Cyklografické koule a cyklografické kružnice

In: Ladislav Seifert (author): Cyklografie. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků v Praze, 1949. pp. 35–45.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402833

III. CYKLOGRAFICKÉ KUŽELE A CYKLOGRAFICKÉ KRUŽNICE

Doposud jsme studovali cyklické zobrazení přímky a roviny. Přistupme k útvarům kvadratickým, t. j. ke kuželosečce a k ploše druhého stupně. Obecná a v prostoru obecně položená kuželosečka jest rovinou sečena ve dvou bodech, cyklický obraz kuželosečky je tedy řada cyklů, jež s cyklickým polem má společné dva cykly, tedy řada kvadratická. Podobně plocha druhého stupně má s přímkou společné dva body, cyklický obraz plochy druhého stupně je tedy kvadratická kongruence. Nás však zajímají především plochy druhého stupně, jež jdou základní kuželosečkou C, a kuželosečky, které tuto základní kuželosečku sekou ve dvou bodech, neboť jejich zobrazení je nejjednodušší a vede k cyklografickému řešení klasických problémů elementární geometrie. Budeme kuželosečky, které sekou základní kuželosečku C ve dvou bodech, nazývati *cyklografické kružnice*, kužele, které jdou křivkou C, *cyklografické kužele*, a jiné plochy druhého stupně (hyperboloidy) jdoucí křivkou C *cyklografické koule.*

3,1. Cyklografická kružnice. Mějme cyklografický kužel. Osa jeho buď v ose OZ_∞ pravoúhlé soustavy, vrchol V měj souřadnice $(0, 0, r)$. Rovnice jeho jest

$$x^2 + y^2 - (z - r)^2 = 0. \tag{1}$$

Průsek tohoto kužele s rovinou ϱ, jež neprochází vrcholem V, jest cyklografická kružnice k; jest to elipsa, hyperbola neb parabola. Její kolmý průmět je kuželosečka k_1, jež má průmět vrcholu V_1 za ohnisko. Skutečně, je-li rovina ϱ dána rovnicí

$$z = mx + n \tag{2}$$

a vyloučíme-li z z rovnice (1) a (2), dostaneme

$$x^2 + y^2 - (mx + n - r)^2 = 0 \tag{3}$$

jako rovnici průmětu k_1. Značí-li $v = \sqrt{x^2 + y^2}$ vzdálenost bodu (x, y)

od ohniska V_1, $d = \dfrac{r - n}{m} - x$ vzdálenost od přímky $q \equiv mx + n - r = 0$, lze rovnici (3) napsati

$$v^2 - m^2 d^2 = 0 \quad \text{čili} \quad v = \pm\, m \,.\, d,$$

t. j. poměr vzdálenosti bodu na křivce k_1 od V_1 a od q je stálý, V_1 je tedy ohnisko, q řídící přímka kuželosečky k_1. Obráceně lze ukázati, že každou kuželosečku v π lze považovati za průmět cyklografické kružnice.

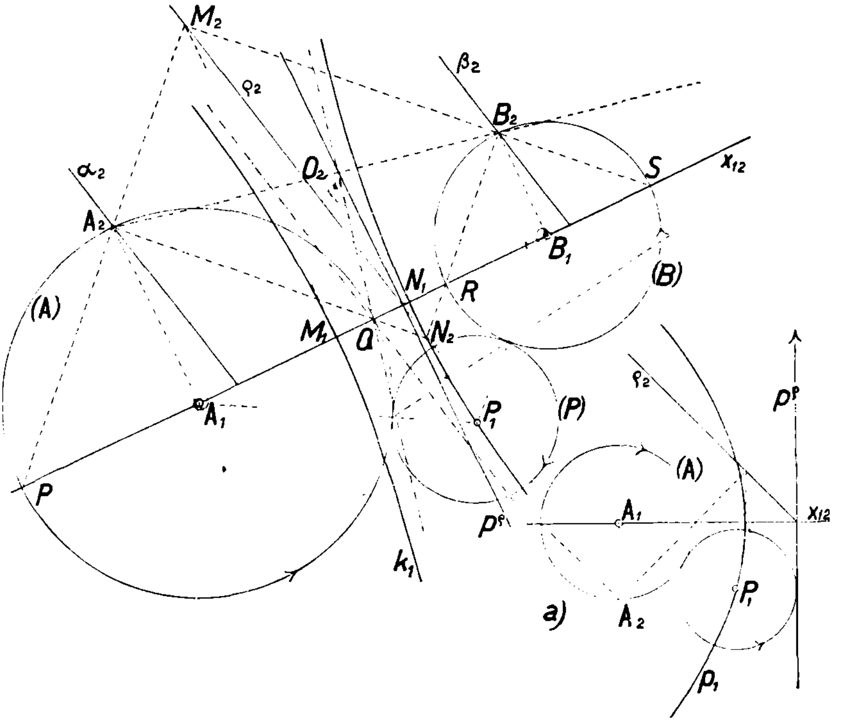
Cyklografickou kružnicí se dvěma různými body v nekonečnu (elipsou nebo hyperbolou) *jdou dva cyklografické kužele.* Obecně dvěma kuželosečkami v prostoru, jež mají dva různé body společné, jde svazek ploch druhého stupně, mezi nimiž jsou dva kužele. V našem případě jsou tyto kuželosečky k a C, tedy oba kužele jsou cyklografické. Obráceně *dva cyklografické kužele* v obecné poloze *mají mimo C ještě společnou cyklografickou kružnici.*

Buďte A, B vrcholy cyklografických kuželů (obr. 22), (A), (B) příslušné cykly. Volme promítací rovinu přímky AB za druhou průmětnu a otočme kolem $x_{12} \equiv A_1B_1$ do π. Ve sklopení dostáváme osové řezy A_2P, A_2Q, resp. B_2R, B_2S, jež vytvořují obdélník $A_2M_2B_2N_2$. $\varrho_2 \equiv M_2N_2$ jest průmět roviny ϱ, v níž leží průsečná kuželosečka k. M, N jsou vrcholy, střed obdélníka O je středem kuželosečky. Stopa p^ϱ je chordála kružnic $[A]$, $[B]$, neboť spojuje jejich společné body. Uvažme, že všechny plochy svazku (C, k) se dotýkají v nevlastních bodech V_∞, W_∞ křivky k společných oběma kuželosečkám, společné tečné roviny jdou přímkou AB a mají za stopy společné tečné paprsky m, n cyklů (A), (B). Přímkou $V_\infty W_\infty$ jde rovina ϱ a polární roviny α, β přímky AB k oběma kuželům ($\alpha_2 \parallel \beta_2 \parallel \varrho_2$).

Je-li P bod na kuželi $A(A)$, pak cykl (P) má s cyklem (A) vlastní dotyk. Je-li P na křivce k, má cyklus (P) dotyk s cykly (A) i (B). *k_1 je tedy geom. místo středů všech cyklů, které se dotýkají cyklů* (A), (B). V našem obraze je to hyperbola k_1 s vrcholy M_1, N_1, ohnisky A_1, B_1 a asymptotami kolmými ke společným tečným paprskům m, n obou cyklů (v obraze nejsou zakresleny). Ostatně, jsou-li r_1, r_2 poloměry cyklů (A), (B), r poloměr pohyblivého cyklu, je zřejmě $|\overline{A_1P_1}| = |r_1 - r|$, $|\overline{B_1P_1}| = |r_2 - r|$, tedy rozdíl průvodičů $|\overline{A_1P_1} - \overline{B_1P_1}| = |r_1 - r_2|$

je konstantní. Spojnice dotykových bodů cyklu (P) s pevnými cykly je stopa roviny (ABP) a prochází jejich středem podobnosti.

Má-li rovina ϱ odchylku 45° od průmětny, pak průsek s cyklografickým kuželem je parabola; touto parabolou prochází jediný cyklografický kužel. Obr. 22*a* ukazuje průsek takové roviny ϱ s kuželem



Obr. 22 a 22a.

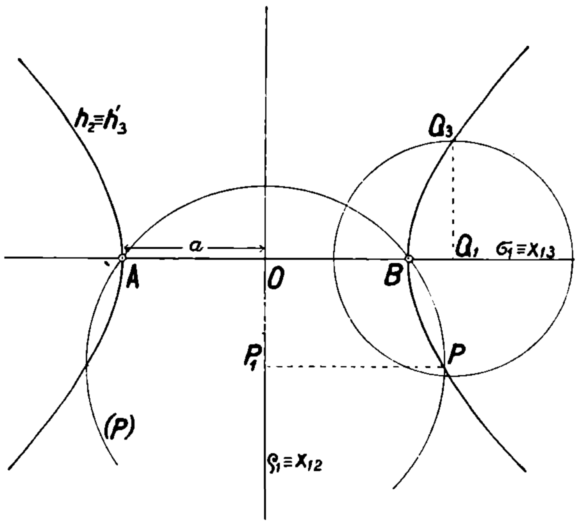
$A(A)$. Průmět p_1 je parabola s ohniskem A_1, jež je geom. místo středů cyklů, které se dotknou paprsku p^ϱ a cyklu (A).

Tím jsme dospěli k těmto větám:

Geom. místo středů cyklů, které se dotýkají dvou cyklů, je elipsa nebo hyperbola, jež má středy daných cyklů za ohniska.

Geom. místo středů cyklů, jež se dotýkají cyklu a paprsku, jest parabola, jež má střed daného cyklu za ohnisko.

Poznámka. Nahraďme v obr. 22 jeden cykl, na př. (B) cyklem doplňkovým, kužel $B(B)$ tedy kuželem symetrickým dle π s vrcholem B'. Dostaneme ovšem jinou průsečnou kuželosečku, ohniska průmětu jsou opět A_1, B_1. Možno tedy říci: *Středy kružnic, jež se dotýkají kružnic* $[A]$, $[B]$ *vyplňují dvě kuželosečky konfokální.*



Obr. 23.

Podobně, nahradíme-li v obr. 22*a* cyklus (A) doplňkovým, dostaneme parabolu konfokální s p_1. *Středy kružnic, jež se dotýkají kružnice a přímky, vyplňují dvě konfokální paraboly.*

3,2. Svazek kružnic v rovině a příslušný prostorový útvar. Věnujme pozornost případu, kdy vrcholy cyklografických kuželů A, B jsou v průmětně. ϱ jest pak rovina symetrie bodů A, B kolmá k průmětně a průsek obou kuželů je rovnoosá hyperbola v rovině ϱ se středem O a jednou osou v průmětně (v obr. 23 jest zobrazena ve sklopení kolem $x_{12} \equiv \varrho_1$). Cyklografické obrazy bodů této hyperboly jsou cykly jdoucí body A, B, kladné pro větev nad průmětnou a záporné pro větev pod průmětnou, tedy *svazek kružnic*. Volme O za počátek pravoúhlé soustavy souřadnic v prostoru, σ_1, ϱ_1 za osy x, y a označme délku $\overline{OA} = \overline{OB} = a$, pak jsou rovnice kuželů

$$(x - a)^2 + y^2 - z^2 = 0, \qquad (x + a)^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

průsečná křivka je dána rovnicemi

$$x = 0, \qquad z^2 - y^2 = a^2.$$

Je-li tedy $P(0, \eta, \pm \zeta = \pm \sqrt{a^2 + \eta^2})$ bod této hyperboly, je rovnice příslušné kružnice

$$x^2 + (y - \eta)^2 = a^2 + \eta^2.$$

Jsou-li základní body svazku A, B imaginární o souřadnicích $(\pm ai, 0, 0)$, dostáváme dva imaginární sdružené kužele, průsečná křivka je však reálná o rovnicích

$$x = 0, \qquad y^2 - z^2 = a^2$$

Je-li $(0, \eta, \zeta = \pm \sqrt{\eta^2 - a^2})$ bod této hyperboly, má přidružená kružnice rovnici

$$x^2 + (y - \eta)^2 = \eta^2 - a^2.$$

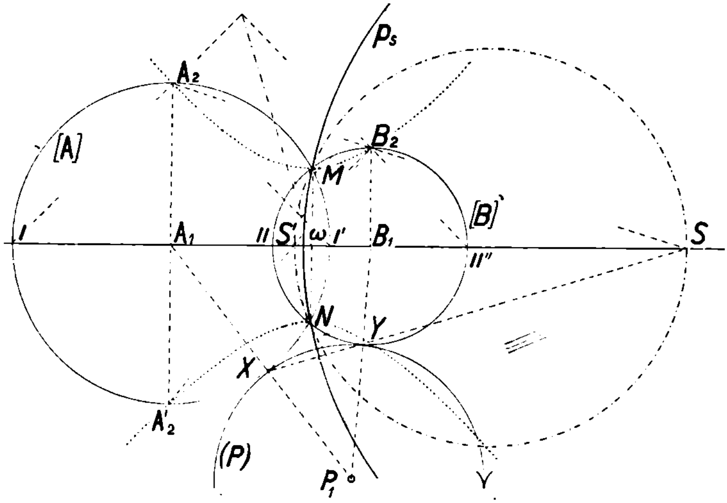
V prvém případě měla hyperbola v průmětně osu vedlejší, v druhém osu hlavní a seče tedy průmětnu ve dvou reálných bodech $M(0, a, 0)$, $N(0, - a, 0)$. To jsou středy kružnic s poloměrem nula, jež jdou imaginárními základními body. Máme tedy výsledek:

Rovnoosá hyperbola v rovině kolmé k průmětně a s jednou osou v této průmětně má za cyklografický obraz svazek kružnic. Leží-li v průmětně vedlejší osa, má svazek dva reálné základní body, leží-li v průmětně reálná osa, má svazek dva imaginárné základní body.

Splynou-li oba základní body, máme v rovině svazek kružnic, jež v bodě T se dotýkají přímky t. V prostoru jim odpovídají dvě „isotropické" přímky v rovině kolmé ku t.

K uvažovanému svazku kružnic o základních bodech A, B patří *doplňkový svazek* (1, 8) se základními body imaginárními na ϱ_1, jehož kružnice jsou kolmé ke kružnicím prvého svazku. Příslušná hyperbola h' je v rovině $\sigma(\sigma_1 \equiv AB)$ a je v obraze 23 otočena kolem $x_{13} = AB$ do průmětny. Při tom $h'_3 = h_2$. A, B jsou nulové kružnice druhého svazku.

Poznámky. Buď dán svazek kružnic dvěma kružnicemi $[A]$, $[B]$ (obr. 23a). Body A, B nad průmětnou je určena rovnoosá hyperbola s osou v průmětně π o středu ω. V obraze je vyznačena tečkovaně ve sklopení kolem A_1B_1. A_2B_2 je jedna úhlopříčka obdélníka, jehož strany mají sklon 45°; druhá úhlopříčka obsahuje středy rovnoosých hyperbol, které jdou body A, B a na ní leží ω (viz odst. 1,9). Buďte S, S' středy podobnosti obou kružnic. Pak kružnice nad průměrem SS' patří také svazku. Skutečně čtyrroh $A_2B_2A_2'B_2'$, kde $A_2'B_2'$ jsou symetrické s A_2, B_2, je do hyperboly vepsán, body S, S' a nevlastní bod ve směru

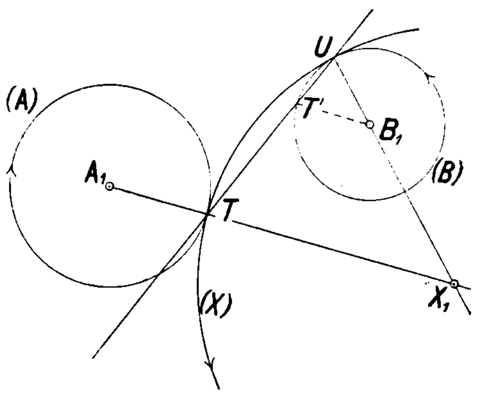


Obr. 23a.

kolmém ku SS' tvoří polární trojúhelník hyperboly, S,S' jsou tedy k ní sdružené. Průsečíky hyperboly s A_1B_1 jsou nulové kružnice uvažovaného svazku, dvojice SS' patří tedy také involuci vyťaté svazkem kružnic. Kružnice nad průměrem SS' sluje *kružnice podobnosti* (v obraze čárka-tečka). Z elementární geometrie je známo, že je místem bodů, z nichž se obě kružnice jeví pod týmž úhlem.

Ke dvěma cyklům lze přiřaditi t. zv. *potenční* čili *Steinerovu kružnici*, která má střed ve středu podobnosti a jde společnými body. Mějme na zřeteli dva kladné cykly (A), (B) (obr. 23a) se středem podobnosti S. Potenční kružnici označme p_s. Buď (P) cykl, který se dotýká cyklů (A), (B) v bodech X, Y. Tyto dva body a S jsou na přímce, což je stopa roviny (ABP). Bod P je na cyklografické kružnici k, ve které se sekou kužele $A(A)$, $B(B)$, P_1 je na jejím průmětu k_1, který má ohniska A_1, B_1. Tečna bodu P_1 půlí úhel $\widehat{A_1P_1B_1}$ čili je kolmá ku XY. Ve společném bodě M neb N splývá s tečnou potenční kružnice (je kolmá k SM nebo SN). Tedy kružnice p_s a křivka k_1 se v bodech M, N dotýkají, jinak *potenční kružnice půlí úhel kružnic* $[A]$, $[B]$. V dalším bude ukázáno, že kružnice p_s je kolmá ke všem cyklům (P) a že bod S je střed kruhové inverse, která převádí kružnici $[A]$ v kružnici $[B]$ a naopak.

3,3. Úlohy o dotyku. Teď můžeme řešiti úlohy o cyklech a kružnicích, jsou-li dány jednoduchými podmínkami jako jsou, že má procházeti bodem, dotýkati se daného paprsku (přímky) nebo dotýkati se daného cyklu (kružnice).



Obr. 24.

Úloha 1. *Sestrojte cykl, který se dotýká cyklu* (A) *v bodě* T *a dotýká se současně cyklu* (B).

Rozbor. Bod, kterému odpovídá hledaný cykl, je na površce AT kuželu $A(A)$ a na kuželi $B(B)$. Přímka AT je však rovnoběžná s jednou přímkou kužele druhého, seče jej tedy ještě v jednom bodě X.

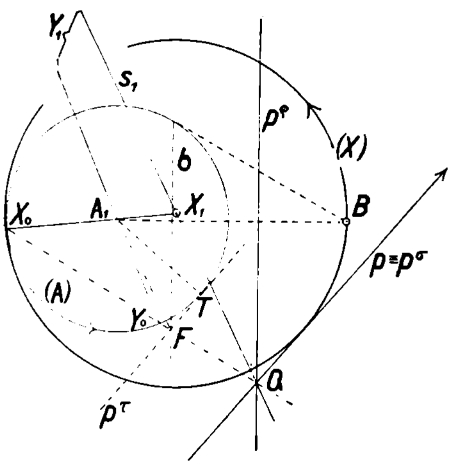
Sestrojení je v obr. 24. Na kuželi $B(B)$ je sestrojena přímka $BT' \parallel AT$. Rovina (BAT) má stopu TT' a seče kužel $B(B)$ v přímce UB, na níž leží průsečík X. X_1 je střed hledaného cyklu (X).

Kolik řešení má tato úloha, mluví-li se o kružnicích místo o cyklech?

Úloha 2. *Sestrojte cykl, který se dotýká cyklu* (A), *dotýká se paprsku* p *a jde bodem* B.

Rozbor. Body, kterým odpovídají hledané cykly, jsou na cyklogr. kuželi $A(A)$, na cyklografickém kuželi s vrcholem B v průmětně a v „isotropické“ rovině přímkou p. Oba kužele mají společnou cyklografickou kružnici v rovině ϱ. „Isotropickou" rovinu paprskem p označme σ. ϱ a σ mají průsečnici s a její průsečíky s kuželem $A(A)$ jsou hledané body.

Sestrojení je v obr. 25. Rovina σ je rovnoběžná s tečnou rovinou kužele $A(A)$ podél přímky AT, jež má stopu $p^\tau \parallel p^\sigma$. Rovina ϱ má za stopu p^ϱ chordálu kružnice $[A]$ a kružnice o středu B a poloměru nula a je rovnoběžná s rovinou danou středem A a přímkou b, kde b je polára bodu B ke kružnici $[A]$. p^τ, b mají průsečík F, AF je tedy rovnoběžná s průsečnicí $s \equiv (\varrho, \sigma)$, jejíž stopník je $Q \equiv (p, p^\varrho)$. Tedy s_1 jde bodem Q rovnoběžně s A_1F. Rovina (As) má stopu QF a ta seče cykl (A) v bodech X_0, Y_0. Na přímkách AX_0, AY_0 leží hledané průsečíky X, Y a jejich průměty X_1, Y_1 jsou středy hledaných cyklů. Úloha má dvě řešení. V obraze narýsován pouze cykl (X).



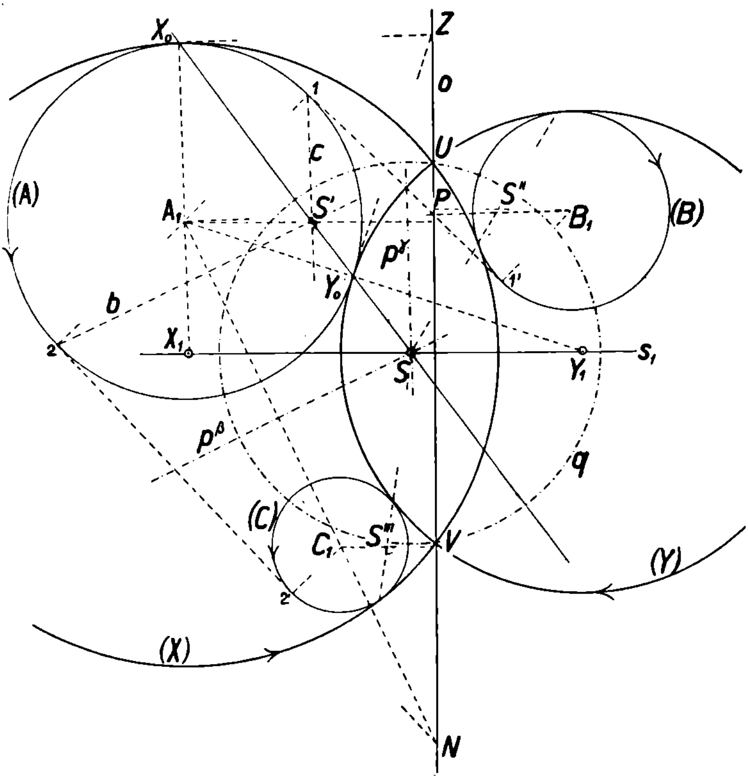
Obr. 25.

Kdyby byla v úloze řeč o kružnici a přímce (neorientované), bylo by třeba přidati ještě řešení, jež vzniknou změnou orientace jednoho útvaru, buď paprsku p nebo cyklu (A). Kolik řešení je pak celkem?

Úloha 3. *Sestrojte cykl, který se dotýká tří daných cyklů* (*Apolloniova úloha*).

Rozbor. Cykly označme (A), (B), (C). Kužele $A(A)$, $B(B)$, $C(C)$ mají mimo kuželosečku v rovině nevlastní C ještě dva body společné v konečnu X, Y, neboť kužele $A(A)$, $B(B)$ sekou se v cyklografické kružnici, jež seče kužel $C(C)$ ve dvou bodech nevlastních a tedy ještě ve dvou bodech v konečnu, jež leží na všech třech kuželích. Spojnicí $s \equiv XY$ jdou roviny α, β, γ, ve kterých leží křivka společná vždy dvěma kuželům, na př. v α křivka kuželů $B(B)$, $C(C)$ atd.

Sestrojení je v obr. 26. p^{γ} je chordála kružnic $[A]$, $[B]$ a je sestrojena užitím půlícího bodu společné tečny *11'*. Podobně p^{β}, chordála kružnic $[A]$, $[C]$, byla sestrojena užitím půlícího bodu tečny *22'*. Průsečík S je stopa přímky s; jím jde i třetí chordála p^{α}. S je bod stejných mocností ke všem třem kružnicím. Nechť b jest polára středu podobnosti N



Obr. 26.

cyklů (A), (C) vzhledem k cyklu (A), c polára středu podobnosti P cyklů (A), (B) k cyklu (A); pak roviny (Ab), (Ac) jsou rovnoběžné s rovinami β, γ a průsečík S' je stopník přímky AS' rovnoběžné s průsečnicí s. Pak jest $s_1 \parallel A_1S'$. SS' je stopa roviny vrcholové (As), jež vytíná površky AX_0, AY_0, na kterých jsou hledané průsečíky X, Y přímky s s kuželem $A(A)$. Úloha má dvě řešení. Body dotyku hledaných cyklů s cyklem (A) jsou X_0, Y_0 a jejich spojnice jde bodem S', ve kterém se sekou poláry b, c bodů N, P na ose podobnosti o všech tří cyklů. S' je tedy pólem přímky o k cyklu (A). Podobně ovšem to platí o cyklech (B), (C). Odtud jde jednoduché planimetrické řešení dané úlohy: Sestrojme osu podobnosti daných tří cyklů a její póly S', S'', S''' k těmto cyklům. Dále sestrojme bod stejných mocností S. Spojnice SS', SS'', SS''' vytínají body, ve kterých se hledané cykly dotýkají daných cyklů.

Snadno lze zjistiti, že cykly (X), (Y) se protínají na ose podobnosti o a že tomuto svazku patří také kružnice q, která má střed v bodě S a kolmo seče kružnice $[A]$, $[B]$, $[C]$, jinými slovy kružnice $[X]$, $[Y]$, q patří témuž svazku s chordálou o. Skutečně všimněme si promítací roviny přímky s. Ona seče kužele $A(A)$, $B(B)$, $C(C)$ v rovnoosých hyperbolách, které vedle obou bodů v nekonečnu mají společné body X, Y; jejich středy jsou na přímce (1,9), což je průsečnice roviny (ABC) s promítací rovinou přímky s, jež je k ní kolmá, neboť středy uvedených tří hyperbol jsou na kolmicích z vrcholů k průsečné rovině. Ve svazku těchto hyperbol je jedna, která má střed v průsečíku (o, s_1) a osu v průmětně. Jejím bodům odpovídá svazek kružnic s chordálou o, mezi nimiž jsou i kružnice $[X]$, $[Y]$. Jejich průsečíky buďte U, V. Poněvadž přímka X_0Y_0 jde pólem S' osy o, jest její pól Z na o a Z je středem kružnice $[Z]$, jež kolmo seče kružnice $[A]$, $[X]$, $[Y]$. Kružnice q seče kolmo kružnici $[A]$ i $[Z]$, neboť její střed S je na chordále X_0Y_0. Podobně zjistíme další dvě kružnice se středem na o sekoucí kolmo $[X]$, $[Y]$ a patřící tedy svazku doplňkovému s oním o základních bodech U, V. Kružnice q je však ke všem třem kolmá, patří tedy i ona tomuto svazku a jde body U, V.

Poznámka. Původní Apolloniův problém žádá sestrojení kružnic, jež se daných tří kružnic dotýkají. Každá kružnice je nositelkou dvou cyklů. Označíme-li příslušné body v prostoru dle π symetricky položené A, A'; B, B'; C, C', pak skupiny na př. ABC a $A'B'C'$ nebo ABC', $A'B'C$ vedou k témuž řešení a všechna řešení dostaneme na př. z kombinací

$$ABC,\ A'BC,\ AB'C,\ ABC'.$$

Problém má celkem osm řešení, jež ovšem z části mohou být imaginární.

Cvičení 3,1. Problém Apolloniův má následující zvláštní případy, přejde-li některá kružnice v bod nebo přímku: Sestrojte kružnici, jsou-li dány a) tři její body, b) dva body a přímka, c) dva body a kružnice, d) bod, přímka a kružnice, e) dvě přímky a kružnice, f) tři přímky. Proveďte řešení orientujíce vždy přímku a kružnici a udejte celkový počet řešení.

3,2. Pappusovy úlohy jsou zvláštní případ předešlých, když bod leží na přímce neb na kružnici. Jsou to: Sestrojiti jest kružnici, která a) dotýká se přímky a v bodě A a jde bodem B, b) dotýká se přímky a v bodě A a dotýká se přímky b, c) dotýká se přímky a v bodě A a dotýká se kružnice $[B]$, d) dotýká se kružnice $[A]$ v bodě M a jde bodem N, e) dotýká se kružnice $[A]$ v bodě M a přímky n, f) dotýká se kružnice $[A]$ v bodě M a dotýká se kružnice $[B]$. Proveďte cyklografické řešení orientujíce opět přímku a kružnici a udejte celkový počet řešení.

3,3. Dány jsou tři cykly se středy na téže přímce. Sestrojte cykly, které se jich dotýkají.

3,4. Dány jsou tři cykly, které se dotýkají téhož paprsku. Sestrojte cykl další, který se všech tří dotýká.

3,5. Dán jest svazek kružnic jednou reálnou a jednou imaginární kružnicí. Sestrojte hyperbolu, jejímž bodům jsou přiřazeny kružnice svazku, a hyperbolu, která patří svazku doplňkovému.

3,6. Ve svazku daném dvěma kružnicemi sestrojte ony, které daný paprsek sekou v úhlu 45° (30°).

3,7. Tři kružnice se po dvou dotýkají. Sestrojte kružnice, jež se dotýkají všech tří daných kružnic.