počtu všech pokusů, přibližnou hodnotu hledané pravděpodobnosti. Avšak přímý výpočet této pravděpodobnosti na základě podmínek pokusu nemůže vycházeti bezprostředně z definice (1). Neboť počet všech možných případů je nekonečně veliký, rovněž tak počet případů příznivých. Podobně je tomu v jiných úlohách, kde hledáme pravděpodobnost, že nějaký útvar vyhovuje určitým geometrickým podmínkám. Prvním krokem k řešení úlohy jest ustanoviti míru pro množství všech případů možných jakož i pro množství všech případů příznivých.

Všimněme si nejjednodušší úlohy o geometrické pravděpodobnosti: na úsečce AB jsou zvoleny dva body C a D. Vypočísti pravděpodobnost, že bod M, zvolený uvnitř úsečky AB, leží uvnitř úsečky CD. Předpokládejme, že není žádného důvodu, proč bychom očekávali, že bod M se spíše octne v některé části úsečky AB než v jiné; pak bude hledaná pravděpodobnost úměrna délce úsečky CD, a pravíme, že *hustota pravděpodobnosti**) je konstantní podél celé úsečky AB. Kdybychom však z jakýchkoli důvodů předpokládali, že v některých částech úsečky AB může se bod M spíše vyskytnouti, než v jiných, nebyla by hustota pravděpodobnosti všude stejná.**) Podobně můžeme rozlišovati i v jiných úlohách, běží-li na př. o pravděpodobnost, že přímky, roviny atd. vyhovují určitým podmínkám.

V kap. II., III. a IV. jedná se výhradně o případech, kdy hustota pravděpodobnosti je konstantní. V kap. V. jsou probrány některé případy, ve kterých se výpočet pravděpodobnosti dá snadno kontrolovati pokusy. V kap. VI. konečně zabývám se speciálními úlohami, ve kterých hustota pravděpodobnosti není konstantní.

II. Základní definice a obecné věty o geometrických pravděpodobnostech.

9. *Bod na přímce.* — *a)* Budiž dána úsečka AB a volme bod M někde uvnitř této úsečky nebo na jejím kraji. Množství všech případů, jež mohou nastati (množství všech bodů, ležících na úsečce AB), měříme délkou $\overline{AB}$ úsečky a pravíme, že *množství všech bodů, ležících na dané úsečce, má za míru délku této úsečky.* Zvolme nyní na AB dva body C a D. Měrou

*) T. j. pravděpodobnost vypočtená pro případ, že délka úsečky CD je rovna jednotce.

**) Srv. též odst. 14.

množství všech bodů, které leží na CD, jest délka CD. *Pravděpodobnost p, že bod M, volený na úsečce AB, leží zároveň na CD, definujeme vzorcem*

$$p = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}. \tag{8}$$

Tato definice je zcela obdobná definici (1); na místo čísla n nastupuje zde míra $\overline{AB}$ pro množství všech možných případů a na místo čísla m míra $\overline{CD}$ pro množství všech případů příznivých.

b) Předchozí definice pravděpodobnosti p zakládá se na tom, že považujeme délku úsečky za míru pro množství všech bodů, na úsečce ležících.

Volme na přímce pevný bod O za počátek souřadnic a označme písmeny x_1 resp. x_2 úsečky dvou bodů A a B. Za míru pro množství všech bodů, tvořících úsečku AB, považujme obecněji výraz

$$f(x_1, x_2).$$

Funkce f dá se určiti, učiníme-li o ní tyto dva předpoklady:

1. Hodnota funkce f, jež udává míru úsečky AB, nezávisí na poloze bodu O (předpoklad o invarianci vůči změně souřadnic).

2. Leží-li bod C na úsečce AB, rovná se její míra součtu měr, které náležejí oběma částem jejím AC a CB, tedy (je-li $x_1 < x_2 < x_3$)

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, x_3) + f(x_3, x_2),$$

kterážto rovnice vyjadřuje předpoklad o sečítání měr.

Zaveďme nové souřadnice x'_1 a x'_2 bodů A a B rovnicemi

$$x_1 = x'_1 + a, \qquad x_2 = x'_2 + a,$$

kde a znamená libovolnou konstantu. Podle prvního předpokladu jest

$$f(x'_1, x'_2) = f(x_1, x_2).$$

Jinými slovy: hodnota míry f se nemění, zvětšíme-li x_1 i x_2 o tutéž konstantu. f je tudíž funkcí rozdílu obou proměnných, takže lze psáti

$$f(x_1, x_2) = F(x_2 - x_1).$$

Náleží-li pak bodu C úsečka x_3, máme podle druhého předpokladu

$$F(x_2 - x_1) = F(x_2 - x_3) + F(x_3 - x_1)$$

aneb, zavedeme-li do počtu délky

$$x = x_3 - x_1, \qquad y = x_2 - x_3$$

úseček AC a CB,

$$F(x + y) = F(x) + F(y).$$

Každá kladná funkce $F(x)$, vyhovující této rovnici, dá se vyjádřiti formulí*)

$$F(x) = k \, . \, x,$$

kde k je konstanta. Míra úsečky má se k míře jiné úsečky jako se mají jejich délky; tak docházíme k definici pravděpodobnosti p shora podané.

c) Vzorce (8) užíváme též k výpočtu pravděpodobnosti, že bod leží v části CD oblouku AB nějaké křivky, považujíce délku oblouku za míru pro množství všech bodů na oblouku tom ležících.

Podobně béřeme úhel za míru všech polopaprsků, které uvnitř toho úhlu z jeho vrcholu vycházejí. Odtud definice: *Pravděpodobnost, že polopaprsek, vedený v rovině daným bodem O, leží v daném úhlu α, jehož vrcholem jest O, rovná se poměru*

$$\alpha : 2\pi. \tag{8a}$$

10. Bod v rovině nebo v prostoru. — a) Za míru pro množství bodů, které vyplňují určitý obor A v rovině, považujeme plošný obsah P tohoto oboru. Budiž A_1 část oboru A, P_1 její plošný obsah a volme bod M uvnitř oboru A. ***Pravděpodobnost p, že bod M, volený v oboru A, leží v určité jeho části A_1, jest určena vzorcem***

$$p = \frac{P_1}{P}. \tag{9}$$

Pro případ, že běží o bod M, volený v určité části prostoru, zavádíme definice obdobné předchozím: ***Objem V trojrozměrného oboru A považujeme za míru pro množství všech bodů, obsažených v A. Pravděpodobnost, že bod M, zvolený v oboru A, leží v určité jeho části A_1, jež má objem V_1 jest určena vzorcem***

$$p = \frac{V_1}{V}. \tag{9'}$$

b) Vzorce (9) a (9′) resp. definice měr pro obory A a A_1 dají se odvoditi z předpokladu o invarianci míry vůči trans-

*) *G. Darboux:* Sur le problème fondamental de la géométrie projective (Mathem. Annalen, Bd. XVII. p. 55—61; 1870).

formaci souřadnic (viz podobnou úvahu v odst. 9.). Míru pro trojrozměrný obor odvodíme takto: Považujme integrál

$$J_A = \iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

kde f je funkce (zatím neurčená) obyčejných pravoúhlých souřadnic x, y a z, za míru oboru A. Tato definice vyhovuje předpokladu o sečítání měr (srv. odst. 9.), neboť skládá-li se obor A ze dvou částí, A_1 a A_2, platí

$$J_{A_1} + J_{A_2} = J_A.$$

Zbývá určiti funkci $f(x, y, z)$ tak, aby integrál J_A **neměnil** svého tvaru při libovolné transformaci pravoúhlých souřadnic x, y, z. Z transformačních vzorců

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ax' + by' + cz', \\ y &= y_0 + a'x' + b'y' + c'z', \\ z &= z_0 + a''x' + b''y' + c''z', \end{aligned}$$

kde $a, b, \ldots c''$ jsou elementy ortogonálního determinantu, plyne, že

$$J_A = \iiint_{A'} f(x_0 + ax' + by' + cz',\ y_0 + \ldots,\ z_0 + \ldots)\, dx'\, dy'\, dz';$$

A' značí obor přiřaděný oboru A uvažovanou transformací. Prvá formule pro J_A má vůči proměnným x, y, z obecně jiný tvar než druhá vůči proměnným x', y', z'. Žádáme-li, aby oba tvary byly totožné, musíme vzíti

$$f(x, y, z) = const.$$

Míra je tudíž úměrná objemu; z toho vyplývá formule (9'). Pro případ oboru dvojrozměrného provede se příslušná úvaha zcela podobně.

c) Vzorec (9) definuje též pravděpodobnost, že bod M, zvolený na křivé ploše o obsahu P, leží v určité její části o plošném obsahu P_1.

*11. **Přímka v rovině.*** — *a)* Přímka buďiž určena souřadnicemi q a φ tak, že v bodových pravoúhlých souřadnicích má rovnici

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - q = 0.$$

V dalším budeme se zabývati hlavně d v o j r o z m ě r n ý m i množstvími přímek. Takové množství definuje se na př. nerovností

$$F(q, \varphi) \leq 0.$$

Integrál

$$\iint_M dq\, d\varphi \tag{10}$$

udává míru daného dvojrozměrného množství M přímek. Poměr

$$\iint_{M_1} dq\, d\varphi : \iint_{M} dq\, d\varphi. \tag{11}$$

udává pravděpodobnost, že přímka (q, φ), zvolená v M, je zároveň obsažena v M_1 (je-li M_1 částí množství M).

b) Tyto definice dají se odůvodniti požadavkem invariance vůči transformacím souřadnic x, y, z, podobně jako definice (9). Předpokládejme, že míra daného množství M přímek dá se vyjádřiti integrálem tvaru

$$\iint_{M} f(q, \varphi)\, dq\, d\varphi.$$

Tato definice vyhovuje požadavku o sčítání měr (srv. odst. 9. a 10.); funkce f ustanoví se požadavkem invariance takto: Dokažme nejprve, že při každé transformaci souřadnic, která přiřaďuje přímce (q, φ) nové souřadnice (q', φ'), jest funkční determinant

$$\frac{D(\varphi, q)}{D(\varphi', q')} = 1.$$

Při translaci jest

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b,$$

kde a a b jsou konstanty. Původní rovnice přímky přejde v

$$x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - (q - a \cos \varphi - b \sin \varphi) = 0.$$

Píšeme-li tuto novou rovnici ve tvaru

$$x' \cos \varphi' + y' \sin \varphi' - q' = 0,$$

jest

$$\varphi = \varphi', \quad q = q' + a \cos \varphi' + b \sin \varphi'$$

a tedy

$$\frac{D(\varphi, q)}{D(\varphi', q')} = 1.$$

Při rotaci je rovněž funkční determinant $= 1$, neboť

$$\varphi = \varphi' + a, \qquad q = q'.$$

Poněvadž pak nejobecnější transformace skládá se z translací a rotací postupně provedených, jest její funkční determinant (rovný součinu z determinantů, příslušných částečným transformacím) roven jedné. Proto transformuje se náš integrál v

$$\iint_{M'} f(q, \varphi)\, dq'\, d\varphi',$$

kde M' značí obor odvozený z M danou transformací. Funkce $f(q, \varphi)$, považujeme-li ji za funkci proměnných φ' a q', závisí obecně na těchto proměnných jinak než na φ a q; má-li býti závislost stejná pro všechny soustavy souřadnic (x, y), resp. (q, φ), musí býti $f = const.$ Tak docházíme k definici míry, z níž plyne definice pravděpodobnosti (11).*)

e) Uvedené definice míry a pravděpodobnosti nedají se bezprostředně aplikovati na jednorozměrná množství přímek, na př. na množství polopaprsků, vyplňujících daný úhel α. Za míru tohoto množství považujeme úhel α a pravděpodobnost, že polopaprsek, jenž vrcholem toho úhlu prochází, je v něm obsažen, béřeme jeho poměr k plnému úhlu (odst. 9*c*).

12. Přímka v prostoru. — *a)* Přímka v prostoru mějž v pravoúhlých souřadnicích x, y, z rovnice

$$x = az + p, \qquad y = bz + q;$$

jest určena čtyřmi veličinami a, b, p, q. Omezíme-li tyto veličiny určitými podmínkami (na př. nerovnostmi), obdržíme čtyřrozměrné množství M přímek; jen o takovýchto množstvích budeme dále jednati. *Integrál*

$$\iiiint_M \frac{da\,db\,dp\,dq}{(1 + a^2 + b^2)^2} \tag{12}$$

udává míru daného čtyřrozměrného množství přímek. Je-li M_1 část množství M, udává poměr

$$\iiiint_{M_1} \frac{da\,db\,dp\,dq}{(1 + a^2 + b^2)^2} : \iiiint_M \frac{da\,db\,dp\,dq}{(1 + a^2 + b^2)^2} \tag{13}$$

pravděpodobnost, že přímka (a, b, p, q), zvolená v M, náleží zároveň do M_1. Geometrický význam míry odvodíme takto: Přímka P (a, b, p, q) má směrové cosinusy

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \qquad \beta = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

p a q jsou souřadnice bodu, ve kterém se P protíná s rovinou Oxy. Označme znaky dp a dq nekonečně malé přírůstky veličin p a q. Ty přímky, které jsou s P rovnoběžny a jichž souřadnice p a q jsou obsaženy v intervalech $(p, p + dp)$, resp. $(q, q + dq)$, vyplňují nekonečně úzký hranol H, jenž protíná rovinu Oxy v rovnoběžníku o plošném obsahu $dp\,dq$; kolmý průřez tohoto hranolu má plošný obsah

$$dQ = \gamma\,dp\,dq = \frac{dp\,dq}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

---

*) Srv. *H. Poincaré:* Calcul des Probabilités, 2e édition, No 72.

Uvažujme nyní o těch přímkách, které obdržíme, změníce a a b nekonečně málo, takže nabudou hodnot, obsažených v intervalech $(a, a+da)$ resp. $(b, b+db)$. Vedeme-li ke každé takové přímce rovnoběžku středem pomocné koule o poloměru $=1$, vymezí přímky tak sestrojené část jejího povrchu, která měří tělesný úhel oněmi přímkami vyplněný; jeho velikost jest

$$d\Omega = \left|\frac{d\alpha\, d\beta}{\gamma}\right| = \left|\frac{da\, db}{(1+a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right|.$$

Element integrálu (11) je tedy

$$\frac{da\, db\, dp\, dq}{(1+a^2+b^2)^2} = dQ\, d\Omega;$$

rovná se součinu z kolmého průřezu hranolu H a tělesného úhlu $d\Omega$.

Tato geometrická interpretace ukazuje, že vzorec (12), udávající míru uvažovaného přímkového množství, nezmění svého tvaru, provedeme-li libovolnou transformaci pravoúhlých souřadnic. Dokážeme, že naopak podmínkou neproměnnosti vůči transformacím pravoúhlých souřadnic jest formule (12) určena. Předpokládejme, že měrou uvažovaného přímkového množství jest výraz

$$m = \iiiint f(a, b, p, q)\,.\, da\, db\, dp\, dq$$

vztažený k příslušnému oboru; po transformaci soustavy $Oxyz$ na soustavu $O'x'y'z'$

$$\begin{aligned} x &= Ax' + By' + Cz' + x_0, \\ y &= A'x' + B'y' + C'z' + y_0, \\ z &= A''x' + B''y' + C''z' + z_0, \end{aligned}$$

obdržíme na místo původních rovnic přímky P rovnice nové, které se dají upraviti na tvar

$$x' = a'z' + q', \qquad y' = b'z' + q'.$$

Výpočet funkčního determinantu

$$\frac{D(a, b, p, q)}{D(a', b', p', q')}$$

usnadní se touto úvahou: Nekonečně úzký hranol H, jenž byl v soustavě $Oxyz$ definován přírůstky da, db, dp a dq, je v nové soustavě $O'x'y'z'$ definován přírůstky da', db', dp' a dq'; veličiny dQ a $d\Omega$ nemění se transformací souřadnic, takže platí

$$\iiiint \frac{da\,db\,dp\,dq}{(1+a^2+b^2)^2} = \iiiint \frac{da'\,db'\,dp'\,dq'}{(1+a'^2+b'^2)^2}\,.$$

Z toho vyplývá, že

$$\frac{D\,(a,\,b,\,p,\,q)}{D\,(a',\,b',\,p',\,q')} = \left(\frac{1+a^2+b^2}{1+a'^2+b'^2}\right)^2$$

a tedy

$$m = \iiiint f\,(a,\,b,\,p,\,q)\,da\,db\,dp\,dq =$$

$$= \iiiint f\,(a,\,b,\,p,\,q) \left(\frac{1+a^2+b^2}{1+a'^2+b'^2}\right)^2 da'\,db'\,dp'\,dq'.$$

Požadavek, aby v nové soustavě byla míra m vyjádřena stejnou formulí jako dříve, dává rovnici

$$m = \iiiint f\,(a',\,b',\,p',\,q')\,da'\,db'\,dp'\,dq'.$$

Srovnáme-li s výrazem předešlým, dostáváme podmínku

$$\frac{f\,(a,\,b,\,p,\,q)}{f\,(a',\,b',\,p',\,q')} = \frac{(1+a'^2+b'^2)^2}{(1+a^2+b^2)^2}\,;$$

poněvadž pak veličiny a, b, a', b' mohou býti voleny zcela libovolně a nezávisle jedna na druhé, musí býti

$$f\,(a,\,b,\,p,\,q) = \frac{k}{(1+a^2+b^2)^2}\,,$$

kde k značí konstantu. Dosadíme-li $k\,(1+a^2+b^2)^{-2}$ na místo f do původního vzorce pro hledanou míru, obdržíme právě formuli (12), až na konstantní faktor k; pro výpočet pravděpodobnosti (13) nemá hodnota veličiny k žádného významu.

13. Rovina v prostoru. — *a)* Budiž dána rovina R rovnicí

$$ux + vy + wz + 1 = 0;$$

veličiny u, v, w nazveme jejími souřadnicemi. V dalším budeme se zabývati toliko t r o j r o z m ě r n ý m i množstvími rovin; souřadnice rovin, jež takovému množství náleží, vyhovují určitým nerovnostem.

Integrál

$$\iiint_{\varepsilon} \frac{du\,dv\,dw}{(u^2+v^2+w^2)^2} \tag{14}$$

udává míru trojrozměrného množství E rovin. Poměr

$$\iiint_{E_1} \frac{du\,dv\,dw}{(u^2+v^2+w^2)^2} : \iiint_{E} \frac{du\,dv\,dw}{(u^2+v^2+w^2)^2} \tag{15}$$

udává pravděpodobnost, že rovina (u, v, w) zvolená v E je zároveň obsažena v E_1, je-li E_1 částí množství E.

Integrály, jež se vyskytují ve formulích (14) a (15), upravíme tak, aby byl zjevný jejich geometrický význam. Budiž ϑ úhel, který svírá normála sestrojená k rovině R s osou Oz, φ úhel mezi průmětem této normály do roviny Oxy a mezi osou Ox, p pak vzdálenost roviny R od počátku souřadnic. Platí vztahy

$$u = -\frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{p}, \quad v = -\frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{p}, \quad w = -\frac{\cos\vartheta}{p},$$

$$\frac{1}{(u^2+v^2+w^2)^2} = p^4, \qquad \frac{D(u, v, w)}{D(\vartheta, \varphi, p)} = \frac{\sin\vartheta}{p^4},$$

takže na vzorec (14) pro míru nabývá tvaru

$$\iiint \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dp. \tag{14'}$$

Normále přisuzujeme vždy určitý smysl a p čítáme od počátku souřadnic v tom smyslu kladně. Jeli $d\omega$ element jednotkové koule, v němž je její povrch proťat poloměry vedenými rovnoběžně k normálám rovin odpovíďajících hodnotám úhlů ϑ a φ v intervalech $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$ resp. $(\varphi, \varphi + d\varphi)$, jest

$$d\omega = \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,;$$

vzorec (14') pro míru lze psáti tudíž také takto:

$$\iiint d\omega\,dp. \tag{14''}$$

Z tohoto výrazu plyne, že míra má tvar invariantní při libovolné transformaci pravoúhlých souřadnic. Úvahou, která je zcela obdobná úvaze shora provedené o míře množství přímkových, dá se dokázati, že ze všech formulí tvaru

$$\iiint f(\vartheta, \varphi, p)\,d\vartheta\,d\varphi\,dp$$

jedině formule (14'), v níž

$$f(\vartheta, \varphi, p) = \sin\vartheta,$$

jest invariantní vůči libovolné soustavě pravoúhlých souřadnic.*)

14. O významu invariantních definicí míry a pravděpodobnosti. — V předchozích odstavcích uvedli jsme vzorce pro míru množství bodových, přímkových a rovinových. Všechny tyto formule, jakož i příslušné formule pro pravděpodobnosti, jsou invariantní vůči libovolné transformaci pravoúhlých souřadnic. Budiž na př. A trojrozměrný obor o objemu V v obyčejném bodovém prostoru a B obor, který je s A shodný. Podle odst. 10*a* mají oba tyto obory tutéž míru, rovnou objemu V. Obor B vzniká z A přemístěním; míra nějakého bodového množství je tedy invariantní vůči libovolnému přemístění.

Pravděpodobnost, že bod zvolený uvnitř určitého oboru leží v některé jeho části o objemu 1 cm^3, nazveme hustotou pravděpodobnosti. Podle definice uvedené v odst. 10. je hustota pravděpodobnosti všude stejná.

Podobné úvahy platí i o definicích míry a pravděpodobnosti, podaných v odst. 11. —13. Každé množství přímek nebo rovin má určitou míru, která se nemění, přemístí-li se ono množství libovolným způsobem (hustota pravděpodobnosti je všude stejná).

V dalších odstavcích této kapitoly pojednáme o některých obecných větách. Při tom přidržíme se všude zde, jakož i v kap. III., IV. a V., definicí podaných v odst. 9.—13.

15. Míra množství, jehož prvkem je skupina několika bodů. — Je dáno n uzavřených ploch $S_1, S_2, \dots S_n$ bez singulárních bodů. Budiž D_k vnitřek plochy S_k, V_k objem oboru D_k a x_k, y_k, z_k, pravoúhlé souřadnice bodu A_k zvoleného uvnitř D_k.

Předpokládejme nejprve, že plocha S_i leží vždy vně S_k jsou-li i a k dva různé indexy. Množství, jehož prvkem je skupina n bodů $A_1, A_2, \dots A_n$, má míru

$$J = \int\int \dots \int dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2 \dots dx_n\, dy_n\, dz_n\ ;$$

integrál je $3n$ násobný, integruje se vzhledem k (x_1, y_1, z_1) přes obor D_1, vzhledem k (x_2, y_2, z_2) přes obor D_2 atd. Integrál J je proto roven součinu n objemů V_k:

$$J = V_1 \,.\, V_2 \dots V_n\,.$$

*) Stran důkazů o invarianci, podaných v odst. 12. a 13., viz práci *G. Pólya:* Über geometrische Wahrscheinlichkeiten (Sitzungsbericht der kais. Ak. der Wiss. *126*, p. 319—328; Wien, 1917).

Předpokládejme nyní, že plochy $S_1, S_2 \dots S_n$ mají jakoukoli vzájemnou polohu; dva nebo více oborů D_k mohou míti společné části. V tomto případě rozdělíme každý obor D_k v určitý počet částečných oborů $\delta_k, \delta_{kl}, \delta_{klm} \dots$ (částečné obory s jedním, dvěma, třemi ... indexy) podle následujícího pravidla: δ_k je souhrn těch částí oboru D_k, které neobsahují bodů A_i, je-li i index jiný než k; δ_{kl} je souhrn částí společných oborům D_k a D_l, takže v δ_{kl} není bodů A, je-li i index jiný než k nebo než l; δ_{klm} je souhrn částí společných oborům D_k, D_l a D_m, takže δ_{klm} neobsahuje bodů A_i, je-li i index jiný než k, nebo než l, nebo než m, atd. Volme skupinu G, složenou z n bodů $A_1, A_2 \dots A_n$. Každému páru bodů, jenž jest obsažen v G a jenž leží v některém částečném oboru δ_{kl} o dvou indexech, přiřadíme koeficient 2; je-li v G celkem r takových párů, přiřadíme skupině G koeficient 2^r. Podobně přiřadíme každé trojici bodů, jež jest obsažena v G a leží v některém částečném oboru δ_{klm} se třemi indexy, koeficient 3!; je-li v G celkem s takových trojic, přiřadíme skupině G koeficient $(3!)^s$, atd. Tak přiřadí se skupině G koeficient α tvaru

$$\alpha = (2!)^r \,.\, (3!)^s \dots$$

a míra pro množství, jehož prvkem je skupina G, složená z n bodů $A_1, A_2 \dots A_n$, bude vyjádřena integrálem

$$\int\!\!\int \dots \int \frac{1}{\alpha}\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2 \dots dx_n\, dy_n\, dz_n \; ; \qquad (15)$$

integrační obor je definován právě tak jako pro hořejší integrál J.

Tak na př., je-li $n = 3$ a splývají-li plochy S_1, S_2, S_3 s danou plochou S, jejíž vnitřek má objem V, jest $\alpha = 6$ pro každou trojici bodů A_1, A_2, A_3, takže míra množství, jehož prvkem je trojice tří bodů volených uvnitř S, je vyjádřena formulí

$$\tfrac{1}{6} V^3.$$

Zde ovšem považujeme každou trojici bodů za dokonale určenou, jsou-li známy polohy všech tří bodů; bodům ve skupině nepřisuzujeme zvláštního pořadí. Vytkneme-li však body v určitém pořadí, obdržíme z každé skupiny tří geometrických bodů celkem šest skupin, které se liší jedna od druhé jen různým pořadím bodů; měrou množství, jehož prvkem je takováto skupina tří bodů, jest

$$V^3.$$

Poznamenejme, že zcela stejným postupem se počítá míra množství, jehož prvkem je skupina přímek, rovin atd. Tak na př. užijeme-li označení zavedeného v odst. 12. a 13., je míra množství, jehož prvkem je skupina složená z přímky a z roviny, definována integrálem sedminásobným

$$\int\int \ldots \int d\Omega \, dQ \, d\omega \, dp;$$

integrace vztahuje se ke všem párům přímka-rovina, tvořícím dané množství. Viz rozmanité příklady v kap. III. a IV.

16. Výpočet středních hodnot. — Budiž dána veličina

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n,),$$

jejíž hodnota závisí na poloze bodů $A_1, A_2, \ldots A_n$; užíváme označení zavedeného v odst. 15.

Střední hodnota $m(U)$ veličiny U bude dána vzorcem

$$m(U) = \frac{\int\int \ldots \int \frac{U}{\alpha} \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1 \, dx_2 \, dy_2 \, dz_2 \ldots dx_n \, dy_n \, dz_n}{\int\int \ldots \int \frac{1}{\alpha} \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1 \, dx_2 \, dy_2 \, dz_2 \ldots dx_n \, dy_n \, dz_n}; \quad (16)$$

opět jest D_k integračním oborem vůči proměnným x_k, y_k, z_k.

Ve speciálním případě, kdy všechny obory D_k splývají v jedno s daným oborem D, jest

$$\alpha = n!,$$

a vzorec pro střední hodnotu nabude tvaru

$$m(U) = \frac{\int\int \ldots \int U \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1 \, dx_2 \, dy_2 \, dz_2 \ldots dx_n \, dy_n \, dz_n}{V^n} \quad (16')$$

je-li V objem oboru D. Tak na př. může býti U objem proměnného útvaru, jenž jest určen skupinou n bodů volených uvnitř D; formule (16′) udává střední hodnotu objemu.

Pro $n = 1$ obdržíme

$$m(U) = \frac{\int\int\int U \, dx \, dy \, dz}{V}$$

jakožto střední hodnotu funkce U tří proměnných v daném trojrozměrném oboru o objemu V.

Výpočty středních hodnot, jež se vztahují k polohám přímek nebo rovin, provedou se podobně. Viz příklady v kap. III. a IV.

17. Pravidla o výpočtu pravděpodobnosti. — *a)* Budiž D trojrozměrný obor, Δ jeho část a A bod volený uvnitř D. Pravděpodobnost p, že bod A nalézá se uvnitř Δ, je definována vzorcem

$$p = \frac{V_1}{V}, \tag{17}$$

kde V jest objem oboru D, V_1 pak objem oboru Δ. Užívajíce této definice, dokážeme platnost vět o úhrnné a složené pravděpodobnosti.

b) Úhrnná pravděpodobnost. Budiž opět V objem oboru D, a V_1 objem části D_1 tohoto oboru, V' objem jiného oboru D', jenž nemá s D společného bodu, a V_2 objem části D_2 oboru D'. Volme uvnitř D bod A a uvnitř D' bod B.

Měrou množsví, jehož prvkem je bodový pár AB, jest součin VV'. Množství párů AB takových, že A se nalézá uvnitř D_1, B pak kdekoli v D', má míru V_1V'. Množství párů AB takových, že B se nalézá uvnitř D_2, A pak kdekoliv v D má míru V_2V. Označme nyní pravděpodobnost, že A jest uvnitř V_1, písmenem p_1, pravděpodobnost, že B jest uvnitř V_2, písmenem p_2, pravděpodobnost, že buď A jest uvnitř V_1 aneb B uvnitř V_2, písmenem p.

Podle definice (17) jest

$$p_1 = \frac{V_1V'}{VV'} = \frac{V_1}{V}, \quad p_2 = \frac{V_2V}{VV'} = \frac{V_2}{V'}, \quad p = \frac{V_1V' + V_2V}{VV'}$$

a tedy

$$p = p_1 + p_2. \tag{18}$$

p_1 a p_2 jsou pravděpodobnosti dvou případů vzájemně se vylučujících; pravděpodobnost úhrnná p, že nastane buď jeden nebo druhý případ, rovná se součtu $p_1 + p_2$ (srv. odst. 2.).

Tento princip snadno se rozšíří na případy, kdy sečítáme větší počet pravděpodobností nebo kdy integrujeme pravděpodobnosti nekonečně malé.

c) Složená pravděpodobnost. Užívajíce označení právě zavedeného, počítejme pravděpodobnost, že bod A jest uvnitř D_1 a bod B současně uvnitř D_2. Množství příznivých případů má míru $V_1 V_2$, takže hledaná pravděpodobnost P vyjádří se vzorcem

$$P = \frac{V_1V_2}{VV'}.$$

Je tedy

$$P = p_1 p_2; \tag{19}$$

P je pravděpodobnost složená (srv. odst. 3.). —

Na základě definicí dříve podaných (viz odst. *9.*—*13.* a odst. *15.*) můžeme vypočísti míru libovolného množství, jehož prvkem jest určitým způsobem stanovená skupina bodů, přímek a rovin. Míra je vždy vyjádřena integrálem mnohonásobným; je-li M_1 míra oboru »případů příznivých« a M míra oboru všech případů možných, jest každá pravděpodobnost p, že skupina bodů, přímek a rovin, vyhovuje určitým podmínkám, vyjádřena formulí tvaru

$$p = \frac{M_1}{M};$$

formule (17) je speciálním případem této formule obecnější.

Generalisace formulí (18) a (19) pro úlohy o přímkách a o rovinách je na snadě. Rozmanité aplikace pojmů míry a pravděpodobnosti ve složitějších případech jsou uvedeny v kap. III. a IV.

18. Dvě věty o středních hodnotách. — *a)* Budiž U objem proměnného tělesa t, jehož tvar, velikost a poloha závisí na n bodech $A_1, A_2, \dots A_n$; tyto body mohou býti voleny jakkoliv uvnitř daného trojrozměrného oboru D. Je-li B bod volený uvnitř D, pravděpodobnost p, že B se nalézá uvnitř tělesa t, je dána vzorcem

$$p = \frac{m(U)}{V}, \tag{20}$$

kde $m(U)$ značí střední hodnotu objemu U a V objem oboru D.*)

K důkazu poznamenejme především, že — užijeme-li označení zavedeného v odst. 15. — pravděpodobnost, že bod A_k se nalézá uvnitř nekonečně malého pravoúhlého rovnoběžnostěnu P_k o rozměrech dx_k, dy_k, dz_k, rovná se

$$\frac{dx_k\, dy_k\, dz_k}{V}.$$

Tedy podle odst. 17*c* pravděpodobnost složená, že A_1 jest uvnitř prvního rovnoběžnostěnu, současně A_2 uvnitř druhého, A_3 uvnitř třetího atd. pro $A_4, A_5, \dots A_n$, rovná se

$$p_1 = \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2 \dots dx_n\, dy_n\, dz_n}{V^n}.$$

Mají-li body $A_1, A_2, \dots A_n$ určité polohy uvnitř D, pravdě-

*) Viz *Czuber:* Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerthe (Leipzig 1884) No. 175.

podobnost, že B se nalézá uvnitř f, jest rovna

$$p_2 = \frac{U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n)}{V}.$$

Změňme nyní nekonečně málo polohy jednotlivých bodů $A_1, A_2, \ldots A_n$ tak, že každý z nich bude se nalézati uvnitř příslušného rovnoběžnostěnu P_k. Složená pravděpodobnost, že každý bod A_k jest uvnitř P_k a že B je zároveň uvnitř f, rovná se výrazu

$$p_1\, p_2 = \frac{U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n)\, dx_1, dy_1 \ldots dz_n}{V^{n+1}}.$$

Hledanou pravděpodobnost p vypočteme (viz odst. 17b), integrujíce napsaný výraz podle všech souřadnic $x_1, y_1, \ldots z_n$. Vychází

$$p = \frac{1}{V} \int\!\!\int \ldots \int \frac{U\, dx_1\, dy_1 \ldots dz_n}{V^n} = \frac{m(U)}{V}.$$

Zcela podobně by se počítalo se středními hodnotami a s pravděpodobnostmi, jež závisejí na poloze přímek nebo rovin.

b) Budiž U veličina, jejíž hodnota závisí na poloze n bodů $A_1, A_2, \ldots A_n$ uvnitř oboru D o objemu V; m nechť značí její střední hodnotu. Zvětšme obor D nekonečně málo, takže zvětšený obor D' bude míti objem $V + dV$. Předpokládáme, že D nachází se uvnitř oboru D'. Budiž pak $m + dm$ střední hodnota veličiny U, počítaná za předpokladu, že všech n bodů A_k leží uvnitř D', a m_1 její střední hodnota, počítaná za předpokladu, že jediný z n bodů A_k leží v oboru $(D' - D)$ o objemu dV, kdežto ostatních $n - 1$ se nalézá v D. Platí vzorec

$$V dm = n\,(m_1 - m)\, dV. \tag{21}$$

Důkaz: Podle definice střední hodnoty jest

$$m = \frac{\int\limits_D\!\int\limits_D \ldots \int\limits_D U\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n}{V^n}$$

a

$$m + dm = \frac{\int\limits_{D'}\!\int\limits_{D'} \ldots \int\limits_{D'} U\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n}{(V + dV)^n},$$

kde je pro krátkost položeno $dt_k = dx_k\, dy_k\, dz_k$. Násobme celou rovnici jmenovatelem pravé strany, podržme na levo toliko člen konečně veliký a členy nekonečně malé prvního stupně a dělme pak po obou stranách veličinou V^n; tak obdržíme vztah

$$m + dm + \frac{m\,n}{V}\,dV = \frac{\displaystyle\int\limits_{D'}\int\limits_{D'}\ldots\int\limits_{D'} U\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n}{V^n}.$$

Rozložme každý integrační obor D' v D a D'', takže

$$D'' = D' - D.$$

Pak lze psáti (vynecháváme integrovanou funkci)

$$\int\limits_{D'}\int\limits_{D'}\ldots\int\limits_{D'} = \int\limits_{D}\int\limits_{D}\ldots\int\limits_{D} + n\int\limits_{D''}\int\limits_{D}\ldots\int\limits_{D} + \binom{n}{2}\int\limits_{D''}\int\limits_{D''}\ldots\int\limits_{D} + \ldots$$

Vzhledem k tomu, že integrační obor D'' má nekonečně malý objem dV, podržíme jen prvé dva členy na pravé straně poslední rovnice. Dosadíme-li pak do hořejšího vztahu a poznamenáme-li, že

$$m_1 = \frac{\displaystyle\int\limits_{D''}\int\limits_{D}\ldots\int\limits_{D} U\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n}{V^{n-1}\,dV},$$

obdržíme

$$m + dm + \frac{m\,n}{V}\,dV = m + \frac{n\,m_1}{V}\,dV,$$

z čehož bezprostředně vyplývá rovnice (21).

Věta právě dokázaná dá se vyjádřiti též užitím pojmu pravděpodobnosti: Je-li p pravděpodobnost, že n bodů A_k, volených uvnitř D, vyhovuje daným podmínkám; je-li pak $p + dp$ táž pravděpodobnost pro obor D' o objemu $V + dV$ a konečně p_1 táž pravděpodobnost pro případ, že jediný z bodů A_k leží uvnitř oboru $D' - D$, kdežto ostatních $n - 1$ leží uvnitř oboru D, platí*)

$$V dp = n\,(p_1 - p)\,dV. \qquad (21')$$

Úlohy 1—24.

1. Na úsečce, jejíž délka $= 1$, jsou zvoleny dva body. Jak velká je pravděpodobnost, že jejich vzdálenost je menší než a, je-li $a < 1$? [$p = 2a - a^2$; viz *Borel* Le Hasard, p. 76—80, *Borel* Éléments de la théorie des probabilités, 3e éd., p. 89—93.]

*) Viz *M. W. Crofton:* Probability (Encyclopaedia Britannica, 9th edition). *R. Deltheil:* Sur la théorie des probabilités géométriques (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, t. XI., 1919).

2. Dvě osoby umluví si, že se dostaví na určité místo během určitého časového intervalu od $t=0$ do $t=1$ a že ten, kdo přijde první, počká na druhého po dobu a, načež odejde. Předpokládáme, že uvnitř onoho intervalu je v každém okamžiku pravděpodobnost příchodu stejná, a to pro jednu osobu jak pro druhou. Jak velká je pravděpodobnost p, že se setkají? [Počet možných případů měříme plochou čtverce o straně $=1$, počet případů příznivých plochou, složenou ze dvou lichoběžníků. Úloha je v podstatě totožná s úlohou 1. Vychází $p=2a-a^2$. Viz *A. Pánek*: Řešení Laurentovy úlohy z počtu pravděpodobnosti. (Časopis pro pěstování m. a f., XX., 1891, p. 94—97).]

3. Zvolíme-li na obvodě daného kruhu tři body, jak veliká je pravděpodobnost p, že trojúhelník jimi stanovený jest ostroúhlý? [$p=1/4$, viz *A. Pánek*: Problém z geometrické pravděpodobnosti (Časopis pro pěstov. m. a f. XX., 1891, p. 148—150)].

4. Úsečka AB je rozdělena na tři části dvěma libovolně vytčenými body P a Q. Jak veliká jest pravděpodobnost, že lze sestrojiti trojúhelník ze tří úseček takto vzniklých? [$p=1/4$; viz *Poincaré* Calcul des probabilités, p. 123, *Markoff*, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig, 1912, § 29. *Czuber*, Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung etc. 3. Aufl. Leipzig. Bd. I. p. 13.]

5. Vypočísti pravděpodobnost p, že ze tří úseček, je-li každá kratší než určitá daná délka, dá se sestrojiti tupoúhlý trojúhelník [$p=\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}$].

6. V mezikruží o poloměrech r a $r+a$ jsou vytčeny dva body. Jak velká je pravděpodobnost p, že úsečka jimi omezená neprotíná vnitřní kružnici?

$$\left[p=\frac{2(a+r)^2\arc\cos\dfrac{r}{a+r}}{\pi(2ar+a^2)}-\frac{2r}{\pi\sqrt{2ar+a^2}}.\right]$$

7. Strany obdélníka jsou menší než 1, jinak však libovolně vytčeny. Jak velká je pravděpodobnost p, že úhlopříčka je menší než jedna? [$p=\frac{1}{4}$; viz *Whitworth:* Choice and chance, 3th edition, Cambridge 1878, p. 213.]

8. Střední vzdálenost dvou bodů, jež jsou zvoleny na úsečce o délce a, jest $\frac{1}{3}a$.

9. Dva body M a M' jsou zvoleny uvnitř čtverce o straně a. Střední hodnota (matematická naděje) čtverce vzdálenosti MM' jest

$$\frac{\int\limits_0^a\int\limits_0^a\int\limits_0^a\int\limits_0^a[(x-x')^2+(y-y')^2]\,dx\,dy\,dx'\,dy'}{a^4}=\frac{a^2}{3}.$$

Obecně platí věta: střední hodnota čtverce vzdálenosti MM', jsou-li M a M' dva body uvnitř libovolného obrazce, rovná se poloměru setrvačnosti toho obrazce vzhledem k jeho těžišti (viz *Czuber*: Geometrische Wahrscheinlichkeiten, p. 216—217).

10. Zvolme uvnitř daného polygonu, jenž je opsán kružnici K, bod a opišme kolem tohoto bodu kruh, jenž je celý obsažen uvnitř polygonu. Střední hodnota plošného obsahu takového kruhu rovná se jedné desetině kruhu K. [Viz *Czuber,* tamtéž, p. 219.]

11. Obdobná střední hodnota jako v úloze 10., je-li dán kruh na místě polygonu, rovná se opět desítině daného kruhu.

12. Vypočísti pravděpodobnost P, že vzdálenost dvou bodů, zvolených uvnitř kruhu o poloměru R, je menší než a.

$$P = \frac{\pi a^2 + 2\alpha (R^2 - a^2) - (2R^2 + a^2)\sin\alpha\cos\alpha}{\pi R^2},$$

kde $2R\sin\alpha = a$. Viz *Borel,* Bulletin de la Société mathém. de France, t. 46, p. 105; 1918; *Deltheil,* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, t. 11, p. 1; 1919. — Srv. též s obdobnou úlohou 18.]

13. Dva body M a M' jsou zvoleny na povrchu koule. Jak veliká je pravděpodobnost p, že kratší oblouk hlavní kružnice, spojující M s M', je menší než a? $p = \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$;

viz rozbor v knize *Borel:* Le Hasard, p. 86—91 nebo *Borel,* Éléments, 3e édition, p. 96—100.]

14. Dvě koule o poloměru r dotýkají se v jednom bodě zevně jedna druhé. Na povrchu jedné zvolíme bod P, na povrchu druhé pak bod Q. Jak veliká je pravděpodobnost, že vzdálenost RQ je menší než $2r$? [$p = {}^{13}/_{35}$; viz *Czuber,* Geom. Wahrscheinlichkeiten, p. 70—72.]

15. Tři body A, B, C jsou zvoleny na povrchu koule. Jak veliká je střední hodnota plošného obsahu sférického trojúhelníka ABC? [Rovná se osmině kulového povrchu; viz *Czuber,* tamtéž, p. 217.]

16. Na povrchu koule zvolíme tři body jakožto vrcholy sférického trojúhelníka. Pravděpodobnost, že všechny úhly trojúhelníka jsou ostré, jest rovna

$$\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{8}.$$

17. Vytkněme libovolně čtyři body na povrchu koule; pravděpodobnost, že všechny čtyři jsou na jedné polokouli, rovná se $^7/_8$. [Viz *Czuber,* tamtéž, p. 217—218.]

18. Vypočísti pravděpodobnost P, že vzdálenost dvou bodů, zvolených uvnitř koule o poloměru R je menší než a.

$$P = \frac{a^3}{R^3} - \frac{9a^4}{16R^4} + \frac{a^6}{32R^6};$$

viz *Czuber,* tamtéž, p. 69—70; *Borel-Deltheil,* Probabilités, Erreurs (Paris, 1923), p. 81—83. — Srv. též s úlohou 12.]

19. Jak velká je pravděpodobnost p, že délka tětivy v kružnici o poloměru R jest obsažena mezi a a b $(a < b)$?

[Je-li směr tětivy dán, jest

$$p = \frac{1}{2R}[\sqrt{4R^2 - a^2} - \sqrt{4R^2 - b^2}];$$

viz *Borel-Deltheil*, tamtéž, p. 77, *Borel*, Éléments...3e édition, p. 107—109].

20. Vodorovná rovina je rozdělena dvěma řadami přímek ve čtvercovou síť; strana čtverce budiž a. Hodíme-li na rovinu kruhový kotouč o poloměru r ($2r < a$), jak veliká je pravděpodobnost p, že kotouč padne celý dovnitř některého čtverce?

$$[p = \frac{(a - r)^2}{a^2};$$

viz zajímavé úvahy o této úloze v knize *Fréchet-Halbwachs*, Le calcul des probabilités à la portée de tous Paris, 1924, p. 72—76].

21. Na vodorovnou rovinu, na níž je nazývána síť shodných rovnostranných trojúhelníků o straně a, je vržena nekonečně tenká jehla o délce l. Pravděpodobnost, že jehla se octne celá uvnitř jednoho trojúhelníka, jest

$$1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{l}{a}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{l}{a}\left(4 - \frac{l}{a}\right).$$

[Viz *Markoff*, l. c., § 32.]

22. Daný kruh je rozdělen průměrem ve dvě poloviny. Vypočísti pravděpodobnost p, že přímka, která protíná prvou polovinu, protíná též druhou.

$$[p = \frac{4}{\pi + 2};$$

viz *Czuber*, l. c., p. 129].

23. Někdo učiní po rovné cestě n kroků stejně dlouhých buď vpřed nebo do zadu; přisuzujeme-li při každém kroku oběma možným směrům stejnou pravděpodobnost, je pravděpodobnost, že na konec bude o h kroků vzdálen od původního stanoviště, rovna

$$(\tfrac{1}{2})^n \cdot \frac{n!}{h!\,(n - h)!}.$$

Srv. s úlohou 24.

24. Někdo vyjde z bodu O, jde rovně v libovolném směru a urazí dráhu l_1; pak se otočí o libovolný úhel a zase urazí přímočarou dráhu l_2 atd. Vykoná-li celkem n takovýchto přímočarých pohybů, jak veliká je pravděpodobnost, že jeho vzdálenost od bodu O bude menší než r?

[Jsou-li J_0 a J_1 Besselovy funkce indexu 0 a 1, jest

$$P_n = r\int_0^\infty J_1(rx)\,J_0(l_1x)\,J_0(l_2x)\ldots J_0(l_nx)\,dx.$$

Viz *Lord Rayleigh:* On the problem of random vibrations. (Philosophical Magazine 6th series. vol. XXXVII. 1919,

p. 321—347., Scientific Papers, vol. VI., p. 604—626); *Lord Rayleigh:* The theory of Sound, 2nd edition, London 1894, vol. I., p. 39—41. Srv. též *M. v. Smoluchowski:* Abhandlungen über die Brownsche Bewegung (Ostwads Klassiker, Nr. 207.)

Je-li n velmi veliké a $l_1 = l_2 = \ldots l_n = 1$, jest přibližně

$$P_n = 1 - e^{-\frac{r^2}{n}}].$$

III. Konvexní křivky v rovině.

19. Přímky protínající konvexní křivku. — *a)* Budiž k uzavřená konvexní*) křivka; volme počátek O souřadnic uvnitř k. Je-li φ úhel, který svírá vnější normála s osou Ox, bude vzdálenost tečny od počátku určitou funkcí úhlu φ, kterou označíme $f(\varphi)$. Tato funkce je kladná, jednoznačná a periodická s periodou 2π. Každá přímka

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - q = 0$$

protínající křivku C vyhovuje podmínce

$$q - f(\varphi) \leqq 0;$$

znamení rovnosti platí jen pro případ, že přímka se dotýká křivky k. Měrou všech jejích sečen je podle odst. 11. výraz

$$m = \iint dq\, d\varphi = \int q\, d\varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi,$$

který můžeme psáti též ve tvaru

$$m = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} [f(\varphi) + f(\varphi + \pi)]\, d\varphi.$$

Výraz v závorce udává vzdálenost dvou tečen kolmých k normále určené úhlem φ; tuto délku můžeme považovati za polovinu průmětu celého obvodu křivky do normály (rozumí se, že počítáme jen s absolutními hodnotami jednotlivých elementů obvodu resp. jejich průmětů). Označme řečený průmět písmenem A; obdržíme

$$m = \tfrac{1}{4} \int_0^{2\pi} A\, d\varphi.$$

*) Křivku nazýváme konvexní, je-li protata každou přímkou nejvýše ve dvou bodech.