PŘÍPUSTNÉ ČÁRY S VOLNÝMI KONCOVÝMI BODY. NESPOJITÉ ÚLOHY.

§ 16. Volné konce v nejjednodušší úloze.

Formulace úlohy. Ve všech úlohách, jež jsme probírali, brali jsme za třídu přípustných čar křivky, jejichž koncové body ležely ve dvou pevných bodech. Teď přejdeme k úlohám určování extrémů funkcionálů, při čemž vezmeme za třídu přípustných čar třídu širší.

Budiž dána funkce $F(x, y, y')$, splňující obvyklé podmínky spojitosti a diferencovatelnosti; nechť jsou mimo to dány v rovině xOy dvě křivky φ a ψ:

$$y = \varphi(x), \; y = \psi(x) \tag{1}$$

třídy C_1. Při tomto označení možno naši úlohu formulovat takto:

Vezmeme za třídu přípustných čar soustavu čar γ třídy C_1, které mají své koncové body na křivce φ resp. na křivce ψ. Chceme najít extrém funkcionálu

$$J(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, y')\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

kde je integrál vzat po čáře γ.

Připomeňme, že použitím výsledků kap. I a II můžeme okamžitě převést tuto úlohu na úlohu vyhledat extrém funkce dvou nezávisle proměnných. Vskutku, jestliže některá křivka γ_0 s konci v bodech A a B řeší položenou úlohu, t. j. jestliže γ_0 udílí integrálu extrém mezi všemi čarami třídy přípustných čar, pak tato čára γ_0 udílí integrálu J extrém i mezi všemi čarami třídy C_1, spojujícími body A a B. Tudíž podle Eulerovy věty pro nejjednodušší úlohu je čára γ_0 extremálou, t. j. vyhovuje Eulerově rovnici

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0. \tag{3}$$

Dále ukážeme, jakým podmínkám na své koncové body musí tento oblouk γ_0 vyhovovat.

Diferenciál $J(\gamma)$ oblouku extremály. Vyšetřujme spolu s γ_0 soustavu $\{\gamma\}$ k ní blízkých extremál, jejichž koncové body leží v některých okolích koncových bodů A a B oblouku γ_0; naše soustava $\{\gamma\}$ oblouků extremál je určena čtyřmi parametry. Předpokládáme-li, že každý oblouk γ z $\{\gamma\}$ je jediný oblouk této soustavy s danými koncovými body, můžeme vzít za parametry oblouku souřadnice x_0, y_0 a x_1, y_1 koncových bodů tohoto oblouku. (Jsou-li mezi parametry nějaké vztahy, bude počet nezávislých parametrů menší než čtyři, na příklad v naší úloze, když x_0, y_0 vyhovují rovnici $y_0 = \varphi(x_0)$ a x_1, y_1 rovnici $y_1 = \psi(x_1)$, budou jenom dva nezávislé parametry.)

Funkcionál $J(\gamma)$ na soustavě $\{\gamma\}$ se stane funkcí proměnných x_0, y_0, x_1, y_1, t. j. souřadnic koncových bodů oblouků γ: $J(\gamma) = J(x_0, y_0, x_1, y_1)$. Diferenciál této funkce, jsou-li diferenciály argumentů rovny $\delta x_0, \delta y_0, \delta x_1, \delta y_1$, bude roven

$$\mathrm{d}J = \left(\frac{\partial J}{\partial x_0}\,\delta x_0 + \frac{\partial J}{\partial y_1}\,\delta y_0\right) + \left(\frac{\partial J}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \frac{\partial J}{\partial y_1}\,\delta y_1\right). \tag{4}$$

Vyšetřujme z počátku dvojparametrovou podsoustavu $\{\gamma\}$ s pevnými hodnotami x_0 a x_1 (koncové body oblouků γ se posunují na dvou přímkách rovnoběžných s osou Oy).

Na této podsoustavě má náš integrál konstantní meze x_0 a x_1 a můžeme tedy aplikovat theorii již dříve rozvinutou (§ 2).

Diferenciál $\mathrm{d}J$ je na této dvojparametrové soustavě právě roven variaci δJ. Buďte rovnice dvou nekonečně blízkých oblouků extremál této podsoustavy: $y = y(x)$, $y = y(x) + \delta y(x)$. Označme: $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y(x_1)$, $\delta y_0 = \delta y(x_0)$, $\delta y(x_1) = \delta y_1$. Variace δJ při přechodu od oblouku $y = y(x)$ k oblouku $y = y(x) + \delta y(x)$ je rovna integrálu

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\,\mathrm{d}x$$

po prvním oblouku. Částečnou integrací výrazu

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y'\,\mathrm{d}x$$

dostaneme

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y'\,\mathrm{d}x = F_{y'}^{(1)} \delta y_1 - F_{y'}^{(0)} \delta y_0 - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right) \delta y\,\mathrm{d}x.$$

Indexy $^{(1)}$ a $^{(0)}$ zde značí, jako všude v dalším, že se odpovídající funkce bere v počátečním nebo v koncovém bodě oblouku:

$$F_{y'}{}^{(0)} = F_{y'}(x_0, y_0, y_0'),\ F_{y'}{}^{(1)} = F_{y'}(x_1, y_1, y_1'),$$

kde

$$y_0' = y'(x_0),\ y_1' = y'(x_1).$$

Je tedy

$$\delta J = F_{y'}{}^{(1)}\delta y_1 - F_{y'}{}^{(0)}\delta y_0 + \int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\ \mathrm{d}x =$$
$$= F_{y'}{}^{(1)}\delta y_1 - F_{y'}{}^{(0)}y_0. \tag{5}$$

Integrální člen ve výrazu (5) je roven nule, protože je na oblouku $y = y(x)$ vyhověno Eulerově rovnici.

Pro naši podsoustavu je funkcionál J funkcí souřadnic koncových bodů extremály (při čemž jsou úsečky pevné), a proto je variace δy právě diferenciálem této funkce. Protože $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$, dostaneme z (4)

$$\delta J = \mathrm{d}J = \frac{\partial J}{\partial y_0}\,\delta y_0 + \frac{\partial J}{\partial y_1}\,\delta y_1. \tag{6}$$

Porovnáme-li výrazy (5) a (6), nalezneme parciální derivace

$$\frac{\partial J}{\partial y_0} = -\ F_{y'}{}^{(0)},\ \frac{\partial J}{\partial y_1} = F_{y'}{}^{(1)}. \tag{7}$$

Abychom našli $\dfrac{\partial J}{\partial x_0}$ a $\dfrac{\partial J}{\partial x_1}$, obrátíme se k jiné podsoustavě $\{\gamma\}$, která se skládá z oblouků jedné a téže extremály s proměnnými konci $y = y(x)$. Souřadnice počátečních a koncových bodů takových oblouků jsou spojeny vztahy

$$\delta y_0 = y'(x_0)\delta x_0 = y_0'\delta x_0,\ \delta y_1 = y'(x_1)\delta x_1 = y_1'\delta x_1.$$

Výraz (4) pro diferenciál $\mathrm{d}J$ nabude na naší podsoustavě tvaru

$$\mathrm{d}J = \left(\frac{\partial J}{\partial x_0} + y_0'\,\frac{\partial J}{\partial y_0}\right)\delta x_0 + \left(\frac{\partial J}{\partial x_1} + y_1'\,\frac{\partial J}{\partial y_1}\right)\delta x_1. \tag{8}$$

Na druhé straně podle pravidla o diferencování podle horní a dolní meze integrálu

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)]\, \mathrm{d}x$$

máme

$$\mathrm{d}J = F^{(1)}\, \mathrm{d}x_1 - F^{(0)}\, \mathrm{d}x_0. \tag{9}$$

Porovnáme-li (8) a (9) a užijeme-li formule (7), dostaneme

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} + y_0' \frac{\partial J}{\partial y_0} = - F^{(0)}, \frac{\partial J}{\partial x_0} = - F^{(0)} - y_0' \frac{\partial J}{\partial y_0} = - (F - y' F_{y'})^{(0)},$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} + y_1' \frac{\partial J}{\partial y_1} = F^{(1)}, \frac{\partial J}{\partial x_1} = F^{(1)} - y_1' \frac{\partial J}{\partial y_1} = (F - y' F_{y'})^{(1)}.$$

Konečné formule pro parciální derivace

$$\frac{\partial J}{\partial x_0}, \frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial y_0}, \frac{\partial J}{\partial y_1}$$

a pro totální diferenciál dJ jsou takovéto:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x_0} &= - (F - y' F_{y'})^{(0)}, & \frac{\partial J}{\partial y_0} &= - F_{y'}^{(0)}, \\ \frac{\partial J}{\partial x_1} &= (F - y' F_{y'})^{(1)}, & \frac{\partial J}{\partial y_1} &= F_{y'}^{(1)}; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}J = &- [(F - y'F_{y'})^{(0)} \delta x_0 + F_{y'}^{(0)} \delta y_0] + \\ &+ [(F - y'F_{y'})^{(1)} \delta x_1 + F_{y'}^{(1)} \delta y_1]. \end{aligned} \tag{11}$$

Poznámka 1. V našich výkladech jsme použili toho (při důkazu formule (5)), že výchozím obloukem je oblouk extremály, avšak nepoužili jsme toho, že posunutý oblouk je obloukem extremály. Budiž nyní dána soustava oblouků, které v obecném případě nejsou oblouky extremál, a nechť tato soustava obsahuje oblouk extremály γ_0. Vyšetřujeme-li na této soustavě funkcionál J jako funkci souřadnic koncových bodů oblouků, pak při přechodu od oblouku γ_0 k jinému oblouku soustavy $\{\gamma\}$ zachová se pro diferenciál dJ jeho vyjádření podle formule (11).

Poznámka 2. Při odvozování formulí (10)—(11) se předpokládalo, že oblouk $\breve{AB}$ extremály, realisující minimum v úloze s volnými konci, je možno zahrnout do čtyrparametrové soustavy extremál, a to takových, že každý pár bodů A' a B', ležících v některém okolí bodů A a B, lze spojit jediným obloukem extremály této soustavy.

Tento předpoklad odstraníme. Je vždycky možné zahrnout oblouk $\breve{AB}$ do čtyrparametrové soustavy oblouků $\breve{A'B'}$ (které nemusí být oblouky extremál) tak, že každý pár bodů A' a B', ležících v některém z okolí bodů A a B, spojuje jeden a jenom jeden oblouk této soustavy. Přitom oblouky závisí na souřadnicích svých koncových bodů spojitě.

Náš funkcionál se na této čtyrparametrové soustavě stane, jako nahoře, funkcí čtyř proměnných — souřadnic koncových bodů A' a B' oblouků γ.

Při přechodu od oblouku extremály $\breve{AB}$ (dávající extrém) k jiné čáře naší soustavy bude diferenciál $\mathrm{d}J$ vyjádřen toutéž formulí (11) jako v předcházejícím případě na základě poznámky 1. Proto můžeme touto soustavou křivek zaměnit níže při odvozování „podmínek transversality" dřívější čtyrparametrovou soustavu extremál.

Podmínky transversality. Vrátíme se k naší úloze. Souřadnice x_0, y_0, x_1, y_1 koncových bodů extremál jsou vázány vztahy $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \psi(x_1)$ a je tedy

$$\delta y_0 = \varphi'\delta x_0, \quad \delta y_1 = \psi'\delta x_0. \tag{12}$$

Výraz (11) pro $\mathrm{d}J$ nabude tvaru

$$\mathrm{d}J = [F + (\varphi' - y_0')F_{y'}]^0\delta x_0 + [F + (\psi' - y_1')F_{y'}]^{(1)}\delta x_1. \tag{13}$$

Chceme najít mezi našimi oblouky extremál tu, pro niž J nabývá extrému. Pro tento oblouk je $\mathrm{d}J = 0$, ať jsou δx_0 a δx_1 jakákoli. Z toho

$$[F + (\varphi' - y_0')F_{y'}]^{(0)} = 0, \ [F + (\psi' - y_1')F_{y'}]^{(1)} = 0. \tag{14}$$

Podmínky (14) se nazývají *podmínkami transversality*. Získaný výsledek lze formulovat jako větu:

Věta 1. *Jestliže křivka γ: $y = y(x)$ vede k extrému integrálu*

$$J(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

na třídě přípustných křivek C_1, spojujících dva libovolné body dvou daných křivek $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, pak křivka γ je extremálou a v koncových bodech křivky γ jsou splněny podmínky transversality (14).

Tato věta dává v obecném případě řešení námi položené úlohy. Vskutku, po rozřešení Eulerovy rovnice dostaneme soustavu extremál, $y = f(x, \alpha, \beta)$, závislou na dvou parametrech. Souřadnice koncových bodů x_0, x_1 křivky této dvojparametrové soustavy musí splňovat obě podmínky transversality a rovnice

$$f(x_0, \alpha, \beta) = \varphi(x_0), \; f(x_1, \alpha, \beta) = \psi(x_1);$$

z těchto čtyř rovnic stanovíme x_0, x_1, α, β.

Je-li speciálně $F = A(x, y) \sqrt{1 + y'^2}$, pak podmínka transversality zní:

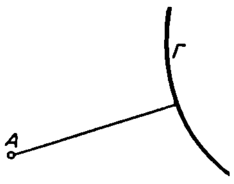
$$A\sqrt{1 + y'^2} + (\varphi' - y') \frac{Ay'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

neboli

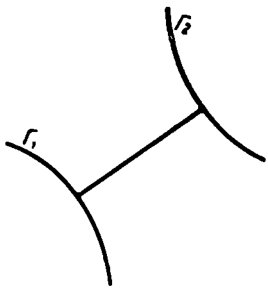
$$A(1 + \varphi' y') = 0.$$

Je-li hodnota A v odpovídajícím koncovém bodě různá od nuly, pak je roven nule druhý činitel a tudíž jsou směry tečen ke křivce γ a ke křivce, po níž se pohybuje počáteční (nebo koncový) bod křivky γ, na sobě kolmé. Podmínka transversality se stane podmínkou orthogonality.

Je-li jeden z koncových bodů křivky pevný, pak musí být podmínka transversality v platnosti jenom pro volný konec.



Obr. 11.



Obr. 12.

Příklad. Najít nejkratší vzdálenost bodu A od křivky Γ (viz obr. 11).

Nejkratší vzdálenosti se dosáhne podél extremály integrálu $\int \sqrt{1 + y'^2}\,dx$, t. j. podél přímky. Podmínka transversality přejde v podmínku orthogonality. Tím se dosáhne nejkratší vzdálenosti podél normály ke křivce Γ jdoucí bodem A.

Analogicky se nejkratší vzdálenosti mezi dvěma křivkami (obr. 12) dosáhne podél jejich společné normály.

Obecnější tvar podmínek transversality. Vyšetřujme podmínky transversality pro obecnější případ, kdy rovnice křivek γ_1 a γ_2 jsou dány v implicitním tvaru

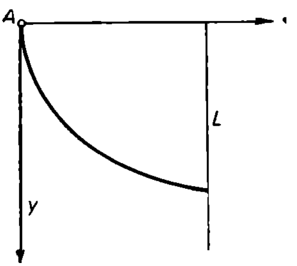
$$\varphi(x, y) = 0, \ \psi(x, y) = 0.$$

Budeme přitom předpokládat, že funkce φ a ψ mají spojité parciální derivace a že $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 > 0$ a $\psi_x^2 + \psi_y^2 > 0$. V tomto případě mají podmínky transversality tvar

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{F - y'F_{y'}}{\varphi_x}\right]_{x=x_0} &= \left[\frac{F_{y'}}{\varphi_y}\right]_{x=x_0}, \\ \left[\frac{F - y'F_{y'}}{\psi_x}\right]_{x=x_1} &= \left[\frac{F_{y'}}{\psi_y}\right]_{x=x_1}. \end{aligned}\right\} \tag{14'}$$

Jsou-li speciálně křivky γ_1 a γ_2 přímkami, rovnoběžnými s osou Oy: $x = x_0$ a $x = x_1$, pak podmínky transversality mají tvar

$$[F_{y'}]_{x=x_0} = 0, \ [F_{y'}]_{x=x_1} = 0. \tag{14''}$$



Obr. 13.

Příklad 1. Nechť je dán bod A a vertikální přímka L, která nejde bodem A. Po jaké čáře musí padat hmotný bod, vybíhající z bodu A s nulovou rychlostí, aby dostihl přímky L v nejkratší době?

Předpokládejme, že hledaná čára je rovinná, sestrojme pravoúhlou soustavu souřadnic xOy: počátek souřadnic umístíme v bodě A, osu Oy vedeme vertikálně dolů, osa Ox protíná přímku L (obr. 13). Podle provedené hypothesy bude hledaná křivka ležet v rovině xOy.

Budiž $x = a$ rovnice přímky L. V takovém případě vede naše úloha podle formule (3) § 1 k vyhledání křivky, podél níž integrál

$$T = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

nabývá minimální hodnoty, při čemž zde bereme za třídu přípustných čar čáry třídy C_1, spojující počátek souřadnic s libovolným bodem přímky L.

Podle obecné theorie, jestliže hledaná křivka existuje, pak je extremálou t. j. v našem případě podle výkladu v § 3 náleží k soustavě cykloid

$$x = r(\Theta - \sin\Theta) + C, \quad y = r(1 - \cos\Theta),$$

kde r a C jsou libovolné konstanty. Z podmínky, že křivka jde počátkem souřadnic, a za předpokladu, že počátečnímu bodu odpovídá $\Theta = 0$, dostaneme, že $C = 0$. Zbývá stanovit r. Použijeme proto podmínky transversality na koncové body.

V našem případě je

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2}}.$$

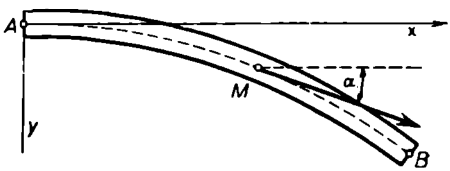
Musí tudíž pro $x = 0$ být podle (14″) $y' = 0$, t. j. v pravém koncovém bodě hledané křivky musí být tečna k této čáře horizontální. Z toho a z tvaru cykloidy nalezneme ihned, že $\pi r = a$.

Má tedy nakonec rovnice hledané křivky tvar

$$x = \frac{a}{\pi}(\Theta - \sin\Theta),$$

$$y = \frac{a}{\pi}(1 - \cos\Theta).$$

Příklad 2. Nosník AB délky l je vetknut na jednom konci A. Druhý jeho konec B je volný (obr. 14). Na volném konci B působíme na nosník zatížením P. Při zanedbání váhy nosníku určit jeho rovnovážnou polohu.



Obr. 14.

Vezmeme-li za osu Ox horizontální průmět nosníku, procházející bodem A, a označíme-li Y pořadnici bodu B a znakem α úhel, který svírá s osou Ox tečna k ose nosníku v libovolném bodě M, máme

$$Y = \int\limits_{AB} dy = \int\limits_0^l \sin\alpha \, ds.$$

Potenciální energie gravitační síly (váhu nosníku zanedbáváme) je rovna

$$PgY = \int\limits_0^l Pg \sin\alpha \, ds.$$

Potenciální energie sil pružnosti je rovna

$$\int\limits_0 J\alpha'^2 \, ds,$$

kde $\alpha' = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$ je křivost nosníku a J modul pružnosti. Tedy celková potenciální energie je

$$U = \int_0^l (J\alpha'^2 + Pg \sin\alpha)\,\mathrm{d}s.$$

Konec A je upevněn, v tomto konci je α dáno: $\alpha = \alpha_0$; ve volném konci máme podle již dokázaného $F_{\alpha'} = 0$,[1] kde F je výraz $J\alpha'^2 + Pg \sin\alpha$ za integračním znamením, t. j.

$$\alpha' = 0.$$

Ve volném konci je křivost nosníku rovna nule.

Eulerova rovnice

$$2J\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}s^2} - Pg\cos\alpha = 0$$

s krajovými podmínkami: pro $s = 0$ $\alpha = \alpha_0$, pro $s = l$ $\alpha' = 0$, určuje profil nosníku.

Budiž na příklad $\alpha_0 = 0$. Je-li $y = y(x)$ rovnice profilu nosníku, pak za předpokladu, že je profil nosníku blízký (ve smyslu blízkosti prvního řádu) ose Ox, máme

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

(zanedbáváme veličiny druhého řádu v poměru k y a $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$), a rovněž

$$\cos\alpha \approx 1, \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \approx \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}s^2} \approx \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right) \approx \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3},$$

$$l = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x \approx a,$$

kde a je úsečka konce B. Rovnice nosníku nabude nyní tvaru

$$2J\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} - Pg = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(l) = 0.$$

Z toho

$$y = \frac{Pg}{12J}x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

[1]) Rovnice křivky, po níž se pohybuje konec B, má tvar: $s = l$, a proto podmínka transversality se bere podle formule (13).

Krajové podmínky nám dají

$$C_2 = C_3 = 0, \; C_1 = -\frac{Pgl}{4J},$$

a nakonec dostaneme

$$y = \frac{Pg}{12J}(x^3 - 3lx^2).$$

§ 17. Nespojité úlohy.

Vyšetřujme funkcionál J nejjednodušší úlohy

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx.$$

Může se stát, že mezi čarami třídy C_1, spojujícími dva dané body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$, neexistuje čára realisující extrém funkcionálu J. V tomto případě přirozeně zkoumáme, zda se nedosáhne hledaného extrému na čarách třídy obecnější.

Za takovou třídu vezmeme soustavu po částech hladkých křivek $y = y(x)$; třídu po částech hladkých křivek označíme D_1.

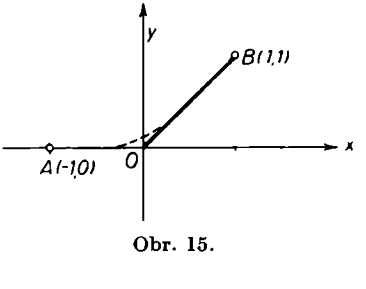
Příklad. Budiž

$$J(y) = \int_0^1 y^2(1 - y'^2)\, dx.$$

Tento funkcionál je definován pro všechny křivky třídy C_1, spojující body $A\,(-1, 0)$ a $B\,(1, 1)$. Pro jakoukoli takovou křivku je zřejmě $J(y) > 0$. Vezmeme-li nyní lomenou čáru $y = y(x)$, definovanou tímto způsobem (obr. 15):

$$y(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } -1 \leqq x \leqq 0, \\ x \text{ pro } \quad 0 \leqq x \leqq 1, \end{cases}$$

pak má pro ni integrál smysl a je roven nule. Je zřejmé, že zaokrouhlíme-li tuto lomenou čáru v bodě O, pak dostaneme křivku třídy C_1, pro niž hodnota integrálu J může být libovolně blízká nule. Tudíž infimum hodnot $J(y)$ pro y, patřící ke třídě C_1, je rovno nule a na křivkách třídy C_1 se ho nedosáhne. Přejdeme-li od třídy C_1 ke třídě D_1, pak tohoto infima se dosáhne a extremální úloha bude mít řešení.



Obr. 15.

Dokážeme nyní další větu.

Věta 2. *Jestliže mezi všemi po částech hladkými křivkami, spojujícími dva dané body A a B, po částech hladká křivka γ: $y = y(x)$ vede k extrému funkcionálu J, pak* 1) *γ se skládá z konečného počtu oblouků extremál a* 2) *v každém bodě lomu $M(\xi, \eta)$ křivky γ jsou splněny tyto podmínky:*[2])

$$\left.\begin{aligned} [F - y'F_{y'}]_{x=\xi-0} &= [F - y'F_{y'}]_{x=\xi+0}, \\ [F_{y'}]_{x=\xi-0} &= [F_{y'}]_{x=\xi+0}. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Bez porušení obecnosti můžeme se zřejmě omezit na případ jediného bodu lomu $M(\xi, \eta)$. Křivka γ, dávající minimum, se skládá ze dvou oblouků třídy C_1, z oblouku γ_1, spojujícího body A a M, a z oblouku γ_2, spojujícího body M a B.

Dokážeme, že oblouk γ_1 minimalisuje funkcionál $J(\gamma_1) = \int_{x_0}^{\xi} F(x, y, y')\,dx$ na soustavě čar $\{\gamma\}$ třídy C_1, spojujících body A a M. K provedení důkazu sporem předpokládejme opak. Nechť existuje ve třídě $\{\gamma\}$ oblouk γ_1', pro který $J(\gamma_1') < J(\gamma_1)$. Potom pro křivku $\gamma' = \gamma_1' + \gamma_2$ je $J(\gamma') = J(\gamma_1') + J(\gamma_2) < J(\gamma_1) + J(\gamma_2) = J(\gamma)$. Křivka γ' spojuje body A a B a má jediný bod lomu v bodě M, t. j. γ' patří ke třídě přípustných čar naší úlohy a nerovnost $J(\gamma') < J(\gamma)$ je ve sporu s předpokladem o tom, že křivka γ realisuje minimum J.

Tedy oblouk γ_1 křivky Γ realisuje minimum J mezi všemi čarami, spojujícími body A a M. Proto γ_1 je extremálou (viz kap. II, str. 55); analogicky i druhý oblouk γ_2 je extremálou.

Vyšetřujme soustavu oblouků s konci v A a B, které obdržíme z γ posunutím bodu lomu. Na této soustavě se funkcionál J stane funkcí souřadnic ξ a η bodu lomu. Tento bod je koncovým pro první oblouk extremály γ_1 a počátečním pro druhý oblouk extremály γ_2. Proto podle formule (14) je:

$$\begin{aligned} dJ(\gamma) &= dJ(\gamma_1) + dJ(\gamma_2) = \\ &= \{[F - y'F_{y'}]_{x=\xi-0}\,\delta\xi + [F_{y'}]_{x=\xi-0}\,\delta\eta\} - \\ &- \{[F - y'F_{y'}]_{x=\xi+0}\,\delta\xi + [F_{y'}]_{x=\xi+0}\,\delta\eta\} = \\ &= \{[F - y'F_{y'}]_{x=\xi-0} - [F - y'F_{y'}]_{x=\xi+0}\}\delta\xi + \\ &+ \{[F_{y'}]_{x=\xi-0} - [F_{y'}]_{x=\xi+0}\}\delta\eta. \end{aligned}$$

[2]) Symbolem $[f(x, y, y')]_{x=\xi-0}$ rozumíme limitu $f(x, y(x), y'(x))$ pro $x \to \xi$ zleva, kdežto $[f(x, y, y')]_{x=\xi+0}$ je limita $f(x, y(x), y'(x))$ pro x konvergující k ξ zprava.

Podmínkou pro to, aby γ dávala minimum mezi všemi křivkami této soustavy, je: $dJ(\gamma) = 0$ pro všechny hodnoty $\delta\xi$, $\delta\eta$. Z toho a z nalezeného vyjádření pro $dJ(\gamma)$ plynou vztahy (15).

Podmínky (14) se nazývají podmínkami Weierstrass-Erdmanovými. Čára, skládající se z extremál a taková, že v každém bodě lomu je splněna podmínka Weierstrass-Erdmanova, mají název lomené extremály. Je tedy po částech hladká křivka, realisující extrém J, vždycky lomenou extremálou.

Ponecháváme čtenáři rozebrat s tohoto hlediska shora uvedený příklad.

Hlubší nespojitosti extremál vyšetřoval gruzínský matematik A. M. Razmadze.

Ve svém vyšetřování konstruuje Razmadze theorii, která zahrnuje ty úlohy variačního počtu, jejichž řešením jsou funkce s konečným počtem bodů nespojitosti prvního druhu.

§ 18. Úloha s volnými konci v prostorech o libovolném počtu rozměrů.

Obecné podmínky transversality. V předcházejících paragrafech rozvinutá theorie se lehko zobecní na případ funkcionálů závislých na čarách v prostoru o libovolném počtu rozměrů.

Vyšetřujme prostor o $(n + 1)$-rozměrech se souřadnicemi x, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Nechť se třída přípustných křivek $\{q\}$ skládá ze všech možných křivek třídy C_1, definovaných rovnicemi $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, při čemž souřadnice koncových bodů

$$x_0, y_i^{(0)} = y_i(x_0) \text{ a } x_1, y_i^{(1)} = y_i(x_1), \; i = 1, 2, \ldots, n$$

jsou vázány soustavou vztahů

$$\varphi_j(x_0, y_i^{(0)}, x_1, y_i^{(1)}) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, m < 2n + 2. \tag{16}$$

Na křivkách $q\{y_i(x)\}$ této třídy je dán funkcionál

$$J(q) = \int_q F(x, y_i, y_i') \, dx.$$

Chceme určit křivku γ_0 naší třídy, pro niž funkcionál J dosahuje extrému.

Křivka γ_0, realisující extrém funkcionálu mezi všemi křivkami třídy $\{\gamma\}$, realisuje zároveň jeho extrém mezi všemi křivkami z $\{\gamma\}$, které mají tytéž koncové body jako křivka γ_0. A proto je křivka γ_0 obloukem extremály.

Pro soustavu $\{q\}$ oblouků extremál stane se funkcionál J funkcí konečného počtu proměnných souřadnic konců těchto oblouků $x_0, x_1, y_i^{(0)}, y_i^{(1)} : J = J(x_0, x_1, y_i^{(0)}, y_i^{(1)})$. Přitom k tomu, aby oblouk extremály patřil do třídy $\{q\}$, je nutné, aby tyto proměnné byly vázány vztahy (16). Je tedy křivka γ_0 tím obloukem extremály, pro který se realisuje extrém $J(x_0, y_i^{(0)}, x_1, y_i^{(1)})$ za podmínek (16). Proto pro oblouk γ_0 musí být

$$\mathrm{d}J = \left(\frac{\partial J}{\partial x_0}\delta x_0 + \sum_i \frac{\partial J}{\partial y_i^{(0)}}\delta y_i^{(0)}\right) + \left(\frac{\partial J}{\partial x_1}\delta x_1 + \sum_i \frac{\partial J}{\partial y_i^{(1)}}\delta y_i^{(1)}\right) = 0$$

pro všechny přípustné hodnoty diferenciálů δx_0, $\delta y_i^{(0)}$, δx_1, $\delta y_i^{(1)}$, t. j. takové, pro něž podle (16):

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_0}\delta x_0 + \sum_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i^{(0)}}\delta y_i^{(0)} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\delta x_1 + \sum_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i^{(0)}}\delta y_i^{(1)} = 0. \tag{17}$$

Opakujeme-li úvahy předcházejícího paragrafu, dostaneme

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} = -\,[F - \sum_i y_i' F_{y_i'}]^{(0)}, \quad \frac{\partial J}{\partial y_i^{(0)}} = -\,[F_{y_i'}]^{(0)},$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} = [F - \sum_i y_i' F_{y_i'}]^{(1)}, \quad \frac{\partial J}{\partial y_i^{(1)}} = [F_{y_i'}]^{(1)}.$$

V obecném případě je možno použít pravidla Lagrangeových multiplikátorů: existují konstanty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j$ takové, že je $\mathrm{d}(J - \sum_j \lambda_j \varphi_j) = 0$ pro libovolné hodnoty diferenciálů δx_0, $\delta y_i^{(0)}$ a δx_1, $\delta y_i^{(1)}$, neboli

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_0}(J + \Sigma\lambda_j\varphi_j) &= -\,[F - \Sigma y_i' F_{y_i'}]^{(0)} - \Sigma\lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_0} = 0,\\
\frac{\partial}{\partial y_i^{(0)}}(J + \Sigma\lambda_j\varphi_j) &= -\,[F_{y_i'}]^{(0)} - \Sigma\lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i^{(0)}} = 0,\\
\frac{\partial}{\partial x_1}(J + \Sigma\lambda_j\varphi_j) &= [F - \Sigma y_i' F_{y_i'}]^{(1)} - \Sigma\lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} = 0,\\
\frac{\partial}{\partial y_i^{(1)}}(J + \Sigma\lambda_j\varphi_j) &= [F_{y_i'}]^{(1)} - \Sigma\lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i^{(1)}} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Tyto podmínky jsou zobecněním podmínek transversality.

Úloha s volnými konci v trojrozměrném prostoru. Vyšetřujme speciálně v trojrozměrném prostoru funkcionál

$$J(\gamma) = \int_\gamma F(x, y, z, y', z')\,\mathrm{d}x, \tag{19}$$

když 1) za třídu přípustných čar vezmeme čáry třídy C_1 s koncovými body, položenými na dvou daných křivkách třídy C_1

$$y = \varphi_0(x),\ z = \psi_0(x) \text{ a } y = \varphi_1(x),\ z = \psi_1(x), \tag{20}$$

2) za třídu přípustných čar vezmeme čáry třídy C_1 s koncovými body, ležícími na dvou daných plochách třídy C_1

$$z = \varphi(x, y),\ z = \psi(x, y). \tag{21}$$

V obou případech je hledaná křivka obloukem extremály, t. j. řešením Eulerových rovnic

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0,\ F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{z'} = 0.$$

Funkcionál J vyšetřujeme jako funkci koncových bodů x_0, y_0, z_0 a x_1, y_1, z_1 oblouků extremál. Problém se převede na úlohu, najít extrém této funkce za podmínek

$$y_0 = \varphi_0(x_0),\ z_0 = \psi_0(x_0),\ y_1 = \varphi_1(x_1),\ z_1 = \psi_1(x_1)$$

v první úloze a

$$z_0 = \varphi(x_0, y_0),\ z_1 = \psi(x_1, y_1)$$

v druhé úloze.

V případě 1) dostaneme:

$$\mathrm{d}(J + \lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \mu_0\psi_0 + \mu_1\psi_1) = 0,$$

kde $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1$ jsou multiplikátory.

Pro počáteční bod dostaneme:

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} + \lambda_0\varphi_{0x_0} + \lambda_1\varphi_{1x_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial y_0} + \lambda_0\varphi_{0y_0} + \lambda_1\varphi_{1y_0} = 0,$$

$$\frac{\partial J}{\partial y_0'} + \lambda_0\varphi_{0y'_0} + \lambda_1\varphi_{1y'_0} = 0$$

a analogické vztahy dostaneme pro koncový bod.

Máme

$$\mathrm{d}J(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) =$$
$$= -\{[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]^{(0)}\delta x_0 + F_{y'}{}^{(0)}\delta y_0 + F_{z'}{}^{(0)}\delta z_0\} +$$
$$+ \{[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]^{(1)}\delta x_1 + F_{y'}{}^{(1)}\delta y_1 + F_{z'}{}^{(1)}\delta z_1\}. \tag{22}$$

V případě 1) máme:

$$\mathrm{d}z_0 = \varphi_0'\delta x_0, \quad \mathrm{d}y_0 = \psi_0'\delta y_0,$$
$$\mathrm{d}z_1 = \varphi_1'\delta x_1, \quad \mathrm{d}y_1 = \psi_1'\delta y_1.$$

Rovnost $\mathrm{d}J = 0$ pro všechny přípustné diferenciály nám dá vztah v počátečních a koncových bodech oblouku, realisujícího extrém — podmínky transversality

$$\left.\begin{aligned} &[F - (y' - \varphi_0')F_{y'} - (z' - \psi_0')F_{z'}]^{(0)} = 0,\\ &[F - (y' - \varphi_1')F_{y'} - (z' - \psi_1')F_{z'}]^{(1)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

V případě 2) jsou přípustné diferenciály souřadnic koncových bodů vázány vztahy

$$\delta z_0 = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]^{(0)}\delta x_0 + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]^{(0)}\delta y_0,$$
$$\delta z_1 = \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]^{(1)}\delta x_1 + \left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]^{(1)}\delta y_1.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty pro δz_0 a δz_1 do vzorce (22) a vyjdeme-li z toho, že pro jakékoli přípustné diferenciály souřadnic koncových bodů oblouku γ_0, dávajícího extrém, je $\mathrm{d}J = 0$, dostaneme vztahy v počátečním bodě $[x_0, y_0, z_0]$ — podmínky transversality:

$$\left.\begin{aligned} &\left[F - y'F_{y'} - \left(z' + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)F_{z'}\right]^{(0)} = 0,\\ &\left[F_{y'} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}F_{z'}\right]^{(0)} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

a analogické vztahy v koncovém bodě (x_1, y_1, z_1) oblouku γ_0 (zaměníme-li funkci φ funkcí ψ).

Je-li $f = A(x, y, z)\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$, pak (jako v rovinném případě) se stanou podmínky transversality (23) podmínkami orthogonality odpovídající extremály plochy nebo čáry, po níž se pohybuje její počáteční nebo koncový bod.

§ 19. Podmínky pro koncové body v případě funkcionálů závislých na derivacích vyššího řádu.

Formulace úlohy. Vyšetřujme úlohu: vyhledat extrém funkcionálu

$$J = \int_\gamma F(x, y, y', y'')\, dx, \tag{25}$$

když za třídu přípustných čar vezmeme křivky γ třídy C_2, vyhovující jedné z těchto dvou podmínek:

1. Mezi souřadnicemi a směrnicí tečny v levém resp. v pravém koncovém bodě γ platí vztahy

$$\varphi(x_0, y_0, y_0') = 0 \text{ a } \psi(x_1, y_1, y_1') = 0, \tag{26}$$

kde jsou (x_0, y_0) a (x_1, y_1) souřadnice koncových bodů γ, kdežto y_0' a y_1' směrnice tečen ke křivce γ v těchže bodech a $\frac{\partial\varphi}{\partial y_0'}$ a $\frac{\partial\psi}{\partial y_1'}$ nejsou rovny nule.

2. Mezi souřadnicemi a směrnicemi tečen v každém koncovém bodě γ platí dva vztahy:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0(x_0, y_0, y_0') = 0,\ \psi_0(x_0, y_0, y_0') = 0, \\ \varphi_1(x_1, y_1, y_1') = 0,\ \psi_1(x_1, y_1, y_1') = 0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

při čemž determinanty $\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0}\frac{\partial\psi_0}{\partial y_0'} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial y_0'}\frac{\partial\psi_0}{\partial y_0}$ a $\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_0}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_0'} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_0'}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_0}$ nejsou rovny nule.

Analogicky jako ve všech v této kapitole rozebíraných úlohách je hledaná křivka podle věty Euler-Poissonovy extremálou; je tedy pro faktické stanovení hledané křivky třeba najít vztahy pro určení hodnot čtyř libovolných konstant v obecném integrálu Euler-Poissonovy rovnice.

Diferencování integrálu J vzatého po oblouku extremály. Vyšetřujeme soustavu extremál $\{\gamma\}$ o souřadnicích x_0, y_0 a x_1, y_1 koncových bodů a o hodnotách $y_0' = y'(x_0)$ a $y_1' = y'(x_1)$ pro směrnice tečny; nechť každý oblouk soustavy γ je jednoznačně určen svými hodnotami $x_0, y_0, y_0', x_1, y_1, y_1'$. Na soustavě $\{\gamma\}$ stane se funkcionál J funkcí těchto šesti proměnných:

$$J = J(x_0, y_0, y_0', x_1, y_1, y_1'),$$

při čemž

$$\mathrm{d}J = \frac{\partial J}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial J}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial J}{\partial y_0'}\delta y_0' + \frac{\partial J}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial J}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial J}{\partial y_1'}\delta y_1'.$$

Vezmeme počáteční úsečky pevné. Pro dva nekonečně blízké oblouky extremál $y = y(x)$ a $y = y(x) + \delta y(x)$, $x_0 \leqq x \leqq x_1$, máme:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'')\, \mathrm{d}x. \tag{28}$$

Integrujeme-li per partes, dostaneme, označíme-li $\delta y_0 = \delta y(x_0)$, $\delta y_0' = \delta y'(x_0)$, $\delta y_1 = \delta y(x_1)$, $\delta y_1' = \delta y'(x_1)$,

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y'\, \mathrm{d}x = [F_{y'} \delta y]_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'}\right) \delta y\, \mathrm{d}x,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y''}\, \delta y''\, \mathrm{d}x = [F_{y''}\, \delta y']_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right) \delta y'\, \mathrm{d}x =$$

$$= [F_{y''} \delta y']_0^1 - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\, \delta y\right]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''}\right) \delta y\, \mathrm{d}x.$$

Dosadíme-li obdržené výrazy do vzorce (28) a připomeneme-li si, že $y = y(x)$ vyhovuje rovnici Eulerově $F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} F_{y''} = 0$, dostaneme

$$\delta J = -\left[\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(0)} \delta y_0 + F_{y''}^{(0)}\, \delta y_0'\right] +$$
$$+ \left[\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(1)} \delta y_1 + F_{y''}^{(1)}\, \delta y_1'\right].$$

Pro naši podsoustavu extremál stane se variace diferenciálem.

Dostaneme:

$$\mathrm{d}J = -\left[\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(0)} \delta y_0 + F_{y''}^{(0)}\, \delta y_0'\right] +$$
$$+ \left[\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(1)} \delta y_1 + F_{y''}^{(1)}\, \delta y_1'\right],$$

z čehož

$$\frac{\partial J}{\partial y_0} = -\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(0)}, \quad \frac{\partial J}{\partial y_0'} = -F_{y''}^{(0)},$$

$$\frac{\partial J}{\partial y_1} = \left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(1)}, \quad \frac{\partial J}{\partial y_1'} = F_{y''}^{(1)}.$$

Vyšetříme nyní podsoustavu $\{\gamma\}$, skládající se z různých oblouků jedné a téže extremály $y = y(x)$. Pro tuto podsoustavu je

$$\delta y_0 = y_0'\delta x_0, \quad \delta y_0' = y_0''\delta x_0, \quad \delta y_1 = y_1'\delta x_1, \quad \delta y_1' = y_1''\delta x_1.$$

Proto při přechodu od jednoho oblouku podsoustavy k jinému nekonečně blízkému je

$$\begin{aligned} \mathrm{d}J = &\left(\frac{\partial J}{\partial x_0} + y_0' \frac{\partial J}{\partial y^0} + y_0'' \frac{\partial J}{\partial y_1}\right)\delta x_0 + \\ &+ \left(\frac{\partial J}{\partial x_1} + y_1' \frac{\partial J}{\partial y_1} + y_1'' \frac{\partial J}{\partial y_1'}\right)\delta x_1. \end{aligned} \tag{29}$$

Na druhé straně podle pravidla o diferencování integrálu $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\,\mathrm{d}x$ podle horní a dolní meze máme

$$\mathrm{d}J = -F^{(0)}\delta x_0 + F^{(1)}\delta x_1. \tag{30}$$

Porovnáme-li (29) a (30), dostaneme

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} + y_0' \frac{\partial J}{\partial y_0} + y'' \frac{\partial J}{\partial y_0'} = F^{(0)}, \quad \frac{\partial J}{\partial x_1} + y_1' \frac{\partial J}{\partial y_1} + y_1'' \frac{\partial J}{\partial y_1'} = F^{(1)},$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} = -\left[F - y_0'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right) - y_0'' F_{y''}\right]^{(0)},$$

$$\frac{\partial J}{\partial x_1} = \left[F - y_1'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right) - y_1'' F_{y''}\right]^{(1)},$$

z čehož

$$\begin{aligned} \mathrm{d}J = &-\left\{\left[F - y_0'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)\right]^{(0)}\delta x_0 + \right. \\ &\left. + \left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(0)}\delta y_0 + F_{y''}{}^{(0)}\delta y_0\right\} + \\ &+ \left\{\left[F - y_1'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)\right]^{(1)}\delta x_1 + \right. \\ &\left. + \left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right)^{(1)}\delta y_1 + F_{y''}{}^{(1)}\delta y_1\right\}. \end{aligned}$$

Podmínky transversality. Vyšetříme první z daných úloh. Křivka γ, dávající extrém mezi všemi přípustnými čarami, je extremálou a na soustavě extremál udílí extrém funkci $J(x_0, y_0, y_0', x_1, y_1, y_1')$ za podmínek (26). Podle pravidla pro hledání podmíněného extrému funkce existují konstanty λ_1 a λ_2 takové, že pro oblouk γ_0 platí rovnost

$$d[J + \lambda_1\varphi(x_0, y_0, y_0') + \lambda_2\psi(x_1, y_1, y_1')] = 0$$

(pro jakékoli hodnoty diferenciálů).

Z toho

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} - \lambda_1\varphi_{x_0} = \frac{\partial J}{\partial y_0} - \lambda_1\varphi_{y_0} = \frac{\partial J}{\partial y_0'} - \lambda_1\varphi_{y'_0} = 0,$$

neboli

$$\frac{\partial J}{\partial x_0} : \frac{\partial J}{\partial y_0} : \frac{\partial J}{\partial y_0'} = \varphi_{x_0} : \varphi_{y_0} : \varphi_{y'_0},$$

neboli nakonec

$$\frac{\left[F - y_0'\left(F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right) - y_0'' F_{y''}\right]^{(0)}}{\varphi x_0} = \frac{\left[F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y''}\right]^{(0)}}{\varphi_{y_0}} = \frac{F_{y''}{}^{(0)}}{\varphi_{y'_0}}. \quad (31)$$

Analogická podmínka platí pro druhý koncový bod.

Každá z těchto podmínek obsahuje po dvou vztazích mezi hodnotami $x_0, y_0, y_0', x_1, y_1, y_1'$. Spolu s podmínkami (26) dostaneme šest rovnic ke stanovení těchto hodnot.

Připomínáme v závěru jeden důležitý případ. Předpokládejme, že vezmeme za třídu přípustných čar funkcionálu J soustavu křivek třídy C_1, spojujících dva dané body $A(x_0, y_0)$ a $B(x_1, y_1)$. V tomto případě máme $dx_0 = dy_0 = dx_1 = dy_1 = 0$ a tudíž při přechodu od extremály γ_0 ke křivce nekonečně blízké $\bar{\gamma}$ třídy přípustných čar budeme mít

$$dJ = - [F_{y''}]_{x_0}\delta y_0' + [F_{y''}]_{x_1}\delta y_1'.$$

Podmínka $\Delta J = 0$ nás vede k dvěma vztahům pro koncové body:

$$[F_{y''}]_{x_0} = 0, \quad [F_{y''}]_{x_1} = 0. \quad (32)$$

Tyto dva vztahy spolu s podmínkami $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ nám dávají možnost jako dříve určit všechny konstanty v obecném integrálu Euler-Poissonovy rovnice.

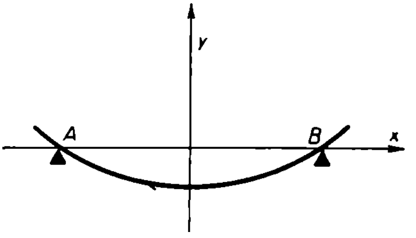
Příklad. Na dvou podpěrách A a B, ležících v horizontální rovině, leží volně válcový pružný hmotný nosník (obr. 16). Chceme stanovit tvar prohnuté osy nosníku. Přitom zanedbáme váhu těch částí nosníku, které leží vně podpěr.

Považujeme-li ohyb nosníku za malý a zanedbáme-li veličiny nekonečně malé vyšších řádů, pak na základě úvah provedených v § 14 převede se otázka na úlohu určit funkci $y = y(x)$ minimalisující integrál

$$E = \int_{-l}^{l} \left(\frac{1}{2}\mu y''^2 + \varrho y\right) dx,$$

když za třídu přípustných čar vezmeme čáry $y = y(x)$ třídy C_2 takové, že je $y(-l) = y(l) = 0$.

Pro vyšetřovanou úlohu má obecný integrál Eulerovy rovnice tvar (viz příklad v § 14)



Obr. 16.

$$y = -\frac{\varrho}{24\mu}x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

kde jsou α, β, γ a δ libovolné konstanty. Z podmínek symetrie a z podmínek $y(-l) = y(l) = 0$ najdeme

$$\alpha = \gamma = 0,$$

$$-\frac{\varrho}{24\mu}l^4 + \beta l^2 + \delta = 0;$$

kromě toho podle výsledků uvedeného paragrafu musí být „v koncích" vyhověno vztahům (32), t. j.

$$y''(-l) = y''(l) = 0.$$

Je tudíž

$$-\frac{1}{2}\frac{\varrho}{\mu}l^2 + 2\beta = 0.$$

Pro rovnici hledané prohnuté osy nosníku nakonec dostaneme

$$y = -\frac{\varrho}{24\mu}x^4 + \frac{1}{4}\frac{\varrho}{\mu}l^2x^2 - \frac{5}{24}\frac{\varrho}{\mu}l^4.$$