úplná, lze hledanou funkci $\mu(\xi, \eta)$ a pravou stranu $\Phi(x, y)$ rozvinout v řady

$$\mu(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(\xi, \eta), \quad a_k = (\mu, \varphi_k),$$

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \varphi_k(x, y), \quad \Phi_k = (\Phi, \varphi_k).$$

Dosadíme-li toto do (9) a užijeme-li vzorce (12), dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \varphi_k(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \varphi_k(x, y),$$

odkud $a_k = \lambda_k \Phi_k$. Řešení dostaneme ve tvaru

$$\mu(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \Phi_k \varphi_k(\xi, \eta). \tag{13}$$

Úloha se tedy převádí na výpočet charakteristických čísel a charakteristických funkcí souměrného jádra $\frac{1}{r}$. Ten lze provést způsoby vyloženými v kap. 2, části I. V. I. Dovnorovič, aby si ověřil praktickou vhodnost řady (13), vypočetl prvých šest členů této řady pro razník tvaru rotačního paraboloidu. Porovnání s přesným řešením ukázalo, že chyba v určení působící síly Q byla okolo 2,25%.

KAPITOLA 6

NĚKOLIK APLIKACÍ THEORIE SINGULÁRNÍCH INTEGRÁLNÍCH ROVNIC

§ 66. Hilbertův problém. Rozebereme problém určit funkci harmonickou v nějaké rovinné oblasti D za předpokladu, že na některých částech hranice jsou dány hodnoty hledané funkce a na jiných jsou dány hodnoty její normální derivace.[1]

[1] Tento problém je speciálním případem obecného Hilbertova problému, při němž se hledá harmonická funkce za podmínky, že na hranici je známa lineární kombinace samotné funkce a její normální derivace.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že na každé z uzavřených křivek tvořících hranici L jsou jak oblouky, na nichž je dána funkce, tak i oblouky, na nichž je dána normální derivace.

Označme $\gamma_1, \gamma_3, \ldots, \gamma_{2n-1}$ oblouky hranice, na kterých je dána hledaná harmonická funkce $U(x, y)$. Nechť na těchto obloucích

$$U = f(s), \tag{1}$$

kde s je délka oblouku hranice. Označme dále $\gamma_2, \gamma_4, \ldots, \gamma_{2n}$ ty oblouky hranice, na kterých je dána normální derivace. Nechť na těchto obloucích

$$\frac{\partial U}{\partial n} = f_1(s), \tag{2}$$

kde n je vnější normála k hranici. Problém spočívá v určení funkce $U(x, y)$ harmonické v oblasti a na hranici vyhovující rovnicím (1) a (2).

Označme α_k a β_k počáteční a koncový bod oblouku γ_{2k}. Potom zřejmě β_k a α_{k+1} jsou počáteční a koncový bod oblouku γ_{2k+1}. Nebudeme předem předpokládat, že $U(x, y)$ je spojitá v bodech α_k a β_k. Potom, jak uvidíme, Hilbertův problém připouští nekonečně mnoho řešení, závisících na nějakých parametrech. Volbou těchto parametrů lze docílit toho, aby $U(x, y)$ byla spojitá.

Upravme podmínku (2). Označme $V(x, y)$ funkci konjugovanou s $U(x, y)$. V důsledku Cauchy-Riemannových rovnic

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Odtud můžeme určit hodnoty $V(x, y)$ na obloucích γ_{2k}:

$$\text{na } \gamma_{2k} \qquad V(x, y) = \int_{\alpha_k}^{s} \frac{\partial V}{\partial s} \, ds + C_k = \int_{\alpha_k}^{s} f_1(s) \, ds + C_k.$$

Označme

$$\int_{\alpha_k}^{s} f_1(s) \, ds = f^*(s).$$

Nyní může být Hilbertův problém formulován takto: určit funkci analytickou v oblasti D, jestliže na jedněch částech hranice jsou dány hodnoty její reálné části a na druhých její části imaginární:

$$
\begin{aligned}
&\text{na } \gamma_{2k-1} \qquad && U = f(s),\\
&\text{na } \gamma_{2k} && V = f^*(s) + C_k,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

kde C_k jsou libovolné konstanty.

Položme $U + iV = \varphi(z)$ a nechť $T(z; \zeta)$ je Schwarzovo jádro oblasti (viz § 41). Potom

$$
\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_L U(\sigma)\, T(z; \zeta)\, \mathrm{d}\sigma + iC,
\tag{4}
$$

kde C je jistá konstanta; L je hranice oblasti D. Funkce $\varphi(z)$ bude zřejmě známa a náš problém bude rozřešen, jestliže určíme hodnoty $U(\sigma)$ na obloucích γ_{2k}.

Integrál v (4) rozdělme na dva: jeden vztažený na oblouky $\gamma_1, \gamma_3, \ldots, \gamma_{2n-1}$ a druhý vztažený na oblouky $\gamma_2, \gamma_4, \ldots, \gamma_{2n}$. V důsledku podmínky (1) je prvý integrál veličina známá a rovná se

$$
\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_{2k-1}} f(\sigma)\, T(z; \zeta)\, \mathrm{d}\sigma.
$$

Pro stručnost označme tento integrál $\omega(z)$, takže

$$
\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_{2k}} U(\sigma)\, T(z; \zeta)\, \mathrm{d}\sigma + \omega(z) + iC.
$$

Nechť t je bod na nějakém oblouku γ_{2m}, příslušející délce oblouku s. V poslední rovnici přejdeme k limitě nechajíce $z \to t$. Abychom provedli limitní přechod v integrálu napravo, užijeme vzorce (27), § 41:

$$
\frac{1}{2\pi} T(z; \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\pi i} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + P(z; \zeta)\, \mathrm{d}\sigma.
$$

Nyní

$$
\varphi(z) = \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_{2k}} \frac{U(\sigma)\, \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_{2k}} U(\sigma)\, P(z; \zeta)\, \mathrm{d}\sigma + \omega(z) + iC.
$$

V druhém členu lze provést limitní přechod za integračním znaménkem, neboť funkce $P(z; \zeta)$ je spojitá. První člen je integrál Cauchyho typu a jeho limita se určí podle vzorce (2), § 22. Máme tedy:

$$\varphi(t) = U(s) + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_{2k}} \frac{U(\sigma)\, \mathrm{d}\zeta}{\zeta - t} + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_{2k}} U(\sigma)\, P(t;\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma + \omega(t) + iC.$$

Oddělme v této rovnici imaginární části a užijme podmínky (3). Potom dostaneme:

na γ_{2m}

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_{2k}} U(\sigma)\, \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - t}\right) + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_{2k}} U(\sigma)\, \mathrm{Im}\{P(t;\, \zeta)\}\, \mathrm{d}\sigma = \tag{5}$$
$$= f^*(s) - \mathrm{Im}\{\omega(t)\} + C'_m;$$
$$C'_m = C_m - C.$$

Rovnice (5) je singulární integrální rovnice, v níž neznámá je hodnota $U(x, y)$ na obloucích γ_{2m}. Když jsme rozřešili tuto rovnici, určíme $U(x, y)$ pomocí vzorce (4). Způsobem vyloženým v § 27 lze rovnici (5) převést na rovnici Fredholmovu. Avšak vyšetřování a řešení této rovnice v obecném případě je značně obtížné. Omezíme se proto na nejjednodušší a současně pro aplikace dosti důležitý případ, kdy oblast D je polorovina. Tomuto případu bude věnován následující paragraf.

§ 67. Hilbertův problém pro polorovinu. Schwarzovo jádro pro polorovinu lze lehce sestrojit. Užijeme k tomu vzorce (26), § 41.

Schwarzovo jádro pro kruh je dobře známo a rovná se

$$\frac{1}{2\pi} T'(t, \tau)\, \mathrm{d}\sigma' = \frac{1}{2\pi} \frac{\tau + t}{\tau - t}\, \mathrm{d}\sigma',$$

kde t je bod uvnitř kruhu, τ je bod na kružnici a $\mathrm{d}\sigma' = |\mathrm{d}\tau|$. Funkce zobrazující jednotkový kruh na horní polorovinu $y > 0$ má tvar

$$t = \frac{z - i}{z + i}, \quad \tau = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}.$$

Podle vzorce (26), § 41

$$\frac{1}{2\pi} T(z;\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\pi i} \frac{\zeta z + 1}{\zeta - z} \frac{|\mathrm{d}\zeta|}{|\zeta + i|^2}.$$

Jestliže položíme $\zeta = \xi + i\eta$, pak na hranici poloroviny $\eta = 0$ a $\zeta = \xi$.

Odtud
$$\frac{1}{2\pi} T(z;\,\zeta)\,d\sigma = \frac{1}{\pi i}\,\frac{\xi z + 1}{\xi - z}\,\frac{d\xi}{\xi^2 + 1} \tag{1}$$
čili
$$\frac{1}{2\pi} T(z;\,\zeta)\,d\sigma = \frac{1}{\pi i}\,\frac{d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{\pi i}\,\frac{\xi\,d\xi}{\xi^2 + 1}.$$

Vzorec (4), § 66 nabývá tvaru
$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\,\frac{d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\,\frac{\xi\,d\xi}{\xi^2 + 1} + iC;$$
$$u(\xi) = U(\xi,\,0).$$

Druhý integrál je konstanta. Označíme-li týmž písmenem C veličinu
$$C + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\,\frac{\xi\,d\xi}{\xi^2 + 1},$$
vyjádříme Schwarzův integrál ve tvaru
$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi)\,d\xi}{\xi - z} + iC. \tag{2}$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že všechny úsečky $\gamma_2, \gamma_4, \ldots, \gamma_{2n}$ jsou omezené, takže na částech hranice poloroviny vzdalujících se do nekonečna je dána funkce $U(\xi,\,0) = f(\xi)$.

Nechť t je bod na jedné z úseček γ_{2k}. Ve vzorci (2) nechme $z \to t$. Opakujíce úvahy § 66, dojdeme k singulární integrální rovnici

na γ_{2m}
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_2+\ldots+\gamma_{2n}} u(\xi)\,\mathrm{Re}\left(\frac{d\xi}{\xi - t}\right) = f^*(t) - \mathrm{Im}\{\omega(t)\} + C'_m.$$

Význam označení je tentýž jako v § 66.

Naši rovnici lze zjednodušit. Především veličiny ξ, t, $d\xi$ jsou reálné, a proto lze symbol Re vypustit. Označme ještě pro stručnost
$$f^*(t) - \mathrm{Im}\{\omega(t)\} + C'_m = -B(t).$$

Tak dojdeme k rovnici

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\gamma_2+\ldots+\gamma_{2n}} u(\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - t} = B(t). \tag{3}$$

Tuto rovnici lze řešit způsobem vyloženým v § 27. Užijeme zde tohoto způsobu, pouze jej nepatrně pozměníme tak, jak jsme to učinili na konci § 26.

Nechť z je libovolný bod v komplexní rovině. Položme

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2+\ldots+\gamma_{2n}} u(\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - t}. \tag{4}$$

Užijeme-li věty o limitních hodnotách integrálu typu Cauchyho, dostaneme

$$\text{na } \gamma_{2m} \qquad F_i(t) + F_e(t) = iB(t). \tag{5}$$

Zaveďme novou neznámou $\Phi(z)$, kladouce

$$\Phi(z) = \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)(\beta_k - z)}\, F(z). \tag{6}$$

Odmocnina ve vzorci (6) má různá znaménka na různých stranách úseček γ_{2m}. Odtud lze lehce určit, že $\Phi(z)$ vyhovuje rovnici

$$\text{na } \gamma_{2m} \qquad \Phi_i(t) - \Phi_e(t) = i\, B(t) \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}. \tag{7}$$

Jedno řešení této rovnice je

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_2+\ldots+\gamma_{2n}} B(\xi) \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (\xi - \alpha_k)(\beta_k - \xi)}\, \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z},$$

a tedy

$$F(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)(\beta_k - z)}} \cdot \int\limits_{\gamma_2+\ldots+\gamma_{2n}} B(\xi) \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (\xi - \alpha_k)(\beta_k - \xi)}\, \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z}.$$

Odtud určíme $u(t)$, užívajíce vzorce

$$u(t) = F_i(t) - F_e(t),$$

který v našem případě dává

na γ_{2m}

$$u(t) = \\ = \frac{1}{\pi \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}} \int_{\gamma_2 + \ldots + \gamma_{2n}} B(\xi) \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (\xi - \alpha_k)(\beta_k - \xi)} \frac{d\xi}{\xi - t}. \quad (8)$$

Obecné řešení dostaneme, přičteme-li k tomuto ještě $u_0(t)$ — řešení homogenní rovnice

na γ_{2m}
$$\frac{1}{\pi} \int_{\gamma_2 + \ldots + \gamma_{2n}} u_0(\xi) \frac{d\xi}{\xi - t} = 0.$$

Klademe-li

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2 + \ldots + \gamma_{2n}} u_0(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{\Phi_0(z)}{\sqrt{\prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)(\beta_k - z)}},$$

dostaneme
$$\Phi_{0i}(t) - \Phi_{0e}(t) = 0.$$

Odtud plyne, že $\Phi_0(t)$ je jednoznačná v celé rovině. Pomocí úvah obdobných těm, jež jsme prováděli v § 26, se lehce přesvědčíme, že $\Phi_0(t)$ je libovolný polynom stupně $n - 1$. Označíme-li jej $\frac{i^{n-1}}{2} Q_{n-1}(t)$, máme:

$$u_0(t) = F_{0i}(t) - F_{0e}(t) = \frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}}. \quad (9)$$

Obecné řešení rovnice (3) má tvar

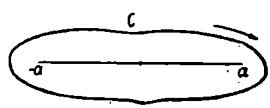
na γ_{2m}

$$u(t) = \\ = \frac{1}{\pi \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}} \int_{\gamma_2 + \ldots + \gamma_{2n}} B(\xi) \sqrt{\prod_{k=1}^{n} (\xi - \alpha_k)(\beta_k - \xi)} \frac{d\xi}{\xi - t} + \\ + \frac{Q_{n-1}}{\sqrt{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}}. \quad (10)$$

Koeficienty polynomu Q_{n-1} je třeba zvolit reálné, protože funkce $u(t)$ je reálná.

Vzorec (10) obsahuje $2n$ libovolných konstant: n konstant C'_m, obsažených v $B(\xi)$, a n koeficientů polynomu $Q_{n-1}(t)$. Lze je určit, zvolíme-li další doplňující podmínky. Speciálně lze je zvolit tak, aby $u(t)$ byla spojitá v bodech α_k a β_k.

§ 68. Úloha o styku dvou pružných polorovin. Nechť jsou dána dvě pružná prostředí, z nichž jedno vyplňuje horní a druhé dolní polorovinu. Předpokládejme, že se poloroviny dotýkají podél polopřímek $x < -a$ a $x > a$ (obr. 19), při čemž nepůsobí žádné tření. V intervalu $-a \leqq x \leqq a$ je nekonečně úzká štěrbina, jež rozděluje obě poloroviny. Na obě poloroviny působí od štěrbiny stejné roztahující síly intensity h, stejnoměrně rozložené podél hranice štěrbiny. Konečně budeme předpokládat, že se napětí rovnají v nekonečnu nule. Máme určit pole napětí v obou polorovinách. Označme σ_x^1, σ_y^1, τ_{xy}^1 napětí, u_x^1, u_y^1 posunutí v horní polorovině, λ_1 a μ_1 její Laméovy konstanty. Položme dále



Obr. 19.

$$\varkappa_1 = \frac{\lambda_1 + 3\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}.$$

Tytéž veličiny vztahující se k dolní polorovině opatříme indexem 2. Budeme také označovat $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ resp. $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ Goursatovy funkce pro horní resp. dolní polorovinu. Vyšetřeme krajové podmínky naší úlohy.

Především podél celé osy $y = 0$

$$\tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2 = 0. \tag{1}$$

Skutečně, v intervalech $|x| > a$, kde se poloroviny dotýkají, není tření a nejsou tedy tečná napětí; v intervalu $|x| < a$ působí pouze normální síly a tečná napětí opět neexistují. Dále v intervalu $|x| < a$ podle předpokladu působí normální roztahující síly intensity h. To dává tyto podmínky:

$$\sigma_y^1 = h, \ \sigma_y^2 = h, \ y = 0, \ |x| < a. \tag{2}$$

Konečně v intervalech, kde se dotýkají pružná prostředí, musí být vertikální normální napětí i vertikální posunutí stejná pro obě prostředí. To vede na poslední skupinu podmínek:

$$\sigma_y^1 = \sigma_y^2, \; y = 0, \; |x| > a; \tag{3}$$

$$u_y^1 = u_y^2, \; y = 0, \; |x| > a. \tag{4}$$

Řešíce naši úlohu, nahradíme krajové podmínky (3) a (4) těmito podmínkami:

$$u_y^1 = 0, \; u_y^2 = 0, \; y = 0, \; |x| > a. \tag{5}$$

Podmínka (4) při tom zřejmě není porušena. Pokud se týče podmínky (3), přesvědčíme se na konec o tom, že bude také vyplněna.

Zavedení podmínek (5) místo (3) a (4) nám umožňuje odděleně uvažovat horní a dolní polorovinu. Tak pro horní polorovinu máme následující krajové podmínky:

$$\tau_{xy}^1 = 0, \; y = 0; \tag{6}$$

$$\sigma_y^1 = h, \; y = 0, \; |x| \leqq a; \tag{7}$$

$$u_y^1 = 0, \; y = 0, \; |x| > a. \tag{8}$$

Tytéž podmínky platí i pro dolní polorovinu. Budeme proto v dalším vynechávat indexy 1 a 2.

Obraťme se ke Goursatovým funkcím $\varphi(x)$ a $\psi(z)$. Podle vzorců (8) a (9), § 40 na přímce $y = 0$

$$\varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = i \int (X_\nu + iY_\nu)\, \mathrm{d}s. \tag{9}$$

Podle známých vzorců

$$X_\nu = \sigma_x \cos(\nu, x) + \tau_{xy} \cos(\nu, y),$$

$$Y_\nu = \tau_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_y \cos(\nu, y),$$

kde ν je vnější normála k hranici. Uvažujeme horní polorovinu, a proto ν je orientována směrem záporných y, takže $\cos(\nu, x) = 0$, $\cos(\nu, y) = -1$. Vezmeme-li nyní v úvahu podmínku (6), dostaneme $X_\nu = 0$, $Y_\nu = -\sigma_y$. Dále $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x$. Dosadíme-li toto do (9), dostaneme:

$$\varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \int \sigma_y\, \mathrm{d}x, \; y = 0.$$

Avšak pro $y = 0$, $z = x = \bar{z}$ a poslední rovnici jsme oprávněni upravit na tvar

$$\varphi(z) + \bar{z}\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \int \sigma_y \, dx, \quad y = 0. \tag{10}$$

Označme

$$z\,\varphi'(z) + \psi(z) = \vartheta(z). \tag{11}$$

Funkce $\vartheta(z)$ je regulární v horní polorovině. Z (10) plyne

$$\varphi(z) + \overline{\vartheta(z)} = \int \sigma_y \, dx, \quad y = 0. \tag{12}$$

Pravá strana poslední rovnice je veličina reálná. Odtud plyne, že i levá strana je reálná, t. j.

$$\mathrm{Im}\{\varphi(z)\} = \mathrm{Im}\{\vartheta(z)\}, \quad y = 0.$$

Avšak potom se harmonické funkce $\mathrm{Im}\{\varphi(z)\}$ a $\mathrm{Im}\{\vartheta(z)\}$, jež se rovnají na hranici poloroviny, rovnají sobě všude, a tedy se mohou analytické funkce $\varphi(z)$ a $\vartheta(z)$ lišit pouze o reálnou konstantu. Avšak $\varphi(z)$ je určena až na aditivní konstantu, a proto jsme oprávněni položit

$$\varphi(z) \equiv \vartheta(z).$$

Dosadíme-li toto do (12) a derivujeme-li vzhledem k x, dostaneme:

$$\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\} = \tfrac{1}{2}\sigma_y, \quad y = 0. \tag{13}$$

Užijeme-li podmínky (7), máme:

$$\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\} = \tfrac{1}{2}h, \quad y = 0, \quad |x| < a. \tag{14}$$

Zabývejme se podmínkou (8). Podle vzorce (4), § 40

$$2\mu(u_x + iu_y) = \varkappa\,\varphi(z) - z\,\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}.$$

Položme v tomto vzorci $y = 0$. Potom $z = \bar{z}$ a

$$2\mu(u_x + iu_y) = \varkappa\,\varphi(z) - \overline{\varphi(z)}.$$

Oddělíme-li imaginární části a užijeme-li podmínky (8), dostaneme

$$\mathrm{Im}\{\varphi(z)\} = 0, \quad y = 0, \quad |x| > a.$$

Derivujeme-li tuto rovnici podle x, dostaneme:

$$\mathrm{Im}\{\varphi'(z)\} = 0, \quad y = 0, \quad |x| > a. \tag{15}$$

Podmínky (14) a (15) ukazují, že funkce $\varphi'(z)$ je řešení Hilbertova problému.

Položme $\Phi(z) = \frac{1}{i}\varphi'(z)$. Podmínky (14) a (15) se převádějí na tyto podmínky:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{\Phi(z)\} = 0, \qquad y = 0,\ |x| > a, \\ &\operatorname{Im}\{\Phi(z)\} = -\tfrac{1}{2}h,\ y = 0,\ |x| < a. \end{aligned} \tag{16}$$

V našem případě je pouze jeden interval $\gamma_2\langle -a, a\rangle$. Dále $\omega(t) \equiv 0$, $f^*(t) = -\frac{1}{2}h$, a tedy $B(t) = -\frac{1}{2}h + C_1'$. Veličinu $-\frac{1}{2}h + C_1'$ označme B. Ze vzorce (10), § 67 nyní určíme:

pro $y = 0$, $|t| < a$

$$\operatorname{Re}\{\Phi(t)\} = \frac{B}{\pi\sqrt{a^2 - t^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi - t}\,\mathrm{d}\xi + \frac{A}{\sqrt{a^2 - t^2}}. \tag{17}$$

Vypočtěme integrál v (17). Poněkud jej zjednodušíme, násobíme-li a dělíme-li jej i; tím jej převedeme na tvar

$$\frac{B}{\pi\sqrt{t^2 - a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\xi - t}\,\mathrm{d}\xi.$$

Zvolme tu větev odmocniny, pro níž v nekonečnu platí rozvoj

$$\sqrt{z^2 - a^2} = z - \frac{a^2}{2z} + \dots$$

Vyšetřme integrál typu Cauchyho:

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sqrt{\zeta^2 - a^2}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Hranice C je zobrazena na obr. 19; bod z leží vně C. Připočtěme a odečtěme ζ v čitateli integrandu. Pak dostaneme

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sqrt{\zeta^2 - a^2} - \zeta}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Druhý integrál se rovná nule, protože funkce $\dfrac{\zeta}{\zeta - z}$ je regulární uvnitř C. Dále funkce $\sqrt{\zeta^2 - a^2} - \zeta$ je regulární vně C a rovna nule v nekonečnu. Prvý integrál je tedy integrál Cauchyho, a tedy

$$\chi(z) = \sqrt{z^2 - a^2} - z.$$

Hranice C je ekvivalentní s dvakrát proběhnutým intervalem $\langle -a, a\rangle$. Na horní a dolní straně intervalu má odmocnina různá znaménka, takže

$$\chi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\xi - z}\,d\xi.$$

Odtud

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\xi - z}\,d\xi = \sqrt{z^2 - a^2} - z.$$

Podle věty o limitních hodnotách integrálu typu Cauchyho

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\xi - t}\,d\xi = \frac{1}{2}[\chi_i(t) + \chi_e(t)] = -t.$$

Dosadíme-li toto do (17), dostaneme:

pro $y = 0$ a $|t| < a$

$$\operatorname{Re}\{\Phi(t)\} = -\frac{Bti}{\sqrt{t^2 - a^2}} + \frac{A}{\sqrt{t^2 - a^2}}. \tag{18}$$

Dokažme, že $A = 0$. Položme $\varphi'(z) = p + iq$; potom $\Phi(z) = q - ip$. Podle vzorce (5), § 40

$$p = \tfrac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y).$$

V našem případě se zřejmě σ_x a σ_y sobě rovnají v bodech souměrně položených vzhledem k ose y. Odtud plyne, že

$$p(x, y) = p(-x, y),$$

t. j. $p(x, y)$ je sudá funkce x. Avšak potom

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

je také sudá funkce x a funkce

$$q(x, 0) = \int_{a}^{x}\frac{\partial q(x, 0)}{\partial x}\,dx + q(0, 0)$$

je buď lichá, nebo se od liché liší pouze konstantou. Podle vzorce (18)

$$q(t, 0) = \mathrm{Re}\{\Phi(t)\} = -\frac{Bti}{\sqrt{t^2 - a^2}} + \frac{A}{\sqrt{t^2 - a^2}}, \quad |t| < a.$$

Odtud

$$q(-t, 0) = \frac{Bti}{\sqrt{t^2 - a^2}} + \frac{A}{\sqrt{t^2 - a^2}}.$$

Součet

$$q(t, 0) + q(-t, 0) = \frac{2A}{\sqrt{t^2 - a^2}}$$

může být konstanta pouze pro $A = 0$.

Tedy

$$\mathrm{Re}\{\Phi(t)\} = -\frac{Bti}{\sqrt{t^2 - a^2}}, \quad y = 0, \quad |t| < a. \tag{19}$$

Připomeňme, že $\mathrm{Re}\{\Phi(t)\} = 0$ pro $|t| > a$ a $y = 0$. $\mathrm{Re}\{\Phi(t)\}$ je tedy určena na celé reálné ose.

Podle vzorců (1) a (2), § 67

$$\Phi(z) = -\frac{B}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\xi \,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}(\xi - z)} + iC', \tag{20}$$

kde C' je reálná konstanta. Abychom vypočetli integrál (20), vyšetřme integrál

$$\varrho(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta \,\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}(\zeta - z)},$$

kde C je hranice zobrazená na obr. 19 (str. 300). Funkce $\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - a^2}}$ je regulární vně C a rovna jedné v nekonečnu; podle známé vlastnosti Cauchyho integrálu

$$\varrho(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1.$$

Nahraďme hranici C hranicí ekvivalentní, sestávající z dvakrát proběhnutého intervalu $\langle -a, a \rangle$. Uvažujeme-li obdobně jako při výpočtu integrálu (17), zjistíme, že

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\xi \,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}(\xi - z)} = \frac{1}{i} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right)$$

a

$$\Phi(z) = \frac{B}{i} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) + C'i.$$

Nyní
$$\varphi'(z) = i\,\Phi(z) = B\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1\right) - C'.$$

Zbývá určit konstanty B a C'. Podle předpokladu napětí v nekonečnu se rovnají nule. Odtud
$$(\sigma_x + \sigma_y)_{z=\infty} = 4\mathrm{Re}\{\varphi'(\infty)\} = -4C' = 0$$
a $C' = 0$. Abychom určili B, obraťme se k podmínce (14). V intervalu $\langle -a, a\rangle$ je odmocnina $\sqrt{z^2 - a^2}$ imaginární, a proto

pro $y = 0$, $-a \leqq x \leqq a$
$$\mathrm{Re}\{\varphi'(x)\} = -B,$$
což v důsledku podmínky (14) dává $B = -\frac{1}{2}h$. Definitivně
$$\varphi'(z) = -\frac{h}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1\right). \tag{21}$$

Dostali jsme řešení pro horní polorovinu, vyhovující krajovým podmínkám (1), (2) a (5). Řešíme-li naši úlohu pro dolní polorovinu, dojdeme k témuž řešení (21), takže $\varphi_1(z) \equiv \varphi_2(z)$. Zbývá přesvědčit se, že naše řešení vyhovuje podmínce (3). Avšak to přímo plyne ze vzorce (13), v důsledku něhož

pro $y = 0$ $\qquad \sigma_y^1 = 2\mathrm{Re}\{\varphi_1'(z)\} = 2\mathrm{Re}\{\varphi_2'(z)\} = \sigma_y^2.$

Naše úloha je nyní úplně řešena.

§ 69. Úloha o styku dvou pružných polorovin (obecný případ). Předpokládejme nyní, že na společné hranici dvou pružných polorovin je několik štěrbin $\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \ldots, \langle a_n, b_n\rangle$. Ponecháme předpoklad § 68 o tom, že na hranici nepůsobí tření, a předpokládejme, že na kraje štěrbin působí normální napětí intensity $p_1(x)$ v horní polorovině a $p_2(x)$ v dolní. Dojdeme k následující skupině krajových podmínek:

na celé ose x
$$\tau_{xy}^1 = 0, \ \tau_{xy}^2 = 0, \tag{1}$$
na štěrbinách
$$\sigma_y^1 = p_1(x), \ \sigma_y^2 = p_2(x), \tag{2}$$
na ose x vně štěrbin
$$\sigma_y^1 = \sigma_y^2, \ u_y^1 = u_y^2. \tag{3}$$

Jako v § 68 zjistíme, že v důsledku rovnic (1)

$$\varphi_k(z) = z\,\varphi_k'(z) + \psi_k(z),\ k = 1, 2$$

a

$$\mathrm{Re}\{\varphi_k'(z)\} = \tfrac{1}{2}\sigma_y^k,\ y = 0,\ k = 1, 2.$$

Rovnice (2) a prvá z rovnic (3) dávají tyto podmínky pro $\varphi_1'(z)$ a $\varphi_2'(z)$:

na štěrbinách

$$\mathrm{Re}\{\varphi_k'(x)\} = \tfrac{1}{2}p_k(x), \tag{4}$$

na ose x vně štěrbin

$$\mathrm{Re}\{\varphi_1'(x)\} = \mathrm{Re}\{\varphi_2'(x)\}. \tag{5}$$

Vyšetřujme druhou z podmínek (3). Obdobnými úvahami jako v § 68 ji převedeme na tvar

$$C_1\,\mathrm{Im}\{\varphi_1(x)\} = C_2\,\mathrm{Im}\{\varphi_2(x)\},$$

kde

$$C_k = \frac{\varkappa_k + 1}{2\mu_k},\ k = 1, 2.$$

Derivujeme-li tuto rovnici vzhledem k x, dostaneme krajovou podmínku, nutnou k určení funkcí $\varphi_k'(z)$:

na ose x vně štěrbin

$$C_1\,\mathrm{Im}\{\varphi_1'(x)\} = C_2\,\mathrm{Im}\{\varphi_2'(x)\}. \tag{6}$$

Označme

$$\overline{\varphi}_2(z) = \overline{\varphi_2(\bar{z})}.$$

Funkce $\overline{\varphi}_2(z)$ je regulární v horní polorovině; její derivace se rovná nule v nekonečnu. Všimněme si, že na ose x

$$\mathrm{Re}\{\overline{\varphi}_2'(x)\} = \mathrm{Re}\{\varphi_2'(x)\},\ \mathrm{Im}\{\overline{\varphi}_2'(x)\} = -\mathrm{Im}\{\varphi_2'(x)\}.$$

Uvažujme funkci

$$\omega(z) = C_1\,\varphi_1'(z) + C_2\,\overline{\varphi}_2'(z).$$

Tato je regulární v horní polorovině a vyhovuje na ose x těmto podmínkám:

na štěrbinách

$$\mathrm{Re}\{\omega(x)\} = \tfrac{1}{2}(C_1p_1(x) + C_2p_2(x)), \tag{7}$$

vně štěrbin

$$\mathrm{Im}\{\omega(x)\} = 0. \tag{8}$$

Prvá z nich plyne ze (4) a druhá z (6). Určení $\omega(z)$ je tedy převedeno na Hilbertův problém, jehož řešení je uvedeno v § 67. Když jsme určili $\omega(z)$, najdeme ze vzorců (5) a (7), že vně štěrbin na ose x

$$\operatorname{Re}\{\varphi_1'(x)\} = \operatorname{Re}\{\varphi_2'(x)\} = \frac{\operatorname{Re}\{\omega(x)\}}{C_1 + C_2}.$$

Nyní jsou reálné části funkcí $\varphi_1'(x)$ a $\varphi_2'(x)$ známy na celé ose x a tyto funkce jsou určeny vzorcem (2), § 67.

Výraz pro $\omega(z)$ obsahuje n libovolných konstant, jež se vyskytují také ve $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$. Tyto konstanty lze určit na základě následujících úvah.

Podmínku (8) jsme dostali z (6), kterou jsme opět dostali derivováním podle x podmínky (3)

$$u_y^1 = u_y^2.$$

Odtud plyne, že sestrojené řešení nebude vyhovovat oné podmínce, nýbrž této:

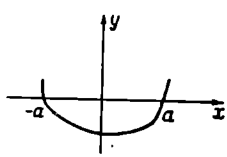
vně štěrbin $$\frac{\partial u_y^1}{\partial x} = \frac{\partial u_y^2}{\partial x}$$

čili, což je totéž,

vně štěrbin $$u_y^1 = u_y^2 + \text{konst.},$$

při čemž konstanty v poslední rovnici budou obecně různé v různých intervalech osy x vně štěrbin. Aby námi sestrojené řešení vyhovovalo všem krajovým podmínkám, musí se uvedené konstanty rovnat nule. Tato podmínka stačí k určení libovolných konstant vyskytujících se v $\omega(z)$.

Obdobně se řeší problém styku dvou pružných anisotropních polorovin.



Obr. 20.

§ 70. Tlak tuhého razníku na pružnou polorovinu. Představme si tuhý razník libovolného tvaru, vtlačený v pružnou polorovinu (obr. 20). Chceme určit napětí způsobená tlakem razníku. Učiňme tyto předpoklady:

a) V intervalech hranice $x > a$ a $x < -a$ nejsou žádná napětí.

b) Na razník působí síly normální k hranici. Odtud plyne, že pod razníkem nevzniká žádné tření.

Uvedené předpoklady dovolují formulovat krajové podmínky úlohy:

1. $\tau_{xy} = 0$ pro $y = 0$, (1)

2. $\sigma_y = 0$ pro $y = 0$ a $|x| > a$. (2)

3. Protože je tvar razníku známý, lze vertikální posunutí bodů poloroviny pod razníkem považovat za známá až na libovolnou aditivní konstantu, závisící na hloubce vniknutí razníku. Tedy

$$u_y = f(x) + \text{konst. pro } y = 0,\ |x| < a, \tag{3}$$

kde $f(x)$ je daná funkce.

Obdobně jako v § 68 dovoluje podmínka (1) určit toto ($\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jsou Goursatovy funkce):

$$z\,\varphi'(z) + \psi(z) = \varphi(z), \tag{4}$$

$$\mathrm{Re}\{\varphi'(z)\} = \tfrac{1}{2}\sigma_y \text{ pro } y = 0, \tag{5}$$

$$2\mu(u_x + iu_y) = \varkappa\,\varphi(z) - \overline{\varphi(z)}. \tag{6}$$

V důsledku (4) se úloha převádí pouze na určení funkce $\varphi(z)$; relace (5) a (6) převádějí tuto poslední úlohu na Hilbertův problém.

Označme

$$\varphi(z) = p_1 + iq_1,\ \varphi'(z) = p + iq.$$

Podmínky (2) a (5) dávají:

$$p = 0 \text{ pro } y = 0 \text{ a } |x| > a. \tag{7}$$

Oddělíme-li v (6) imaginární části a užijeme-li podmínky (3), dostaneme:

$$q_1 = \frac{2\mu}{\varkappa + 1} f(x) + \text{konst. pro } y = 0 \text{ a } |x| < a.$$

Derivujme tuto rovnici podle x a všimněme si, že $\dfrac{\partial q_1}{\partial x} = q$. Potom dostaneme:

$$q = \frac{2\mu}{\varkappa + 1} f'(x) \text{ pro } y = 0 \text{ a } |x| < a. \tag{8}$$

Došli jsme opět k Hilbertovu problému. Ten lze řešit užitím methody § 67. Zvolíme jinou methodu, jež nás zprostí nutnosti vypočítat některé konstanty.

Předpokládáme-li, že $\varphi(z)$ je omezená v polorovině, můžeme ji vyjádřit pomocí Schwarzova integrálu[1]

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{p_1(\xi, 0)}{\xi - z}\,\frac{1+\xi z}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi + iC.$$

Derivujme tuto rovnici a potom integrujme per partes. Vezmeme-li v úvahu, že $\dfrac{\partial p_1(\xi, y)}{\partial \xi} = p(\xi, y)$, dostaneme

$$\varphi'(z) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(\xi, 0)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Označme pro stručnost $p(\xi, 0) = p(\xi)$. Užijeme-li podmínky (7), nalezneme:

$$\varphi'(z) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\frac{p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - z}. \tag{9}$$

Nechť nyní $z \to t$, kde t je bod intervalu $(-a, a)$ reálné osy. Protože z leží v dolní polorovině, je

$$\varphi'(t) = p(t) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\frac{p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - t}.$$

Oddělme imaginární části. V důsledku podmínky (8) máme:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - t} = \frac{2\mu}{\varkappa + 1}\,f'(t). \tag{10}$$

To je singulární rovnice, jejíž řešení lze určit methodou § 26; dosadíme-li naše označení do vzorce (26), § 26, dostaneme:

$$p(t) = -\frac{2\mu}{\pi(\varkappa + 1)\sqrt{a^2 - t^2}}\int\limits_{-a}^{a}\frac{f'(\xi)\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi - t}\,\mathrm{d}\xi + \frac{A}{\sqrt{a^2 - t^2}}. \tag{11}$$

[1] Schwarzova jádra pro horní a dolní polorovinu se liší znaménkem.

Konstantu A lze určit, jestliže je znám hlavní vektor P sil působících na razník. Vskutku

$$P = \int_{-a}^{a} \sigma_y(t, 0)\, \mathrm{d}t = 2 \int_{-a}^{a} p(t)\, \mathrm{d}t.$$

Označíme-li pro stručnost prvý člen v (11) $p_0(t)$, máme zřejmě

$$\tfrac{1}{2}P = \int_{-a}^{a} p_0(t)\, \mathrm{d}t + \pi A,$$

odkud

$$A = \frac{P}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} p_0(t)\, \mathrm{d}t. \tag{12}$$

Všimněme si speciálního případu rovinného razníku. V tom případě $f(x) =$ konst. a

$$p(t) = \frac{P}{2\pi\sqrt{a^2 - t^2}}. \tag{13}$$

Tento vzorec udává rozdělení normálních napětí pod razníkem. Dále

$$\varphi'(z) = -\frac{P}{2\pi^2 i} \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}(\xi - z)}.$$

Abychom vypočetli tento integrál, položme

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}(\xi - z)},$$

kde C je hranice zobrazená na obr. 19. Funkce $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}$ je regulární vně C a rovna nule v nekonečnu, a proto

$$\omega(z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

Nahraďme hranici C dvakrát proběhnutým intervalem $\langle -a, a\rangle$; tak dostaneme

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}(\xi - z)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}},$$

a tedy

$$\varphi'(z) = -\frac{P}{2\pi\sqrt{a^2 - z^2}}. \tag{14}$$

Ve vzorci (14) je odmocnina na dolní straně úsečky $\langle -a, a\rangle$ záporná.

§ 71. Případ několika razníků. Jestliže na polorovinu tlačí několik razníků, řeší se úloha v podstatě stejně jako v případě jednoho razníku; výpočty jsou ovšem poněkud složitější.

Označme $\langle\alpha_1, \beta_1\rangle, \langle\alpha_2, \beta_2\rangle, \ldots, \langle\alpha_n, \beta_n\rangle$ intervaly hranice, na něž působí razník; množinu těchto intervalů označme L a množinu doplňkových intervalů hranice M. Označme jako dříve $f(x)$ vertikální posunutí pod razníkem v bodě s abscisou x. Veličinu $f(x)$ můžeme považovat za danou předem až na libovolnou aditivní konstantu, jež může mít různé hodnoty na různých intervalech $\langle\alpha_k, \beta_k\rangle$.

Užijeme-li označení předcházejícího paragrafu, převedeme úlohu o tlaku několika razníků na následující Hilbertův problém:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\varphi'(t)\} &= 0 \text{ na } M, \\ \operatorname{Im}\{\varphi'(t)\} &= \frac{2\mu}{\varkappa + 1} f'(t) \text{ na } L, \end{aligned} \tag{1}$$

při čemž

$$\varphi'(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = -\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{p(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi. \tag{2}$$

Odvození těchto vzorců je stejné jako v předcházejícím paragrafu. Necháme-li v (2) $z \to t$, kde t je bod na L, a oddělíme-li imaginární části, dojdeme k rovnici

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{p(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - t} = \frac{2\mu}{\varkappa + 1} f'(t). \tag{3}$$

Její řešení lze napsat podle vzorce (8), § 68, zaměníme-li v tomto vzorci $B(t)$ výrazem $\dfrac{2\mu}{\varkappa + 1} f'(t)$:

na L
$$\begin{aligned} p(t) = &-\frac{2\mu}{\pi(\varkappa + 1)\sqrt{(-1)^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n}(t - \alpha_k)(\beta_k - t)}}\,\cdot \\ &\cdot\int_L f'(\xi)\,\frac{\sqrt{(-1)^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n}(\xi - \alpha_k)(\beta_k - \xi)}}{\xi - t}\,\mathrm{d}\xi + \\ &+ \frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{(-1)^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n}(t - \alpha_k)(\beta_k - t)}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Koeficienty polynomu $Q_{n-1}(t)$ mohou být určeny, jestliže známe hlavní vektory sil, působících na každý razník jednotlivě; tyto koeficienty jsou vyjádřeny hypereliptickými integrály.

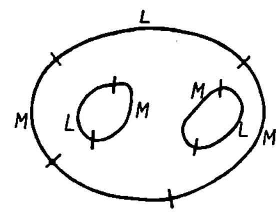
Jestliže jsou razníky rovinné, pak $f(x) =$ konst. (konstanty mohou být různé na různých intervalech $\langle \alpha_k, \beta_k \rangle$) a $f'(x) \equiv 0$. V tomto případě

$$p(t) = \frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (t - \alpha_k)(\beta_k - t)}}. \tag{5}$$

Dosadíme-li toto do (2), lehce najdeme:

$$\varphi'(z) = -\frac{Q_{n-1}(z)}{\sqrt{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)(\beta_k - z)}}. \tag{6}$$

§ 72. Smíšený problém theorie pružnosti. Uvažujme nějakou rovinnou oblast D, vyplněnou pružným prostředím. Budeme předpokládat, že oblast D je obecně mnohonásobně souvislá (obr. 21). Nechť jsou na části hranice, kterou označíme M, dána posunutí bodů prostředí a na doplňkové části hranice, kterou označíme L, jsou dány síly působící na pružné prostředí. Problém určit napětí v pružném prostředí za těchto podmínek se nazývá smíšeným problémem theorie pružnosti.



Obr. 21.

V dalším budeme předpokládat, že hranice oblasti D je dostatečně hladká.

Zaveďme následující označení. Hranici oblasti D označme C, takže $C = L + M$. Dále, L se skládá z několika navzájem nesouvislých oblouků, jež označíme $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$; komplexní souřadnice bodů, oddělujících tyto oblouky od oblouků M, budeme značit $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots; \alpha_n, \beta_n$. Složky vnějších sil působících na oblouky L označme jako obvykle X_ν a Y_ν; elastická posunutí u_x a u_y. V důsledku vzorců (4), (8) a (9), § 40 vyhovují Goursatovy funkce našeho problému těmto krajovým podmínkám:

na M

$$\varkappa\,\varphi(\zeta) - \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = 2\mu(u_x + iu_y), \tag{1}$$

na γ_k

$$\varphi(\zeta) + \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = i\int(X_\nu + iY_\nu)\,\mathrm{d}s + C_k. \tag{2}$$

Upravme tyto podmínky. Určeme funkce bodu na hranici $\delta(\zeta)$ a $f(\zeta)$, kladouce

$$\delta(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{na } M, \\ \varkappa + 1 & \text{na } L; \end{cases} \tag{3}$$

$$f(\zeta) = \begin{cases} -i\int(X_\nu + Y_\nu)\,\mathrm{d}s & \text{na } L, \\ 2\mu(u_x + iu_y) & \text{na } M. \end{cases} \tag{4}$$

Konstanty, až na které jsou určeny integrály

$$\int(X_\nu + iY_\nu)\,\mathrm{d}s$$

na každém z oblouků γ_k, lze zvolit tak, aby $f(\zeta)$ byla spojitá na př. v bodech α_k. Na konec položme ještě

$$C(\zeta) = \begin{cases} -C_k & \text{na } \gamma_k, \\ 0 & \text{na } M. \end{cases} \tag{5}$$

V tomto označení lze podmínky (1) a (2) napsat takto:

$$\varkappa\,\varphi(\zeta) - \delta(\zeta)\,\varphi(\zeta) - \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta) + C(\zeta). \tag{6}$$

Jako obvykle je podstatné určit funkci $\varphi(\zeta)$; potom lze určit $\psi(\zeta)$, vypočteme-li pomocí (6) její hodnoty na hranici, z nichž se funkce $\psi(\zeta)$ určí pomocí Cauchyho nebo Schwarzova integrálu.

Zabývejme se určením $\varphi(z)$; vynásobme obě strany rovnice (6) výrazem

$$\frac{1}{4\pi}\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma,$$

kde $T(z;\,\zeta)$ je Schwarzovo jádro oblasti D, a integrujme podél hranice C. Opakujeme-li úvahy § 42, dostaneme

$$\varkappa\varphi(z) - \frac{1}{4\pi}\int_C \delta(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_C \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)}\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_C f(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_C C(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{7}$$

Rovnici (7) lze zjednodušit. Připomeňme si identitu (23), § 41

$$\frac{1}{4\pi}\int_C \overline{F(\zeta)}\, T(z;\zeta)\,d\sigma = \frac{1}{2}\overline{F(a)},$$

která platí pro každou funkci $F(z)$, regulární v D. V § 42 jsme zjistili, že $\varphi'(z)$ je regulární v D, a proto

$$\frac{1}{4\pi}\int_C \overline{\varphi'(\zeta)}\, T(z;\zeta)\,d\sigma = \frac{1}{2}\overline{\varphi'(a)}.$$

Položme v této identitě $z = a$. Odečteme-li, dostaneme:

$$\frac{1}{4\pi}\int_C \overline{\varphi'(\zeta)}\,\{T(z;\zeta) - T(a;\zeta)\}\,d\sigma = 0. \tag{8}$$

Identitu (8) násobme z a odečtěme od (7). Třetí člen nalevo v (7) se transformuje takto:

$$-\frac{1}{4\pi}\int_C \zeta\,\overline{\varphi'(\zeta)}\, T(z;\zeta)\,d\sigma =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_C \overline{\varphi'(\zeta)}\left\{[(\zeta - z)\, T(z;\zeta) + z\,T(a,\zeta)]\frac{d\sigma}{d\bar{\zeta}}\right\}d\bar{\zeta} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_C \overline{\varphi(\zeta)}\,\frac{d}{d\sigma}\left\{[(\zeta - z)\, T(z;\zeta) + z\,T(a,\zeta)]\frac{d\sigma}{d\bar{\zeta}}\right\}d\sigma. \tag{9}$$

Derivace $\varphi'(\zeta)$ je tedy z rovnice (7) vyloučena. Všimněme si ještě, že až na logaritmické sčítance je jádro integrálu (9) spojité v oblasti D i s hranicí. Jádro integrálu (9) budeme značit $K(z;\zeta)$.

Vraťme se ke druhému členu nalevo v (7). Podle definice a podle vzorce (27), § 41

$$\frac{1}{4\pi}\int_C \delta(\zeta)\varphi(\zeta)\, T(z;\zeta)\,d\sigma = \frac{1+\varkappa}{4\pi}\int_L \varphi(\zeta)\, T(z;\zeta)\,d\sigma =$$

$$= \frac{1+\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1+\varkappa}{4\pi}\int_L \varphi(\zeta)\, P(z;\zeta)\,d\sigma. \tag{10}$$

Přejděme k pravé straně rovnice (7) a označme

$$\frac{1}{4\pi}\int_C f(\zeta)\, T(z;\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = F(z). \tag{11}$$

Dále podle definice

$$\frac{1}{4\pi}\int_C C(\zeta)\, T(z;\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = -\sum_{k=1}^{n}\frac{C_k}{4\pi}\int_{\gamma_k} T(z;\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = \sum_{k=1}^{n} C_k\, F_k(z), \tag{12}$$

kde jsme označili

$$F_k(z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\gamma_k} T(z;\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma.$$

Vzorce (9) a (12) dovolují upravit rovnici (7) na tvar

$$\varkappa\, \varphi(z) - \frac{1+\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \frac{1+\varkappa}{4\pi}\int_L \varphi(\zeta)\, P(z;\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_C \overline{\varphi(\zeta)}\, K(z;\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = F(z) + \sum_{k=1}^{n} C_k\, F_k(z). \tag{13}$$

Nechť nyní $z \to t$, kde t je bod na L. Užijeme-li věty o limitních hodnotách integrálů typu Cauchyho, dostaneme singulární integrální rovnici

$$(\varkappa - 1)\, \varphi(t) - \frac{\varkappa + 1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\mathrm{d}\zeta - \frac{\varkappa + 1}{2\pi}\int_L \varphi(\zeta)\, P(t,\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_C \overline{\varphi(\zeta)}\, K(t,\, \zeta)\, \mathrm{d}\sigma = 2F(t) + 2\sum_{k=1}^{n} C_k\, F_k(t). \tag{14}$$

Převeďme druhý a třetí integrál napravo a tak získanou pravou stranu označme $\Phi(t)$. Potom

$$(\varkappa - 1)\, \varphi(t) - \frac{\varkappa + 1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}\mathrm{d}\zeta = \Phi(t). \tag{15}$$

Uvažujíce dočasně $\Phi(t)$ jako veličinu známou, můžeme rovnici (15) řešit. Podle vzorce (8), § 27 na L

$$\varphi(t) = -\frac{\varkappa - 1}{4\varkappa}\Phi(t) - \frac{\varkappa + 1}{4\varkappa\pi i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t - \alpha_k}{t - \beta_k}\right)^m \int_L \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta - \beta_k}{\zeta - \alpha_k}\right)^m \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta +$$

$$+ \frac{Q_{n-1}(t)}{\prod_{k=1}^{n}(t - \alpha_k)^{1-m}(t - \beta_k)^m}; \quad m = \frac{1}{2\pi i}\lg\left(-\frac{1}{\varkappa}\right).$$

Podrobme toto řešení podmínce, aby $\varphi(t)$ byla spojitá v bodech α_k. K tomu je nutné a stačí, aby $Q_{n-1}(t) = 0$, a potom

na L

$$\varphi(t) = -\frac{\varkappa - 1}{4\varkappa}\Phi(t) - \frac{\varkappa + 1}{4\varkappa\pi i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t - \alpha_k}{t - \beta_k}\right)^m \int_L \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta - \beta_k}{\zeta - \alpha_k}\right)^m \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - t}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{16}$$

Naznačme stručně další postup řešení. Konstanty C_k, jež byly dosud libovolné, lze zvolit tak, aby $\varphi(t)$ byla spojitá také v bodech β_k. Dosaďme tyto hodnoty do (13) a (16). Dále v integrálu $-\frac{1 + \varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$ nahraďme $\varphi(\zeta)$ jejím vyjádřením ze (16). Potom bude jádro uvedeného integrálu absolutně integrovatelné. Nechme nyní v (13) $z \to t$, kde t tentokrát značí libovolný bod na hranici C. Limitní přechod lze provést za integračním znaménkem všech integrálů a to nás přivede k integrální rovnici tvaru

$$\varkappa\,\varphi(t) - \int_C K'(\zeta, t)\,\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma - \int_C K''(\zeta, t)\,\overline{\varphi(\zeta)}\,\mathrm{d}\sigma = \Omega(t), \tag{17}$$

kde $\Omega(t)$ je známá funkce. Oddělíme-li v této rovnici reálné a imaginární části, dostaneme soustavu dvou integrálních rovnic Fredholmova typu. Lze dokázat, že tato soustava a s ní i rovnice (17) je řešitelná. Řešením rovnice (17) určíme hodnoty $\varphi(t)$ na hranici, a potom lze $\varphi(z)$ určit z jejích hraničních hodnot pomocí Cauchyho integrálu.

Řešení smíšeného problému theorie pružnosti je podrobně vyloženo v pracích D. I. Šermana [37h, k]. Podotýkáme, že rovnice (15) je v [37h] řešena neobyčejně složitou methodou.

§ 73. Případ oblasti racionálně zobrazené na kruh. Ve shora citovaném článku [37h] dokázal D. I. Šerman následující větu:

Jestliže oblast D je konformně zobrazena na kruh pomocí racionální funkce, je smíšený problém theorie pružnosti pro tuto oblast řešitelný v konečném tvaru a to kvadraturami.

Úvahy D. I. Šermana se v mnohém shodují s úvahami, jichž užil N. I. Muscheliśvili při důkaze analogických vět pro základní problémy. Uvedeme zde úvahy D. I. Šermana s některými nepodstatnými změnami.

Nechť $z = \omega(\tau)$ je funkce konformně zobrazující oblast D na kruh $|\tau| < 1$. Hranice C je přitom zobrazena na kružnici $|\tau| = 1$, kterou budeme v dalším značit Γ, a množina oblouků L a M přejde v nějakou množinu oblouků L' a M', při čemž $L' + M' = \Gamma$. Oblouky γ_k přejdou v nějaké oblouky γ_k' kružnice Γ. Koncové body oblouků γ_k označme α_k' a β_k'. Označme ještě

$$\zeta = \omega(\sigma),\ \varphi(\omega(\tau)) = \Phi(\tau),\ \psi(\omega(\tau)) = \Psi(\tau),\ f(\omega(\sigma)) = F(\sigma),$$
$$\delta(\omega(\sigma)) = \delta_1(\sigma),\ C(\omega(\sigma)) = C_1(\sigma).$$

Proveďme nyní ve vzorci (6), § 72 transformaci $\zeta = \omega(\sigma)$. Uvedený vzorec nabude tohoto tvaru:

$$\varkappa\, \Phi(\sigma) - \delta_1(\sigma)\, \overline{\Phi(\sigma)} - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\, \overline{\Phi'(\sigma)} - \overline{\Psi(\sigma)} = F(\sigma) + C_1(\sigma). \tag{1}$$

Podle předpokladu je funkce $\omega(\sigma)$ racionální:

$$\omega(\sigma) = \frac{a(\sigma)}{b(\sigma)},$$

kde $a(\sigma)$ a $b(\sigma)$ jsou polynomy. Odtud

$$\omega'(\sigma) = \frac{b(\sigma)\, a'(\sigma) - a(\sigma)\, b'(\sigma)}{b^2(\sigma)} = \frac{a_1(\sigma)}{b_1(\sigma)},$$

kde $a_1(\sigma)$ a $b_1(\sigma)$ jsou také polynomy. Dále

$$\overline{\omega'(\sigma)} = \frac{\overline{a_1(\sigma)}}{\overline{b_1(\sigma)}}.$$

Označme $\bar{a}_1(\sigma)$ a $\bar{b}_1(\sigma)$ polynomy, jež dostaneme z polynomů $a_1(\sigma)$ a $b_1(\sigma)$ záměnou všech koeficientů komplexně sdruženými.

Potom $\qquad \overline{a_1(\sigma)} = \bar{a}_1(\bar{\sigma}),\ \overline{b_1(\sigma)} = \bar{b}_1(\bar{\sigma}).$

Protože však $|\sigma| = 1$, je $\bar{\sigma} = \dfrac{1}{\sigma}$, a proto

$$\overline{a_1(\sigma)} = \bar{a}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right),\ \overline{b_1(\sigma)} = \bar{b}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Odtud je patrno, že $\overline{\omega'(\sigma)}$ je racionální funkce σ; totéž lze říci o funkci $\dfrac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}$. Tato funkce, protože je racionální, může být vyjádřena jako podíl dvou polynomů:

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{l} a_k \sigma^k}{\sum\limits_{k=0}^{l_1} b_k \sigma^k} = \frac{\varrho(\sigma)}{r(\sigma)}. \tag{2}$$

Všimněme si, že se polynom $r(\sigma)$ neanuluje na Γ; v opačném případě by se $\omega'(\sigma)$ anulovala na Γ a zobrazení by nebylo konformní. Avšak uvnitř Γ může mít $r(\sigma)$ nulové body. Jejich počet označme l'. Zřejmě $l' \leqq l_1$.

Rovnici (1) násobme výrazem

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{r(\sigma)}{\sigma - \tau}\, \mathrm{d}\sigma,$$

kde τ je bod uvnitř Γ, a integrujme podél Γ. Připomeneme-li si definici funkcí $\delta_1(\sigma)$ a $C_1(\sigma)$, dostaneme rovnici:

$$\varkappa\, r(\tau)\, \Phi(\tau) - \frac{\varkappa + 1}{2\pi i} \int\limits_{L'} \frac{r(\sigma)\, \Phi(\sigma)}{\sigma - \tau}\, \mathrm{d}\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varrho(\sigma)\, \overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma - \tau}\, \mathrm{d}\sigma -$$
$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{r(\sigma)\, \overline{\Psi(\sigma)}}{\sigma - \tau}\, \mathrm{d}\sigma =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{F(\sigma)\, r(\sigma)}{\sigma - \tau}\, \mathrm{d}\sigma + \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{2\pi i} \int\limits_{\gamma'_k} \frac{r(\sigma)}{\sigma - \tau}\, \mathrm{d}\sigma. \tag{3}$$

Vyšetřme levou stranu v (3). Ze známé identity

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\sigma^s\, \mathrm{d}\sigma}{\sigma - \tau} = \begin{cases} \tau^s & (s \geqq 0), \\ 0 & (s < 0) \end{cases}$$

plyne: jestliže

$$A(\sigma) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s \sigma^s,$$

pak

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{A(\sigma)}{\sigma - \tau} d\sigma = \sum_{s=0}^{\infty} A_s \tau^s.$$

Tato poznámka nám dovoluje jednoduše vypočítat poslední dva integrály v (3) nalevo. Nechť

$$\Phi(\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_s \tau^s, \quad \Psi(\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} \nu_s \tau^s.^1$$

Potom

$$\varrho(\sigma)\, \overline{\Phi'(\sigma)} = \sum_{s=-\infty}^{l} \sigma^s \sum_{k=0}^{l-s} (k+1)\, \bar{\mu}_{k+1} a_{k+s},$$

$$r(\sigma)\, \overline{\Psi(\sigma)} = \sum_{s=-\infty}^{l_1} \sigma^s \sum_{k=1}^{l_1-s} \bar{\nu}_k b_{k+s}.$$

Nyní je zřejmé, že

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varrho(\sigma)\, \overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma - \tau} d\sigma = \sum_{s=0}^{l} \tau^s \sum_{k=0}^{l-s} (k+1)\, \bar{\mu}_{k+1} a_{k+s}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{r(\sigma)\, \overline{\Psi(\sigma)}}{\sigma - \tau} d\sigma = \sum_{s=0}^{l_1} \tau^s \sum_{k=1}^{l_1-s} \bar{\nu}_k b_{k+s}. \tag{5}$$

Koeficienty v (4) a (5) označme A_n resp. B_n. Kromě toho zaveďme ještě označení

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(\sigma)\, r(\sigma)\, d\sigma}{\sigma - \tau} = M(\tau),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k'} \frac{r(\sigma)}{\sigma - \tau} d\sigma = r_k(\tau).$$

Dosadíme-li toto vše do (3), dostaneme:

$$\varkappa\, r(\tau)\, \Phi(\tau) - \frac{\varkappa + 1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{r(\sigma)\, \Phi(\sigma)}{\sigma - \tau} d\sigma = M(\tau) + \sum_{k=1}^{n} C_k\, r_k(\tau) - $$
$$- \sum_{s=0}^{l} A_s \tau^s - \sum_{s=0}^{l_1} B_s \tau^s. \tag{6}$$

---

[1] Klademe tedy $\Psi(0) = 0$. To lze vždy od počátku předpokládat.

Všimněme si, že pravá strana rovnice (6) je regulární uvnitř Γ. Pro stručnost ještě označme jako $N(\tau)$:

$$N(\tau) = 2\{M(\tau) + \sum_{k=1}^{n} C_k r_k(\tau) - \sum_{s=0}^{l} A_s \tau^s - \sum_{s=0}^{l_1} B_s \tau^s\}.$$

Nechme nyní $\tau \to \sigma_0$, kde σ_0 je libovolný bod na Γ. Užijeme-li věty o limitních hodnotách Cauchyho integrálu, dostaneme jako v předcházejícím paragrafu singulární rovnici

$$(\varkappa - 1)\, r(\sigma_0)\, \Phi(\sigma_0) - \frac{\varkappa + 1}{\pi i} \int_{L'} \frac{r(\sigma)\, \Phi(\sigma)}{\sigma - \sigma_0} \mathrm{d}\sigma = N(\sigma). \tag{7}$$

Tato rovnice se v podstatě shoduje s rovnicí (15) předcházejícího paragrafu a její řešení lze napsat podle analogie se vzorcem (16), § 72:

na L'
$$r(\sigma_0)\, \Phi(\sigma_0) = -\frac{\varkappa - 1}{4\varkappa} N(\sigma_0) -$$
$$- \frac{\varkappa + 1}{4\pi\varkappa i} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma_0 - \alpha_k'}{\sigma_0 - \beta_k'}\right)^m \int_{L'} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma - \beta_k'}{\sigma - \alpha_k'}\right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma - \sigma_0} \mathrm{d}\sigma. \tag{8}$$

Vzorec (8) upravíme. Podle věty o limitních hodnotách integrálu Cauchyho typu máme:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma - \beta_k'}{\sigma - \alpha_k'}\right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma - \sigma_0} \mathrm{d}\sigma = -\frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma_0 - \beta_k'}{\sigma_0 - \alpha_k'}\right)^m N(\sigma_0) +$$
$$+ \lim_{\tau \to \sigma_0} \left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma - \beta_k'}{\sigma - \alpha_k'}\right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma - \tau} \mathrm{d}\sigma\right\}.$$

Dosadíme-li toto do (8), dostaneme:

na L'
$$r(\sigma_0)\, \Phi(\sigma_0) = \frac{1}{2\varkappa} N(\sigma_0) -$$
$$- \lim_{\tau \to \sigma_0} \left\{\frac{\varkappa + 1}{4\pi i \varkappa} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\tau - \alpha_k'}{\tau - \beta_k'}\right)^m \int_{L'} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma - \beta_k'}{\sigma - \alpha_k'}\right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma - \tau} \mathrm{d}\sigma\right\}. \tag{9}$$

Funkce na obou stranách rovnice (9) jsou analytické, regulární uvnitř Γ a jsou si rovny na množině oblouků L'. Na základě analytického pokračování můžeme tvrdit, že se uvedené funkce rovnají identicky uvnitř Γ:

$$r(\tau)\,\Phi(\tau) = \frac{1}{2\varkappa} N(\tau) -$$

$$-\frac{\varkappa+1}{4\pi i\varkappa}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\tau-\alpha_k'}{\tau-\beta_k'}\right)^m \int\limits_{L'}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sigma-\beta_k'}{\sigma-\alpha_k'}\right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma-\tau}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{10}$$

Pravá strana vzorce (10) obsahuje $n + l + l_1$ neznámých konstant C_k, μ_s, ν_s. Jestliže budou určeny, dává vzorec (10) řešení problému. Tyto neznámé lze určit z těchto podmínek:

1. $\Phi(\tau)$ je spojitá v bodech β_k'.
2. Uvnitř Γ se pravá strana v (10) anuluje v týchž bodech jako $r(\tau)$; to je nutné k tomu, aby $\Phi(\tau)$ byla regulární v Γ.
3. Taylorovy koeficienty napravo i nalevo se sobě rovnají.
4. V rovnici (1) přejdeme k hodnotám komplexně konjugovaným, vynásobíme ji výrazem $\frac{1}{2\pi i}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\tau}$ a integrujeme podél Γ. Potom dostaneme:

$$\Psi(\tau) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\overline{\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}}\,\frac{\Phi'(\sigma)}{\sigma-\tau}\,\mathrm{d}\sigma + \frac{\varkappa+1}{2\pi i}\int\limits_{L'}\frac{\overline{\Phi(\sigma)}}{\sigma-\tau}\,\mathrm{d}\sigma - \varkappa\,\overline{\Phi(0)} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{F(\sigma)}}{\sigma-\tau}\,\mathrm{d}\sigma - \sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{C}_k}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k'}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\tau}. \tag{11}$$

Dosaďme do (11) místo $\Phi(\tau)$ její vyjádření z (8). Porovnáme-li Taylorovy koeficienty při stejných mocninách τ napravo i nalevo, dostaneme poslední skupinu podmínek.

Všechny tyto podmínky vedou na soustavu lineárních rovnic, z nichž určíme hledané konstanty.

§ 74. Problém obtékání oblouku daného tvaru. Uvažujme problém obtékání dostatečně hladkého, neuzavřeného oblouku AB (obr. 22).

Tento problém lze řešit methodou § 35, avšak tato methoda vede v případě neuzavřené hranice na integrální rovnici značně složité struktury, jež není Fredholmova. Budeme proto řešit problém jiným způsobem; ukážeme totiž, že jej lze převést na jistou singulární integrální rovnici.

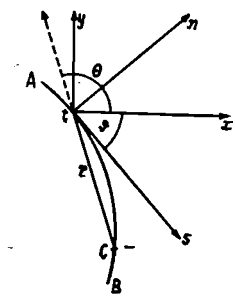
Na rozdíl od § 35 budeme předpokládat, že rychlost proudu v nekonečnu má libovolný směr vzhledem k ose x. Nechť složky rychlosti proudu v nekonečnu jsou U a V. Potom komplexní potenciál rychlostí $w(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y)$ vyhovuje v nekonečnu podmínce

$$\lim_{z\to\infty}[w'(z) - (U - iV)] = 0. \qquad (1)$$

Budeme předpokládat, že se oblouk AB nepohybuje. Potom na něm musí platit rovnice (viz (3), § 35)

$$\psi = C'. \qquad (2)$$

Náš problém spočívá v tom, abychom určili funkci $w(z)$, analytickou vně oblouku AB a vyhovující podmínkám (1) a (2). V takovém tvaru není problém úplně určen, a proto připojíme ještě doplňující podmínku.



Obr. 22.

Rychlost proudu na celém oblouku AB, až snad na bod A, je konečná.[1]

Označme

$$w'(z) - (U - iV) = \omega(x). \qquad (3)$$

Funkce $\omega(z)$ je regulární vně AB a rovna nule v nekonečnu. Určeme podmínku, jíž musí vyhovovat na AB. Označme t komplexní souřadnici libovolného bodu C na oblouku AB a s délku oblouku AC. Z (2) plyne, že na AB $\dfrac{\partial\psi}{\partial s} = 0$. Dále

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \mathrm{Im}\left(w'(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right).$$

Označme ϑ úhel sevřený tečnou k AB v bodě C a osou x. Potom $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{i\vartheta}$.

Nyní z posledních dvou rovnic plyne

$$\mathrm{Im}\{\omega(t)\,\mathrm{e}^{i\vartheta}\} = V\cos\vartheta - U\sin\vartheta. \qquad (4)$$

Funkci $\omega(z)$ budeme hledat ve tvaru integrálu Cauchyho typu tohoto tvaru:

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{T(\zeta)\,\mathrm{e}^{-i\vartheta}\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{T(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma}{\zeta - z}, \qquad (5)$$

---

[1] Viz [21].

kde $d\sigma = |d\zeta|$ a δ je úhel sevřený tečnou k AB v bodě ζ a osou x O funkci $T(\zeta)$ budeme předpokládat, že je reálná. Integrál v (5) lze. interpretovat jako součet elementárních vírů, rozložených podél AB s hustotou $T(\zeta)$. V souhlase s tím nazývá M. A. Lavrenťjev funkci $T(\zeta)$ „vírovou funkcí".

Nechť bod z konverguje k bodu t na oblouku AB. Podle věty o limitních hodnotách integrálu Cauchyho typu

$$\omega(t) = \pm \frac{1}{2} T(t)\, e^{-i\vartheta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{T(\zeta)\, e^{-i\delta}\, d\zeta}{\zeta - t}.$$

Dosadíme-li toto do (4), dostaneme singulární integrální rovnici pro neznámou T:

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{T(\zeta)\, e^{i(\vartheta-\delta)}\, d\zeta}{\zeta - t}\right\} = V \cos\vartheta - U \sin\vartheta. \tag{6}$$

Rovnici (6) lze poněkud upravit. Označme Θ úhel, který svírá vektor $t - \zeta$ s osou x a r délku tohoto vektoru. Potom $\zeta - t = -re^{i\Theta}$, a tedy

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{T(\zeta)\, e^{i(\vartheta-\delta)}}{\zeta - t}\, d\zeta\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{T(\zeta)\, e^{i(\vartheta-\Theta)}}{r}\, d\sigma\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{T(\zeta) \cos(\vartheta - \Theta)}{r}\, d\sigma.$$

Rovnice (6) nyní nabývá tvaru

$$\frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{T(\zeta) \cos(\vartheta - \Theta)}{r}\, d\sigma = V \cos\vartheta - U \sin\vartheta. \tag{6_1}$$

Veličina $\vartheta - \Theta$ je úhel, sevřený vektorem $t - \zeta$ a tečnou k AB v bodě t. Zavedeme-li úhel (r, n) sevřený vektorem $t - \zeta$ a normálou v bodě C k oblouku AB, máme:

$$\cos(\vartheta - \Theta) = \sin(r, n).$$

To dává nový tvar rovnice (6):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{T(\zeta) \sin(r, n)}{r}\, d\sigma = V \cos\vartheta - U \sin\vartheta. \tag{6_2}$$

Rovnice (6) má nekonečně mnoho řešení. Dosazena do rovnice (5) dávají všechna $\omega(z)$ (a tedy i rychlost proudu) konečné až snad na body A a B. Podle našeho předpokladu musí být rychlost v bodě B konečná. Avšak potom $\omega(z)$ v bodě B musí být konečná; k tomu je nutné, aby se $T(\zeta)$ v tomto bodě anulovala. Vskutku, označme komplexní souřadnice bodů A a B jako α a β. Dále

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{AB} \frac{T_1(\zeta) - T_1(\beta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta + \frac{T_1(\beta)}{2\pi i} \lg \frac{\beta - z}{\alpha - z}; \tag{7}$$

$$T_1(\zeta) = T(\zeta)\, \mathrm{e}^{-i\delta}.$$

Lze dokázat, že integrál v (7) je spojitý pro $z \to \beta$, jestliže v něm $T(\zeta)$ chápeme jako libovolné řešení rovnice (6).[1] Avšak v takovém případě bude $\omega(z)$ omezená pro $z = \beta$ tehdy a jen tehdy, když $T_1(\beta) = 0$, t. j. když $T(\beta) = 0$. Této podmínce také podrobíme řešení rovnice (6).

Rovnice (6) se v obecném případě neřeší v konečném tvaru; M. A. Lavrenťjev v citovaném článku [21] uvádí methodu jejího přibližného řešení. Dole uvedeme přesné řešení ve dvou nejjednodušších případech, kdy AB je buď úsečka, nebo oblouk kružnice.[2]

a) Nechť AB je interval $\langle -a, a\rangle$ reálné osy. V tom případě $\vartheta = \delta = 0$, veličiny ζ a t jsou reálné a rovnice (6) se zjednodušuje:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} \frac{T(\zeta)}{\zeta - t} \mathrm{d}\zeta = -V. \tag{8}$$

Řešení rovnice (8) napíšeme podle vzorce (26), § 26:

$$T(t) = \frac{2V}{\pi\sqrt{t^2 - a^2}} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\sqrt{\zeta^2 - a^2}}{\zeta - t} \mathrm{d}\zeta + \frac{C}{\sqrt{t^2 - a^2}}.$$

Integrál vyskytující se v tomto vzorci byl vypočten v § 68:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\sqrt{\zeta^2 - a^2}}{\zeta - t} \mathrm{d}\zeta = -it,$$

[1] Důkaz toho lze najít v článku M. A. Lavrenťjeva [21].

[2] Ve článku [22] M. A. Lavrenťjev, Ja. I. Sekerž-Zeňkovič a V. M. Šepelev sestrojují soustavu singulárních rovnic pro problém obtékání dvou obloučků a řeší ji pomocí zobecněného Schwarzova algoritmu.

a tedy

$$T(t) = \frac{2Vt - C'}{\sqrt{a^2 - t^2}}; \quad C' = -iC. \tag{9}$$

V bodě $t = a$ se funkce $T(t)$ musí rovnat nule. Odtud určíme $C' = 2aV$ a

$$T(t) = -2V\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}. \tag{10}$$

Nyní

$$\omega(z) = -\frac{V}{\pi i}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}\frac{\mathrm{d}t}{t-z}. \tag{11}$$

Abychom vypočetli integrál v (11), položme

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \sqrt{\frac{a-t}{a+t}}\frac{\mathrm{d}t}{t-z},$$

kde C je hranice na obr. 19. Máme:

$$\sqrt{\frac{a-t}{a+t}} = \frac{a-t}{i\sqrt{t^2-a^2}}.$$

Při výpočtu $T(t)$ jsme zvolili tu hodnotu odmocniny, která má v nekonečnu rozvoj

$$\sqrt{t^2 - a^2} = t - \frac{a^2}{2t} + \ldots$$

Dosadíme-li toto do předcházející rovnice, nalezneme, že

$$\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{a-t}{a+t}} = i.$$

Funkce $\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}$ je regulární vně C a rovna i v nekonečnu; odtud plyne, že

$$\Omega(z) = \sqrt{\frac{a-z}{a+z}} - i.$$

Nahraďme hranici C dvakrát proběhnutým intervalem $\langle -a, a\rangle$. Vezmeme-li v úvahu, že $\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}$ má různá znaménka na různých stranách uvedeného intervalu, najdeme:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t-z}=\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}-i.$$

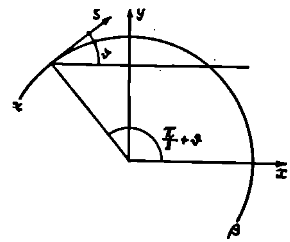
a

$$\omega(z)=iV-V\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}. \tag{12}$$

Nakonec

$$w'(z)=U-V\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}. \tag{13}$$

b) Nechť nyní AB je oblouk kružnice $|\zeta|=1$. Komplexní souřadnice konců oblouku označme α a β. Osu x orientujme rovnoběžně s rychlostí proudu v nekonečnu, takže $V=0$. Z obr. 23 je patrno, že $\arg t=\vartheta+\frac{1}{2}\pi$, a tedy $t=\mathrm{e}^{i(\vartheta+\frac{1}{2}\pi)}=i\mathrm{e}^{i\vartheta}$. Obdobně $\zeta=i\mathrm{e}^{i\delta}$. Upravme integrál (6) na jednodušší tvar. Především $e^{i(\vartheta-\delta)}=\dfrac{t}{\zeta}$. Dále



Obr. 23.

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{T(\zeta)\,t\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta(\zeta-t)}\right\}=-\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}T(\zeta)\operatorname{Re}\left\{\frac{t\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta(\zeta-t)}\right\}.$$

Na druhé straně

$$2\operatorname{Re}\left\{\frac{t\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta(\zeta-t)}\right\}=\frac{t\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta(\zeta-t)}+\frac{\bar{t}\,\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}(\bar{\zeta}-\bar{t})}.$$

Protože na kružnici $\bar{t}=\dfrac{1}{t}$ a $\bar{\zeta}=\dfrac{1}{\zeta}$, dostaneme po jednoduchých výpočtech

$$2\operatorname{Re}\left\{\frac{t\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta(\zeta-t)}\right\}=\frac{\zeta+t}{\zeta-t}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}.$$

Dosadíme-li toto do (6), dostaneme rovnici

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}T(\zeta)\,\frac{\zeta+t}{\zeta-t}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}=2U\sin\vartheta.$$

Avšak

$$2\sin\vartheta = \frac{1}{i}(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}) = -\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

a definitivní tvar rovnice bude

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta)\frac{\zeta + t}{\zeta - t}\frac{d\zeta}{\zeta} = -\left(t + \frac{1}{t}\right)U. \tag{14}$$

Přistupme k řešení této rovnice. Vyšetřme integrál

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{15}$$

$F(z)$ je zřejmě regulární na celé rovině, rozdělené řezem podél oblouku $\langle\alpha, \beta\rangle$, při čemž

$$F(\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = A.$$

Protože se jádro

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2d\zeta}{\zeta - z} - \frac{d\zeta}{\zeta}$$

liší od Cauchyho jádra pouze konstantním součinitelem a regulárním sčítancem, platí pro integrál (15), jak lze lehce nahlédnout, tytéž věty o limitách jako pro integrál Cauchyho typu:

$$\begin{aligned} F_i(t) &= T(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta)\frac{\zeta + t}{\zeta - t}\frac{d\zeta}{\zeta}, \\ F_e(t) &= -T(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta} T(\zeta)\frac{\zeta + t}{\zeta - t}\frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned} \tag{16}$$

Dosadíme-li toto do (14), dostaneme:

$$F_i(t) + F_e(t) = -2i\left(t + \frac{1}{t}\right)U. \tag{17}$$

Položme

$$F(z)\sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)} = \Phi(z).$$

Funkce $\Phi(z)$ je regulární v rozříznuté rovině s výjimkou bodu v nekonečnu, v němž má pól prvého řádu. Zvolme tu hodnotu odmocniny, jejíž rozvoj v nekonečnu začíná členem $+z$. Potom lze napsat

$$\Phi(z) = Az + \Phi_0(z),$$

kde $\Phi_0(z)$ je regulární pro $z = \infty$. Dosadíme-li do (17) místo $F(z)$ její vyjádření pomocí $\Phi(z)$ a uvědomíme-li si, že na různých stranách oblouku $\langle\alpha, \beta\rangle$ má odmocnina různá znaménka, převedeme rovnici (17) na tvar

$$\Phi_i(t) - \Phi_e(t) = -2i\left(t + \frac{1}{t}\right)\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}\, U.$$

Avšak

$$\Phi_i(t) = At + \Phi_{0i}(t),$$

$$\Phi_e(t) = At + \Phi_{0e}(t).$$

Odtud

$$\Phi_{0i}(t) - \Phi_{0e}(t) = -2i\left(t + \frac{1}{t}\right)\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}. \tag{18}$$

Partikulární řešení této rovnice je:

$$\Phi_0(z) = -\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{19}$$

Výraz (19) se rovná nule pro $z = \infty$. O funkci $\Phi_0(z)$ můžeme však pouze tvrdit, že je regulární v nekonečnu, a může se tedy pro $z = \infty$ rovnat nějaké konstantě. Obecné řešení rovnice (17) dostaneme, jestliže k (19) připočteme libovolnou konstantu:

$$\Phi_0(z) = -\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} + C.$$

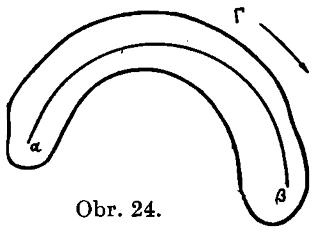
Abychom vypočetli poslední integrál, uvažujme integrál

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Hranice Γ je zobrazena na obr. 24; bod z leží vně Γ. V okolí bodu $\zeta = \infty$ lze odmocninu rozvinout v Laurentovu řadu tohoto tvaru:

$$\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)} = \zeta - \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8\zeta} + \dots$$

Integrál ve výrazu pro $\Omega(z)$ se rozpadá na dva. Prvý z nich vyjádříme ve tvaru



Obr. 24.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left\{ \zeta\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)} - \zeta^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(\alpha+\beta)\,\zeta}{2} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta - z} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\zeta^2 - \frac{(\alpha+\beta)\,\zeta}{2} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Ve druhém integrálu je integrand regulární uvnitř Γ a integrál se rovná nule. Prvý integrál je pak integrál Cauchyho. Tedy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z} = z\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} - z^2 +$$
$$+ \frac{(\alpha+\beta)\,z}{2} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{8}.$$

V nekonečnu je funkce $\dfrac{\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}}{\zeta(\zeta-z)}$ regulární a má tam residuum -1. V konečné vzdálenosti vně Γ má póly v bodech $\zeta = 0$ a $\zeta = z$ s residui $-\dfrac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}$ a $\dfrac{1}{z}\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}$. Všimneme-li si, že Γ je probíhána ve směru hodinových ručiček a užijeme-li věty o residuích, najdeme:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta}\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z} = \frac{1}{z}\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} - \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z} - 1.$$

Sečtením dostaneme:

$$\Omega(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} - z^2 + \frac{(\alpha+\beta)\,z}{2} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} - 1 -$$
$$- \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}.$$

Hranici Γ lze nahradit dvakrát proběhnutým obloukem $\langle\alpha, \beta\rangle$. To dá

$$\Phi_0(z) = -i\left(z + \frac{1}{z}\right)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} +$$

$$+ i\left(z^2 - \frac{(\alpha+\beta)\,z}{2} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} + 1 + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right) + C, \tag{20}$$

a tedy

$$\Phi(z) = -i\left(z + \frac{1}{z}\right)\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} +$$

$$+ i\left(z^2 - \frac{\alpha+\beta-2iA}{2}\,z - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} + 1 + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right) + C. \tag{21}$$

Odtud

$$F(z) = -i\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{i}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}}\left(z^2 - \frac{\alpha+\beta-2iA}{2}\,z -\right.$$

$$\left.- \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} + 1 + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right) + \frac{C}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}}. \tag{22}$$

Nyní ze vzorců (16) plyne

$$T(t) = \tfrac{1}{2}[F_i(t) - F_e(t)] =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}\left[t^2 - \frac{\alpha+\beta-2iA}{2}\,t - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8} + 1 - C' + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z}\right]; \quad C' = -iC. \tag{23}$$

Konstanta C' je určena podmínkou $T(\beta) = 0$ a konstanta A rovnicí

$$A = -\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta T(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Nyní

$$w'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{T(\zeta)\,e^{-i\vartheta}\,d\zeta}{\zeta - z} + U = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{T(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} + U. \tag{24}$$

Integrál (24) lehko vypočteme, vyjdeme-li z integrálu typu Cauchyho

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{T(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(\zeta - z)},$$

kde Γ je hranice na obr. 24. Nebudeme uvádět definitivní vyjádření $w(z)$ pro jeho těžkopádnost.