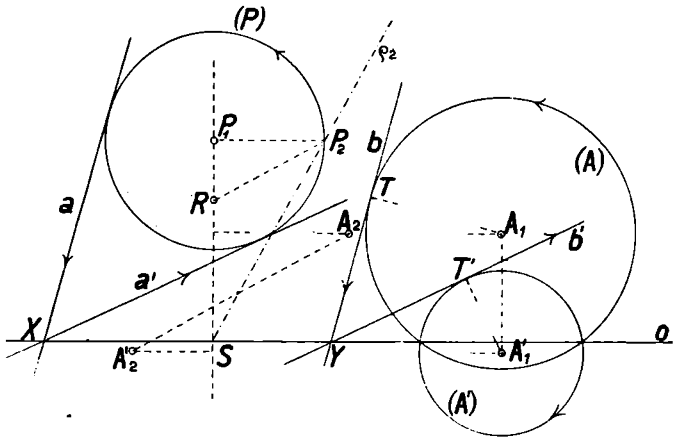
a tento stálý součin sluje mocnost paprsku o k cyklům kongruence (ϱ).

Teď vidíme, že uvažovaná transformace tvoří duální obdobu ke kruhové inversi. Je-li totiž bod O střed základní kružnice inverse, r její poloměr, pak spojnice inversních bodů A, A' jde středem O a jest $\overline{OA} \,.\, \overline{OA'} = r^2$. Duálně v naší transformaci paprsky přiřazené q, q' sekou se na ose $o \equiv p^\varrho$ a součin $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\widehat{oq} \,.\, \mathrm{tg}\frac{1}{2}\widehat{oq'}$ je konstantní.

Tuto transformaci poprvé uvádí Laguerre*) nezávisle na cyklografii; název *Laguerrova inverse* zavedl W. Blaschke**).

*) Oeuvres de Laguerre, sv. 2, str. 604—670.
**) Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der euklidischen Ebene, Monatsh. Math. Phys. 21 (1910).

Všimněme si ještě jednou tečnové vzdálenosti, jejíž absolutní délka je ovšem invariant Laguerrovy inverse. Ona sama však mění smysl. Na př. v obr. 34 jest TY tečnová vzdálenost cyklu (Q) a cyklu (Y) s nulovým poloměrem. Její smysl se shoduje se smyslem paprsku q. Odpovídající tečnová vzdálenost $T'Y$ má však smysl protivný smyslu přidruženého paprsku q'. Tato poznámka je pro následující konstrukci důležitá.



Obr. 35.

Úloha. *Jest dána Laguerrova inverse osou o a samodružným cyklem* (P). *K cyklu* (A) *sestrojte přidružený cykl* (A') (obr. 35).

Osa o je stopou roviny ϱ, která jde bodem P. ϱ je základní rovina prostorové afinity a její směr jest dán přímkou PR, kde R je pól přímky o k cyklu (P). V obraze je volena rovina promítací odchylkové přímky PS za druhou průmětnu a sestrojeno ϱ_2. Cyklu (A) patří v prostoru bod A, jím veden paprsek afinity rovnoběžný s PR a sestrojen bod šikmo symetrický A', jemuž odpovídá hledaný cykl (A').

Konstrukci lze však rychle provésti i bez užití prostoru, užijeme-li vlastností L. inverse. Body A_1, A_1' jsou na normále k ose o, jež je chordálou cyklů (A), (A'). Sestrojme k cyklu (P) dva paprsky přidružené a, a', jež se sekou v X na ose o. Buď b paprsek rovnoběžný s a, který se dotýká cyklu (A); přidružený b' seče se s ním na o v Y a dotýká se cyklu (A'). Délky tečen z Y jsou stejné, tedy $\overline{TY} = \overline{YT'}$

(tyto délky jsou také tečnové vzdálenosti cyklu (A) a nulového cyklu (Y) a cyklu (A') a (Y), při čemž TY souhlasí se smyslem paprsku b, $T'Y$ je protivného smyslu s b'.) Tím je (A') určeno. Seče-li (P) osu o v reálných bodech, jsou paprsky tečné v nich r, s samodružné a rovnoběžné se společnými tečnými paprsky cyklů (A), (A').

Cvičení 5,2,1. Dána je Laguerrova inverse osou o a samodružným cyklem (P), který a) seče osu o v reálných bodech, b) neseče osu o v reálných bodech. Sestrojte: a) k danému cyklu v různých polohách cykl přidružený, b) k danému bodu cykl přidružený, c) k danému paprsku přidružený paprsek.

5,2,2. Dokažte: Dvě rovinná pole α, β, jež současně sekou C ve dvou reálných různých bodech nebo ve dvou bodech imaginárních, lze převésti v sebe dvojí „symetrií" (pozorujte projektivnost na C). Dotýkají-li se obě roviny křivky C, lze to provésti nekonečně mnoha způsoby. Jaké věty z toho plynou pro cyklická pole?

5,2,3. Dokažte: Hyperbolické cyklické pole lze vždy L. inversí převésti v cyklické pole se středy na přímce.

5,2,4. Sledujte L. inversi, je-li rovina ϱ identická s průmětnou π (změna orientace), je-li rovnoběžna s π, neb kolmá ku π.

5,2,5. Jsou dány cykly (A), (B), (C). Sestrojte L. inversi, jež je převádí a) v cykly o témž poloměru, b) v cykly, které jdou daným bodem (kdy má úloha reálná řešení?).

5,2,6. Dány jsou cykly (A), (B), (C) a nechť osa podobnosti je neseče v reálných bodech. Sestrojte cykly, které se všech tří dotknou. (*Návod*: Sestrojte psymetrii", při které rovina (ABC) přejde v π, dané cykly tedy v body. Konstrukci lze provésti snadno i bez použití prostoru, uvážíme-li na př., že je-li X střed „odobnosti cyklů (A), (B), kružnice která má střed X a seče cykl (A) kolmo, jde i bodem A', neboť délka tečny cyklů (X), (A) se nemění).

5,2,7. Dány jsou tři cykly jako v předešlé úloze. Sestrojte cykl, který od těchto tří daných cyklů má předepsané tečnové vzdálenosti t_1, t_2, t_3 (reálné nebo imag.). (*Návod*: Převeďte cykly v body a pak jest sestrojiti kružnici kolmou ke kružnicím o poloměrech t_1, t_2, t_3).

5,2,8. Sestrojte L. inversi, která převádí dva různé cykly (A), (B) ve dva cykly na téže kružnici (jen znaménkem různé). Kdy je úloha řešitelná?

5,3. Kruhová inverse. V geometrii kružnice (neorientované) čili t. zv. *Möbiusově geometrii* hraje důležitou úlohu kruhová inverse. Zodpovězme otázku, co odpovídá této transformaci v prostoru, přiřadíme-li kružnicím čili soumístným cyklům příslušné body v prostoru.

Kruhová inverse v rovině je dána rovnicemi

$$x' = k\frac{x}{x^2 + y^2},\quad y' = k\frac{y}{x^2 + y^2}$$

a je to transformace involutorní: Patří-li bodu $P(x, y)$ bod $P'(x', y')$, patří obráceně bodu P' opět bod P. Poněvadž $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$, leží přidružené body na paprscích svazku $O(0, 0)$. Označíme-li

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},\qquad \varrho' = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

ukazují hořejší formule, že

$$\varrho \cdot \varrho' = k,$$

součin vzdáleností přidružených bodů od středu inverse O jest konstantní. k sluje mocnost inverse. Body samodružné vyplňují reálnou neb imaginární kružnici

$$x^2 + y^2 = k.$$

Singulární body této transformace, t. j. body, kterým neodpovídá jeden, ale nekonečně mnoho (∞^1) bodů, jsou zřejmě střed O a oba kruhové body v nekonečnu.

Přímce odpovídá kružnice jdoucí středem inverse O, křivce stupně n odpovídá obecně křivka stupně $2n$. Tento stupeň se ovšem sníží, prochází-li prvá křivka singulárními body. Tak kružnici odpovídá opět kružnice. Buď daná kružnice

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 - r^2 = 0.$$

Dosadíme-li za x', y' a vypustíme faktor $x^2 + y^2$, dostaneme

$$(x^2 + y^2)(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) - 2k(\alpha x + \beta y) + k^2 = 0.$$

Označíme-li souřadnice středu a poloměr nové kružnice α', β', r', pak jsou tyto elementy s původními vázány vztahy

$$\alpha' = \frac{k\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 - r^2},\quad \beta' = \frac{k\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - r^2},\quad r' = \frac{kr}{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}.$$

Přiřadíme-li prvé kružnici bod $(x = \alpha, y = \beta, z = r)$, druhé bod $(x' = \alpha', y' = \beta', z' = r')$ způsobem obvyklým, pak odpovídá kruhové inversi v rovině následující transformace prostorová

$$x' = \frac{kx}{x^2 + y^2 - z^2}, \quad y' = \frac{ky}{x^2 + y^2 - z^2}, \quad z' = \frac{kz}{x^2 + y^2 - r^2}.$$

To není ovšem kolineace, ale kvadratická transformace, jež má opět jednoduchý geometrický význam. Buďte P, P' dva přiřaděné body. Pak spojnice PP' jde bodem O. Jsou-li dále

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}, \qquad \varrho' = \sqrt{x'^2 + y'^2 - z'^2}$$

cyklografické vzdálenosti bodů P, P' od středu O, jest

$$\varrho \cdot \varrho' = k.$$

Body samodružné ($x' = x, y' = y, z' = z$) vyplní základní cyklografickou kouli

$$x^2 + y^2 - z^2 = k.$$

Přidružené body P, P' jsou k této ploše polárně sdružené, neboť jest

$$xx' + yy' - zz' = \frac{k(x^2 + y^2 - z^2)}{x^2 + y^2 - z^2} = k.$$

Uvedená prostorová transformace tvoří obdobu kulové inverse euklidovské geometrie. Nebudeme se jí dále zabývati, ani případem obecnějším, kde střed cyklografické koule je mimo průmětnu, neboť methoda Fiedlerovy cyklografie není vhodná pro úlohy spadající svou povahou do geometrie Möbiusovy, ve které se jedná o vlastnosti invariantní při kruhových inversích.

5,4. Pseudogeometrie (C-geometrie) a její vztah k cyklografii. Dle t. zv. stanoviska Kleinova *je euklidovská geometrie v prostoru studium invariantů vzhledem k transformacím hlavní grupy.* Taková vlastnost je na př. poměr hrany a poloměru koule opsané pravidelnému tělesu; nemění se při pohybech a podobnostních transformacích, je tedy invariantem. Studium takových vlastností je úkolem euklidovské geometrie.

Tento úkol lze zobecniti. Dána jest grupa prostorových transformací. Studujme vlastnosti a vztahy geometrických útvarů, které se nemění transformacemi této grupy. Vezměme grupu prostorových transformací, jež nechávají nezměněnu kuželosečku C

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \qquad t = 0,$$

čili grupu *automorfních transformací* této kuželosečky. Omezme se jen na transformace, pro které je invariantní výraz

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$$

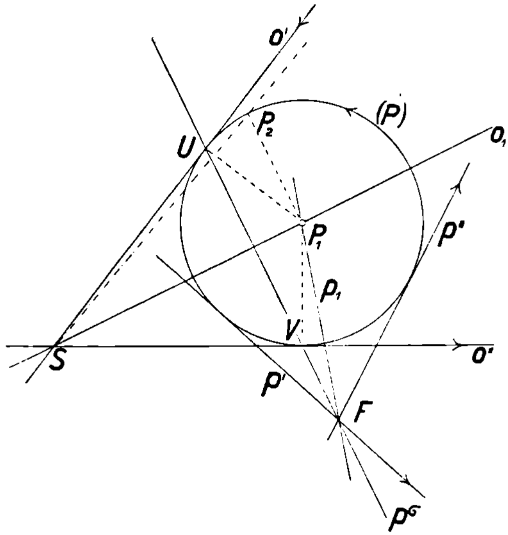
a jež tvoří tedy obdobu pohybové a smíšené grupy geometrie euklidovské. Nazývejme tuto pseudogeometrii *C-geometrií*. Výraz d^2 nazývejme *cyklografická vzdálenost* bodů $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.

V předešlém odstavci byla probrána afinní transformace, jež jest obdobou kolmé symetrie dle roviny a má za obraz Laguerrovu inversi. Dvě euklidovské symetrie po sobě jdoucí dle rovin ϱ, σ dávají rotaci kolem průsečnice o o úhel rovný dvojnásobné odchylce obou rovin. Tři po sobě jdoucí symetrie dle rovin ϱ, σ, τ dávají otočení kolem jejich průsečíku. V C-geometrii hraje úlohu symetrie uvedená afinní transformace. Dvě „*symetrie*" po sobě provedené dávají „*rotaci*". Jsou-li roviny ϱ, σ k sobě „kolmé", t. j. sdružené dle C, pak máme „symetrii" dle osy $o \equiv (\varrho, \sigma)$. Bodu P patří P', při čemž PP' seče osu o a současně poláru o' jejího nevlastního bodu O^∞ vzhledem ku C a $\overline{PM} = \overline{MP'}$, kde M je průsečík s o.

„*Symetrie*" dle roviny, dle osy nebo středu jsou *involuční* transformace. „Symetrii" dle roviny odpovídá v π Laguerrova inverse. „Symetrii osové" odpovídá v π transformace, kterou lze také snadno sledovati. Paprsky „kolmé" k ose o odpovídají samy sobě a tvoří lineární kongruenci; všechny sekou o a poláru o'_∞ bodu O^∞ ku C. Obrazem této kongruence je paprsková transformace v průmětně π. Buď a' paprsek v π, jím jde jedna „isotropická" rovina, jež obsahuje jeden paprsek kongruence a, který seče o a o'_∞, tím jde ještě jedna „isotropická" rovina, jež má stopu a''.

Buď dána osa o průmětem o_1 (obr. 36), stopou S a oběma paprsky o', o''. Buď P bod na o, (P) jeho cyklografický průmět. Bodem P jde celý svazek paprsků kongruence v rovině σ „kolmé" ku o; její stopa p^σ je polára bodu S ku (P). Přímce $p \equiv PF$ svazku s vrcholem P v rovině σ je přiřaděn pár paprsků p', p'' tečných ku (P), svazku patří tedy paprsková involuce. V uvažované kongruenci jsou dvě osnovy „isotropických" paprsků obsažené v rovinách (oo'), (oo''). Vrcholy jsou průsečíky přímky o'_∞ s C, tedy nevlastní body přímek PU, PV. Jak se k danému cyklu neb danému paprsku sestrojí přidružený, přenecháváme čtenáři.

Při transformacích hlavní neb smíšené grupy euklidovské geometrie jsou dva základní invarianty: délka a úhel. Obdobné invarianty v C-geometrii jsou „délka“ definovaná výrazem d^2 dříve uvedeným a „úhel“. V euklidovské geometrii mějme přímky p, q s průsečíkem



Obr. 36.

S a v rovině jimi určené ať jdou bodem S isotropické přímky i_1, i_2. Pak úhel $\omega = \widehat{pq}$ souvisí s dvojpoměrem oněch čtyř přímek formulkou Laguerrovou

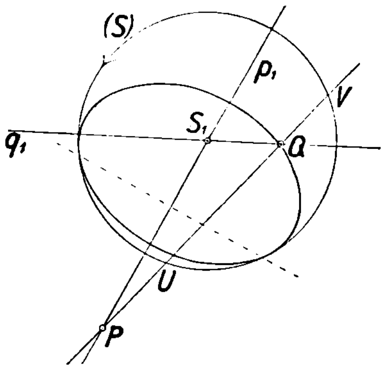
$$\omega = \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\log(p, q, i_1, i_2)$$

Tato formulka béře se za definici úhlu v umělých geometriích. Jsou-li P_∞, Q_∞ nevlastní body přímek p, q, $U_{1\infty}$, $U_{2\infty}$ průsečíky roviny (pq) s C, pak „*úhel*“ jest dán vzorcem

$$\omega = \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\log(P_\infty, Q_\infty, U_{1\infty}, U_{2\infty}).$$

Zde ovšem nutno rozeznávati případy, kdy průsečíky $U_{1\infty}$, $U_{2\infty}$ jsou reálné a kdy imaginárné.

Jak se jeví tyto invarianty v cyklografickém průmětu? „Vzdálenost“ bodů v prostoru jeví se jako tečnová vzdálenost příslušných cyklů. Připomenouti ještě dlužno, že poměr dvou „vzdáleností“ na téže přímce nebo na přímkách rovnoběžných rovná se poměru příslušných vzdáleností euklidovských. „Úhel“ nemá v obraze tak jednoduchý význam. Uveďme jen následující jednoduchý případ. Nechť přímka q „se otáčí“ kolem přímky p, kterou protíná v bodě S a vytvořuje tedy „*rotační kužel*“. V obraze 37 jest cykl (S) obrazem bodu S, P, Q buďte stopníky přímek p, q. Dvojpoměr $(PQUV)$ buď konstantní a P pevné. Q opíše kuželosečku, která se kružnice $[S]$ dotýká ve dvou bodech na poláře bodu P.*) Geom. místo přímky q, „rotační kužel“, dotýká se tedy kužele $S(S)$ podél dvou přímek, jinak řečeno dotýká se křivky C dvakrát, podobně jako v euklidovské geometrii se rotační kužel a soustředný isotropický kužel dotýkají podél dvou povrchových přímek v rovině kolmé k ose kužele.



Obr. 37.

---

*) Dokážeme snadno takto: Buď

$$x^2 + y^2 = r^2$$

rovnice kružnice a $P(x_0, y_0)$ bod pevný, $Q(\xi, \eta)$ bod pohyblivý. Bod na spojnici PQ má souřadnice

$$x = \frac{x_0 - \lambda\xi}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_0 - \lambda\eta}{1 - \lambda},$$

při čemž λ je dělící poměr bodu (x, y) k bodům P, Q. Dosazením do rovnic kružnice dostaneme pro dělící poměr bodů U, V rovnici

$$\lambda^2(\xi^2 + \eta^2 - r^2) - 2\lambda(x_0\xi + y_0\eta - r^2) + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Jsou-li λ_1, λ_2 kořeny této rovnice, jest

$$(PQUV) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} =$$

$$= \frac{x_0\xi + y_0\eta - r^2 + \sqrt{(x_0\xi + y_0\eta - r^2)^2 - (\xi^2 + \eta^2 - r^2)(x_0^2 + y_0^2 - r^2)}}{x_0\xi + y_0\eta - r^2 - \sqrt{(x_0\xi + y_0\eta - r^2)^2 - (\xi^2 + \eta^2 - r^2)(x_0^2 + y_0^2 - r^2)}}.$$

Položme tento výraz rovný k a dostaneme po snadné úpravě rovnici

$$(1 + k)^2(x_0^2 + y_0^2 - r^2)(\xi^2 + \eta^2 - r^2) - 4k(x_0\xi + y_0\eta - r^2)^2 = 0;$$

bod $Q(\xi, \eta)$ vyplňuje tedy kuželosečku, jež s danou kružnicí má dotyk dvojnásobný v bodech na poláře bodu P.

Cvičení 5,4,1. Jak se jeví „otáčení“ kolem osy o kolmé ku π? Jak kolem osy ležící v π? Jaké jsou dráhy jednotlivých bodů v každém případě a jaké v případě obecném?

5,4,2. Dáno je cyklické pole osou p^{ϱ} a cyklem (Q). Mimo to cykl (M). Jak se jeví v π „vzdálenost“ bodu M od ϱ? („Kolmice“ spojuje M s pólem roviny ϱ ku C.)

5,4,3. Dány jsou lineární řady cyklů (p), (q). Sestrojte „nejkratší vzdálenost“ („osu“) mimoběžek p, q. Jak se jeví v cykl. projekci?

5,4,4. Proveďte předešlou úlohu, jsou-li p, q „isotropické“ přímky.

5,4,5. Dány jsou cykly (A), (B) a jejich tečnová vzdálenost buď t. V lineární řadě jimi určené měj cykl (C) střed C_1 ve středu úsečky A_1B_1 (střední cykl). Ukažte, že tento má od všech cyklů, které s (A), (B) mají vlastní dotyk, tutéž tečnovou vzdálenost s, kde $s^2 = -\frac{1}{4}t^2$. (*Návod*: Najděte rovnici cykl. koule svazku určeného kužel. plochami s vrcholy A, B, jež má střed C, a její cykl. poloměr!)