Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky

Zobecněný Schwarzův algoritmus

In: Solomon Grigorijevič Michlin (author); Otto Vejvoda (translator): Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fysiky a techniky. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 217–240.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402775

Avšak v takovém případě

$$\frac{\partial p^1}{\partial x} = \frac{\partial p^2}{\partial x} = \frac{\partial q^1}{\partial x} = \frac{\partial q^2}{\partial x} \equiv 0,$$

a tedy

$$\varphi_1'(z) = \varphi_2'(z) \equiv 0.$$

Vrátíme-li se opět k proměnné t, $z = \omega(t)$, nalezneme, že

$$\Phi_1'(t) = \Phi_2'(t) \equiv 0$$

čili

$$\Theta_1'(t) - a_1\,\omega'(t) \equiv 0,\ \Theta_2'(t) - a_2\,\omega'(t) \equiv 0.$$

Určíme-li odtud čísla k_1 a k_2 (vzorce (9) a (10)) a dosadíme-li je do (15), najdeme $a_1 = a_2 = 0$, a tedy $\Theta_1'(t) = \Theta_2'(t) \equiv 0$. Uvědomíme-li si nyní, že

$$\Theta_j'(t) = \vartheta_j(t) = p_j + iq_j,$$

přesvědčujeme se, že $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 \equiv 0$, a soustava (3) má pro komplexní λ pouze triviální řešení. Tím je věta 1 úplně dokázána.

Věta 2. *Posloupnost postupných aproximací pro rovnici* (13), § 42 *konverguje.*

Parametr λ v rovnici (13), § 42 je reálný a jeho absolutní hodnota není větší než jedna. Uvedená rovnice pro reálná λ je ekvivalentní soustavě (3), pro kterou body kruhu $|\lambda| \leqq 1$ nejsou charakteristické. Řešení soustavy (13), § 42 lze v tomto kruhu rozvinout v Taylorovu řadu podle mocnin λ. To je ekvivalentní tomu, že posloupnost postupných aproximací pro soustavu (3) čili pro rovnici (13), § 42 konverguje.

Je třeba poznamenat, že užití methody postupných aproximací v praxi je ztíženo tím, že je při ní třeba vypočítat veliké množství kvadratur.

KAPITOLA 3

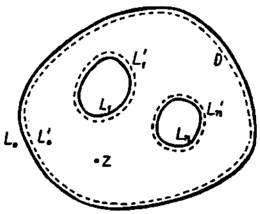
ZOBECNĚNÝ SCHWARZŮV ALGORITMUS

§ 48. Dirichletův problém pro mnohonásobně souvislé oblasti v rovině. Nechť D je mnohonásobně souvislá rovinná oblast, o níž budeme zprvu předpokládat, že je omezená. Stejně jako výše označíme křivky hranice $L_0, L_1, \ldots, L_n$, při čemž L_0 bude označovat křivku, omezující oblast z vnějšku. Označme dále D_0 oblast ležící uvnitř L_0 a D_k oblast, ležící vně L_k $k = 1, 2, \ldots, n$. Je zřejmé, že oblast D je část společná všem oblastem $D_0, D_1, \ldots, D_n$.

Nechť $U(x, y)$ je funkce harmonická v D a $V(x, y)$ je funkce s ní konjugovaná. Označme $U(x, y) + i\,V(x, y) = \varphi(z)$. V § 31 jsme ukázali, že funkci $\varphi(z)$ lze napsat ve tvaru

$$\varphi(z) = \varphi^*(z) + \sum_{k=1}^{n} A_k \lg(z - z_k), \tag{1}$$

kde $\varphi^*(z)$ je funkce regulární v D, A_k jsou reálné koeficienty a z_k je pevně zvolený bod uvnitř L_k.



Obr. 11.

Dokažme, že $\varphi^*(z)$ lze napsat ve tvaru součtu funkcí, z nichž každá je regulární v D_k. Zvolme v D libovolný bod z. Veďme uvnitř D křivky $L_0', L_1', \ldots, L_n'$ blízké k odpovídajícím křivkám $L_0, L_1, \ldots, L_n$ tak, aby bod z byl uvnitř oblasti omezené křivkami $L_0', L_1', \ldots, L_n'$ (obr. 11). Soustavu těchto kladně orientovaných křivek označme L'. Nyní podle Cauchyho vzorce

$$\varphi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{\varphi^*(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} \int_{L_k'} \frac{\varphi^*(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{2}$$

Funkce

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k'} \frac{\varphi^*(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,\ k = 0, 1, \ldots, n \tag{3}$$

je regulární uvnitř L_0' ($k = 0$) nebo vně L_k' ($k = 1, 2, \ldots, n$). Avšak křivky L_k' lze zvolit libovolně blízko k L_k. Odtud plyne, že $\varphi_k(z)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) lze analyticky pokračovat na celou oblast D_k. Protože

$$\varphi^*(z) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z), \tag{4}$$

je naše tvrzení dokázáno. Označme

$$U_k(x, y) = \mathrm{Re}\{\varphi_k(z)\}.$$

Potom z (1) a (4) plyne vyjádření funkce harmonické v D ve tvaru

$$U(x, y) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x, y) + \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|z - z_k|, \tag{5}$$

kde funkce $U_k(x, y)$ je harmonická v D_k. Funkce $U_k(x, y)$ ve vzorci (5) nejsou určeny jednoznačně; ke každé z nich lze připočíst konstantu a_k za toho jediného předpokladu, že

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0.$$

Předpokládejme nyní, že umíme poměrně jednoduše řešit Dirichletův problém pro každou z oblastí D_k. Jak ukážeme, řešení Dirichletova problému pro oblast D lze převést na řešení jisté soustavy integrálních rovnic, která je také poměrně jednoduchá.

Označme $u_k(\zeta)$ hodnotu funkce $U_k(x, y)$ na hranici L_k. Veličiny $u_k(\zeta)$ budeme v úloze považovat za neznámé. Řešení Dirichletova problému pro oblasti D_k je nám známo a můžeme tedy považovat za známé Greenovy funkce $G_k(z; \zeta)$ pro tyto oblasti. Při tom

$$U_k(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} u_k(\zeta) \frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial \nu} \mathrm{d}\sigma. \tag{6}$$

Nechť $f_k(\zeta)$ je hodnota hledané funkce $U(x, y)$ na křivce L_k. Ve vzorci (5) bude $z = x + iy$ značit bod na křivce L_m. Na této křivce $U(x, y) = f_m(z)$, $U_m(x, y) = u_m(z)$ a hodnoty ostatních funkcí $U_k(x, y)$ jsou určeny vzorcem (6). Vzorec (5) nyní dává:

na L_m

$$u_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} u_k(\zeta) \frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\mathrm{d}\nu} \mathrm{d}\sigma = f_m(z) - \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|z - z_k|. \tag{7}$$

Rovnice (7) tvoří soustavu integrálních rovnic Fredholmova typu s neznámými $u_k(\zeta)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Koeficienty A_k budeme zatím považovat za libovolné.

Soustava (7) není řešitelná, jestliže její pravá strana je dána libovolně. Abychom se o tom přesvědčili, stačí dokázat, že příslušná homogenní soustava

na L_m
$$u_m(z) + \sum_{k \neq m} \frac{1}{2\pi} \int_{L_k} u_k(\zeta) \frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial \nu} \mathrm{d}\sigma = 0 \tag{8}$$

má netriviální řešení. Všimněme si identity

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_k} \frac{\partial G_k(z;\, \zeta)}{\partial \nu}\, d\sigma \equiv 1, \tag{9}$$

jež značí, že se harmonická funkce, která se rovná jedné na hranici, rovná jedné identicky. Z (9) přímo plyne, že homogenní soustava (8) má řešení $u_m(z) = \alpha_m$, kde α_m jsou konstanty, jejichž součet je roven nule. Není obtížné pozměnit soustavu (7) tak, aby se stala řešitelnou. Nechť $l_k(\zeta)$ je funkce podrobená podmínce

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_k} l_k(\zeta)\, d\sigma = 1 \tag{10}$$

a jinak libovolná. Nahraďme soustavu (7) soustavou:

$$\text{na } L_m \qquad u_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} u_k(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z;\, \zeta)}{\partial \nu} - l_k(\zeta)\right] d\sigma =$$

$$= f_m(z) - \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|z - z_k|. \tag{11}$$

Dokažme nyní, že soustava (11) je řešitelná, ať je její pravá strana jakákoliv. Ve shodě s Fredholmovou alternativou uvažujme homogenní soustavu:

$$\text{na } L_m \quad v_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} v_k(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z;\, \zeta)}{\partial \nu} - l_k(\zeta)\right] d\sigma = 0. \tag{12}$$

Nechť $v_0(z), v_1(z), \ldots, v_n(z)$ je nějaké řešení této soustavy. Označme a_m konstanty

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} v_k(\zeta)\, l_k(\zeta)\, d\sigma.$$

V tomto označení nabude soustava (12) tvaru

$$\text{na } L_m \qquad v_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} \frac{\partial G_k}{\partial \nu} v_k(\zeta)\, d\sigma = a_m. \tag{13}$$

Veličinu $v_m(z)$, jež je určena pomocí soustavy (12) na křivce L_m, budeme považovat za hodnotu na hranici funkce harmonické v D_m.

Tuto funkci budeme označovat symbolem $V_m(z)$. Je zřejmé, že funkce konjugovaná s $V_m(z)$ je jednoznačná v D_m, neboť oblast D_m je jednoduše souvislá. Utvořme funkci

$$V(z) = \sum_{m=0}^{n} V_m(z).$$

Tato funkce je harmonická v D; funkce s ní konjugovaná je jednoznačná v D. Vzorec (13) ukazuje, že funkce $V(z)$ nabývá na každé z křivek L_m konstantní hodnotu rovnou a_m. Vycházejíce z toho, dokažme, že $V(z) = \text{konst.}$

Zaveďme znovu funkce $b_m(z)$ a $a_m(z)$ (viz § 41, vzorce (10) až (12)). Položme ještě $b_0(z) \equiv 1$. Bez obtíží nahlédneme, že

$$V(z) = a_0\, b_0(z) + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_0)\, b_k(z). \tag{14}$$

Podmínky jednoznačnosti funkce $V(z)$ jsou:

$$\int_L V(\zeta)\, a_k(\zeta)\, \mathrm{d}\sigma = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Všimněme si, že identita (15) platí i pro $k = 0$, protože potom $b_0(\zeta) \equiv 1$ a $a_0(\zeta) \equiv 0$. Vynásobme nyní (15) a_0 pro $k = 0$ a $a_k - a_0$ pro $k > 0$ a nalezené rovnice sečtěme. Pomocí vzorce (14) dostaneme

$$\int_L V(\zeta) \frac{\partial V(\zeta)}{\partial \nu}\, \mathrm{d}\sigma = 0.$$

Avšak, jak se dokazuje v theorii potenciálu, jestliže $V(z)$ je funkce harmonická v D, pak (ν je vnější normála)

$$\int_L V \frac{\partial V}{\partial \nu}\, \mathrm{d}\sigma = \int_D\!\!\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Odtud plyne, že
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad V(z) = \text{konst.}$$

Snadno se nyní přesvědčíme, že funkce $V_m(x)$ jsou také konstantní. Skutečně

$$V_m(z) = V(z) - \sum_{k \neq m} V_k(z).$$

Protože $V(z)$ je konstanta, jsou všechny sčítance napravo funkce harmonické uvnitř L_m, a tedy $V_m(z)$ je funkce harmonická uvnitř L_m.

Avšak $V_m(z)$ je podle definice harmonická vně L_m. Je tedy V_m harmonická v celé rovině. Podle Liouvillovy věty $V_m(z) = \text{konst.}$

Dosaďme nyní do (12) konstanty místo $v_k(z)$. Užijeme-li vztahů (9) a (10), dostaneme okamžitě $v_k(z) \equiv 0$. Odtud plyne, že soustava (11) je řešitelná.

Ukažme nyní, že pomocí této soustavy lze řešit Dirichletův problém. Řešme soustavu (11) tak, že v ní nahradíme pravé strany nejdříve výrazy $f_m(z)$ a potom $\lg|z - z_k|$. Příslušná řešení označme $W_m(z)$ a $W_{km}(z)$. Potom bude řešení soustavy (11)

$$U_m(z) = W_m(z) - \sum_{k=1}^{m} A_k W_{km}(z).$$

Konstanty A_k, které byly dosud neurčeny, podrobíme požadavku, aby součty

$$A = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} U_k(\zeta)\, l_k(\zeta)\, d\sigma$$

byly stejné pro všechny hodnoty $m = 0, 1, \ldots, n$. To dá soustavu $n + 1$ rovnic s $n + 1$ neznámými $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$. Určíme-li tyto neznámé, dostaneme řešení Dirichletova problému ve tvaru

$$U(z) = \sum_{k=0}^{n} U_k(z) + \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|z - z_k| - A. \tag{16}$$

Podstatně jednodušeji se řeší modifikovaný Dirichletův problém. V tomto případě $A_k = 0$ a $U = \sum_{k=0}^{n} U_k$. Funkce $U_k(z)$ lze určit ze soustavy:

na L_m

$$U_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} U_k(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial \nu} - l_k(\zeta)\right] d\sigma = f_m(z). \tag{17}$$

Veličiny

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_m} U_k(\zeta)\, l_k(\zeta)\, d\sigma$$

dávají hodnoty konstant, jež je třeba odečíst od $f_m(z)$ ve shodě s formulací problému.

§ 49. Případ trojdimensionální oblasti. Téhož postupu, a to ve značně jednodušším tvaru, lze užít na řešení Dirichletova problému v prostoru. Nechť je problém formulován pro oblast D, jejíž hranice se skládá z několika oddělených ploch $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Označme D_m tu z obou oblastí omezených plochou S_m, uvnitř které leží oblast D. Funkce $U(M)$,[1] harmonická v D, může být vyjádřena jako součet funkcí harmonických v D_m. To okamžitě plyne z Greenova vzorce, jenž může být napsán ve tvaru

$$U(M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^{n} \iint_{S_m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \nu} - U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S = \sum_{m=1}^{n} U_m(M). \tag{1}$$

Je zřejmé, že funkce

$$U_m(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \nu} - U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S \tag{2}$$

je harmonická v D_m.

Vyjádření $U(M)$ ve tvaru

$$U(M) = \sum_{m=1}^{n} U_m(M) \tag{3}$$

je jednoznačné. Abychom to dokázali, předpokládejme, že existuje ještě jedno vyjádření,

$$U(M) = \sum_{m=1}^{n} U'_m(M),$$

kde $U'_m(M)$ je funkce harmonická v D_m. Odečteme-li toto od (3) a klademe-li pro stručnost $U_m - U'_m = V_m$, nalezneme

$$\sum_{m=1}^{n} V_m = 0.$$

Napišme tuto rovnici ve tvaru

$$V_m = - \sum_{k \neq m} V_k.$$

[1] M zde značí proměnný bod prostoru.

Levá strana této rovnice je harmonická vně S_m a pravá uvnitř S_m. Avšak v takovém případě je $V_m(M)$ harmonická v celém prostoru, a tedy je rovna nule. Tím je jednoznačnost vyjádření (3) dokázána.

Označme $f_m(M)$ danou hodnotu hledané funkce $U(M)$ na ploše S_m. Předpokládejme, že umíme řešit Dirichletův problém pro každou z oblastí D_m; nechť $G_m(M, M_1)$ je Greenova funkce této oblasti. Týmiž úvahami jako v předcházejícím paragrafu lehce dojdeme k následující soustavě integrálních rovnic:

$$U_m(M) + \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq m} \iint\limits_{S_k} U_k(M_1) \frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S = f_m(M);$$

$$m = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Na rozdíl od rovinného problému je soustava (4) vždy řešitelná. Nechť $v_1(M), \ldots, v_n(M)$ vyhovují homogenní soustavě

$$v_m(M) + \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq m} \iint\limits_{S_k} v_k(M_1) \frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S = 0. \tag{5}$$

Označme $V_m(M)$ funkci harmonickou v D_m a rovnou $v_m(M)$ na S_m.

Porovnáme-li soustavy (5) a (4), vidíme, že funkce

$$V(M) = \sum_{m=1}^{n} V_m(M)$$

je harmonická v D a rovna nule na její hranici. Avšak potom $V(M) \equiv$ $\equiv 0$, a protože vyjádření (3) je jednoznačné, jsou také $V_m(M) \equiv 0$. Homogenní soustava (5) má tedy pouze triviální řešení; v důsledku Fredholmovy alternativy má nehomogenní soustava (4) vždy řešení, jež nás zřejmě vede k řešení Dirichletova problému pro oblast D.

§ 50. Zobecněný Schwarzův algoritmus. Vraťme se k rovinnému problému (§ 48). Pro jednoduchost předpokládejme, že oblast D je neomezená, takže hranice L_0 neexistuje. Za $l_k(\zeta)$ zvolme funkce

$$l_k(\zeta) = \left. \frac{\partial G_k(z, \zeta)}{\partial \nu} \right|_{z=\infty}, \tag{1}$$

takže soustava (17) nabude tvaru:

na L_m

$$u_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} u_k(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z, \zeta)}{\partial \nu} - \frac{\partial G_k(\infty, \zeta)}{\partial \nu}\right] dS = f_m(z), \quad (2)$$

$$m = 1, 2, \ldots, n.$$

Předpokládejme, že křivky L_k jsou od sebe dostatečně vzdáleny. Potom, jak lze lehce nahlédnout, budou jádra soustavy (2) malá a je zřejmé (viz § 2), že soustava (2) je řešitelná methodou postupných aproximací.

Analysujme podrobněji algoritmus postupných aproximací pro soustavu (2). Postupujeme tak, že nejdříve zavedeme do rovnice (2) parametr λ. Dostaneme novou rovnici:

na L_m

$$u_m(z) + \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} u_k(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z, \zeta)}{\partial \nu} - \frac{\partial G_k(\infty, \zeta)}{\partial \nu}\right] d\sigma = f_m(z),$$

$$m = 1, 2, \ldots, n. \quad (3)$$

Její řešení budeme hledat ve tvaru

$$u_m(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \lambda^r u_{mr}(z). \quad (4)$$

Dosaďme toto do (3). Porovnáním koeficientů při stejných mocninách λ nalevo a napravo dostaneme tyto rekurentní vzorce:

$$u_{m0}(z) = f_m(z),$$

$$u_{mr}(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L} u_{k,r-1}(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z, \zeta)}{\partial \nu} - \frac{\partial G_k(\infty, \zeta)}{\partial \nu}\right] d\sigma. \quad (5)$$

Položíme-li nyní v (4) $\lambda = 1$, najdeme řešení rovnice (2).

Vzorce (5) určují funkci $u_{mr}(z)$ pouze na křivce L_m. Nechť nyní z značí libovolný bod oblasti D_m. Symbol $U_{mr}(z)$ nechť značí funkci harmonickou v D_m, jejíž hodnoty na obvodu této oblasti jsou dány vzorci (5). Je zřejmé, že uvnitř D_m

$$U_{mr}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_m} u_{mr}(\zeta) \frac{\partial G_m(z, \zeta)}{\partial \nu} d\sigma;$$

vzorce (5) lze vyjádřit v takovém tvaru:

na L_m

$$U_{m0}(z) = f_m(z),\ U_{mr}(z) = \sum_{k \neq m} [U_{k,r-1}(z) - U_{k,r-1}(\infty)]. \tag{6}$$

Jak ukazují vzorce (6), členy řady (4) lze sestrojit takto:

Jako nulovou aproximaci zvolíme funkce $U_{m0}(x)$ harmonické v D_m, jejichž hodnoty na hranici se shodují s danými funkcemi $f_m(z)$.

Jestliže už jsou sestrojeny funkce $U_{m0}(z), \ldots, U_{m,r-1}(z)$, pak $U_{mr}(z)$ je určena takto: od funkcí $U_{k,r-1}(z)$, $k \neq m$ odečteme jejich hodnoty v nekonečnu; nalezené rozdíly se vypočtou pro hodnoty na křivce L_m a potom sečtou pro všechna k, která se nerovnají m. Jako výsledek dostaneme hodnoty funkce $U_{m,r}(z)$ na hranici L_m. Pomocí příslušné Greenovy funkce potom určíme funkci $U_{mr}(z)$ v celé oblasti D_m. Hledaná harmonická funkce $U(z)$ v D se rovná součtu řady

$$U(z) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \sum_{m=1}^{n} U_{mr}(z). \tag{7}$$

Vyložený postup má ideu shodnou s alternujícím Schwarzovým algoritmem; budeme jej nazývat zobecněným Schwarzovým algoritmem.

Zobecněný Schwarzův algoritmus je obzvlášť jednoduchý v tom případě, kdy je oblast D dvojnásobně souvislá. Můžeme předpokládat, že $f_2(\zeta) \equiv 0$. K tomu stačí odečíst od hledané funkce $U(z)$ funkci $U'(z)$ harmonickou v D_2 a rovnou $f_2(z)$ na L_2. Vzorce (6) nyní dávají:

$$\begin{aligned} &\text{na } L_1 \quad U_{10}(z) = f(z),\ U_{1r}(z) = U_{2,r-1}(z) - U_{2,r-1}(\infty), \\ &\text{na } L_2 \quad U_{20}(z) = 0, \quad\ U_{2r}(z) = U_{1,r-1}(z) - U_{1,r-1}(\infty). \end{aligned} \tag{8}$$

Ze vzorců (8) plyne, že se $U_{1r}(z)$ pro lichá r a $U_{2r}(z)$ pro sudá r identicky rovnají nule. Označme nyní pro stručnost

$$U_{1r}(z) = U_r(z),\ U_{2r}(z) = V_r(z).$$

Potom

$$U(z) = U_0(z) - V_1(z) + U_2(z) - V_3(z) + \ldots \tag{9}$$

Bez podstatných změn lze užít zobecněného Schwarzova algoritmu i pro případ omezené, mnohonásobně souvislé oblasti. Stačí nahradit funkci $l_0(\zeta)$ nulou. Lze také zvolit

$$l_0(\zeta) = \frac{\partial G_0(a, \zeta)}{\partial \nu},$$

kde a je libovolný bod uvnitř D.

V případě trojdimensionální oblasti se zobecněný Schwarzův algoritmus zjednoduší. Do rovnice (4), § 49 zavedeme parametr λ a napíšeme rovnici ve tvaru:

na S_m

$$u_m(M) + \frac{\lambda}{4\pi} \sum_{k \neq m} \iint_{S_k} u_k(M_1) \frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu} \mathrm{d}S = f_m(M). \qquad (10)$$

Její řešení budeme hledat ve tvaru

$$u_m(M) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \lambda^r u_{mr}(M). \qquad (11)$$

Dojdeme potom k rekurentním vzorcům:

$$u_{m0}(M) = f_m(M),$$

$$u_{mr}(M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq m} \iint_{S_k} u_{k,r-1}(M_1) \frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu} \mathrm{d}S. \qquad (12)$$

Jestliže M bude nyní značit vnitřní bod oblasti D_m, bude $U_{mr}(M)$ označovat funkci harmonickou v D_m, jejíž hodnoty na S_m jsou dány rovnicemi (12).

Avšak v takovém případě

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S_k} u_{k,r-1}(M_1) \frac{\partial G_k(M, M_1)}{\partial \nu} \mathrm{d}S = U_{k,r-1}(M)$$

a rovnice (12) nabývají jednoduššího tvaru:

$$\text{na } S_m \qquad U_{m0}(M) = f_m(M), \; U_{mr}(M) = \sum_{k \neq m} U_{k,r-1}(M). \qquad (13)$$

Jak zřejmě plyne ze vzorců (13), sestrojí se postupné aproximace takto: Nulovou aproximací jsou funkce $U_{m0}(M)$, $m = 1, 2, \ldots, n$, harmonické v D_m a rovné $f_m(M)$ na plochách S_m. Jestliže aproximace $U_{m0}(M)$, $U_{m1}(M)$, $\ldots$, $U_{m,r-1}(M)$ jsou již sestrojeny, je $U_{mr}(M)$ určena jako funkce harmonická v D_m, jež se na ploše S_m rovná součtu

$$\sum_{k \neq m} U_{k, r-1}(M).$$

Jestliže oblast D je dvojnásobně souvislá, pak zobecněný Schwarzův algoritmus konverguje.

Důkaz této věty lze najít v článku S. L. Soboleva [34]. Omezíme se zde na případ dvojnásobně souvisle trojdimensionální oblasti, pro kterou je důkaz elementární.

Jak už jsme poznamenali, náš algoritmus je shodný s algoritmem postupných aproximací pro soustavu integrálních rovnic:[1]

$$\begin{aligned} &\text{na } S_1 \quad u_1(M) + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} u_2(M_1) \frac{\partial G_2(M, M_1)}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S = f_1(M), \\ &\text{na } S_2 \quad u_2(M) + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} u_1(M_1) \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S = f_2(M). \end{aligned} \tag{14}$$

Uvažujme homogenní soustavu integrálních rovnic, obsahujících parametr λ:

$$\begin{aligned} &\text{na } S_1 \quad v_1(M) + \frac{\lambda}{4\pi} \iint_{S_2} v_2(M_1) \frac{\partial G_2(M, M_1)}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S = 0, \\ &\text{na } S_2 \quad v_2(M) + \frac{\lambda}{4\pi} \iint_{S_1} v_1(M_1) \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Dokažme, že charakteristická čísla této soustavy jsou v absolutní hodnotě větší než jedna. V důsledku toho, co bylo dokázáno v § 5, bude odtud plynout konvergence algoritmu postupných aproximací pro soustavu (14).

Jestliže M je vnitřní bod oblasti D_m $(m = 1, 2)$, budeme $U_1(M)$, $U_2(M)$ jako shora považovat za funkce harmonické v D_1, D_2, jejichž hodnoty na S_1 resp. S_2 jsou určeny ze soustavou (15).

Potom lze tuto soustavu napsat takto:

$$\begin{aligned} &\text{na } S_1 \qquad U_1(M) + \lambda U_2(M) = 0, \\ &\text{na } S_2 \qquad U_2(M) + \lambda U_1(M) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

---

[1] Píšeme zde tuto soustavu pro případ dvojnásobně souvislé oblasti, který nás zajímá.

Funkce $U_1(M)$ a $U_2(M)$ mohou být komplexní, nicméně věta o maximu absolutní hodnoty zůstává pro ně v platnosti[1]. Označme A_k maximum $|U_k(M)|$ a N_k ten bod plochy S_k, v němž $|U_k| = A_k$. V prvé z rovnic (16) položme $M = N_1$ a ve druhé $M = N_2$. Nyní z těchto rovnic plyne

$$|\lambda| = \frac{A_1}{|U_2(N_1)|} = \frac{A_2}{|U_1(N_2)|}.$$

Odtud

$$|\lambda|^2 = \frac{A_1}{|U_1(N_2)|} \frac{A_2}{|U_2(N_1)|}. \tag{17}$$

Oba činitelé napravo jsou větší než jedna, neboť oblasti D_1 a D_2 jsou neomezené a funkce U_1 a U_2, harmonické v těchto oblastech, se nerovnají identicky konstantě; v takovém případě je hodnota harmonické funkce ve vnitřním bodě menší (s vyloučením rovnosti) než maximum na hranici. Je tedy $|\lambda_1| > 1$, jak jsme měli dokázat.

Náš důkaz konvergence zobecněného Schwarzova algoritmu zůstává v platnosti i tehdy, když je oblast D omezená. V tomto případě je jedna z oblastí, na př. D_1, omezená a druhá je neomezená. Ve vzorci (17) prvý činitel napravo není pak menší než jedna a druhý je větší (s vyloučením rovnosti) než jedna. Jako dříve $|\lambda| > 1$ a to stačí ke konvergenci našeho algoritmu.

---

[1] Nechť na S_1 $|U_1(M)| \leqq K$. Potom uvnitř D_1

$$|U_1(M)| = \frac{1}{4\pi} \left| \iint_{S_1} U_1(M_1) \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S \right| \leqq \frac{K}{4\pi} \iint_{S_1} \left| \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} \right| \mathrm{d}S.$$

Avšak normální derivace Greenovy funkce uvnitř oblasti je kladná. Odtud

$$|U_1(M)| \leqq \frac{K}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S.$$

Dále je integrál

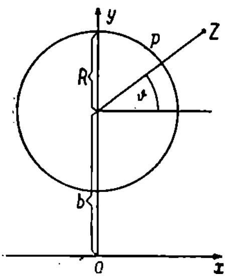
$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\partial G_1(M, M_1)}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S$$

funkce harmonická v D_1 a rovna jedné na S_1. Tato funkce uvnitř D_1 je rovna jedné, když je oblast D omezená a je menší než jedna, když je oblast neomezená. Tedy definitivně

$$|U_1(M)| \leqq K$$

v celé oblasti D_1.

§ 51. Obtékání křídla letadla vzdušným proudem v blízkosti povrchu země. Pro jednoduchost výpočtu předpokládejme, že křídlo je kruhového průřezu. Osy souřadnic zvolme tak, jak je ukázáno na obr. 12. Budeme předpokládat, že se křídlo pohybuje ve směru osy x stálou rychlostí U; rychlost částic vzduchu v nekonečnu zvolme rovnou nule. Konečně předpokládejme, že pohyb je necirkulární. Proudová funkce $\psi(x, y)$ řeší modifikovaný Dirichletův problém s těmito podmínkami na hranici:[1]



Obr. 12.

na kružnici $|z - b| = R$

$$\psi = Uy + C', \quad C' = \text{konst}, \tag{1}$$

na ose x

$$\psi = 0. \tag{2}$$

Aplikujme na tento problém zobecněný Schwarzův algoritmus. Označme L_1 hranici průřezu křídla, L_2 osu x. Potom D_1 bude rovina s kruhovým výřezem a D_2 horní polorovina. Můžeme užít přímo vzorce (9), § 47, neboť $\psi = 0$ na L_2:

$$\psi(x, y) = U_0(x, y) - V_1(x, y) + U_2(x, y) - V_3(x, y) + \ldots \tag{3}$$

Funkce $U_0(x, y)$ je harmonická v D_1 a rovna $Uy = UR \sin\vartheta$ [1] na kružnici L_1. Není obtížné nahlédnout, že těmto podmínkám vyhovuje funkce

$$U_0(x, y) = \frac{UR^2 \sin\vartheta}{\varrho} = \frac{UR^2 (y - b)}{x^2 + (y - b)^2}.$$

V nekonečnu $U_0(x, y) = 0$ a na ose x

$$U_0(x, 0) = -\frac{UR^2 b}{x^2 + b^2}.$$

Nyní je $V_1(x, y)$ definována jako funkce harmonická v horní polorovině, jež se na hranici poloroviny rovná $-\dfrac{UR^2 b}{x^2 + b^2}$. Podle známého vzorce

---

[1]) Viz § 35.

[1] Označení viz na obr. 12. Konstantu C' neuvažujeme, neboť je pro řešení modifikovaného problému Dirichletova nepodstatná.

$$V_1(x, y) = -\frac{UR^2by}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{(\xi^2+b^2)[(\xi-x)^2+y^2]} = -\frac{UR^2(y+b)}{x^2+(y+b)^2}.$$

Hodnoty na hranici následující aproximace dostaneme, odečteme-li od $V_1(x, y)$ její hodnotu v nekonečnu a vypočteme-li hodnotu nalezeného rozdílu na kružnici L_1. Protože v nekonečnu $V_1(x, y) = 0$, rovnají se prostě hodnoty na hranici funkce $U_2(x, y)$ hodnotám $V_1(x, y)$ na L_1:

$$\text{na } L_1 \qquad U_2(x, y) = -\frac{UR^2(2b + R\sin\vartheta)}{R^2 + 4b^2 + 4bR\sin\vartheta}.$$

Nyní podle Poissonova vzorce

$$U_2(x, y) =$$

$$= -\frac{UR^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2b + R\sin\Theta}{R^2 + 4b^2 + 4bR\sin\Theta}\,\frac{\varrho^2 - R^2}{\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R\cos(\vartheta - \Theta)}\,d\Theta =$$

$$= -UR^2\frac{2b[x^2 + (y-b)^2] + R^2(y-b)}{R^4 + 4b^2[x^2 + (y-b)^2] + 4bR^2(y-b)}.$$

Omezíme-li se na již nalezené aproximace, máme

$$\psi(x, y) = U_0(x, y) - V_1(x, y) + U_2(x, y) =$$

$$= UR^2\left\{\frac{y-b}{x^2+(y-b)^2} + \frac{y+b}{x^2+(y+b)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2b[x^2+(y-b)^2] + R^2(y-b)}{R^4 + 4b^2[x^2+(y-b)^2] + 4bR^2(y-b)}\right\}. \tag{4}$$

§ 52. Užití na problémy theorie pružnosti. Zobecněného Schwarzova algoritmu a s ním spojené soustavy integrálních rovnic se může užít nejen při problémech vedoucích na Laplaceovu rovnici, nýbrž po každé, kdy se řeší krajový problém pro rovnici eliptického typu v případě mnohonásobně souvislé oblasti. Objasněme to na příkladě rovinného problému theorie pružnosti. Budeme uvažovat omezenou, mnohonásobně souvislou oblast. Případ neomezené oblasti lze vyšetřovat obdobně.

Nechť je tedy položen problém určit napjatost v mnohonásobně souvislé oblasti D, ohraničené z vnitřku hranicemi $L_1, L_2, \ldots, L_n$ a z vnějšku hranicí L_0. Tento problém, jak víme (§ 40), se převádí na určení funkce biharmonické v D z daných hodnot jejích derivací na hranici. Označme složky vnějších sil ve směru os x, y, působících na hranici L_k, X_k a Y_k a hledanou biharmonickou funkci W. Potom

na L_k

$$\frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y} = i\int_{s_0}^{s} (X_{k\nu} + iY_{k\nu})\,\mathrm{d}s + B_k = f_k(z) + B_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n; \tag{1}$$

z je komplexní souřadnice bodu na hranici.

Ve vzorci (1) jsou B_k konstanty. Jedna z konstant B_k může být zvolena libovolně a ostatní jsou potom určeny z podmínek jednoznačnosti posunutí. Budeme předpokládat, že hlavní vektor a hlavní moment sil působících na každé z křivek L_k jsou rovny nule. Toho lze vždy dosáhnout.

Označme D_0 oblast, ležící uvnitř L_0, a D_k oblast, ležící vně L_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Lze lehce dokázat, že při splnění právě vyslovené podmínky lze funkci W vyjádřit ve tvaru součtu biharmonických funkcí

$$W = W_0 + W_1 + \ldots + W_n, \tag{2}$$

při čemž každá funkce W_k je regulární v příslušné oblasti D_k.

Goursatovy funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, odpovídající příslušné biharmonické funkci W, jsou regulární v D. Ve vzorci (1), § 48 se logaritmické členy nevyskytují. Podle vzorce (4), § 48 budeme mít

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z), \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{n} \psi_k(z).$$

Označme ještě

$$\chi_k(z) = \int \psi_k(z)\,\mathrm{d}z.$$

Funkce $\chi_k(z)$ mají jednoznačné reálné části v příslušných oblastech D_k. V opačném případě, jak lze lehce nahlédnout, byl by hlavní moment sil působících na hranici L_k různý od nuly. Abychom dostali vzorec (2), stačí nyní položit

$$W_k = \mathrm{Re}\{\bar{z}\,\varphi_k(z) + \chi_k(z)\}.$$

Předpokládejme nyní, že umíme řešit problém theorie pružnosti pro každou z oblastí D_k. Jestliže budeme znát hodnoty veličiny

$$\frac{\partial W_k}{\partial x} + i\frac{\partial W_k}{\partial y} = g_k(z)$$

na příslušné křivce L_k, pak rozřešíme-li uvedený problém v každé z oblastí D_k, nalezneme funkce W_k a tedy i W. Tím bude řešen problém theorie pružnosti pro naši mnohonásobně souvislou oblast D. Vše se tedy převádí na sestrojení funkcí $g_k(z)$.

Učiníme několik předběžných poznámek.

1. Podrobný rozbor, který zde nebudeme provádět,[1] vede k následujícímu výsledku: nechť D je jednoduše souvislá oblast a L její hranice. Nechť je dále U funkce biharmonická v D a nechť na hranici L

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = g(z).$$

Potom v libovolném vnitřním bodě oblasti D

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \int\limits_L [M_1(x, y; \zeta)\, g(\zeta) + M_2(x, y; \zeta)\, \overline{g(\zeta)}]\, \mathrm{d}\zeta, \tag{3}$$

kde M_1 a M_2 jsou spojité funkce, pokud bod (x, y) zůstává uvnitř oblasti a bod ζ na její hranici; tyto funkce jsou úplně určeny oblastí D. Pro stručnost budeme označovat integrál na pravé straně (3) $M(z; g)$, takže

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = M(z; g). \tag{3_1}$$

Operátor M, příslušející oblasti D_k, budeme značit $M_k(z; g)$, takže speciálně

$$\frac{\partial W_k}{\partial x} + i\frac{\partial W_k}{\partial y} = M_k(z; g_k). \tag{4}$$

2. Jestliže $g(z) \equiv g =$ konst, pak z věty o jednoznačnosti řešení problému theorie pružnosti plyne, že

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} \equiv g.$$

Odtud plyne, že

$$\text{pro } g(\zeta) \equiv g = \text{konst}, \; M(z; g) \equiv g. \tag{5}$$

[1] Viz [37b], str. 5—8.

3. Protože funkce W_k jsou biharmonické v jednoduše souvislých oblastech, jsou jim příslušející posunutí jednoznačná. Avšak potom v důsledku vzorce (2) budou automaticky jednoznačná i posunutí, odpovídající funkci W. A priori je jasné, že funkce (2) nemůže vyhovovat krajové podmínce (1) pro libovolné hodnoty konstant B_k, neboť, jak už bylo poznamenáno, při jejich libovolné volbě jsou posunutí obecně mnohoznačná. Položíme si proto náš problém takto: budeme hledat funkci W ve tvaru (2); přitom se budeme snažit, aby W vyhovovala krajové podmínce

$$\text{na } L_k \qquad \frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y} = f_k(z) \tag{6}$$

až na aditivní konstantu, jež může být různá na různých hranicích.

Není obtížné sestavit nyní soustavu integrálních rovnic pro neznámé $g_k(\zeta)$. Na křivce L_m

$$\frac{\partial W_m}{\partial x} + i\frac{\partial W_m}{\partial y} = g_m(z).$$

Dále, jestliže $k \neq m$, leží L_m uvnitř oblasti D_k a podle vzorce (4)

$$\text{na } L_m \qquad \frac{\partial W_k}{\partial x} + i\frac{\partial W_k}{\partial y} = M_k(z; g_k),$$

kde z značí bod na L_m. Užijeme-li vzorců (2) a (5), dostaneme soustavu, která nás zajímá:

$$\text{na } L_m \qquad g_m(z) + \sum_{k \neq m} M_k(z; g_k) = f_m(z), \ m = 0, 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Soustava (7) je jako v případě rovinného Dirichletova problému (§ 45) v obecném případě neřešitelná. Abychom se o tom přesvědčili, uvažujme homogenní soustavu:

$$\text{na } L_m \qquad g_m^{(0)}(z) + \sum_{k \neq m} M_k(z; g_k^{(0)}) = 0. \tag{8}$$

Jak plyne ze vzorce (6), vyhovují soustavě (8) $g_m^{(0)}(z) = a_m =$ konst jestliže konstanty a_m jsou podrobeny jediné podmínce $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0$. Homogenní soustava (8) má tedy netriviální řešení (nerovnající se identicky nule) a z Fredholmovy alternativy plyne neřešitelnost soustavy (7).

Upravme nyní soustavu (7) tak, aby se stala řešitelnou. Uvažujme integrály

$$N_k(g) = \int_{L_k} [\alpha_k(\zeta)\, g(\zeta) + \beta_k(\zeta)\, \overline{g(\zeta)}]\, \mathrm{d}\zeta, \tag{9}$$

kde funkce $\alpha_k(\zeta)$ a $\beta_k(\zeta)$ jsou podrobeny těmto podmínkám:

1. jsou spojité na L_k;
2. $\int_{L_k} \alpha_k(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = 1, \quad \int_{L_k} \beta_k(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = 0.$ (10)

Soustavu (7) nahraďme soustavou:

na L_m

$$g_m(z) + \sum_{k \neq m} \{M_k(z; g_k) - N_k(g_k)\} = f_m(z); \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Dokažme, že soustava (11) je řešitelná pro libovolné funkce $f_m(z)$. Uvažujme příslušnou homogenní soustavu

na L_m

$$g_m^{(0)}(z) + \sum_{k \neq m} \{M_k(z; g_k^{(0)}) - N_k(g_k^{(0)})\} = 0; \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

a dokažme, že má pouze triviální řešení $g_m^{(0)}(x) = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Nechť $g_0^0(z), g_1^{(0)}(z), \ldots, g_n^{(0)}(z)$ je libovolné řešení soustavy (12). Označme

$$\sum_{k \neq m} N_k(g_k^{(0)}) = a_m.$$

Veličiny a_m jsou zřejmě konstanty. Z (12) nyní plyne, že

na L_m

$$g_m^{(0)}(z) + \sum_{k \neq m} M_k(z; g_k^{(0)}) = a_m. \tag{13}$$

Uvažujme funkce $W_m^{(0)}(x, y)$ biharmonické v oblasti D_m, vyhovující na L_m rovnici

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x} + i \frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y} = g_m^{(0)}(z).$$

Podle vzorce (4) uvnitř D_k máme:

$$\frac{\partial W_k^{(0)}}{\partial x} + i \frac{\partial W_k^{(0)}}{\partial y} = M_k(z; g_k^{(0)}).$$

Položme nyní

$$W^{(0)}(x, y) = \sum_{m=0}^{n} W_m^{(0)}(x, y). \tag{14}$$

Funkce $W^{(0)}(x, y)$ je biharmonická v mnohonásobně souvislé oblasti; protože se rozkládá na součet funkcí biharmonických v jednoduše souvislých oblastech, odpovídají jí jednoznačná posunutí v D. Z (13) plyne, že

$$\text{na } L_m \qquad \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} + i\frac{\partial W^{(0)}}{\partial y} = a_m. \tag{15}$$

Ze vzorce (1) plyne, že

$$X_{k\nu} + iY_{k\nu} = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}f_k(z)}{\mathrm{d}s}.$$

Užijeme-li toho na rovnici (15), kde $f_k(z) = a_k =$ konst., nalezneme $X_{k\nu} = Y_{k\nu} = 0$. Biharmonická funkce přísluší tedy napjatosti v mnohonásobně souvislé oblasti D, na jejíž hranici nepůsobí vnější síly. Podle věty o jednoznačnosti se příslušná napětí rovnají identicky nule. Příslušná biharmonická funkce $W^{(0)}$ bude potom lineární (viz vzorce (4), § 39) a

$$\frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} + i\frac{\partial W^{(0)}}{\partial y} \equiv \text{konst.}$$

Dokažme, že konstantní jsou také veličiny

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x} + i\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y}; \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Podle Goursatova vzorce (1), § 40

$$W^{(0)} = \operatorname{Re}\{\bar{z}\,\varphi(z) + \chi(z)\}, \quad W_m^{(0)} = \operatorname{Re}\{\bar{z}\,\varphi_m(z) + \chi_m(z)\};$$

přitom zřejmě

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{n} \varphi_m(z), \quad \chi(z) = \sum_{m=0}^{n} \chi_m(z). \tag{16}$$

Opakujeme-li odvození Goursatova vzorce pro funkci $W^{(0)}(x, y)$ a vezmeme-li v úvahu, že tato funkce je lineární, lehce zjistíme, že $\varphi(z) = i\alpha z + \beta$, kde α je reálná a β je komplexní konstanta. Úplně obdobně najdeme, že $\chi(z) = \gamma z + \delta$, kde γ a δ jsou konstanty.

Dokažme, že obdobný tvar mají i funkce $\varphi_m(z)$, $\chi_m(z)$. Prvou z rovnic (16) derivujme podle z a výsledek napišme ve tvaru

$$\varphi_m'(z) = i\alpha - \sum_{k \neq m} \varphi_k'(z).$$

Levá strana rovnice, $\varphi'_m(z)$, je regulární vně L_m a pravá strana uvnitř L_m. Avšak potom $\varphi'_m(z)$ je regulární v celé rovině. Podle Liouvillovy věty je $\varphi'_m(z)$ konstanta. Musí být ryze imaginární, neboť v opačném případě měla by $W_m^{(0)}$ derivace neomezené v nekonečnu. Označíme-li tuto konstantu $i\alpha_m$, dostaneme $\varphi'_m(z) = i\alpha_m$ a $\varphi_m(z) = i\alpha_m z + \beta_m$. Obdobně zjistíme, že $\chi_m(z) = \gamma_m z + \delta_m$. Užívajíce vzorce N. I. Muschelišviliho

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x} + i\,\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y} = \varphi_m(z) + z\,\overline{\varphi'_m(z)} + \overline{\psi_m(z)},\ \psi_m(z) = \chi'_m(z)$$

nalezneme, že

$$\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial x} + i\,\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial y} = \beta_m + \overline{\gamma_m} = \text{konst.}$$

Odtud zřejmě plyne, že $g_m^{(0)}(z) = \text{konst.}$

Řešení homogenní soustavy (12) jsou tedy konstanty. V takovém případě podle vzorce (5) $M_k(z; g_k^{(0)}) = g_k^{(0)}$. Dále ze vzorců (9) a (10) také plyne, že $N_k(g_k^{(0)}) = g_k^{(0)}$. Dosadíme-li toto do (12), zjistíme, že $g_m^{(0)}(z) \equiv 0$, t. j. homogenní soustava (12) má pouze triviální řešení. V důsledku Fredholmovy alternativy je soustava (11) řešitelná.

Řešíme-li soustavu (11), řešíme tím současně problém theorie pružnosti pro oblast D. Nechť $g_m(z)$ je řešení uvedené soustavy. Označme

$$\sum_{k \neq m} N_k(g_k) = B_m.$$

Potom

na L_m
$$g_m(z) + \sum_{k \neq m} M_k(z; g_k) = f_m(z) + B_m. \tag{17}$$

Nechť $W_m(x, y)$ je biharmonická funkce v D_m, vyhovující na hranici L_m rovnici

$$\frac{\partial W_m}{\partial x} + i\,\frac{\partial W_m}{\partial y} = g_m(z),$$

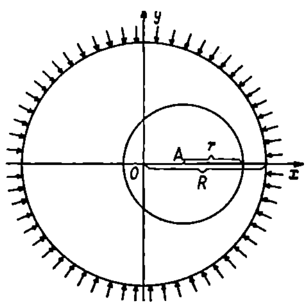
a nechť $W = W_0 + W_1 + \ldots + W_n$. Funkce $W(x, y)$ je součet biharmonických funkcí, z nichž každá je regulární ve své jednoduše souvislé oblasti; vzorec (17) ukazuje, že tato funkce vyhovuje podmínce (1). Náš problém je tím řešen.

Jako $N_k(g)$ lze speciálně zvolit

$$N_k(g) = M_k(\infty; g),\ k = 1, 2, \ldots, n;\ N_0(g) = M_0(a, g),$$

kde a je libovolný bod uvnitř L_0. Jestliže hranice $L_0, L_1, \ldots, L_n$ jsou od sebe navzájem dostatečně vzdáleny, je ihned patrno, že jádra integrálů v soustavě (11) budou malá a tato soustava bude řešitelná methodou postupných aproximací. Stejně jako při Dirichletově problému docházíme i zde k zobecněnému Schwarzovu algoritmu.[1] V následujícím paragrafu ukážeme jeho užití na jeden speciální problém.

§ 53. Excentrické mezikruží s rovnoměrně rozloženým tlakem na vnější kružnici.[2] Počátek souřadnic položme do středu vnější kružnice; osu x položme do spojnice obou středů a její kladný směr nechť je orientován ke středu A vnitřní kružnice. Poloměry kružnic označme r a R (viz obr. 13), vzdálenost mezi středy a. Oblast D_0 je kruh $|z| < R$, oblast D_1 vnějšek kruhu $|z - a| \leqq r$.



Obr. 13.

Podmínky na hranici oblasti jsou takové: na vnitřní kružnici L_1 $\frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y} = f_1(z) = 0$; na vnější kružnici, podrobené stálému normálnímu tlaku, který označíme $-p$,

$$X_\nu = -p\cos(\nu, x) = -p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \quad Y_\nu = -p\cos(\nu, y) = p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

Odtud plyne, že na L_0

$$\frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y} = f_0(z) = i\int(X_\nu + iY_\nu)\,\mathrm{d}s = -pz. \tag{1}$$

Integrační konstantu neuvažujeme, neboť je nepodstatná při užití zobecněného Schwarzova algoritmu.

---

[1] V již citovaném článku S. L. Soboleva [34] je dokázáno, že v problémech theorie pružnosti vede zobecněný Schwarzův algoritmus vždy ke konvergentní řadě, když je oblast dvojnásobně souvislá.

[2] Tento problém lze řešit elementárnějšími prostředky. Uvádíme jej zde pro ilustraci methody. Méně elementární příklad užití našeho algoritmu nalezne čtenář v [27b].

Řešení problému theorie pružnosti pro oblasti D_0 a D_1 jsou úplně elementární a dobře známá. Zavedeme-li Goursatovy funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$, vázané s $W(x, y)$ vzorcem

$$\frac{\partial W}{\partial x} + i\,\frac{\partial W}{\partial y} = \varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \tag{2}$$

máme[1] pro oblast D_0

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - a_1 z - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta,$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{\overline{f_0(\zeta)}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{R^2[\varphi'(z) - a_1]}{z}, \tag{3}$$

$$a_1 = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta$$

a pro oblast D_1

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{\overline{f_1(\zeta)}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{\overline{f_1(\zeta)}}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta - z\,\varphi'(z). \tag{4}$$

Ve vzorcích (3) a (4) značí $f_0(\zeta)$ a $f_1(\zeta)$ hodnoty veličiny (2) na hranici L_0 resp. L_1.

V našem problému $f_1(\zeta) = 0$ a můžeme podle analogie se vzorcem (9), § 47 napsat řešení ve tvaru

$$W(x, y) = W_1(x, y) - W_2(x, y) + W_3(x, y) - \ldots, \tag{5}$$

kde W_{2k+1} jsou funkce biharmonické v D_0 a W_{2k} biharmonické v D_1.

V souhlase se vzorcem (2) zaveďme analytické funkce $\varphi_k(z)$ a $\psi_k(z)$ tak, aby

$$\frac{\partial W_k}{\partial x} + i\,\frac{\partial W_k}{\partial y} = \varphi_k(z) + z\,\overline{\varphi_k'(z)} + \overline{\psi_k(z)}.$$

Dohodněme se ještě na tom, že ζ bude značit bod buď na hranici L_0, nebo L_1.

[1] Viz [28a]. Tyto vzorce bez nesnází dostaneme, vyjdeme-li z výsledků § 41.

Prvá aproximace $W_1(x, y)$ vyhovuje na L_0 krajové podmínce

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} + i\frac{\partial W_1}{\partial y} = f_0(\zeta) = -p\zeta.$$

Dosadíme-li toto do (3) a provedeme-li příslušné výpočty, snadno dostaneme, že

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} + i\frac{\partial W_1}{\partial y} = -pz \tag{6}$$

uvnitř D_0. Dále na hranici L_1 je veličina $\frac{\partial W_2}{\partial x} + i\frac{\partial W_2}{\partial y}$ identická s $\frac{\partial W_1}{\partial x} + i\frac{\partial W_1}{\partial y}$; tedy

na L_1
$$\frac{\partial W_2}{\partial x} + i\frac{\partial W_2}{\partial y} = -p\zeta.$$

Dosadíme-li toto na místo $f_1(\zeta)$ do vzorce (4), dostaneme po jednoduchých výpočtech

$$\varphi_2(z) = 0, \quad \psi_2(z) = -\frac{pr^2}{z-a} - ap,$$

a tedy uvnitř D_1

$$\frac{\partial W_2}{\partial x} + i\frac{\partial W_2}{\partial y} = -\frac{pr^2}{\bar{z}-a} - ap. \tag{7}$$

Hodnoty na hranici veličiny $\frac{\partial W_3}{\partial x} + i\frac{\partial W_3}{\partial y}$ najdeme, odečteme-li od veličiny (7) její hodnotu v nekonečnu a vypočteme-li hodnotu nalezeného rozdílu na L_0. Potom dostaneme

$$\frac{\partial W_3}{\partial x} + i\frac{\partial W_3}{\partial y} = -\frac{pr^2}{\bar{\zeta}-a} = -\frac{pr^2\zeta}{R^2-a\zeta},$$

neboť na kružnici L_0 $\bar{\zeta} = \frac{R^2}{\zeta}$. Vrátíme-li se opět ke vzorci (3), najdeme:

$$\varphi_3(z) = -\frac{pr^2(R^2+az)\,z}{2R^2(R^2-az)}, \quad \psi_3(z) = \frac{apr^2(2a-z)}{(R^2-az)^2}.$$

Odtud

$$\frac{\partial W_3}{\partial x} + i\frac{\partial W_3}{\partial y} = pr^2\left[\frac{(R^2+az)\,z}{2R^2(R^2-az)} + \frac{z}{2R^2} - \frac{R^2z}{(R^2-az)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{a(2a-\bar{z})}{(R^2-a\bar{z})^2}\right]. \tag{8}$$

Stejně jednoduše vypočteme i následující aproximace.