Variační úlohy v parametrickém tvaru

In: Michail Aleksejevič Lavrent'ev (author); Lazar Aronovič Ljusternik (author); Karel Winkelbauer (translator): Kurs variačního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 137–156.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402792

KAPITOLA VI.

VARIAČNÍ ÚLOHY V PARAMETRICKÉM TVARU

§ 23. Parametrické vyjádření rovnic křivek a podmínky homogenity.

Předběžné poznámky. V rovinných úlohách jsme vyšetřovali soustavu přípustných čar vyjádřených rovnicemi

$$y = y(x).$$

Ježto jsme $y(x)$ brali jako jednoznačnou funkci proměnné x, musili jsme se omezit na čáry, které protínají přímky rovnoběžné s osou Oy jenom v jednom bodě. Toto omezení při aplikacích na geometrii příliš zmenšovalo okruh našich úvah: ustavičně jsme se setkávali s extrémy na čarách, které této podmínce nevyhovovaly. Na příklad v isoperimetrickém problému (§ 20) o čáře dané délky, omezující spolu s danou úsečkou osy Ox rovinný obor největšího obsahu, se extrému dosahuje na oblouku kružnice, jehož je naše úsečka sečnou. Kdyby délka oblouku převyšovala délku úsečky násobenou $\frac{1}{2}\pi$, pak by již příslušný oblouk kružnice nesplňoval shora formulovanou podmínku. Dodejme, že při našich úvahách souřadnice x, y byly nerovnoprávné, a proto formule, které jsme obdrželi, byly nesymetrické vzhledem k x a y (na příklad podmínky transversality). Avšak v geometrických úlohách jsou souřadnice obecně rovnoprávné.

Abychom tato omezení odstranili, přejdeme k parametrickému vyjádření rovnic křivek

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t).$$

V tomto případě lze jednu a tutéž křivku vyjádřit nekonečně mnoha způsoby v parametrickém tvaru, při čemž jeden z druhého dostaneme transformací parametru t. Provedeme-li tuto transformaci pomocí rovnice $t = \chi(\tau)$, kde τ je nový parametr, přejdou rovnice křivky v nové rovnice:

$$x = \varphi[\chi(\tau)] = \varphi_1(\tau), \ y = \psi[\chi(\tau)] = \psi_1(\tau),$$

při čemž

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\chi'(\tau), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\chi'(\tau).$$

Požadavek, aby mezi parametry t a τ byla vzájemně jednoznačná korespondence, t. j. aby také τ bylo jednoznačnou funkcí t, vede k požadavku, aby $\chi(\tau)$ byla ryze monotonní funkcí. Jestliže mimo to žádáme, abychom při růstu obou parametrů probíhali oblouk v jednom a témže směru, musí být $\chi(\tau)$ funkcí rostoucí. Mimo to budeme předpokládat, že $\chi(\tau)$ má spojitou derivaci $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \chi'(\tau)$,[1] která je zřejmě nezáporná. Tato derivace musí být podstatně kladná proto, aby existovala spojitá derivace inversní funkce:

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\chi'(\tau)}.$$

Příklad. Rovnice kružnice

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t,\\ y &= a\sin t \end{aligned}\right\} \quad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$$

transformací $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = u$ neboli $t = 2\operatorname{arctg} u$ přejdou v rovnice:

$$x = \frac{a(1-u^2)}{1+u^2}, \quad y = \frac{2au}{1+u^2}.$$

Přejdeme nyní k vyšetřování funkcionálu definovaného pro čáry dané v parametrickém tvaru. Pro nejjednodušší úlohu lze takový funkcionál napsat ve tvaru křivočarého integrálu

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

po oblouku křivky (2)

$$x = x(t), \; y = y(t), \tag{2}$$

odpovídajícím hodnotám parametru t, ležícím mezi t_0 a $t_1 > t_0$. Tento integrál vyšetřujeme jako funkci *čáry* dané v parametrickém vyjádření

[1]) Ale v některých případech budeme předpokládat, že $\chi(t)$ má spojité derivace téhož řádu, jaký mají mít podle podmínek úlohy funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$.

a nikoli jako funkcionál závislý na dvou funkcích x a y parametru t (tento případ jsme již studovali v § 12 kap. III). Z toho plyne, že se tento funkcionál nesmí změnit, když transformujeme parametr t. Tento požadavek klade některá omezení na funkci F. K jejich odvození nyní přejdeme.

Odvození podmínek homogenity. Budiž $t = \chi(\tau)$; potom integrál J přejde v integrál

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{x'(\tau)}{\chi'(\tau)}, \frac{y'(\tau)}{\chi'(\tau)}\right) \chi'(\tau) \, d\tau,$$

kde τ_0 a τ_1 odpovídají hodnotám t_0 a t_1 parametru t. S druhé strany funkcionál J jako funkce čáry musí zůstat beze změny, t. j.

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F(x, y, x'(\tau), y'(\tau)) \, d\tau.$$

Musí tudíž platit rovnost

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x, y, \frac{x'(\tau)}{\chi'(\tau)}, \frac{y'(\tau)}{\chi'(\tau)}\right) \chi'(\tau) \, d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F(x, y, x'(\tau), y'(\tau)) \, d\tau.$$

Žádáme-li, aby nezávislost integrálu J na volbě parametru platila pro jakýkoli oblouk naší křivky, pak tato rovnost bude platit pro jakékoli hodnoty horní a dolní meze (jen když je $\tau_0 < \tau_1$ a funkce $x(\tau)$, $y(\tau)$ jsou pro příslušné hodnoty τ definovány). Bereme-li dolní mez τ_0 pevně, budeme vyšetřovat oba integrály jako funkce horní meze. Rovnost těchto funkcí má za následek rovnost jejich derivací, t. j.

$$F\left(x, y, \frac{x'}{\chi'}, \frac{y'}{\chi'}\right) \chi' = F(x, y, x', y').$$

Zde je $\chi'(\tau) > 0$ a pro odpovídající volbu funkce $\chi(\tau)$ může χ' nabýt libovolné kladné hodnoty. Je tedy pro jakékoli $k > 0$

$$kF\left(x, y, \frac{x'}{k}, \frac{y'}{k}\right) = F(x, y, x', y')$$

nebo, klademe-li $\frac{1}{k} = k_1$,

$$F(x, y, k_1 x', k_1 y') = k_1 F(x, y, x', y'). \tag{3}$$

Je tedy funkce F čtyř proměnných x, y, x', y' kladně homogenní rozměru jedna vzhledem k x', y'.[2]) Podle Eulerovy věty o homogenních funkcích je

$$F = x'F_{x'} + y'F_{y'}. \tag{4}$$

Napříště budeme všude předpokládat, že je podmínka homogenity splněna. V tomto případě integrál

$$J = \int F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t$$

podél některého oblouku, definovaného rovnicí (2), závisí jenom na tomto oblouku, ale nezávisí na jeho parametrickém vyjádření. To lehko dokážeme, provedeme-li shora uvedené úvahy v opačném pořadí.

Analogicky pro integrál

$$J = \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n')\,\mathrm{d}t$$

v n-rozměrném prostoru podél křivky:

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

podmínka nezávislosti na volbě parametrického vyjádření poslední křivky bude:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; kx_1', kx_2', \ldots, kx_n') =$$
$$= kF(x_1, x_2, \ldots, x_n; x_1', x_2', \ldots, x_n').$$

Z toho plyne, že

$$F(x_1, \ldots, x_n; x_1', \ldots, x_n')\,\mathrm{d}t = F(x_1, \ldots, x_n; \mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n),$$

kde $\mathrm{d}x_i = x_i'\,\mathrm{d}t$. Integrál J je tak možno uvést na tvar:

$$J = \int F(x_1, \ldots, x_n; \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n);$$

F je kladně homogenní funkce rozměru jedna vzhledem k $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots$ $\ldots, \mathrm{d}x_n$.

Uvedeme řadu příkladů na funkce čáry $J = \int F\,\mathrm{d}t$, kdy F splňuje podmínky homogenity.

---

[2]) Kladně homogenní funkcí rozměru p vzhledem k proměnným $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ se nazývá funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_n)$ vyhovující podmínce

$$f(kx_1, kx_2, \ldots, kx_m; x_{m+1}, \ldots, x_n) = k^p f(x_1, x_2, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

pro $k > 0$.

Příklad 1. Obsah rovinného oboru, ohraničeného zavřenou křivkou, je vyjádřen integrálem

$$\tfrac{1}{2}\int x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x$$

podél této křivky.

Příklad 2. Délka oblouku křivky v n-rozměrném eukleidovském prostoru je vyjádřena integrálem

$$\int \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \ldots + \mathrm{d}x_n^2}$$

(před odmocninou je vždy znaménko plus).

Příklad 3. Délka oblouku křivky v n-rozměrném Riemannově prostoru je vyjádřena integrálem

$$\int \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \, \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}x_k},$$

kde a_{ik} jsou některé bodové funkce.

Ve všech třech příkladech jsou výrazy za integračním znamením kladně homogenní funkce rozměru jedna vzhledem k diferenciálům.

Speciální parametrická vyjádření. Integrál

$$J = \int_a^b f(x, y, y') \, \mathrm{d}x$$

nejjednodušší úlohy po zavedení parametru t, pomocí něhož je vyjádřeno x a rovněž i y, nabude tvaru

$$J = \int f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) x' \, \mathrm{d}t.$$

Je zřejmé, že $x' f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)$ je homogenní funkce rozměru jedna vzhledem k x', y', protože násobíme-li x' a y' konstantou k, dostaneme $kx' f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right)$.

Obráceně budiž dán integrál

$$I = \int F(x, y, x', y') \, \mathrm{d}t$$

podél některé čáry. Je-li možno za parametr t vzít souřadnici x, pak

$$x' = 1, \; y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

$$F(x, y, x', y') = F(x, y, 1, y') = f(x, y, y'),$$

a dostaneme

$$\int F(x, y, x', y')\, \mathrm{d}t = \int f(x, y, y')\, \mathrm{d}x.$$

Tedy integrály $\int F(x, y, x', y')\, \mathrm{d}t$ při speciální volbě parametru $t = x$ přejdou v integrály tvaru $\int f(x, y, y')\, \mathrm{d}x$, které jsme studovali v předcházejících kapitolách, a obráceně, zavedeme-li do integrálů $\int f(x, y, y')\, \mathrm{d}x$ parametrické vyjádření křivky, dojdeme k funkcionálům, pro něž je splněna podmínka (3).

V mnoha úlohách se volí za parametr na křivce γ délka s (oblouk počítaný od počátečního bodu křivky do daného jejího bodu). V tomto případě je

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\Theta, \quad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\Theta,$$

kde Θ je úhel, který svírá tečna ke křivce γ s osou Ox.

Máme

$$\int_\gamma F(x, y, x', y')\, \mathrm{d}t = \int_\gamma F(x, y, \cos\Theta, \sin\Theta)\, \mathrm{d}s = \int_\gamma f(x, y, \Theta)\, \mathrm{d}s,$$

kde je

$$f(x, y, \Theta) = F(x, y, \cos\Theta, \sin\Theta).$$

Důsledky podmínek homogenity. Jelikož F je homogenní funkce rozměru jedna vzhledem k x' a y', plyne z Eulerovy věty o homogenních funkcích

$$F = x'F_{x'} + y'F_{y'}. \tag{4}$$

Diferencujeme-li (4) podle x' a y', dostaneme po zjednodušení

$$\left.\begin{aligned} x'F_{x'x'} + y'F_{x'y'} &= 0, \\ x'F_{x'y'} + y'F_{y'y'} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Z (5) plyne

$$\frac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2} = F_1, \tag{6}$$

kde $F_1 = F_1(x, y, x', y')$ je kladně homogenní funkce rozměru -3 vzhledem k x', y'. Vskutku, při diferencování podle x', y' se rozměr homogenní funkce po každé sníží o jednotku; proto $F_{x'}$, $F_{y'}$ jsou homogenní funkce rozměru nula; $F_{x'x'}$, $F_{x'y'}$, $F_{y'y'}$ mají rozměr -1.

Protože F_1 se dostane z funkcí rozměru — 1 jejich dělením homogenními výrazy rozměru 2, je F_1 kladně homogenní funkce rozměru — 3.

Diferencování (4) podle x a y nám dá

$$\left.\begin{aligned} F_x &= x'F_{xx'} + y'F_{xy'}, \\ F_y &= x'F_{yx'} + y'F_{yy'}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

§ 24. Extrémy funkcí čáry.

Okolí křivek. Splňuje-li F podmínku homogenity, pak je $\int F\,\mathrm{d}t$ funkce čáry, protože závisí jenom na integrační křivce, avšak nezávisí na volbě jejího parametrického vyjádření. Je přirozené, že rozšiřujeme shora rozvinutou theorii extrémů funkcí čáry

$$\int f(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

na naše nové funkce čáry.

Řekneme: křivky patří do třídy C_1, jsou-li dány v parametrickém vyjádření rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$, kde $x(t)$ a $y(t)$ jsou funkce třídy C_1. Předpokládáme také, že $x'(t)$ a $y'(t)$ nejsou současně rovny nule ($x'^2 + y'^2 > 0$), takže v každém bodě křivky je definována tečna, která svírá s osou x úhel $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ (je-li $x'(t) = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$). Úhel φ závisí spojitě na t. Říkáme: křivka má spojitě se měnící tečnu.

Definujeme především pojem ε-okolí křivky třídy C_1.

Řekneme, že křivka γ_1 leží v ε-vzdálenosti nultého řádu od křivky γ, lze-li mezi všemi body γ a γ_1 ustanovit vzájemně jednoznačnou a vzájemně spojitou korespondenci tak, aby vzdálenost mezi body sobě odpovídajícími nepřevyšovala ε. Řekneme (analogicky), že křivka γ_1 leží v ε-okolí prvního řádu křivky γ, lze-li mezi všemi body γ a γ_1 ustanovit vzájemně jednoznačnou a vzájemně spojitou korespondenci tak, aby:

1) vzdálenost mezi body sobě odpovídajícími nepřevýšila číslo ε,

2) úhel mezi tečnami (menší než $\frac{1}{2}\pi$) ke křivce γ a γ_1, vedenými v bodech sobě odpovídajících, nebyl větší než ε.

Odvození nutných podmínek. Na základě pojmu ε-okolí můžeme automaticky rozšířit základní pojmy kapitoly II: absolutní extrém, relativní extrém, slabý a silný extrém, na funkce čáry

$$J = \int F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t$$

vyšetřované v této kapitole.

Začneme jako obyčejně odvozením nutných podmínek, jimž musí vyhovovat křivka realisující extrém. Při tom ihned vezmeme za třídu přípustných čar všechny křivky třídy C_1, spojující body dvou daných křivek.

Budiž dána třída $\{\gamma\}$ přípustných čar se spojitě se měnícími tečnami, jejichž koncové body leží na daných křivkách Γ_1 a Γ_2, definovaných rovnicemi

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0.$$

Na křivkách třídy $\{\gamma\}$ je definován funkcionál

$$J(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t = \int_\gamma F(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y), \tag{8}$$

kde F je spojitá funkce, která má spojité parciální derivace prvních dvou řádů podle argumentů x, y, x', y'; mimo to je F kladně homogenní funkce rozměru jedna vzhledem k x', y'.

Věta I. *Jestliže křivka γ, definovaná v parametrickém tvaru rovnicemi*

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

realisuje extrém funkcionálu $J(\gamma)$, pak:

1) *$x(t)$ a $y(t)$ vyhovují Eulerovým rovnicím*

$$\left.\begin{aligned} F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{x'} &= 0, \\ F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{y'} &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

2) *v koncových bodech křivky γ jsou splněny vztahy*

$$\left.\begin{aligned} \frac{F_{x'}}{\varphi_x} &= \frac{F_{y'}}{\varphi_y} \quad (\textit{v koncovém bodě ležícím na křivce } \Gamma_1), \\ \frac{F_{x'}}{\psi_x} &= \frac{F_{y'}}{\psi_y} \quad (\textit{v koncovém bodě ležícím na křivce } \Gamma_2). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Jestliže jedna z křivek Γ_1 nebo Γ_2 nebo obě se redukují na bod (koncový bod je pevný), zamění se příslušná podmínka (10) požadavkem, aby křivka γ procházela tímto bodem. Vztahy (10) se nazývají podmínkami *transversality*.

Křivka γ:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

kde $x(t)$ a $y(t)$ vyhovují rovnicím Eulerovým, se nazývá extremálou pro funkcionál $J(\gamma)$. Naši větu lze formulovat také takto:

K tomu, aby křivka γ vedla k extrému integrálu $J(\gamma)$, je nutné, aby γ byla extremálou a aby ve volných koncových bodech splňovala podmínky transversality.

K důkazu vyšetřujme náš funkcionál jako funkci prostorové křivky

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

v prostoru (t, x, y) a použijme výsledků kap. III a IV.

Nechť γ:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

je libovolná rovinná křivka třídy C_1 v rovině xOy, spojující bod křivky Γ_1 s bodem křivky Γ_2. Označme Q, Φ a Ψ válcové plochy, ležící v prostoru (t, x, y), které jsou vytvořeny paprsky rovnoběžnými s osou Ot a jež protínají rovinu xOy v křivkách γ resp. Γ_1 resp. Γ_2. Označme γ_1 prostorovou křivku (prostoru (t, x, y)) definovanou rovnicemi:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Křivka γ_1 leží zřejmě na ploše Q a spojuje body ploch Φ a Ψ; průmět γ_1 na rovinu (x, y) je křivka γ.

Všem možným parametrickým vyjádřením rovinné křivky γ budou odpovídat v prostoru (t, x, y) všechny možné křivky γ_1, ležící na válci Q a spojující body válců Φ a Ψ. Jelikož funkcionál $J(\gamma)$ závisí jenom na tvaru křivky γ a nezávisí na jejím parametrickém vyjádření, bude funkcionál prostorové křivky

$$J_1(\gamma_1) = \int_{\gamma_1} F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t$$

záviset jenom na tvaru válce Q. Z toho plyne, že vede-li křivka γ k extrému funkcionálu $J(\gamma)$ na třídě C_1 rovinných čar, spojujících libovolný bod křivky Γ_1 s libovolným bodem křivky Γ_2, pak prostorová křivka γ_1 realisuje extrém funkcionálu $J_1(\gamma_1)$ mezi všemi prostorovými křivkami

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

třídy C_1, spojujícími libovolný bod válcové plochy Φ s libovolným bodem válcové plochy Ψ.

Na základě theorie extrémů pro prostorové čáry máme podél extremální čáry

$$\left.\begin{aligned} F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{x'} &= 0, \\ F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{y'} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

a v koncových bodech platí podmínky transversality

$$(F - x'F_{x'} - y'F_{y'})\,\mathrm{d}t + F_{x'}\,\mathrm{d}x + F_{y'}\,\mathrm{d}y = 0, \tag{12}$$

kde $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ jsou přírůstky souřadnic pro přípustný posun konce křivky γ_1.

Z podmínek homogenity (rovnosti (4)) dostaneme

$$F - x'F_{x'} - y'F_{y'} = 0,$$

a podmínka (12) nabude tvaru

$$F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y = 0.\text{[3]} \tag{13}$$

Pro koncový bod, ležící na křivce Γ_1, přírůstky δx a δy jsou ve vztahu

$$\varphi_x \delta x + \varphi_y \delta y = 0. \tag{14}$$

Z (13) a (14) plyne

$$\frac{F_{x'}}{\varphi_x} = \frac{F_{y'}}{\varphi_y}. \tag{15}$$

Analogicky pro koncový bod, ležící na křivce Γ_2:

$$\psi_x \delta x + \psi_y \delta y = 0,$$

[3]) Podmínku (13) lze obdržet z podmínky (12) bez použití podmínky homogenity. Zvolíme parametr t pro přípustné křivky tak, že počátečním bodům všech těchto křivek odpovídá jedna a táž hodnota t_0 tohoto parametru, a koncovým bodům těchto křivek jedna a táž hodnota t_1.

Potom v (12) budeme mít $\mathrm{d}t = 0$, což vede k podmínce (13).

z čehož

$$\frac{F_{x'}}{\psi_x} = \frac{F_{y'}}{\psi_y}. \tag{15'}$$

Tím je naše věta úplně dokázána.

Weierstrassův tvar Eulerových rovnic. Snadno nahlédneme, že rovnice (11) jsou nezávislé. Máme-li totiž pro prostorovou křivku γ_1:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

$\delta J_1(\gamma_1) \equiv 0$, pak pro každou křivku $\bar{\gamma}_1$:

$$x = x[f(t)], \quad y = y[f(t)]$$

rovněž máme $\delta J_1(\bar{\gamma}_1) \equiv 0$, kde $f(t)$ má kladnou derivaci. Je-li tudíž křivka

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

integrálem systému (11), pak křivka

$$x = x[f(t)], \quad y = y[f(t)]$$

pro libovolnou funkci $f(t)$ bude rovněž integrálem systému (11). Z toho soudíme, že jednu z funkcí $x(t)$, $y(t)$ lze udat libovolně a na jejím podkladě lze najít druhou funkci integrací kterékoli z rovnic systému (11). Analyticky tato okolnost vyplývá z toho, že obě rovnice (11) jsou důsledky jediné rovnice.

Ze vzorců (6) a (7) předcházejícího paragrafu plyne

$$F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{x'} = (x'F_{xx'} + y'F_{xy'}) - (x'F_{xx'} + y'F_{yx'} + x''F_{x'x'} + y''F_{x'y'}) =$$
$$= y'[F_{xy'} - F_{x'y} - F_1(x'y'' - x''y')]. \tag{16}$$

Analogicky

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{y'} = -x'[F_{xy'} - F_{x'y} - F_1(x'y'' - x''y')]. \tag{16'}$$

Ježto obě derivace x', y' nemohou být současně rovny nule, jsou rovnice (14) ekvivalentní jediné rovnici

$$F_{xy'} - F_{x'y} - F_1(x'y'' - x''y') = 0. \tag{17}$$

To je tak zvaný *Weierstrassův tvar* Eulerových rovnic.

Weierstrassův tvar Eulerových rovnic zapisujeme rovněž v tomto tvaru:

$$\frac{1}{r} = \frac{F_{xy'} - F_{yx'}}{F_1(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{17'}$$

kde r je poloměr křivosti extremály.

Příklad. Budiž $F = A(x, y)\sqrt{x'^2 + y'^2}$, t. j. $J = \int_q A(x, y)\, \mathrm{d}s$. Máme:

$$F_{xy'} = A_x \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = A_x \cos\alpha$$

(kde α je úhel, který svírá tečna k extremále s osou Ox),

$$F_{yx'} = A_y \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = A_y \sin\alpha, \quad F_1 = -\frac{AF_{y'x'}}{x'y'} = -\frac{A}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

z čehož

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{A}(A_y\cos\alpha - A_x\sin\alpha).$$

Je-li φ úhel, který svírá normála plochy $A(x, y) = \text{const}$ s osou Ox, pak $A_x = \frac{\partial A}{\partial n}\cos\varphi$, $A_y = \frac{\partial A}{\partial n}\sin\varphi$ a dostaneme

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial n}\sin(\alpha - \varphi) = \left(\frac{\partial}{\partial n}\lg A\right)\sin(\alpha - \varphi).$$

Pro světelný paprsek je podle Fermatova principu integrál $\int \frac{\mathrm{d}s}{v(x, y)}$ minimální, takže jeho rovnice má tvar:

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial n}\lg v\right)\sin(\varphi - \alpha).$$

Pro integrál účinku $\int v\, \mathrm{d}s = \int v(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x$ z (11) máme:

$$v_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\cos\alpha) = 0, \quad v_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\sin\alpha) = 0$$

neboli

$$\mathrm{grad}\, v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{v},$$

kde $\bar{v}$ je vektor rychlosti. Obdrželi jsme důkaz vlastnosti zrychlení pohybu bodu v rovinném potenciálovém poli, kterou jsme uvedli na str. 25.

Invariance Weierstrassovy formy rovnice. Upozorníme teď na jednu důležitou vlastnost rovnice (17′): *Weierstrassova forma Eulerových rovnic zůstává invariantní vzhledem k transformaci parametru.*

Křivost $\frac{1}{r}$ křivky totiž nezávisí na jejím parametrickém tvaru. Funkce $F_{xy'}$, $F_{yx'}$ a jejich rozdíl jsou funkce kladně homogenní rozměru nula vzhledem k x', y' a funkce F_1 je homogenní rozměru -3 a $(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$ homogenní rozměru $+3$ vzhledem k x', y'. Pravá strana rovnice (17′) je tudíž funkce kladně homogenní rozměru nula vzhledem k x', y', t. j. nemění se násobením argumentů x', y' kladnými čísly. Avšak přechod od parametru t k parametru τ znamená násobit x' a y' výrazem $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$, který považujeme za kladný.

Legendreova podmínka. Vzpomeneme nyní výsledků § 13. Nutnou podmínkou minima funkcionálu J je nezápornost druhé variace. Tato podmínka vyžaduje, aby v určitém případě byla kvadratická forma (viz str. 79)

$$A = F_{x'x'}\delta x'^2 + 2F_{x'y'}\delta x'\delta y' + F_{y'y'}\delta y'^2$$

nezáporná. Z formule (6) plyne

$$A = F_1(y'\delta x' - x'\delta y')^2.$$

Podmínky $A \geqq 0$ vedou k podmínce $F_1 \geqq 0$.

Z toho plyne

Věta 2 (obdoba Legendreovy podmínky). *Nutnou podmínkou minima je splnění požadavku* $F_1 \geqq 0$.

§ 25. Zobecnění a aplikace.

Isoperimetrická úloha. Použijeme-li výsledků kap. V, můžeme snadno dostat základní nutné podmínky pro isoperimetrickou úlohu v parametrickém tvaru. Hledejme mezi čarami γ:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

třídy C_1, spojujícími dva dané body A a B a vyhovujícími podmínce

$$K(\gamma) = \int_\gamma G(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t = l = \text{const},$$

takovou čáru, podél níž integrál

$$J(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, x', y')\,\mathrm{d}t$$

nabývá extrémní hodnoty. Přitom jako dříve předpokládáme, že funkce F a G splňují podmínky homogenity a diferencovatelnosti.

Věta 3. *Dává-li křivka γ hledaný extrém, pak existuje takové konstantní číslo λ, že γ je extremálou pro funkcionál*

$$J_1(\gamma) = \int_\gamma (F + \lambda G)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad. Mezi všemi zavřenými křivkami, omezujícími rovinný obor daného obsahu, najíti tu, jejíž délka je minimální.

Zavřenou křivkou rozumíme čáru, jejíž počáteční bod je totožný s jejím bodem koncovým. Nechť tedy jsou rovnice

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t)\ \ [x(t_0) = x(t_1)],\\ y &= y(t)\ \ [y(t_0) = y(t_1)],\end{aligned}\right\}\ t_0 \leqq t \leqq t_1$$

rovnicemi libovolné zavřené čáry. Hledejme extrém integrálu

$$\int (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$$

za podmínky

$$\int (xy' - yx')\,\mathrm{d}t = C.$$

Označíme-li znakem F veličinu

$$F = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} + \lambda(xy' - x'y),$$

najdeme

$$\frac{1}{2}(F_{xy'} - F_{yx'}) = \lambda,\ \ F_1 = \frac{F_{x'y'}}{x'y'} - = (x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Pro křivku dávající extrém plyne z podmínky (17′) předcházejícího paragrafu

$$\frac{1}{r} = 2\lambda.$$

Křivost je podél naší zavřené křivky konstantní. To znamená, že je to kružnice.

Případ n nezávisle proměnných. Vyšetříme integrál

$$\int F(x_1, x_2, \ldots, x_n; x_1', x_2', \ldots, x_n')\,\mathrm{d}t$$

podél některé křivky

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

v němž F je kladně homogenní funkce rozměru jedna vzhledem ke všem x_i'. Za těchto podmínek závisí náš integrál jenom na integrační cestě, ale nezávisí na jejím parametrickém vyjádření.

Provedeme-li úvahy analogické předcházejícím, dostaneme základní nutné podmínky pro extrém tohoto integrálu ve tvaru

$$F_{x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{x_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

V rozvedeném tvaru rovnice (18) bude

$$F_{x_i} - \sum_j x_j' F_{x_i' x_j} - \sum_j x_j'' F_{x_i' x_j'} = 0. \tag{19}$$

n rovnic soustavy (18) nebo (19) je nezávislých. Jsou ve vztahu

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' \left[F_{x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{x_i'} \right] = \sum_i x_i' F_{x_i} - \sum_{i,j} x_i' x_j' F_{x_i' x_j} - \sum_{i,j} x_i' x_j'' F_{x_i' x_j'} \equiv 0. \tag{20}$$

Tato identita je důsledkem podmínek homogenity. Z Eulerovy rovnice totiž dostaneme

$$F = \sum_i x_i' F_{x_i'}. \tag{21}$$

Derivujeme-li (21) podle x_j a x_j', nalezneme:

$$F_{x_j'} = \sum_i x_i' F_{x_i' x_j}, \tag{22}$$

$$F_{x_j'} = \sum_i x_i' F_{x_i' x_j'} + F_{x_j'}, \text{ t. j. } \sum_i x' F_{x_i' x_j'} = 0. \tag{23}$$

Substitucí (22) a (23) do pravé strany (20) je tato identita dokázána.

Geodetické čáry. Budiž na n-rozměrné Riemannově varietě délka oblouku definována integrálem

$$\int \mathrm{d}s,$$

kde

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,k} a_{ik}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_k.\text{[4]}$$

[4]) Zde jsou a_{ik} spojité diferencovatelné funkce argumentů $x_1, \ldots, x_n$. Mimo to předpokládáme o formě $\mathrm{d}s^2$, že je positivně definitní.

Čáry, podél nichž $\delta\int \mathrm{d}s = 0$, se nazývají geodetickými.

Ježto

$$\int \mathrm{d}s = \int \sqrt{\sum_{i,k} a_{ik} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}}\, \mathrm{d}t,$$

kde t je parametr, určí se geodetické čáry z rovnice

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \frac{a_{ij}}{\sqrt{g}} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{24}$$

kde je pro stručnost položeno

$$g = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}.$$

Je-li parametrem délka oblouku s, pak je $g = 1$ a rovnice (24) přejde v

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \sum_i a_{ij} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s},$$

neboli

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} = \sum_{i,k} \frac{\partial a_{ij}}{\mathrm{d}x_k} \frac{\partial x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} + \sum_i a_{ij} \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}s^2}. \tag{25}$$

Uvedeme rovnice (25) na přehlednější tvar tím, že je rozřešíme vzhledem k $\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}s^2}$. Jelikož při dvojité sumaci podle i a k je

$$\sum_{i,k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} = \sum_{i,k} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s},$$

je součet

$$\sum_{i,k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{2}\sum_{i,k} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s},$$

a můžeme tedy napsat rovnice (25) v tomto tvaru:

$$\sum_i a_{ij} \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{2}\sum_{i,k} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \right) \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{26}$$

Jsou-li a^{hj} elementy determinantu inversního k determinantu $|a_{ij}|$, je, jak známo,

$$\sum_i a^{hj} a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } h \neq i, \\ 1 & \text{pro } h = i. \end{cases} \tag{27}$$

Násobíme-li rovnosti (26) elementy a^{hj} a sečteme-li je (podle j), dostaneme

$$\sum_j \sum_i a^{hj} a_{ij} \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{2}\sum_j a^{hj} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \right) \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} = 0.$$

Z toho dostaneme, změníme-li v prvním sčítanci pořádek sumace a použijeme-li (27),

$$\frac{d^2x_h}{ds^2} + \frac{1}{2}\sum_j a^{hj} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}\right) \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} = 0.$$

Zavedeme-li označení

$$T^j_{ik} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j},$$

obdržíme tento konečný tvar rovnic geodetické čáry

$$\frac{d^2x_h}{ds^2} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} a^{hj} T^j_{ik} \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} = 0.$$

Hamilton-Ostrogradského princip. Nechť je dán systém n hmotných bodů. Označíme x_i, y_i, z_i, m_i souřadnice resp. hmotu i-tého bodu. Nechť systém splňuje m vazebních podmínek

$$\varphi_i(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{28}$$

a nechť na tuto soustavu působí síly, předpokládající potenciál U závislý na souřadnicích a na čase t tak, že na i-tý bod působí síla o komponentách

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i},\ Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i},\ Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \tag{29}$$

Dále budeme předpokládat, že systém se přemístí z jedné polohy, odpovídající časovému okamžiku t_0, do jiné polohy, odpovídající časovému okamžiku t_1, při čemž se toto přemístění děje v souhlase s vazbami.

Jinými slovy, souřadnice bodů soustavy x_i, y_i, z_i jsou funkcemi času t, vyhovujícími soustavě (28).

Budeme rozlišovat skutečný pohyb systému pod vlivem sil (29) od jiných možných pohybů v souhlase s vazbami.

Označíme-li T kinetickou energii systému

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2), \tag{30}$$

kde

$$x' = \frac{dx}{dt},\ y' = \frac{dy}{dt},\ z' = \frac{dz}{dt},$$

dospějeme k této větě, tvořící princip Hamilton-Ostrogradského pro dynamický systém s vazbami:

K tomu, aby pohyb

$$x_i = x_i(t),\ y_i = y_i(t),\ z_i = z_i(t) \quad (t_0 \leqq t \leqq t_1) \tag{31}$$

byl skutečným pohybem systému pod vlivem sil (29), *je nutné a stačí, aby pro křivky* (31) *platila rovnost*

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T + U)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{32}$$

za podmínky, že za třídu přípustných čar (možných pohybů) vezmeme čáry třídy C_1, *spojující dva pevné body* $(t_0, x_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$, $(t_1, x_1^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)})$ *a náležející varietě* (28).

Je totiž podle theorie podmíněného extrému rovnice (32) ekvivalentní této soustavě diferenciálních rovnic:

$$F_{x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{x_i'} = 0,\ F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{y_i'} = 0,$$

$$F_{z_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{z_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{33}$$

kde

$$F = T + U + \Sigma\lambda_i(t)\varphi_i \tag{34}$$

a $\lambda_i(t)$ jsou funkce proměnné t. Dosadíme-li do rovnic (33) místo F jeho vyjádření z (34), dostaneme známou soustavu diferenciálních rovnic Lagrangeových, definujících pohyb systému s vazbami. Bylo by možno obráceně přijmouti za východisko princip Hamilton-Ostrogradského a z něho pak odvoditi Lagrangeovy rovnice pomocí neurčitých součinitelů $\lambda(x)$.

Je-li poloha soustavy určena ν nezávislými Lagrangeovými parametry $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$ $(\nu = 3n - m)$, pak potenciál U a kinetická energie T přejdou ve funkce parametrů q_i, jejich derivací q_i' a času t:

$$T = T_1(q_1, \ldots, q_\nu, q_1', \ldots, q_\nu', t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}q_i'q_j',$$

$$U = U_1(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, t).$$

Rovnice (32) nabude tvaru

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T_1 + U_1)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{35}$$

při čemž za třídu přípustných čar jsou vzaty čáry

$$q_i = q_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

třídy C_1, spojující dva dané body

$$(t_0, q_1^{(0)}, \ldots, q_\nu^{(0)}) \text{ a } (t_1, q_1^{(1)}, \ldots, q_\nu^{(1)}),$$

kdežto rovnice pohybu systému budou

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(T_1 + U_1) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial q_i'}T_1\right) = 0. \tag{36}$$

Princip nejmenší akce ve tvaru Lagrangeově a Jacobiově. Předpokládejme nyní, že ani v rovnicích vazeb ani ve vyjádření potenciálu U čas t není explicitně obsažen. V takovém případě nebude výraz za integračním znamením v (35) obsahovat explicitně nezávisle proměnnou t; rovnice (36) umožňují provést první integraci (viz str. 78)

$$T_1 + U_1 - \Sigma q_i' \left(\frac{\partial}{\partial q_i'} T_1 \right) = -C = \text{const}, \tag{37}$$

avšak, ježto mimo to je T_1 homogenní kvadratická forma vzhledem k q_i', je

$$\Sigma q_i' \left(\frac{\partial}{\partial q_i'} T_1 \right) = 2T_1,$$

a tedy nabude rovnice (37) tvaru

$$H = -U_1 + T_1 = C = \text{const},$$

t. j. za shora uvedených předpokladů zůstává celková energie systému po dobu každého skutečného pohybu systému konstantní.

Dosadíme-li do (35) místo U_1 jeho vyjádření

$$U_1 = T_1 - C$$

a vezmeme-li za třídu přípustných čar

$$q_i = q_i(t), \; q_i(t_0) = q_i^{(0)}, \; q_i(t_1) = q_i^{(1)}$$

čáry, pro něž celková energie H zůstává konstantní, zjistíme, že (35) je ekvivaletní podmínce

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T_1 \, dt = 0, \tag{35'}$$

což je Lagrangeův tvar principu nejmenší akce.

Použijeme-li znovu vztahu (37), dostaneme

$$T_1 = \sqrt{C + U_1} \sqrt{T_1},$$

a rovnici (35′) lze přepsati takto:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2U + h} \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij} q_i' q_j'} \, dt = 0,$$

kde h je konstantní. Integrál

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2U + h} \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij} q_i' q_j'} \, dt$$

se nazývá integrálem účinku (akce). Vezmeme nyní místo prostoru $t, q_1, \dots, q_\nu$ pouze prostor parametrů $q_1, q_2, \dots, q_\nu$ a budeme v tomto prostoru studovat křivky (38), kde t je parametr. Ježto integrovaný výraz v J je homogenní funkce rozměru jedna vzhledem k q'_i, závisí hodnota J jenom na tvaru čáry (38) v našem prostoru a nezávisí na jejím parametrickém vyjádření (nezávisí na tom, podle jakého zákona se děje pohyb na této čáře). Z toho podle (35) dospějeme k větě, jež je principem nejmenší akce v Jacobiově tvaru.