4. ZOBRAZENÍ SOUSTAV ROVNIC JEDNÍM NOMOGRAMEM

4,1. Nomogramy s průsvitkou lze také zobraziti četné soustavy rovnic tak, že jedním nomogramem ihned rozřešíme celou soustavu.

Předpokládejme na př. dvě rovnice mezi deseti proměnnými

(4,11) $$F_1(M, N; z_9, z_{10}) = 0, \quad F_2(M, N; z_9, z_{10}) = 0,$$

v nichž M, N jsou funkce tvaru (1,28).

(4,12) $$\begin{aligned} M &= f_{1,2} + (f_{3,4} + f_{5,6}) \cos (f_7 + f_8) - (g_{3,4} + g_{5,6}) \sin (f_7 + f_8), \\ N &= g_{1,2} + (f_{3,4} + f_{5,6}) \sin (f_7 + f_8) + (g_{3,4} + g_{5,6}) \cos (f_7 + f_8). \end{aligned}$$

Podle čl. **1,2** sestrojme na průsvitce dvě binární stupnice

$$\begin{array}{lll} (z_3, z_4) & \xi'_1 = -f_{3,4}; & \eta'_1 = -g_{3,4}, \\ (z_5, z_6) & \xi'_2 = f_{5,6}; & \eta'_2 = g_{5,6} \end{array}$$

a svazek kótovaných paprsků

$$(z_8) \qquad \alpha' = -f_8.$$

Na podkladu sestrojme binární stupnici

$$(z_1, z_2) \qquad \xi_1 = f_{1,2}; \qquad \eta_1 = g_{1,2},$$

a svazek kótovaných paprsků

$$(z_7) \qquad \alpha = f_7.$$

Souřadnice bodu $A(\xi_2, \eta_2)$ na podkladě bude tedy splňovati dvě rovnice obsahující parametry z_9 a z_{10}

(4,13) $$F_1(\xi_2, \eta_2; z_9, z_{10}) = 0; \quad F_2(\xi_2, \eta_2; z_9, z_{10}) = 0.$$

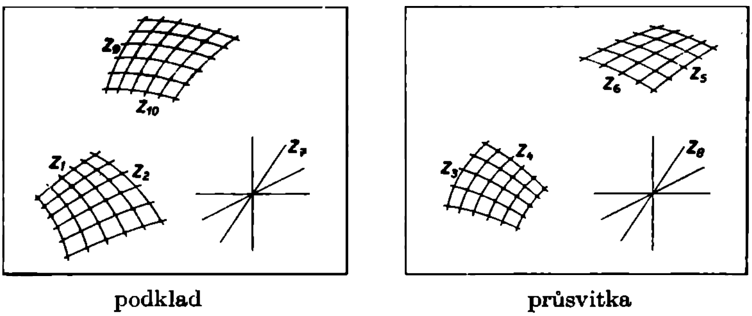
Tyto rovnice však značí binární stupnici (z_9, z_{10}), jejíž isopléty $z_9 =$ = konst. obdržíme vyloučením z_{10} z obou rovnic (4,13), kdežto vyloučením z_9 obdržíme rovnici soustavy isoplét z_{10} = konst. Nomogram soustavy rovnic (4,11) je načrtnut v obr. 30 a má klíč:

$$P'_{3,4} \mid=\mid P_{1,2}, \quad P'_{\infty}(z_8) \mid-\mid D_7, \quad P'_{5,6} \mid=\mid P_{9,10}.$$

Kdežto v dosavadních nomogramech jsme měli na podkladě vždy veškeré soustavy isoplét, které netvořily součást binárních stupnic, můžeme nyní na základě současného zobrazení rovnic (4,11) uvažovati i o takovém rozštěpení, které nám dovolí umístiti v nomogramech některé z těchto soustav isoplét na průsvitce. Upozorněme nejprve, že vypočteme-li M, N z (4,11) a dosadíme-li je do (4,12), můžeme obě rovnice (4,11) psáti též ve tvaru

$$(4,14)\quad \begin{aligned} f_{1,2} + (f_{3,4} + f_{5,6}) \cos (f_7 + f_8) - (g_{3,4} + g_{5,6}) \sin (f_7 + f_8) &= f_{9,10}, \\ g_{1,2} + (f_{3,4} + f_{5,6}) \sin (f_7 + f_8) + (g_{3,4} + g_{5,6}) \cos (f_7 + f_8) &= g_{9,10}, \end{aligned}$$

kde na levých stranách jsou funkce M a N [vzorec (4,12)]. Rovnice (4,13) binární stupnice (z_9, z_{10}) však plynuly z (4,11) prostým nahra-



Obr. 30. Schema nomogramu pro řešení soustavy rovnic (4,11).

zením ξ_2, η_2 za M a N. Učiníme-li totéž v (4,14), které jsou ekvivalentní s (4,11), obdržíme z nich také rovnice této binární stupnice, a sice zřejmě ve tvaru

$$\xi_2 = f_{9,10}, \quad \eta_2 = g_{9,10}.$$

Po této poznámce předpokládejme tedy na příklad, že rovnici

$$(4,15)\qquad \Phi(z_1, z_2, \ldots, z_{12}) = 0,$$

můžeme rozštěpiti zavedením pěti parametrů x, y, u, t, w v šest rovnic

$$(4,16)\quad \left\{ \begin{aligned} &F_1(x + f_{1,2} \cos u - g_{1,2} \sin u, \\ &\quad y + f_{1,2} \sin u + g_{1,2} \cos u;\ z_3) = 0, \\ &F_2(x + f_{4,5} \cos u - g_{4,5} \sin u, \\ &\quad y + f_{4,5} \sin u + g_{4,5} \cos u;\ z_6) = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(4{,}17)\begin{cases} x + f^{(1)}(t, z_7)\cos u - g^{(1)}(t, z_7)\sin u = f_{8,9}\text{ [14]}, \\ y + f^{(1)}(t, z_7)\sin u + g^{(1)}(t, z_7)\cos u = g_{8,9}, \end{cases}$$

$$(4{,}18)\begin{cases} x + f^{(2)}(w, z_{10})\cos u - g^{(2)}(w, z_{10})\sin u = f_{11,12}, \\ y + f^{(2)}(w, z_{10})\sin u + g^{(2)}(w, z_{10})\cos u = g_{11,12}. \end{cases}$$

Na tomtéž podkladě i na téže průsvitce a v každé z těchto rovin v jedné a téže soustavě souřadnicové zobrazme opět páry rovnic (4,17) a (4,18) způsobem uvedeným na počátku tohoto článku a rovnice (4,16) zobrazme podle čl. 2,6. Tak na př. rovnice (4,17) se zobrazí těmito útvary: Na podkladě bude pomocná stupnice

$(x, y)\quad \xi_1 = x,\quad \eta_1 = y,$

dále stupnice o rovnicích

$(z_8, z_9)\quad \xi_2 = f_{8,9},\quad \eta_2 = g_{8,9}$

a svazek

$$\alpha = u.$$

Na průsvitce budou stupnice

(O')

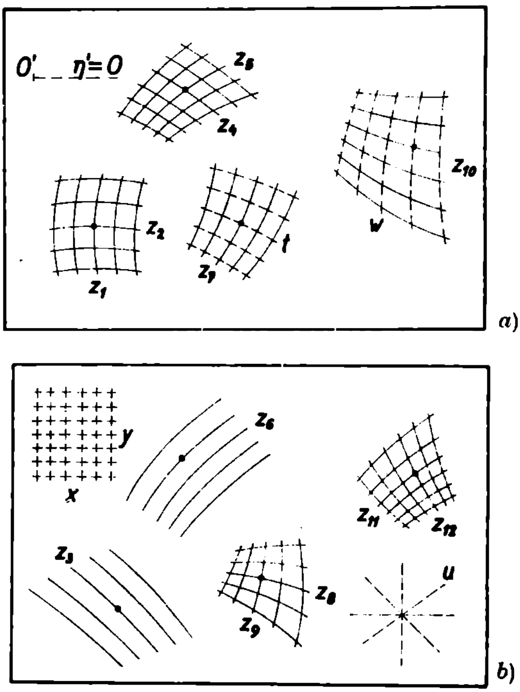
$\xi'_1 = 0,\qquad \eta'_1 = 0,$

(t, z_7)

$\xi'_2 = f^{(1)}(t, z_7),\ \eta'_2 = g^{(1)}(t, z_7)$

a svazek

$$\alpha' = 0,\qquad \text{atd.}$$



Obr. 31. Nomogram se soustavami isoplét také na průsvitce; *a*) průsvitka, *b*) podklad.

[14]) Index nahoře v závorce u těchto funkcí neznačí snad derivaci, nýbrž slouží pouze k rozlišení od sebe různých funkcí označených toutéž malou písmenou f nebo g. Dole umístěných indexů k tomu nemůžeme použíti, jelikož na př. f_1 nám již značí funkci argumentu z_1 atd. U funkcí označovaných velkými písmeny F atd. nevadí rozlišování jich dolními indexy, jelikož u těchto jsme vždy vypisovali jejich argumenty in extenso. Viz na př. (4,11).

Dostaneme nomogram rovnice (4,15) načrtnutý v obr. 31 o klíči

$$P'_{1,2} \dashv\vdash L_3, \quad P'_{4,5} \dashv\vdash L_6, \quad L'_7 \dashv\vdash P_{8,9}, \quad L'_{10} \dashv\vdash P_{11,12},$$

který ze čtyř soustav isoplét (z_3), (z_6), (z_7) a (z_{10}) má prvé dvě na podkladě a druhé dvě na průsvitce.

Jelikož nomogram se nezmění, zaměníme-li podklad s průsvitkou, musí býti možno z každého páru rovnic (4,17) a (4,18) odvoditi rovnice tvaru (4,16) a naopak. Skutečně, z rovnic (4,17) plyne

$$(4,19) \quad \begin{aligned} &- x \cos u - y \sin u + f_{8,9} \cos u + g_{8,9} \sin u = f^{(1)}(t, z_7), \\ &+ x \sin u - y \cos u - f_{8,9} \sin u + g_{8,9} \cos u = g^{(1)}(t, z_7). \end{aligned}$$

Zavedeme-li sem nové parametry

$$x' = - x \cos u - y \sin u, \quad y' = x \sin u - y \cos u, \quad u' = - u$$

a vyloučíme-li t z obou rovnic (4,19), obdržíme rovnici tvaru (4,16)

$$F(x' + f_{8,9} \cos u' - g_{8,9} \sin u', \; y' + f_{8,9} \sin u' + g_{8,9} \cos u'; \; z_7) = 0.$$

Naopak, zavedením parametru t'

$$x + f_{1,2} \cos u - g_{1,2} \sin u = t'$$

obdržíme z rovnice $F_1 = 0$ ještě druhou rovnici

$$y + f_{1,2} \sin u + g_{1,2} \cos u = f(t', z_3).$$

Zavedením výše užitých parametrů x', y', u' místo x, y, u do těchto dvou rovnic, obdržíme z $F_1 = 0$ konečně pár rovnic tvaru (4,17)

$$\begin{aligned} x' + t' \cos u' - f(t', z_3) \sin u' &= f_{1,2}, \\ y' + t' \sin u' + f(t', z_3) \cos u' &= g_{1,2}. \end{aligned}$$

A podobně tomu bude s rovnicí $F_2 = 0$ a s párem rovnic (4,18).

4,2. Jiný, často se vyskytující případ několika rovnic jest tento:

$$(4,21) \qquad F_1(M_1, N_1; z_9) = 0, \quad F_2(M_2, N_2; z_{12}) = 0, \ldots,$$

v nichž

$$(4,22) \quad \begin{cases} M_1 = f_{1,2} + (f_{3,4}+f_{5,6}) \cos (f_7+f_8) - (g_{3,4}+g_{5,6}) \sin (f_7+f_8), \\ N_1 = g_{1,2} + (f_{3,4}+f_{5,6}) \sin (f_7+f_8) + (g_{3,4}+g_{5,6}) \cos (f_7+f_8), \end{cases}$$

$$(4,23) \quad \begin{cases} M_2 = f_{1,2} + (f_{3,4}+f_{10,11}) \cos (f_7+f_8) - (g_{3,4}+g_{10,11}) \sin (f_7+f_8), \\ N_2 = g_{1,2} + (f_{3,4}+f_{10,11}) \sin (f_7+f_8) + (g_{3,4}+g_{10,11}) \cos (f_7+f_8), \end{cases}$$

atd.

Nomogramy všech rovnic (4,21) mají společné binární stupnice

$$(z_1, z_2) \qquad \xi_1 = f_{1,2}, \qquad \eta_1 = g_{1,2},$$
$$(z_3, z_4) \qquad \xi'_1 = -f_{3,4}, \qquad \eta'_1 = -g_{3,4}$$

a společné svazky kótovaných paprsků

$$\alpha = f_7, \qquad \alpha' = -f_8.$$

Hodnota z_9, hovící prvé rovnici, čte se v soustavě isoplét

$$(z_9) \qquad F_1(\xi_2, \eta_2; z_9) = 0$$

bodem binární stupnice

$$(z_5, z_6) \qquad \xi'_2 = f_{5,6}, \quad \eta'_2 = g_{5,6},$$

kdežto z_{12} čte se v soustavě isoplét

$$(z_{12}) \qquad F_2(\xi_2, \eta_2; z_{12}) = 0$$

bodem

$$(z_{10}, z_{11}) \qquad \xi'_2 = f_{10,11}, \quad \eta'_2 = g_{10,11} \text{ atd.}$$

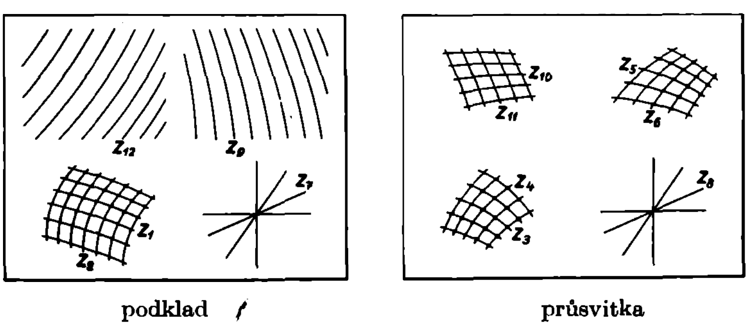
Nomogram má tedy klíč

$$P'_{3,4} \mid\!=\!\mid P_{12}, \quad P'_\infty(z_8) \mid\!-\!\mid D_7, \quad \begin{cases} P'_{5,6} \mid\!-\!\mid L_9 \\ P'_{10,11} \mid\!-\!\mid L_{12} \end{cases} \text{atd.}$$

a je znázorněn v obr. 32.

Jako **příklad** sestrojme nomogram pro **kladné** kořeny (záporné kořeny nemá) rovnice **kubické**

$$(4,24) \qquad az^3 - bz^2 + cz - d = 0,$$



Obr. 32. Schema nomogramu pro řešení soustavy rovnic (4,21).

v níž a, b, c, d značí kladná čísla. Dělením celé rovnice z a užitím parametru x rozložme ji ve dvě rovnice

$$az^2 + c = x, \tag{4,25}$$

$$bz + \frac{d}{z} = x, \tag{4,26}$$

v nichž je $x > 0$ následkem předpokladu $a > 0$, $c > 0$.

Položíme-li v (4,25)

$$M_1 = \alpha(2 \log z - \log x + \log a), \quad N_1 = \beta(-\log x + \log c),$$

uvedeme ji na kanonický tvar

$$10^{M_1 : \alpha} + 10^{N_1 : \beta} = 1.$$

Na podkladě isopléty (z_9) se tedy redukují na index

$$(I_{a,c}) \qquad 10^{\xi_2 : \alpha} + 10^{\eta_2 : \beta} = 1.$$

a stupnice (z_1, z_2) na počátek

$$(O) \qquad \xi_1 = f_{1,2} \equiv 0, \quad \eta_1 = g_{1,2} \equiv 0.$$

Na průsvitce dostaneme binární stupnici

$$(z, x) \qquad \begin{aligned} \xi'_1 &= -f_{3,4} = -\alpha(2 \log z - \log x), \\ \eta'_1 &= -g_{3,4} = \beta \log x, \end{aligned}$$

kterou sdružíme s počátkem O a binární stupnici

$$(a, c) \qquad \xi'_2 = f_{5,6} = \alpha \log a, \quad \eta'_2 = g_{5,6} = \beta \log c,$$

kterou sdružíme s indexem $I_{a,c}$. Konečně zvolíme v (4,22) $f_7 \equiv f_8 \equiv 0$, t. j. průsvitka bude míti dva posuvy vzhledem k podkladu, nikoliv však rotaci.

Abychom v nomogramu rovnice (4,26) obdrželi stejnou stupnici (z, x) jako v nomogramu rovnice (4,25), položme

$$\begin{aligned} M_2 &= \alpha(2 \log z - \log x) + \lambda \log b + \mu \log d + A = f_{1,2} + f_{3,4} + f_{10,11}, \\ N_2 &= \qquad\qquad -\beta \log x + \varrho \log b + \sigma \log d + B = g_{1,2} + g_{3,4} + g_{10,11}, \end{aligned}$$

v nichž λ, μ, ϱ, σ, A, B jsou vhodné stálé. Jest pak

$$\begin{aligned} \log z - \log x + \log b &= \gamma(M_2 - A) + \delta(N_2 - B), \\ -\log z - \log x + \log d &= \varepsilon(M_2 - A) + \vartheta(N_2 - B), \end{aligned}$$

volíme-li stálé γ, δ, ε, ϑ tak, aby

$$2\alpha\gamma = \quad 1, \ \alpha\gamma + \beta\delta = 1, \ \text{t. j. } \gamma = \quad \frac{1}{2\alpha}, \ \delta = \frac{1}{2\beta}$$

$$2\alpha\varepsilon = -1, \ \alpha\varepsilon + \beta\vartheta = 1, \ \text{t. j. } \varepsilon = -\frac{1}{2\alpha}, \ \vartheta = \frac{3}{2\beta}$$

a stálé λ, μ, ϱ, σ tak, aby

$$\left.\begin{aligned} \gamma\lambda + \delta\varrho &= \quad \frac{\lambda}{2\alpha} + \frac{\varrho}{2\beta} = 1, \\ \varepsilon\lambda + \vartheta\varrho &= -\frac{\lambda}{2\alpha} + \frac{3\varrho}{2\beta} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{t. j. } \lambda = \tfrac{3}{2}\alpha, \ \varrho = \tfrac{1}{2}\beta$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma\mu + \delta\sigma &= \quad \frac{\mu}{2\alpha} + \frac{\sigma}{2\beta} = 0, \\ \varepsilon\mu + \vartheta\sigma &= -\frac{\mu}{2\alpha} + \frac{3\sigma}{2\beta} = 1, \end{aligned}\right\} \quad \text{t. j. } \mu = -\tfrac{1}{2}\alpha, \ \sigma = \tfrac{1}{2}\beta.$$

Tím jsme převedli rovnici (4,26) na kanonický tvar

$$10^{(M_2-A):2\alpha + (N_2-B):2\beta} + 10^{-(M_2-A):2\alpha + 3(N_2-B):2\beta} = 1.$$

Její nomogram má tedy na podkladě index

$$(I_{b,d}) \quad 10^{(\xi_2-A):2\alpha + (\eta_2-B):2\beta} + 10^{-(\xi_2-A):2\alpha + 3(\eta_2-B):2\beta} = 1$$

a počátek

$$(O) \qquad \xi_1 = f_{1,2} \equiv 0, \quad \eta_1 = g_{1,2} \equiv 0,$$

shodný s počátkem na podkladě rovnice (4,25). Na průsvitce obdržíme zase binární stupnici

$$(z, x) \qquad \begin{aligned} \xi'_1 &= -f_{3,4} = -\alpha(2\log z - \log x), \\ \eta'_1 &= -g_{3,4} = \beta\log x \end{aligned}$$

stejnou jako v nomogramu prvém a binární stupnici

$$(b, d) \qquad \begin{aligned} \xi'_2 &= f_{10,11} = \frac{3\alpha}{2}\log b - \frac{\alpha}{2}\log d + A, \\ \eta'_2 &= g_{10,11} = \frac{\beta}{2}\log b + \frac{\beta}{2}\log d + B, \end{aligned}$$

kterou sdružujeme s indexem $I_{b,d}$.

Isopléty binární stupnice (b, d) jsou rovnoběžky

$$(b) \qquad \frac{\eta'_2 - B}{\beta} + \frac{\xi'_2 - A}{\alpha} = 2 \log b$$

$$(d) \qquad 3\,\frac{\eta'_2 - B}{\beta} - \frac{\xi'_2 - A}{\alpha} = 2 \log d.$$

Isopléty (z) binární stupnice (z, x) jsou rovněž rovnoběžky

$$(z) \qquad \frac{\eta'_1}{\beta} - \frac{\xi'_1}{\alpha} = 2 \log z.$$

Pomocné isopléty (x) v ní patrně nemusíme kresliti.

Index $I_{a,c}$ jest v podstatě subtrakční křivkou[15])

$$\eta_2 = \beta \log (1 - 10^{\xi_2 : \alpha}),$$

která probíhá zcela v 3. kvadrantu a má za asymptoty záporné osy

$$\xi_2 = 0,\ \eta_2 < 0; \quad \eta_2 = 0,\ \xi_2 < 0.$$

Index $I_{b,d}$ jest stejnou křivkou kreslenou v klinogonálné soustavě souřadnicové

$$\bar{\xi}_2 = \frac{\xi_2 - A}{2\alpha} + \frac{\eta_2 - B}{2\beta}, \quad \bar{\eta}_2 = -\frac{\xi_2 - A}{2\alpha} + 3\,\frac{\eta_2 - B}{2\beta},$$

která má počátek v $\xi_2 = A$, $\eta_2 = B$ a jejíž osy mají v původní soustavě (ξ, η) rovnice

$$\bar{\xi}_2 = 0 \text{ má rovnici } \eta_2 - B = -\frac{\beta}{\alpha}(\xi_2 - A),$$

$$\bar{\eta}_2 = 0 \text{ má rovnici } \eta_2 - B = \tfrac{1}{3}\frac{\beta}{\alpha}(\xi_2 - A).$$

Kladné směry a jednotky délek na nových osách určují body:

1. $\bar{\xi}_2 = 0$, $\bar{\eta}_2 = 1$, pro který $\xi_2 - A = -\dfrac{\alpha}{2}$, $\eta_2 - B = \dfrac{\beta}{2}$,

2. $\bar{\xi}_2 = 1$, $\bar{\eta}_2 = 0$, pro který $\xi_2 - A = \dfrac{3\alpha}{2}$, $\quad \eta_2 - B = \dfrac{\beta}{2}$.

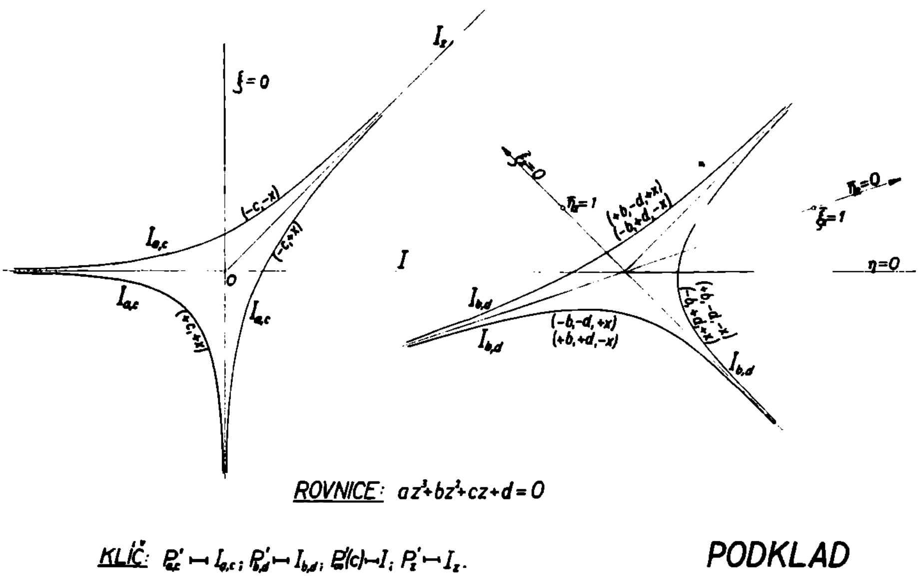
V nomogramu funkce (4,24) volili jsme $\alpha = \beta = 5$ cm, $A = 16$ cm, $B = 0$ (obr. 33). Rovnoběžné posouvání průsvitky zajistěme indexem

[15]) Viz pozn. [6]) v čl. 1,5.

I_z na podkladu, vedeným rovnoběžně s isoplétami (z). Klíč nomogramu pak zní

$$P'_{a,c} \mapsto I_{a,c}, \quad P'_{b,d} \mapsto I_{b,d}, \quad P'_{\infty}(z) \mapsto I_z, \quad O \mapsto D_z.$$

Svazek rovnoběžných isoplét (z) můžeme prostě nahraditi též stupnicí, nejlépe přímou a k nim kolmou, jak jsme to učinili v obr. 33, vedeme-li index I_z počátkem O, neboť rovnoběžné posunování prů-



Obr. 33 (asi v $\frac{1}{3}$ velikosti uvedené v textu). Průsvitku viz v kapse na konci knihy.

svitky můžeme též zajistiti indexem $I \equiv \eta = 0$ a isoplétami (c). Klíč se tím změní pouze nepodstatně způsobem uvedeným v obrázku.

Máme-li sestrojiti nomogram pro řešení kubické rovnice o koeficientech kladných nebo záporných, vyznačme explicitně jejich znaménka

$$az^3 \mp bz^2 \pm cz \mp d = 0 \tag{4,27}$$

a předpokládejme opět a, b, c, d kladná. Jelikož rovnice s koeficienty vesměs kladnými nemá kladného kořene, můžeme vynechati kombinaci znamení $+ + +$. Vyznačíme-li, že také pomocná proměnná x může býti kladná nebo záporná, rozdělíme rovnici (4,27) na

$$az^2 \pm c = \pm x, \tag{4,28}$$

$$\pm bz \pm \frac{d}{z} = \pm x. \tag{4,29}$$

Vidíme, že můžeme užíti těchže stupnic na průsvitce jako dříve, že však na podkladě musíme nakresliti jiné indexy a sice

$$(I_{a,c}) \qquad 10^{\xi_2 : \alpha} \pm 10^{\eta_2 : \beta} = \pm 1,$$

$$(I_{b,d}) \qquad \pm 10^{(\xi_2 - A) : 2\alpha + (\eta_2 - B) : 2\beta} \pm 10^{-(\xi_2 - A) : 2\alpha + 3(\eta_2 - B) : 2\beta} = \pm 1,$$

kde znaménka souhlasí se znaménky v (4,28) resp. (4,29). U každého z těchto dalších indexů musíme vyznačiti znaménka koeficientů v (4,27) a znaménko x v (4,28) a (4,29). Výhodou nomogramu je stálá relativní přesnost následkem užití logaritmických stupnic a značný rozsah koeficientů.

Na příklad řešme naším nomogramem rovnici

$$\varphi(z) \equiv 10z^3 + 17z^2 - 69z - 90 = 0,$$

která má jediný kladný kořen[16]). V nomogramu jej najdeme $z_1 = 2{,}5$ použitím indexů

$$I_{a,c}(-c, -x), \quad I_{b,d}(+b, -d, -x).$$

I nomogramem se ostatně můžeme přesvědčiti, že ony indexy není možno vésti současně body

$$(a = 10;\ c = 69), \quad (b = 17;\ d = 90)$$

ještě jiným způsobem a že to není možno provésti ani s indexy

$$I_{a,c}(-c, +x), \quad I_{b,d}(+b, -d, +x).$$

Proto kořen $z_1 = 2{,}5$ jest jediným kořenem kladným.

Záporné kořeny rovnice $\varphi(z) = 0$ jsou kladnými kořeny rovnice

$$-\varphi(-z) = 10z^3 - 17z^2 - 69z + 90 = 0.$$

---

[16]) Podle pravidla Descartesova. Viz na př. LÁSKA-HRUŠKA: Theorie a prakse numerického počítání, Praha 1934, str. 241.

Najdeme dva $-z_2 = 1{,}2$ a $-z_3 = 3$, prvý indexy

$$I_{a,c}(-c, -x) \text{ a } I_{b,d}(-b, +d, -x)$$

a druhý bychom našli indexy

$$I_{a,c}(-c, +x) \text{ a } I_{b,d}(-b, +d, +x),$$

kdybychom je dostatečně prodloužili.

Všimněte si, že isopléty (x) jsou totožné s isoplétami (c) a že tedy v těchto posledních můžeme počátkem O čísti i pomocnou hodnotu x. Proveďte to za cvičení pro jednotlivé kořeny a srovnejte tato x_i s hodnotami $x_1 = -6{,}5$; $x_2 = -54{,}6$; $x_3 = +21$ resp. získanými výpočtem z (4,28)

$$\pm x_i = az_i^2 \pm b = 10z_i^2 - 69, \quad i = 1; 2; 3.$$