Užijeme-li označení zavedeného v úl. 36., máme přibližně

$$C_1^3 + C_2^3 + \ldots + C_n^3 = \tfrac{3}{2}\,\pi\, n\, R^3.$$

VI. Poincaréova metoda libovolných funkcí.

*37. Poincaréova metoda. Problém rulety.**) — a) Přihlédneme-li blíže k podmínkám, za kterých pokusně zjišťujeme nějakou geometrickou pravděpodobnost, seznáme často, ne-li vždycky, že nelze považovati všechny případy, které se jakožto výsledek uvažovaného pokusu mohou vyskytnouti, za stejně pravděpodobné. Proto nelze také bez dalšího rozboru úlohy počítati hledanou pravděpodobnost jednoduchým srovnáváním případů příznivých se všemi případy vůbec možnými. Objasněme to na příkladě rulety. Kolem geometrické osy kotouče rozděleného na $2n$ stejně velikých výsečí, jež jsou střídavě červené a černé, otáčí se jehla; v počátečním okamžiku udělíme jí nárazem určitou úhlovou rychlost, takže jehla oběhne několikráte dokola, až se vlivem tření, odporu vzduchu atd. zastaví buď u výseče červené nebo u výseče černé. Jak veliká je pravděpodobnost, že vyjde červená?

Uvažme nejprve, že ke konci pohybu, když už je kinetická energie jehly nepatrná, stačí docela malá překážka (na př. zrnko prachu), která způsobí, že se jehla zastaví u určité výseče. I když je ruleta dokonale pracována, nemůžeme tvrditi, že pravděpodobnost zastaviti se u určité výseče je pro všechny výseče naprosto stejná; při tom ani nepřihlížíme k okolnosti, že také individualita hráčova, jevící se ve zvláštním střídání počátečních rychlostí, které hráč jehle uděluje, může zde míti určitý vliv. Poincaré ukázal však, že jest jeden zvláštní důvod, pro který můžeme považovati pravděpodobnost, že jehla se zastaví u červené výseče, za rovnou $^1/_2$, aspoň pokud počet výsečí je velmi veliký.

Představme si, že na začátku každého pokusu postavíme jehlu do určité polohy a že jí pak udělíme tak velikou počáteční rychlost, aby se otočila nejméně padesátkráte dokola; počáteční rychlost budiž však v takových mezích, že se jehla v každém pokusu zastaví po méně než 100 obězích. Označme písmenem ϑ úhel, o který se jehla úhrnem otočí než se za-

*) *H. Poincaré:* Calcul des Probabilités, 2e édition, chap. VIII. *E. Borel:* Éléments de la théorie des probabilités, 3e édition, chap. VIII.

staví. Je tedy vždy $50 \cdot 2\pi < \vartheta < 100 \,.\, 2\pi$. O pravděpodobnosti, že se jehla zastaví po opsání úhlu obsaženého v mezích ϑ až $\vartheta + d\vartheta$, budeme předpokládati, že je rovna výrazu

$$\varphi(\vartheta)\, d\vartheta,$$

kde φ značí spojitou funkci proměnné ϑ. Patrně jest

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta = 1,$$

poněvadž integrál vyjadřuje pravděpodobnost, že jehla se vůbec někde zastaví. Funkce $\varphi(\vartheta)$ (»hustota pravděpodobnosti«) rovná se nule, je-li ϑ menší než $50 \,.\, 2\pi$ nebo větší než $100 \,.\, 2\pi$.

Znázorněme funkci $y = \varphi(\vartheta)$ graficky a sestrojme na ose $O\vartheta$ všecky body a_i odpovídající těm hodnotám úhlu ϑ, při kterých se jehla zastaví právě na rozhraní červené a černé výseče. Tak obdržíme na ose $O\vartheta$ řadu stejně dlouhých intervalů, které odpovídají střídavě barvě červené a černé. Vztyčme v těch bodech pořadnice a vyčárkujme všechny plochy, které jsou nad intervaly odpovídajícími červené barvě. Označíme-li tyto intervaly $a_1 a_2$, $a_3 a_4, \ldots$ $a_{2k-1} a_{2k}$, bude pravděpodobnost, že vyjde červená barva, rovna výrazu

$$p = \sum_k \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta$$

t. j. součtu vyčárkovaných ploch. Poincaré dokázal, že součet p vyčárkovaných ploch blíží se jedné polovině (celá plocha omezená křivkou $= 1$) jakožto limitní hodnotě, roste-li počet n červených výsečí do nekonečna a je-li funkce $\varphi(\vartheta)$ taková, že její derivace je menší než určitá konstanta, nechť ϑ má hodnotu jakoukoli. V odst. 38. bude podrobně vyložen důkaz obdobné věty pro případ funkce tří proměnných; proto neuvádím nyní důkazu Poincaréovy věty a poznamenávám jen toto: Je-li n velmi veliké číslo, jsou intervaly $a_1 a_2$, $a_2 a_3 \ldots$ velmi malé a je zřejmo, že obsah vyčárkované plochy nad $a_1 a_2$ liší se jen velmi málo od obsahu nevyčárkované plochy nad $a_2 a_3$ atd. Z toho důvodu je úhrnný obsah ploch vyčárkovaných téměř roven obsahu ploch nevyčárkovaných.

Je-li tedy výsečí velmi mnoho, je hledaná pravděpodobnost velmi blízká jedné polovině, nezávisle na tom, jaká je funkce $\varphi(\vartheta)$. Touto funkcí zavádí se vlastně do počtu to, co vyplývá z malých nedokonalostí v konstrukci rulety nebo z individuality hráčovy a čím se způsobuje, že lze očekávati zastavení kotouče spíše v některých polohách než v jiných. Můžeme též říci, že funkce φ měří hustotu pravděpodobnosti. Ačkoli jsme učinili jen málo předpokladů o funkci $\varphi(\vartheta)$, takže ji lze voliti dosti libovolně, přece z počtu vypadla; v konečném výsledku se nevyskytuje.

38. Zobecnění Poincaréovy metody. — V odst. *39.* je podáno nové řešení Buffonovy úlohy o jehle; řešení to zakládá se na zobecnění Poincaréovy metody, které nyní vyložím.

a) Budiž A souvislý trojrozměrný obor položený v konečné vzdálenosti. Písmenem A označíme zároveň jeho objem, jenž v obyčejných pravoúhlých souřadnicích bude dán integrálem

$$\iiint_A dx\, dy\, dz.$$

Budiž dále $\varphi(x, y, z)$ funkce tří proměnných, která je jednoznačná a má spojité derivace prvního řádu, pokud bod (x, y, z) jest v oboru A; mimo to předpokládáme, že v oboru A všude platí

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| < K, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right| < K, \quad \left|\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right| < K,$$

kde K je konstanta.

Rozdělme nyní obor A v m stejných elementárních oborů. Každý elementární obor nechť je souvislý; jeho objem jest

$$\varepsilon = \frac{A}{m}.$$

Rozdělení budiž provedeno tak, aby vzdálenost dvou bodů, obsažených v témže elementárním oboru nebyla nikdy delší než určitá délka l.

Rozdělme konečně každý elementární obor ve dvě části (z nichž každá může býti složena z více menších dílů, jež leží odděleně jedny od druhých); objem prvé části, kterou nazveme bílou, jest $\lambda\varepsilon$, objem druhé části, kterou nazveme černou, jest $(1-\lambda)\varepsilon$. Poměr λ bílé části k celému objemu příslušného elementárního oboru budiž konstantní; je to číslo, obsažené mezi 0 a 1, které nezávisí ani na uvažovaném elementárním oboru, ani na čísle m.

Označme pak písmeny J a J_1 následující integrály:

$$J = \iiint\limits_{A} \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \qquad J_1 = \iiint\limits_{A_1} \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Integračním oborem prvého integrálu je celý původní obor A; A_1 jest obor složený ze všech bílých částí, uvnitř A obsažených.

Hodnota integrálu J_1 závisí na čísle m. Roste-li m do nekonečna, a konverguje-li zároveň l k nule, máme

$$\lim_{m=\infty} J_1 = \lambda J. \tag{43}$$

Dokažme tuto větu. Důkaz založíme na rovnici

$$\varDelta\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 \varDelta x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_2 \varDelta y + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_3 \varDelta z, \tag{44}$$

kde

$$\varDelta\varphi = \varphi(x + \varDelta x, y + \varDelta y, z + \varDelta z) - \varphi(x, y, z)$$

a kde

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_3$$

jsou hodnoty prvních derivací funkce φ ve třech bodech (ξ_i, η_i, ζ_i) $(i = 1, 2, 3)$, jichž souřadnice vyhovují podmínkám

$$x \leqq \xi_i \leqq x + \varDelta x, \qquad y \leqq \eta_i \leqq y + \varDelta y, \qquad z \leqq \zeta_i \leqq z + \varDelta z.$$

Budiž nyní δ libovolný elementární obor. Uvnitř δ jest určitý bod (x, y, z), ve kterém funkce φ nabývá největší hodnoty M a pak bod $(x + \varDelta x,\ y + \varDelta y,\ z + \varDelta z)$, kde φ nabývá nejmenší hodnoty M'. Platí

$$|\varDelta x| \leqq l, \qquad |\varDelta y| \leqq l, \qquad |\varDelta z| \leqq l$$

a rovnice (44) ukazuje, že

$$M - M' = \varDelta\varphi < 3\, l\, K. \tag{45}$$

Ta část integrálu J, která se vztahuje k uvažovanému elementárnímu oboru δ, násobená činitelem λ, jest menší než $\lambda M \varepsilon$; ta část integrálu J_1, která se vztahuje k bílému dílu oboru δ, jest větší než $\lambda M'\varepsilon$. Odečtěme obě části; rozdíl je částí trojnásobného integrálu $\lambda J - J_1$ a je menší než

$$(M - M')\,\varepsilon\lambda < 3\,l\,\lambda\,K\,\varepsilon = \frac{3\,l\,\lambda\,K A}{m}.$$

Trojnásobný integrál $\lambda J - J_1$ skládá se z m takových částí, tedy

$$|\lambda J - J_1| < 3\,l\,\lambda\,K\,A. \tag{46}$$

Veličina l konverguje k nule, roste-li m do nekonečna; z toho plyne správnost vzorce (43).

Obdobný vzorec dal by se odvoditi stejným postupem pro funkci φ libovolného počtu nezávisle proměnných. Je-li jen jedna nezávisle proměnná veličina a položíme-li $\lambda = {}^1/_2$, dává vzorec (43) Poincaréovu větu, uvedenou v předešlém odstavci.

b) Vraťme se k funkci φ (x, y, z) tří proměnných a předpokládejme, že φ nezávisí na z. Třetí člen na pravé straně rovnice (44) rovná se pak nule, takže na místo nerovnosti (45) budeme míti nerovnost

$$M - M' < 2\,lK.$$

To platí i v případě, že podmínce

$$|\Delta z| \leqq l$$

není vyhověno; v tomto případě nastoupí na místo (46) nerovnost

$$|\lambda J - J_1| < 2\,l\,\lambda\,K\,A.$$

Z toho plyne důsledek, že věta (43) platí pro funkci φ, která nezávisí na hodnotě proměnné z, i v tom případě, že rozměry elementárních oborů, měřené rovnoběžně k ose Oz, nemají nulu za limitu, když m roste do nekonečna.

39. Nové řešení úlohy o jehle. — Původní Buffonovo řešení úlohy o jehle (viz odst. 19*b* a 35) zakládá se v podstatě na těchto dvou předpokladech:

I. Pravděpodobnost, že střed jehly dopadne na místo, jež se nalézá uvnitř části roviny o plošném obsahu ε, jest úměrná jejímu plošnému obsahu ε a nezávisí na její poloze ani na jejím tvaru.

II. Pravděpodobnost, že úhel ω, který osa dopadnuvší jehly svírá s pevnou přímkou vodorovné roviny, jest obsažen v mezích ω_1 a ω_2, jest úměrná rozdílu $\omega_2 - \omega_1$.

Avšak není možno vymysliti takové uspořádání pokusu, aby podmínce I bylo vyhověno. Uvažujme na příklad o následujících podmínkách: Rovnoběžky jsou narýsovány na desce stolu, jež má tvar čtverce. Na začátku každého pokusu umístíme jehlu ve středu desky stolu a to tak, že osa jehly je svislá, načež udělíme jehle určitou rychlost ve směru svislém vzhůru. Jehla ovšem není v počáteční poloze naprosto přesně svislá, rovněž náraz, kterým se uvádí v pohyb, mění se co do směru i co do velikosti od pokusu k pokusu, třebaže v nepatrných mezích. Proto dopadá jehla v různých pokusech na různá místa stolu. Ale odchylky v počátečních podmínkách nesmějí býti příliš veliké, poněvadž jehla nemá padnouti mimo stůl. Předpokládejme tedy, že je málo pravděpodobno, že jehla dopadne blízko kraje stolu. Budiž p_1 pravděpodobnost, že střed jehly bude uvnitř určitého čtverce, jehož strana měří 1 *cm* a jenž je narýsován poblíže středu stolu; budiž pak p_2 obdobná pravděpodobnost pro stejně veliký čtverec, narýsovaný poblíže kraje stolu. Patrně bude $p_1 > p_2$; z toho vyplývá, že předpokladu I není vyhověno.

Chceme-li tedy počítati pravděpodobnost, že střed jehly dopadne uvnitř nějaké dané části stolní desky (roviny xy), musíme nahraditi předpoklad I předpokladem obecnějším. Připustíme, že tato pravděpodobnost jest úměrná integrálu

$$\iint \varphi(x, y)\, dx\, dy;$$

integrace vztahuje se k uvažované části roviny xy. Funkce $\varphi(x, y)$ není dána; shledáme však, že za určitých podmínek vypadne z počtu, takže se nebude vyskytovati v konečném výsledku.

Učiníme tyto dva předpoklady:

I'. Hodíme jehlu vždy tak, aby její střed dopadl dovnitř čtverce C ve vodorovné rovině. Jeden vrchol čtverce volíme za počátek 0 pravoúhlých souřadnic a strany v něm se sbíhající za osy $0x$ a $0y$. Vrcholy čtverce C mají souřadnice

$$(0, 0),\ (s, 0),\ (s, s),\ (0, s).$$

Strana s čtverce rovná se celistvému násobku vzdálenosti $2a$ dvou sousedních rovnoběžek

$$s = 2na.$$

Rovnoběžné přímky na čtverci narýsované

$$y = 0,\ y = 2a,\ y = 4a, \ldots\ y = 2na$$

dělí jej v n shodných obdélníků; každý z nich má rozměry $2na$ a $2a$.

Pravděpodobnost, že střed jehly dopadne dovnitř uzavřené křivky, narýsované v rovině xy (uvnitř C), jest rovna zlomku

$$\frac{\int_s\int_s \varphi(x, y)\, dx\, dy}{\int_0\int_0 \varphi(x, y)\, dx\, dy};$$

integrace v čitateli vztahuje se k vnitřku dané křivky.

Funkce $\varphi(x, y)$ má spojité parciální derivace 1. řádu a platí pro každý bod uvnitř C

$$\left|\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}\right| < K, \quad \left|\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}\right| < K,$$

kde K značí konstantu.

II'. Pravděpodobnost, že úhel ω, který osa dopadnuvší jehly svírá s pevnou přímkou roviny Oxy, jest obsažen v mezích ω_1 a ω_2, jest úměrná rozdílu $\omega_2 - \omega_1$.

Vycházejíce z uvedených dvou předpokladů, obdržíme pro pravděpodobnost p', že jehla protne některou rovnoběžku, vzorec

$$p' = \frac{\int\int\int_{A_1} \varphi(x, y)\, dx\, dy\, d\omega}{\int\int\int_{A} \varphi(x, y)\, dx\, dy\, d\omega}. \tag{46}$$

Integrál ve jmenovateli vztahuje se k oboru A všech případů možných. Střed (x, y) jehly může býti kdekoliv uvnitř čtverce C o straně $s = 2na$; osa jehly může svírati s osou $0x$ libovolný úhel ω v intervalu $(0, 2\pi)$, avšak z důvodů souměrnosti postačí uvažovati jen úhly ostré, obsažené ve čtvrtině $(0, {}^1\!/_2\,\pi)$ předešlého intervalu (při výpočtu případů příznivých učiníme ovšem podobnou redukci). Obor A je tedy definován nerovnostmi

$$o < x < 2n\,a, \quad o < y < 2n\,a, \quad o < \omega < \frac{\pi}{2}.$$

Integrační obor A_1 integrálu v čitateli je tvořen body (x, y, ω), které odpovídají případům příznivým (jehla protíná některou rovnoběžku). Souřadnice x středu jehly může míti jakoukoli hodnotu v mezích $(o, 2na)$; souřadnice y musí se lišiti od souřadnice $2\nu a$, má-li nastati průsek s ν-tou rovnoběžkou, nejvýše o b; poněvadž pak z důvodů souměrnosti uvažujeme jen o úhlech ω, obsažených v intervalu $(o, {}^1/_2\pi)$, máme podmínky

$$o < x < 2n\,a,\quad 2\,\nu\,a < y < 2\,\nu\,a + b,\quad o < \omega < \arc\cos\frac{y - 2\,\nu\,a}{b}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots n - 1),$$

pro případ, že pořadnice y je větší než pořadnice protaté rovnoběžky, a podobně podmínky

$$o < x < 2\,n\,a,\quad 2\,\nu\,a - b < y < 2\,\nu\,a,\quad o < \omega < \arc\cos\frac{2\,\nu\,a - y}{b}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots n)$$

pro případ, že pořadnice y jest menší než pořadnice protaté rovnoběžky.

Představme si (x, y, ω) jakožto obyčejné pravoúhlé souřadnice bodu v prostoru a sledujme tvary oborů A a A_1. Obor A je pravoúhlý rovnoběžnostěn, jehož základnou je čtverec C a jehož výška rovná se ${}^1/_2\pi$. Rozdělme obor A v n^2 elementárních oborů jednak rovinami, které jsou kolmé k rovině čtverce C a procházejí každá jednou z daných rovnoběžek

$$y = 2\nu a\ (\nu = 1, 2, \ldots n - 1),$$

jednak rovinami kolmými k předešlým:

$$x = 2\nu a\ (\nu = 1, 2, \ldots n - 1).$$

Každý elementární obor má tedy za základnu čtverec o straně $2a$ a výšku rovnou $\frac{1}{2}\pi$. Rozdělme dále tyto elementární obory válcovými plochami

$$\omega = \arc\cos\frac{y - 2\,\nu\,a}{b}\qquad(\nu = 0, 1, \ldots n - 1)$$

a

$$\omega = \arc\cos\frac{2\,\nu\,a - y}{b}\qquad(\nu = 1, 2, \ldots n),$$

jichž hrany jsou rovnoběžné s Ox. Tak se rozdělí každý elementární obor na dvě části. Jedna, kterou nazveme bílou, je tvořena body (x, y, ω) znázorňujícími případy, kdy jehla protíná jednu ze dvou sousedních rovnoběžek; druhá, kterou nazveme černou, je tvořena zbytkem oboru.

Obor A_1 je právě utvořen souborem všech částí bílých. Pravděpodobnost p, udaná Buffonovým vzorcem (42'), je rovna poměru $A_1 : A$; nezávisí na n.

Vzorec (46) ukazuje však, že pravděpodobnost p' závisí na počtu n rovnoběžek.

Užijme nyní věty dokázané v odst. 38. Poněvadž funkce φ nezávisí na proměnné ω, přichází v úvahu poznámka učiněná v odst. 38*b*. Užijeme-li značek zavedených v odst. 38., jest

$$\omega \doteq x, \qquad n = m, \qquad \frac{2b}{\pi a} = \lambda.$$

Roste-li n do nekonečna a zmenšuje-li se a zároveň tak, že ani $s = 2na$ ani $b : a$ se nemění, přechází vzorec (46) v

$$\lim_{n=\infty} p' = \frac{2b}{\pi a}. \tag{47}$$

Nechceme-li měniti původní předpoklady naší úlohy, nebudeme zvětšovati n do nekonečna; pravá strana rovnice (47), totožná s Buffonovým vzorcem, udává pak, je-li n dosti veliké, přibližnou hodnotu hledané pravděpodobnosti. Výsledek vyjádříme takto: *Za předpokladů I' a II', a je-li počet n rovnoběžek narýsovaných uvnitř čtverce C velmi veliký, udává výraz 2b : πa přibližnou hodnotu pravděpodobnosti, že jehla protne některou rovnoběžku.*

Poněvadž tedy pravá strana vzorce (47) udává hledanou pravděpodobnost jen přibližně, nemůžeme tvrditi, že by poměr $m' : n'$, plynoucí z pokusů (viz poznámku o experimentálním určení čísla π v odst. 35.) vyjadřoval ji tím přesněji, čím je počet n' pokusů větší (písmenem n' značíme úhrnný počet pokusů, písmenem m' pak počet případů, ve kterých jehla protne některou rovnoběžku). Jakmile připustíme, že funkce φ není konstantní v celém čtverci C, nemůžeme očekávati, že by se z výsledku pokusů dala odvoditi hodnota čísla π tím přesněji, čím větší by bylo n'.*)

*) Výsledky uvedené v odst. 38. a 39. uveřejnil jsem v práci nadepsané Nové řešení Buffonovy úlohy o jehle (Rozpravy České Akademie II. Tř. R. 26., č. 13(1917). Později uveřejnil jsem francouzské zpracování: Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille (Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, t. 44, p. 126—136; 1920). Pan *M. Fréchet* doplnil moje úvahy v článku Remarque sur les probabilités continues (Bull. des sc. math., 2e série, t. 45, p. 87—88; 1921). Viz též knihu: *Fréchet-Halbwachs:* Le calcul des probabilités à la portée de tous (Paris, 1924; p. 43).

Kdyby φ bylo konstantní, mohli bychom ve vzorci (46) zlomek na pravé straně krátiti, takže pravděpodobnost p' stala by se totožnou s pravděpodobností p, definovanou vzorcem (42').

40. Valivý pohyb koule po vodorovné rovině. — Na povrchu koule o poloměru a je dán sférický obrazec S, omezený uzavřenou křivkou bez dvojného bodu. Kouli položíme na vodorovnou rovinu α tak, že z počátku se jí dotýká v bodě O_1. Pak udělíme kouli vodorovný náraz, takže se valí po rovině a zastaví se posléze vlivem tření v určité konečné poloze; budiž T_1 konečný bod dotyku s rovinou. Jest určiti pravděpodobnost, že bod T_1 (jakožto bod kulového povrchu) leží uvnitř obrazce S, za těchto předpokladů:

a) Počáteční poloha koule vůči rovině α jest předepsána.

b) Koule valí se po rovině bez klouzání a počáteční její rychlost nepřekročí určité meze, takže střed koule opíše úsečku ne delší než $2\pi n a$ (koule otočí se nejvýše n-krát kolem vodorovného průměru). Směr úsečky může býti jakýkoli (ovšem vodorovný); n je veliké kladné číslo celé.

c) Hledaná pravděpodobnost p dá se vyjádřiti vzorcem

$$p = \frac{\iint\limits_P F(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi}{\iint\limits_\Pi F(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi}; \tag{48}$$

zde značí ϱ a φ polární souřadnice v rovině α s pólem v bodě O_1; $\varrho d\varrho d\varphi$ jest element plošného obsahu; $F(\varrho)$ je kladná funkce, jejíž derivace je menší než určitá konstanta K. Funkce ta měří hustotu pravděpodobnosti; vytkneme-li v poloze určené polárními souřadnicemi ϱ a φ element roviny, je pravděpodobnost, že bod T_1 nalézá se uvnitř toho elementu, úměrna jeho plošnému obsahu, koeficient úměrnosti závisí však toliko na ϱ a nikoli na φ. Písmeno P označuje obor případů příznivých, t. j. část roviny α utvořenou všemi body M_1, ve kterých může nastati dotyk koule s rovinou takový, že bod dotyku (na kouli) leží uvnitř obrazce S. Π značí vnitřek kruhu opsaného v rovině α kolem bodu O_1 poloměrem $2\pi n a$.

Poznamenejme, že každý bod M_1 roviny α odpovídá jediné určité poloze koule; abychom kouli do té polohy přivedli, je nutno valiti ji z předepsané počáteční polohy tak, aby její bod dotyku s rovinou opsal úsečku O_1M_1.

Rozřešme úlohu ve speciálním případě, že S je pravidelný sférický čtyřúhelník, jehož vrcholy jsou zároveň vrcholy krychle do koule vepsané. Sestrojme na kouli oblouky hlavních kružnic nad každou hranou vepsané krychle. Tak rozdělí se celý povrch koule v šest pravidelných sférických čtyřúhelníků o vnitřních úhlech $\frac{2}{3}\pi$. Pravděpodobnosti, že T_1 leží uvnitř prvého, druhého ... šestého čtyřúhelníka, označíme po řadě

$$p_{I},\ p_{II},\ p_{III},\ p_{IV},\ p_{V},\ p_{VI}.$$

Výpočet provedeme pro dvě počáteční polohy koule.

P r v n í p ř í p a d. — Buďte A, B, C, D, E, F, G, H vrcholy vepsané krychle a předpokládejme, že v počáteční poloze jsou stěny $ABCD$ a $EFGH$ vodorovné a hrany AE, BF, CG a DH svislé. Sférické čtyřúhelníky $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$ a $EFGH$ označíme po řadě I, II, ... VI.

Předpokládejme, že v počáteční poloze dotýká se koule roviny α v bodě O_1, jenž splývá se středem O čtyřúhelníka I. Nechť se koule valí tak, že v konečné poloze dotýká se roviny α bodem A; budiž A_1 poloha příslušného bodu dotyku v α. Obdobně je definován bod B_1 atd.

Přímku O_1A_1 volíme za polární osu.

Když se koule valí, bod dotyku opisuje přímku d, procházející bodem O_1; geometrické místo těch bodů kulového povrchu, které postupně stávají se body dotyku s rovinou α, je hlavní kružnice k, jejíž rovina nechť svírá úhel φ s diagonální rovinou $ACGE$ krychle v počáteční poloze. Kružnice k prochází bodem O' protilehlým k O a protíná oblouky AB, EF, BH a DC v bodech, které po řadě označíme písmeny M, N, P a Q.

Ve sférickém trojúhelníku O_1MA jest v počáteční poloze koule

$$\widehat{O_1AM} = \frac{\pi}{3},\quad \widehat{AO_1M} = \varphi,\quad \sin(\widehat{O_1A}) = \sqrt{\frac{2}{3}},\quad \cos(\widehat{O_1A}) = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Strana

$$\widehat{O_1M} = r$$

bude tedy určena rovnicemi

$$\cos(\widehat{O_1MA}) = -\cos\varphi\cos\frac{\pi}{3} + \sin\varphi\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$$

a
$$\sin r : \sin (\widehat{O_1 A}) = \sin \frac{\pi}{3} : \sin (\widehat{O_1 M A});$$
z nich odvodíme, že
$$\sin r = \sqrt{\frac{2}{3 + \sin 2\varphi}}. \tag{49}$$

Když se koule valí po d, body M, N, P, Q stanou se postupně body dotyku koule s rovinou a to v místech $M_1, N_1, P_1, Q_1, M_2, \ldots$ atd. Úhel mezi d a mezi přímkou O_1A_1 je roven φ. Obecně je

$$O_1 M_n = [2(n-1)\pi + r]\, a, \qquad O_1 N_n = [(2n-1)\pi - r]\, a$$
$$O_1 P_n = [(2n-1)\pi + r]\, a, \qquad O_1 Q_n = (2n\pi - r)\, a$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

při čemž r jest ostrý úhel určený formulí (49).

Otáčí-li se přímka d v rovině α kolem O_1, opisují body $M_1, N_1, \ldots M_2, \ldots$ křivky, kterými se rovina α dělí v nekonečně mnoho křivočarých čtyřúhelníků. Označíme je čísly I, II, ... Čtyřúhelníky označené v r o v i n ě číslem I, budou obsahovati body L_1 takové, že, dotýká-li se koule roviny v L_1, splývá určitý bod L s f é r i c k é h o č t y ř ú h e l n í k a I s L_1 atd. Čtyřúhelník $A_1B_1C_1D_1$ je konvexní, čtyřúhelník $A_2B_2C_2D_2$ je dvojnásobně souvislý a p.

Pravděpodobnosti $p_I, p_{II}, \ldots$ počítají se podle vzorce (48). Podle předpokladu jest konečný bod dotyku T_1 v každém případě uvnitř kruhu Π opsaného poloměrem $2n\pi a$ kolem O_1. Plošný obsah toho kruhu je
$$\Pi = 4\pi^3 n^2 a^2.$$

Písmeno P ve formuli (48) značí souhrn rovinných čtyřúhelníků I nebo II ..., podle toho, počítáme-li p_I či p_{II} ... Funkce F rovná se nule vně kruhu Π.

Počítejme nejprve pravděpodobnosti $p_I, p_{II}, \ldots$ za předpokladu, že
$$F(\varrho) \equiv 1;$$
pak teprve přejdeme k případu obecnému.

Budiž tedy $F \equiv 1$. Pravděpodobnost p_I bude rovna poměru
$$\frac{P}{\Pi},$$
kde P značí úhrnný plošný obsah všech rovinných čtyřúhel-

níků I. Abychom tento poměr vyčíslili, rozdělme Π soustřednými kružnicemi o poloměrech

$$2\pi a,\ 4\pi a,\ 6\pi a, \ldots 2(n-1)\pi a$$

a o středu O_1 v n dílů, jichž plošné obsahy označíme písmeny

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots \Gamma_n;$$

patrně jest

$$\Gamma_m = \pi a^2 [(2m\pi)^2 - (2\overline{m-1}\,\pi)^2] = 4\pi^3 (2m-1) a^2.$$

Γ_1 je kruh o poloměru $2\pi a$; Γ_m $(m > 1)$ je mezikruží o poloměrech $2(m-1)\pi a$ a $2m\pi a$. Tu část mezikruží Γ_m, která je tvořena čtyřúhelníky I, nazveme C_m; je to obor skládající se ze dvou dvojnásobně souvislých částí. Kraje první části mají v polárních souřadnicích rovnice

$$\varrho = 2(m-1)\pi a,\quad \varrho = 2(m-1)\pi a + r a$$

a kraje druhé části rovnice

$$\varrho = 2m\pi a - r a,\quad \varrho = 2m\pi a;$$

snadno vypočteme, že plošný obsah oboru C_m je

$$c_m = 8(2m-1)\,\pi I a^2,$$

kde

$$I = \int_0^{\pi/2} r\,d\varphi. \tag{50}$$

Přibližná hodnota tohoto integrálu jest 1·319...

Hodnota poměru

$$\lambda = \frac{C_m}{\Gamma_m} = \frac{2I}{\pi^2},$$

jež nezávisí na m, rovná se přibližně 0·267... Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$p_I = \frac{P}{\Pi} = \frac{C_1 + C_2 + \ldots + C_n}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_n} = \lambda = 0{\cdot}267\ldots$$

Abychom ustanovili p_{VI}, označme písmenem C'_m plošný obsah části roviny omezené křivkami

$$\varrho = (2m-1)\pi a - r a \text{ a } \varrho = (2m-1)\pi a + r a.$$

Vychází

$$C'_m = 8(2m-1)\,\pi I a^2 = C_m,$$

a

$$p_{VI} = p_I = \frac{2I}{\pi^2} = 0{\cdot}267\ldots$$

Součet

$$p_I + p_{II} + \ldots + p_{VI}$$

je roven jednotce, tedy

$$p_{II} + p_{III} + p_{IV} + p_V = 1 - 2\,p_I = 0{\cdot}466\ldots$$

a, ježto tyto čtyři pravděpodobnosti jsou stejny

$$p_{II} = p_{III} = p_{IV} = p_V = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} = 0{\cdot}114\ldots$$

Přejděme nyní k obecnému případu, kdy hustota pravděpodobnosti jest úměrná funkci $F_{(\varrho)}$ průvodiče ϱ. Pravděpodobnost p_I bude vyjádřena vzorcem (48), kterému dáme tvar

$$p_I = \frac{S'}{S},$$

kde

$$S' = \iint\limits_{P} F(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi, \qquad S = \iint\limits_{\Pi} F(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi.$$

Položme dále

$$S'_m = \iint\limits_{C_m} F(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi, \qquad S_m = \iint\limits_{\Gamma_m} F(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi$$

a označme písmeny M a μ největší a nejmenší hodnotu funkce F uvnitř Γ_m. Ježto $C_m = \lambda\Gamma_m$, platí

$$S'_m > \lambda\,\mu\,\Gamma_m, \qquad \lambda\,S_m < \lambda\,M\Gamma_m$$

a tedy

$$\lambda\,S_m - S'_m < \lambda\,(M - \mu)\,\Gamma_m.$$

Napišme tuto nerovnost pro $m = 1, 2, \ldots n$ a poznamenejme, že

$$M - \mu < 2\pi a K.$$

Součet všech ploch Γ_m je roven Π, takže

$$\lambda S - S' < 2\pi\lambda a K\,\Pi, \tag{51}$$

kde $\Pi = 4\pi^3 n^2 a^2$. Z toho plyne, že formule

$$\lim_{n=\infty} p_I = \lim_{n=\infty} \frac{S'}{S} = \lambda,$$

platí v těchto dvou případech: 1. Konverguje-li pravá strana nerovnosti (51) k nule, nebo 2. je-li pravá strana nerovnosti (51) dále menší než určitá konstanta a rostou-li současně S a S' do nekonečna. První případ bude přibližně uskutečněn, bude-li poloměr koule a velmi malý nebo bude-li konstanta K velmi malá. Výsledek shrneme takto: ***Předpokládejme, že*** *v počáteční poloze dotýká se koule roviny v bodě O_1, jenž splývá se středem O sférického čtyřúhelníka I; konverguje-li druhá strana nerovnosti (51) k nule, nebo je-li stále menší než určitá konstanta, kdežto S a S' rostou do nekonečna, blíží se pravděpodobnosti* p_I a p_{VI} *mezním hodnotám*

$$\lim_{n=\infty} p_I = \lim_{n=\infty} p_{VI} = \frac{2J}{\pi^2}$$

a ostatní hodnotám

$$\lim_{n=\infty} p_{II} = \lim_{n=\infty} p_{III} = \lim_{n=\infty} p_{IV} = \lim_{n=\infty} p_V = \frac{1}{4} - \frac{J}{\pi^2},$$

kde J jest integrál ustanovený vzorci (50) a (49).

Druhý případ. — Předpokládejme nyní, že bod dotyku koule s rovinou α splývá v počáteční poloze s vrcholem A vepsané krychle. Výpočet pravděpodobností p_I, p_{II}, ... provede se podobně jako v případě předešlém a dojde se k těmto výsledkům. Položme

$$\sin r' = \frac{2}{5 - \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\varphi\right)}$$

$$J' = \int_0^{\frac{\pi}{3}} r'^2 \, d\varphi;$$

hodnotu úhlu r' je stanoviti jakožto funkci proměnné φ tak, aby v intervalu $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ stále rostla, a aby se redukovala na $\frac{\pi}{2}$, když φ rovná se $\frac{\pi}{6}$. Dá se dokázati, že

$$\frac{J'}{\pi^2} = \frac{1}{6}.$$

Libovolná funkce $F(\varrho)$ (hustota pravděpodobnosti) zavede se jako dříve.

Je-li počáteční poloha koule taková, že se dotýká roviny α ve vrcholu A vepsané krychle, a připustíme-li jinak tytéž předpoklady jako dříve, jest $\frac{1}{6}$ společná limitní hodnota všech pravděpodobností p_I, p_{II}, ... p_{VI} pro případ, že n roste do nekonečna. —

Je zřejmo, že tato úloha je zcela obdobná úlohám o ruletě a o jehle, jež byly řešeny v předchozích odstavcích. Poincaréova metoda: zavésti libovolnou funkci jakožto hustotu pravděpodobnosti tak, že hledaná pravděpodobnost má hodnotu na té funkci nezávislou, když určitý parametr n roste do nekonečna, je velmi obecná. Dá se jí užíti všude, kde běží o pohyb tělesa, jehož konečná poloha má vyhověti daným podmínkám. S tohoto stanoviska patří úloha: vypočísti pravděpodobnost, že při hodu kostkou vyjde určité číslo, mezi úlohy o geometrických pravděpodobnostech. Výpočet pravděpodobnosti užitím Poincaréovy metody jest ovšem mnohem obtížnější v tomto případě než ve shora řešené úloze o kouli, poněvadž je těžko vzíti v počet pohyb, který kostka vykoná, než se ustálí v konečné poloze.*)

*) Srv. autorovo pojednání Sur la méthode des fonctions arbitraires dans le Calcul des probabilités, jež bude uveřejněno v Acta Mathematica.