KAPITOLA I

ABSOLUTNÍ GEOMETRIE

9. Primitivní pojmy. V následujícím výkladu geometrie jsme zvolili jako primitivní pojmy *bod, přímku, rovinu, incidenci, rozmístění* a *shodnost.* Předpokládáme, že máme dánu *množinu*, jejíž prvky se dělí do *tří skupin.* Prvky jedné se nazývají *body*, prvky druhé *přímky* a prvky třetí *roviny.* Předpokládáme dále, že prvky celé množiny jsou v určitých vzájemných *vztazích.* Tyto vztahy jsou tři, a vyjadřujeme je slovy *incidentní, mezi* a *shodný.*

Slova bod, přímka, rovina, incidentní, mezi a shodný jsou pro nás dosud spíše symboly, jež samy o sobě nic neznamenají. Smysl jim dají teprve axiomy, které postupně uvedeme. To tedy znamená, že nesmíme s těmito slovy spojovat všechny běžné vlastnosti, jak jsme na to zvyklí. Naproti tomu si můžeme pod primitivními pojmy představovat jakékoli věci, jestliže naše axiomy budou správné výroky o těchto věcech.

Axiomy rozdělíme do tří skupin podle toho, kterého ze tří primitivních vztahů si hlavně všímají. Skupiny budeme nazývat takto:

axiomy incidence (symbolicky $\mathfrak{I}$),
axiomy rozmístění (symbolicky $\mathfrak{R}$),
axiomy shodnosti (symbolicky $\mathfrak{S}$).[11])

Primitivní pojmy budeme označovat symboly, které utvoříme během výkladu.

10. Axiomy incidence a jejich důsledky. Body budeme označovat velkými latinskými písmeny $A, B, C, \ldots$, přímky malými latinskými písmeny $a, b, c, \ldots$, roviny malými řeckými písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ a vztah

[11]) Náš axiomatický systém je v podstatě systém Hilbertův. Axiomy incidence jsme zde upravili podle Glagoleva (N. A. Glagoleff: *Sur les axiomes d'appartenance de la géométrie euclidienne*, Mat. Sbornik **6 (48)**, 1939). Axiomům *rozmístění* se častěji říká axiomy uspořádání; tohoto názvu se však v této knize užívá již v jiném, byť velmi příbuzném smyslu (viz odstavec **6**). Axiomy odpovídající Hilbertovým axiomům *spojitosti* jsme zařadili tak, že Cantorův axiom (jenž je ekvivalentní s Hilbertovým axiomem úplnosti) je mezi axiomy *rozmístění*, axiom Archimedův mezi axiomy *shodnosti.*

incidence symbolem ∇. Výrok „*přímka a je incidentní s bodem A*"[12]) zapisujeme symbolicky „$a \nabla A$". Místo „$A \nabla a$ *a současně* $B \nabla a$" píšeme stručně „$A, B \nabla a$". Analogický význam má „$A \nabla a, b$". Výraz „$A, B \nabla a, b$" tedy znamená: „*platí současně* $A \nabla a$, $A \nabla b$, $B \nabla a$, $B \nabla b$". Místo „non($A \nabla a$)"[12a]) píšeme „$A \overline{\nabla} a$". Jestliže A a B označují týž bod, pak píšeme $A = B$, označují-li různé body, potom $A \neq B$. Podobně pro přímky a roviny.

AXIOMY INCIDENCE, $\mathfrak{J}$.

$\mathfrak{J}$, 1. *Vztah incidence je reflexivní a symetrický.*

$\mathfrak{J}$, 2. *Vztah incidence není obecně transitivní; je-li však* $A \nabla a$ *a* $a \nabla \alpha$, *pak je také* $A \nabla \alpha$.

$\mathfrak{J}$, 3. *Je-li* $a \nabla A, B$ *a* $A, B \nabla \alpha$, *pak je také* $a \nabla \alpha$.

$\mathfrak{J}$, 4. *Jsou-li* A, B *dva různé body, pak existuje právě jedna taková přímka* a, *že* $A, B \nabla a$.

DEFINICE. Tři různé body A, B, C jsou *kolineární*, jestliže existuje taková přímka a, že je $A, B, C \nabla a$. V opačném případě říkáme, že jsou *nekolineární.*

$\mathfrak{J}$, 5. *Jsou-li* A, B, C *tři nekolineární body, pak existuje právě jedna taková rovina* α, *že je* $A, B, C \nabla \alpha$.

$\mathfrak{J}$, 6. *Jsou-li roviny* α, β *takové, že existuje bod* A, *pro který je* $A \nabla \alpha, \beta$, *pak existuje ještě alespoň jeden bod* $B \neq A$, *pro který je také* $B \nabla \alpha, \beta$.

$\mathfrak{J}$, 7. *Každá přímka je incidentní alespoň se dvěma různými body.*

$\mathfrak{J}$, 8. *Každá rovina je incidentní alespoň se třemi nekolineárními body.*

DEFINICE. Čtyři různé body A, B, C, D jsou *komplanární*, jestliže existuje taková rovina α, že je $A, B, C, D \nabla \alpha$. V opačném případě říkáme, že jsou *nekomplanární.*

$\mathfrak{J}$, 9. *Existují alespoň čtyři nekomplanární body.*

Uvedeme nyní několik modelů axiomatického systému incidence.

MODEL 1. Pojmy *bod, přímka, rovina* a *incidentní* můžeme chápat v obvyklém smyslu názorné geometrie. Pak jsou zřejmě axiomy $\mathfrak{J}$ splněny.

[12]) Výrok „*Přímka a je incidentní s bodem A*" znamená totéž, jak jsme již dříve uvedli, jako rčení „*přímka a prochází bodem A*" nebo „*přímka obsahuje bod A*" nebo „*bod A leží na přímce a*", „*A je bod přímky a*" a pod.

[12a]) Je-li p nějaký výrok, pak „non p" znamená negaci tohoto výroku, tedy výrok „*není pravda, že platí* p".

MODEL 2. *Bodem* budeme rozumět jakoukoli skupinu tří reálných čísel

$$(a_1, a_2, a_3), \tag{1}$$

přímkou jakoukoli skupinu osmi reálných čísel, psaných ve dvou řádcích (ve tvaru t. zv. matice)

$$\begin{pmatrix} p_1, p_2, p_3, p_4 \\ q_1, q_2, q_3, q_4 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

při čemž vyloučíme ty matice, pro které je $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3}$ nebo $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ nebo $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, a při čemž budeme předpokládat, že matice (2) a matice

$$\begin{pmatrix} r_1, r_2, r_3, r_4 \\ s_1, s_2, s_3, s_4 \end{pmatrix}$$

představují tutéž přímku, jestliže platí $r_i = kp_i + lq_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ a $s_i = k'p_i + l'q_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, kde k, l resp. k', l' jsou dvě libovolná čísla nikoli současně rovna nule. Rovinou budeme rozumět jakoukoli skupinu čtyř reálných čísel

$$(t_1, t_2, t_3, t_4), \tag{3}$$

pro kterou nikdy není $t_1 = t_2 = t_3 = 0$, při čemž budeme předpokládat, že čtveřice (3) a čtveřice (kt_1, kt_2, kt_3, kt_4) představují tutéž rovinu, jestliže k je libovolné číslo různé od nuly. *Incidence* konečně budiž dána takto: bod (1) je incidentní s přímkou (2), jestliže platí

$$p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3 + p_4 = 0,$$
$$q_1a_1 + q_2a_2 + q_3a_3 + q_4 = 0,$$

bod (1) je incidentní s rovinou (3), jestliže platí

$$t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3 + t_4 = 0,$$

přímka (2) je incidentní s rovinou (3), jestliže existují čísla g, h tak, že je

$$gp_i + hq_i = t_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Pojímáme-li takto zavedenou incidenci ještě také jako vztah reflexivní a symetrický, pak jsou splněny axiomy $\mathfrak{J}$. Důkaz je záležitostí algebraickou a je předmětem každé učebnice prostorové analytické geometrie.

MODEL 3. *Bodem* budeme rozumět jakoukoli skupinu čtyř reálných čísel

$$(a_1, a_2, a_3, a_4), \tag{1}$$

z nichž alespoň jedno je různé od nuly, a při tom budeme předpokládat, že tato skupina a skupina (ka_1, ka_2, ka_3, ka_4), kde $k \neq 0$, představují týž bod. *Přímkou* budeme rozumět jakoukoli matici

$$\begin{pmatrix} p_1, p_2, p_3, p_4 \\ q_1, q_2, q_3, q_4 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ve které v každém řádku je alespoň jedno číslo různé od nuly a nikdy není $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_4}{q_4}$, při čemž budeme předpokládat, že matice (2) a matice

$$\begin{pmatrix} r_1, r_2, r_3, r_4 \\ s_1, s_2, s_3, s_4 \end{pmatrix}$$

představují tutéž přímku, jestliže platí $r_i = kp_i + lq_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ a $s_i = k'p_i + l'q_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, kde k, l resp. k', l' jsou dvě libovolná čísla, nikoli současně rovna nule. *Rovinou* budeme rozumět jakoukoli skupinu čtyř reálných čísel

$$(t_1, t_2, t_3, t_4), \tag{3}$$

z nichž alespoň jedno je různé od nuly, při čemž budeme předpokládat, že tato skupina a skupina (kt_1, kt_2, kt_3, kt_4), kde $k \neq 0$, představují tutéž rovinu. *Incidenci* zavedeme takto: bod (1) je incidentní s přímkou (2), jestliže platí

$$p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3 + p_4a_4 = 0,$$
$$q_1a_1 + q_2a_2 + q_3a_3 + q_4a_4 = 0,$$

bod (1) je incidentní s rovinou (3), jestliže platí

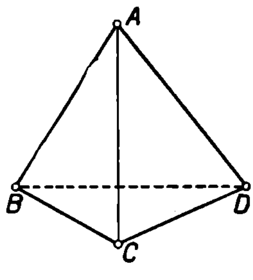
$$t_1a_1 + t_2a_2 + t_3a_3 + t_4a_4 = 0,$$

přímka (2) je incidentní s rovinou (3), jestliže existují čísla g, h tak, že je

$$gp_i + hq_i = t_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Zde opět bereme incidenci jako vztah reflexivní a symetrický a opět se dá pomocí algebry dokázat, že jsou splněny axiomy $\mathfrak{I}$. Tohoto vyjádření se také užívá v analytické geometrii, při čemž čísla (1) jsou t. zv. homogenní souřadnice bodu.

MODEL 4. Vezměme množinu čtyř prvků $\{A, B, C, D\}$ a uvažujme její podmnožiny; podmnožiny o jednom prvku pojímejme jako *body*, podmnožiny o dvou prvcích jako *přímky* a podmnožiny o třech prvcích jako *roviny*. *Incidenci* pojímejme jako množinovou inklusi; na př. bod $\{A\}$ je incidentní s přímkami $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$ a s rovinami $\{A, B, C\}$, $\{A, C, D\}$, $\{A, B, D\}$; přímka $\{A, B\}$ je incidentní s rovinami $\{A, B, C\}$ a $\{A, B, D\}$. Snadno se přesvědčíme, že pak jsou axiomy $\mathfrak{I}$ splněny (názorně si tento model můžeme představit jako čtyrstěn, viz obr. 2). Tento model ukazuje, že z axiomů $\mathfrak{I}$ neplyne, že by přímka musela obsahovat nekonečně mnoho bodů, a je současně jedním z nejjednodušších příkladů t. zv. konečných geometrií, kterými se podrobně zabývá studium základů geometrie.



Obr. 2.

Ve zbývající části tohoto paragrafu odvodíme nejdůležitější důsledky axiomů $\mathfrak{I}$.

OZNAČENÍ. Místo „*přímka incidentní s body A a B*“ budeme psát krátce „*přímka* $\overline{AB}$“. Je-li to přímka a, budeme psát „$\overline{AB} = a$“.

VĚTA 10,1. *Jsou-li body A, B, C různé a takové, že C není incidentní s přímkou $\overline{AB}$, pak body A, B, C jsou nekolineární.*

VĚTA 10,2. *Dvě různé přímky jsou incidentní nejvýše s jedním bodem.*

DŮKAZ obou vět plyne bezprostředně z axiomu $\mathfrak{J}$, 4.

OZNAČENÍ. Místo „*rovina incidentní s body A, B, C*“ budeme psát krátce „*rovina* $\overline{ABC}$“. Je-li to rovina α, budeme psát „$\alpha = \overline{ABC}$“.

VĚTA 10,3. *Je-li dána přímka a a bod A, při čemž $a \mathrel{\overline{\bigtriangledown}} A$, pak existuje právě jedna rovina α tak, že $a, A \bigtriangledown \alpha$.*

DŮKAZ. Podle $\mathfrak{J}$, 7. existují body B, C tak, že $a \bigtriangledown B, C$. Podle VĚTY 10,1 jsou body A, B, C nekolineární, podle $\mathfrak{J}$, 5 existuje právě jedna rovina $\alpha \bigtriangledown A, B, C$, podle $\mathfrak{J}$, 3 z $a \bigtriangledown B, C$ plyne $a \bigtriangledown \alpha$.

VĚTA 10,4. *Existují alespoň tři nekolineární body.*

DŮKAZ. Kdyby všechny trojice bodů byly kolineární, pak by v každé čtveřici bodů byly každé tři body kolineární, tedy by podle $\mathfrak{J}$, 5 každé čtyři body byly incidentní s rovinou, což by bylo ve sporu s $\mathfrak{J}$, 9.

VĚTA 10,5. *Je-li dána přímka, pak existuje vždy bod, jenž s ní není incidentní.*

DŮKAZ. Podle $\mathfrak{J}$, 7 existují alespoň dva body A, B incidentní s danou přímkou. Kdyby pro každý bod C byly body A, B, C kolineární, bylo by to ve sporu s VĚTOU 10,4.

VĚTA 10,6. *Je-li $A, B \bigtriangledown \alpha$, pak pro každý bod $C \bigtriangledown \overline{AB}$ platí $C \bigtriangledown \alpha$.*

DŮKAZ plyne bezprostředně z axiomů $\mathfrak{J}$, 2—3.

VĚTA 10,7. *Jsou-li A, B dva různé body a α, β dvě různé roviny, při čemž $A, B \bigtriangledown \alpha, \beta$, pak $C \bigtriangledown \overline{AB}$ nastává tehdy a jen tehdy, když $C \bigtriangledown \alpha, \beta$.*

DŮKAZ. Budiž $A, B, C \bigtriangledown \alpha, \beta$. Kdyby nebylo $C \bigtriangledown \overline{AB}$, pak by podle VĚTY 10,1 body A, B, C byly nekolineární a tedy podle $\mathfrak{J}$, 5 by existovala právě jedna rovina $\gamma \bigtriangledown A, B, C$. Protože $\alpha, \beta \bigtriangledown A, B, C$, znamenalo by to, že platí $\alpha = \gamma$ a $\beta = \gamma$, tedy také $\alpha = \beta$, což by byl spor. Obrácená implikace je důsledkem VĚTY 10,6.

VĚTA 10,8. *Dvě různé roviny buď nejsou incidentní s žádným společným bodem nebo jsou incidentní se všemi body nějaké přímky.*

DŮKAZ plyne z VĚTY 10,7.

VĚTA 10,9. *Jestliže rovina a přímka nejsou incidentní, pak jsou incidentní nejvýše s jedním společným bodem.*

DŮKAZ. Kdyby byly incidentní se dvěma různými společnými body, byly by podle $\mathfrak{I}$, 3 incidentní.

VĚTA 10,10. *Jestliže dvě různé přímky jsou incidentní s týmž společným bodem, pak existuje právě jedna rovina incidentní s oběma přímkami.*

DŮKAZ. *Alespoň jedna*: Nechť $a \neq b$; $a, b \bigtriangledown M$. Podle $\mathfrak{I}$, 7 existují body $A \neq M \neq B$, $A \bigtriangledown a$, $B \bigtriangledown b$. Podle VĚTY 10,2 je $A \neq B$ a A, B, M jsou nekolineární. Podle $\mathfrak{I}$, 5 existuje rovina $\overline{ABM}$, při čemž $a, b \bigtriangledown \overline{ABM}$. *Nejvýše jedna*: Kdyby pro roviny $\alpha \neq \beta$ platilo $\alpha, \beta \bigtriangledown a, b$, pak by body A, B, M byly incidentní se dvěma různými rovinami, což by vzhledem k $\mathfrak{I}$, 5 byl spor.

OZNAČENÍ. Podle VĚTY 10,3 resp. 10,10 rovina incidentní s přímkou a a bodem A mimo ni resp. s dvěma přímkami a, b, které mají společný bod, je jediná, a proto budeme říkat, že je příslušnými prvky *jednoznačně určena* nebo prostě *určena*. Je-li to rovina α, budeme psát symbolicky $\alpha = \overline{aA} = \overline{Aa}$ resp. $\alpha = \overline{ab}$.[13])

VĚTA 10,11. *Ze čtyř nekomplanárních bodů jsou každé tři nekolineární.*

DŮKAZ. Kdyby mezi nimi byly některé tři body kolineární, pak by existovala rovina incidentní s jejich přímkou a zbývajícím čtvrtým bodem, takže by všechny čtyři body byly komplanární.

V tomto paragrafu jsme se při vyjadřování důsledně drželi pojmu incidence, aby vynikla jeho role jakožto pojmu primitivního v naší axiomatice. V dalším se však takovéto formulace nebudeme přísně držet, protože by to vedlo leckdy k těžkopádnostem, a budeme užívat také takových rčení, jako bod leží na přímce, přímka prochází bodem, přímka leží v rovině, přímka protíná přímku, průsečík dvou přímek atd.

---

[13]) V naší knížce bude *pruh* v symbolech mít zpravidla význam t. zv. *lineárního obalu*: je-li M množina nějakých elementů, t. j. bodů, přímek a rovin, pak lineární obal množiny M, symbolicky $\overline{\mathsf{M}}$, bude *lineární prostor nejmenší dimense, který je incidentní se všemi elementy z* M. Při tom lineárním prostorem dimense 0, resp. 1, resp. 2, resp. 3 budeme rozumět bod resp. přímku, resp. rovinu, resp. obyčejný prostor. Je-li tedy na př. $a \bigtriangledown A$, pak $\overline{aA} = a$. Jsou-li A, B, C, D čtyři různé body, pak $\overline{ABCD}$ je buď přímka, rovina nebo obyčejný prostor, podle toho, leží-li tyto body v přímce nebo v rovině (a při tom ne v jedné přímce) nebo v prostoru (a při tom ne v jedné rovině).

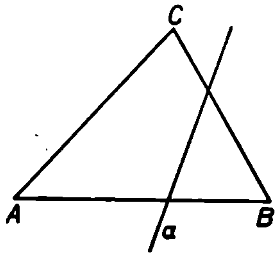
11. Axiomy rozmístění a jejich důsledky. Vztah „*bod B leží mezi body A a C*" budeme symbolicky psát $\mu(ABC)$.[13a]) Místo „non $\mu(ABC)$" budeme psát „$\bar{\mu}(ABC)$".

AXIOMY ROZMÍSTĚNÍ, $\mathfrak{R}$.

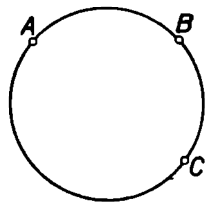
$\mathfrak{R}$, 1. *Jsou-li A, B, C tři různé kolineární body, pro které je $\mu(ABC)$, pak je také $\mu(CBA)$.*

$\mathfrak{R}$, 2. *Jsou-li A, B dva různé body, pak existuje alespoň jeden bod C tak, že $C \nabla \overline{AB}$ a $\mu(ABC)$.*

$\mathfrak{R}$, 3. *Ze tří kolineárních bodů nejvýše jeden leží mezi ostatními dvěma.*



Obr. 3.



Obr. 4.

DEFINICE. Skupina dvou různých bodů A, B se nazývá *úsečka*; symbolicky ji budeme značit AB. Body M, pro něž je $\mu(AMB)$ se nazývají *vnitřní body* úsečky nebo prostě body úsečky, body A, B jsou *koncové body* úsečky. Ostatní body přímky $\overline{AB}$ jsou *vnější body* vzhledem k úsečce AB.

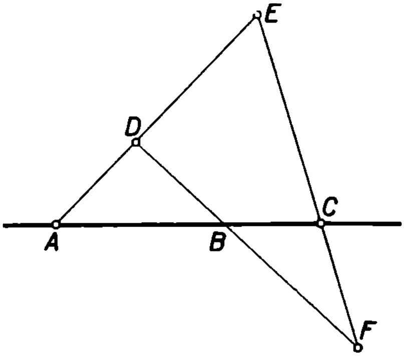
DEFINICE. Skupina tří nekolineárních bodů A, B, C se nazývá *trojúhelník*, symbolicky $\triangle ABC$. Úsečky AB, BC, AC jsou jeho *strany* a body A, B, C jeho *vrcholy*.

$\mathfrak{R}$, 4. *Budiž dán trojúhelník $\triangle ABC$ a nechť přímka a je incidentní s rovinou $\overline{ABC}$, při čemž a není incidentní s žádným z vrcholů trojúhelníka $\triangle ABC$ (viz obr. 3). Je-li a incidentní s bodem úsečky AB, pak je incidentní ještě buď s bodem úsečky BC nebo AC.*

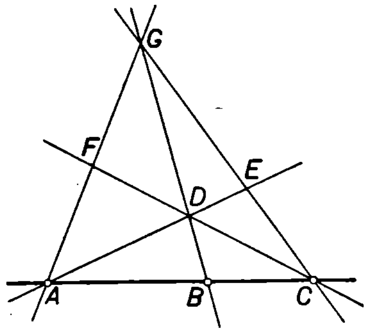
Pojem „*mezi*" s vlastnostmi uvedenými v axiomech $\mathfrak{R}$ lze zavést na některých modelech minulého paragrafu. Na MODELU 1 má obvyklý názorný význam.

[13a]) Symbol $\mu(ABC)$ jsem převzal z rukopisu práce E. Čecha *Základy geometrie*.

U Modelu 2 lze pojem „*mezi*" zavést takto: bod (b_1, b_2, b_3) je *mezi* body (a_1, a_2, a_3) a (c_1, c_2, c_3), jestliže všechny tři body leží na přímce a jestliže platí $a_i \leqq b_i \leqq c_i$ resp. $a_i \geqq b_i \geqq c_i$ $(i = 1, 2, 3)$, při čemž alespoň pro jedno i platí ostrá nerovnost. U Modelu 3 nelze pojem „*mezi*" zavést tak, aby byly splněny axiomy $\mathfrak{R}$, neboť přímky tohoto modelu se chovají jako uzavřené čáry (protože zde každé dvě přímky v rovině mají společný bod, takže lze každému bodu přímky přiřadit



Obr. 5.



Obr. 6.

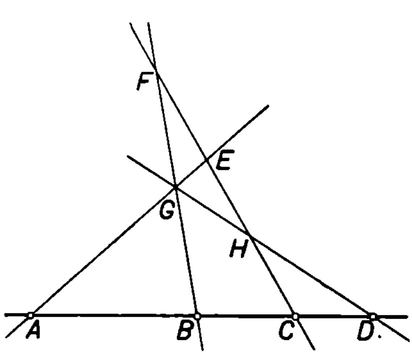
jednojednoznačně přímku svazku, jehož střed leží mimo uvažovanou přímku; pohybu bodu po přímce v jednom z obou smyslů odpovídá otáčení přímky ve svazku) a na uzavřené čáře neplatí Věta 11,2, neboť kterýkoli bod můžeme považovat za ležící mezi ostatními dvěma (viz obr. 4). Důsledkem axiomů $\mathfrak{I}$ a $\mathfrak{R}$ je m. j. věta, podle které přímka obsahuje nekonečně mnoho bodů (viz Věta 11,7), takže ani na Modelu 4 nelze zavést pojem „*mezi*" tak, aby byly splněny axiomy $\mathfrak{R}$.

Postup při odvozování vět v tomto paragrafu je následující: nejdříve jsou odvozeny základní vlastnosti vztahu „*mezi*". První důležitý výsledek je věta (11,8), podle které každý bod rozděluje přímku na dvě různé části, které pak definujeme jako *polopřímky*. Pomocí vlastností polopřímek (věty 11,9 až 11,14) zavádíme potom *uspořádání* (ve smyslu odstavce 6) bodů na přímce a pojem *orientace* přímky. Nato obracíme svoji pozornost na rozmístění bodů v rovině a dokazujeme větu (11,18), podle které každá přímka roviny rozděluje rovinu na dvě různé části. Tato věta slouží jako podklad k definici *poloroviny*. Zbytek paragrafu je pak věnován zavedení pojmu *úhlu*.

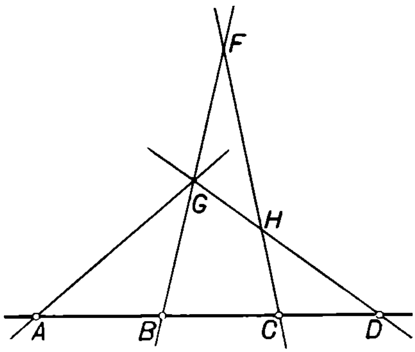
Definice. Budeme říkat, že *přímka protíná úsečku*, jestliže přímka je incidentní s některým *vnitřním* bodem této úsečky.

Věta 11,1. *Jsou-li A a C dva různé body, pak existuje vždy na přímce $\overline{AC}$ bod B tak, že je $\mu(ABC)$.*

DŮKAZ. Podle VĚTY 10,5 existuje bod D, který neleží na přímce $\overline{AC}$ (viz obr. 5), podle $\mathfrak{R}$, 2 existuje bod $E \nabla \overline{AD}$ takový, že $\mu(ADE)$, podle VĚTY 10,6 je $E \nabla \overline{ACD}$, podle $\mathfrak{R}$, 2 existuje bod $F \nabla \overline{EC}$ takový, že $\mu(ECF)$, a podle VĚTY 10,6 je $F \nabla \overline{ACD}$. Body A, E, C jsou nekolineární a přímka $\overline{DF}$ protíná úsečku AE, takže podle $\mathfrak{R}$, 4 protíná $\overline{DF}$ buď



Obr. 7.



Obr. 8.

úsečku AC nebo EC. Úsečku EC však protnout nemůže, protože pak by měla $\overline{FD}$ s $\overline{EC}$ dva průsečíky. Tedy $\overline{DF}$ protíná úsečku AC, čímž je dokázána existence bodu mezi A a C.

VĚTA 11,2. *Ze tří kolineárních bodů právě jeden je mezi ostatními dvěma.*

DŮKAZ. Protože podle $\mathfrak{R}$, 3 *nejvýše jeden* z kolineárních bodů A, B, C leží mezi ostatními dvěma, zbývá dokázat, že *alespoň jeden* leží mezi ostatními dvěma. Předpokládejme, že ani A ani C neleží mezi ostatními dvěma a zkoumejme, co potom platí o bodu B.

Zvolme bod D (viz obr. 6) tak, že $D \nabla \overline{AC}$ (to lze podle VĚTY 10,4). Podle $\mathfrak{R}$, 2 existuje bod G tak, že $G \nabla \overline{BD}$, $\mu(BDG)$. Body B, G, C jsou nekolineární, podle $\mathfrak{R}$, 4 přímka $\overline{AD}$ protíná úsečku CG v průsečíku, který označme E, takže je $\mu(CEG)$. Body B, A, G jsou nekolineární, podle $\mathfrak{R}$, 4 přímka $\overline{CD}$ protíná úsečku AG, průsečík označme F, takže je $\mu(AFG)$. Body A, E, G jsou nekolineární, přímka $\overline{FC}$ neprotíná úsečku GE, takže podle $\mathfrak{R}$, 4 je $\mu(ADE)$. Body A, C, E jsou nekolineární, podle $\mathfrak{R}$, 4 přímka $\overline{DG}$ protíná úsečku AC. Průsečíkem je ale bod B, takže je $\mu(ABC)$. ∎

VĚTA 11,3. *Je-li* $\mu(ABC)$ *a* $\mu(BCD)$, *pak je také* $\mu(ACD)$ *a* $\mu(ABD)$.

DŮKAZ. Zvolme E (viz obr. 7) tak, že $E \nabla \overline{AB}$ (to lze podle VĚTY 10,4), a zvolme $F \nabla \overline{EC}$ tak, že $\mu(CEF)$ (to lze podle $\mathfrak{R}$, 2). Podle $\mathfrak{R}$, 3 a $\mathfrak{R}$, 4 existuje bod G tak, že $G \nabla \overline{AE}, \overline{BF}$, $\mu(AGE)$, $\mu(BGF)$, a existuje bod H tak, že $H \nabla \overline{CE}, \overline{GD}$, $\mu(GHD)$. Podle axiomu $\mathfrak{R}$, 4 aplikovaného na trojúhelník $\triangle ADG$ a přímku $\overline{EH}$ platí pro bod C vztah $\mu(ACD)$, což jsme měli dokázat.

Nyní můžeme předpoklad psát $\mu(DCB)$ a $\mu(CBA)$ a podle právě dokázaného je $\mu(DBA)$ čili $\mu(DBA)$.

VĚTA 11,4. *Je-li* $\mu(ABC)$ a $\mu(ACD)$, *pak je také* $\mu(BCD)$ a $\mu(ABD)$.

DŮKAZ. Zvolme bod G tak, že $G \overline{\nabla} AB$ (viz obr. 8), a bod F tak, že $F \overline{\nabla} \overline{BG}$, $\mu(BGF)$. Přímka $\overline{CF}$ neprotíná ani úsečku AB, ani úsečku GB (podle $\mathfrak{R}$, 3 a $\mathfrak{I}$, 4), tedy podle $\mathfrak{R}$, 4 neprotíná ani úsečku GA. Podle axiomu $\mathfrak{R}$, 4 aplikovaného na trojúhelník $\triangle AGD$ protíná přímka $\overline{CF}$ úsečku GD v průsečíku, který označme H. Je tedy $H \nabla \overline{GD}, \overline{CF}$ a $\mu(GHD)$. Vzhledem k trojúhelníku $\triangle BDG$ a přímce $\overline{FH}$ platí podle $\mathfrak{R}$, 4 $\mu(BCD)$. Protože je $\mu(ABC)$, $\mu(BCD)$, pak podle VĚTY 11,2 je $\mu(ABD)$.

VĚTA 11,5. *Je-li* $\mu(ABC)$ *a* $\mu(ABD)$ *a* $C \neq D$, *pak platí právě jedna z možností* $\mu(BCD)$, $\mu(BDC)$ *čili platí* $\bar{\mu}(CBD)$.

DŮKAZ. Body B, D, C mohou splňovat pouze jeden ze tří vztahů: $\mu(BDC)$, $\mu(BCD)$, $\mu(CBD)$. Třetí však splňovat nemohou, neboť tvrzení, že by mohlo být současně $\mu(ABC)$, $\mu(ABD)$, $\mu(CBD)$, vede ke sporu. Podle VĚTY 11,4 platí totiž současně $\mu(ABC)$, $\mu(ACD)$, $\mu(BCD)$, $\mu(ABD)$, takže podle VĚTY 11,2 nemůže už být $\mu(CBD)$, vedle $\mu(BCD)$.

Snadno lze nyní verifikovat, že první dvě možnosti ke sporu nevedou, neboť platí:

$$\mu(ABC), \mu(BDC) \Rightarrow \mu(DBA), \mu(CDA) \text{ (podle VĚTY 11,4)},$$
$$\mu(ABC), \mu(DCB) \Rightarrow \mu(ACD), \mu(ABD) \text{ (podle VĚTY 11,3)},$$
$$\mu(ABD), \mu(BDC) \Rightarrow \mu(ADC), \mu(ABC) \text{ (podle VĚTY 11,3)},$$
$$\mu(ABD), \mu(DCB) \Rightarrow \mu(CBA), \mu(DCA) \text{ (podle VĚTY 11,4)},$$

při čemž žádná z těchto čtyř eventualit nevede ke sporu.

VĚTA 11,6. *Je-li* $\mu(ABD)$, $\mu(ACD)$ *a* $B \neq C$, *pak platí právě jedna z obou možností:* $\mu(ABC)$, $\mu(CBD)$.

DŮKAZ. Pro body A, B, C může a priori nastat jedna ze tří možností: $\mu(ABC)$, $\mu(BAC)$, $\mu(ACB)$. Možnost $\mu(BAC)$ není však podle VĚTY 11,3 slučitelná s předpoklady $\mu(ABD)$, $\mu(BAC) \Rightarrow \mu(DAC)$. Proto platí právě jeden z obou vztahů $\mu(ABC)$, $\mu(ACB)$. Je-li $\mu(ACB)$, pak podle VĚTY 11,4 vzhledem k $\mu(ABD)$ je $\mu(CBD)$.

VĚTA 11,7. *Jsou-li A, B dva různé body, pak množina všech bodů mezi A a B má nekonečně mnoho prvků.*

DŮKAZ. Podle VĚTY 11,1 existuje bod C_1 tak, že $C_1 \nabla \overline{AB}$, $\mu(AC_1B)$, a podle téže věty existuje bod $C_2 \nabla \overline{AB}$ tak, že $\mu(AC_2C_1)$. Podle VĚTY 11,4 je také $\mu(AC_2B)$. Body A, C_2, C_1, B jsou různé. Nyní podobně existuje bod $C_3 \nabla AB$, pro který je $\mu(AC_3C_1)$, a tedy také $\mu(AC_3B)$ a tak můžeme stále pokračovat.

DEFINICE. Body A, O, B buďtež kolineární. Jsou-li body A, O, B v takovém vztahu, že není $\mu(AOB)$, pak říkáme, že body A a B leží po *téže straně bodu O*. Je-li $\mu(AOB)$, pak říkáme, že body A a B leží *na různých stranách* od bodu O.

VĚTA 11,8. *Každý bod O přímky rozděluje body této přímky, které jsou různé od O, na dvě disjunktní třídy tak, že do téže třídy patří body ležící po téže straně od bodu O, do různých tříd patří body, ležící na různých stranách od bodu O.*

DŮKAZ. Budiž na přímce dán bod O. Vezměme na přímce bod $A \neq O$ a utvořme dvě třídy, které označíme $\mathbf{S}_1$ a $\mathbf{S}_2$, takto: do třídy $\mathbf{S}_1$ dáme bod A a každý bod X, který leží od O na téže straně jako A, do třídy $\mathbf{S}_2$ dáme bod Y, jestliže body Y a A leží na různých stranách od bodu O. Nyní musíme dokázat:

1. *Každý bod přímky mimo bod O patří právě do jedné z obou tříd.* To je ale zřejmé. Je-li totiž X jakýkoli bod $O \neq X \neq A$, pak ze tří bodů O, A, X leží právě jeden mezi ostatními dvěma.

2. *Každé dva body téže třídy leží na téže straně od bodu O.* Vezměme dva body X a Y ze třídy $\mathbf{S}_1$. Můžeme vzít hned $X \neq A \neq Y$. Podle konstrukce tříd $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ platí pro bod X buď $\mu(OAX)$, buď $\mu(OXA)$ a pro bod Y buď $\mu(OAY)$, buď $\mu(OYA)$. Potom nemůže platit $\mu(XOY)$, protože jinak by platilo $\mu(XOY)$, $\mu(OAY) \Rightarrow \mu(AOX)$ (podle VĚTY 11,4), což je spor, nebo $\mu(XOY)$, $\mu(OYA) \Rightarrow \mu(XOA)$, což je také spor. Jsou-li X a Y body třídy $\mathbf{S}_2$, pak podle konstrukce tříd je $\mu(XOA)$ a $\mu(YOA)$ a podle VĚTY 11,5 není $\mu(XOY)$.

3. *Body různých tříd leží na různých stranách od bodu O.* Budiž bod X z třídy S_1, t. j. $\mu(OAX)$ nebo $\mu(OXA)$ a bod Y z třídy S_2, t. j. $\mu(YOA)$. Potom je podle VĚTY 11,3 $\mu(OAX)$, $\mu(YOA) \Rightarrow \mu(YOX)$ a podle VĚTY 11,4 $\mu(OXA)$, $\mu(YOA) \Rightarrow \mu(XOY)$.

DEFINICE. *Polopřímka*, určená body O a A, symbolicky (OA), je množina bodů, do níž patří bod O, bod A a všechny body přímky $\overline{OA}$, které leží po téže straně bodu O jako bod A. Bod O se nazývá *počátkem* polopřímky (OA). Každý bod polopřímky různý od jejího počátku se nazývá *vnitřní bod* polopřímky. Polopřímky značíme také malými latinskými písmeny.

Každý bod O přímky určuje podle VĚTY 11,8 na ní právě dvě polopřímky, jež mají týž počátek a nemají mimo bod O společný bod. Tyto polopřímky se nazývají *opačné*. Opačná polopřímka k (OA) resp. h se značí $(OA)^*$ resp. h^*. Je-li h polopřímka, pak přímku, jíž je h částí, značíme $\overline{h}$.[14])

VĚTA 11,9. *Je-li B bod polopřímky (OA), pak je $(OA) = (OB)$.*

DŮKAZ. Zvolme M tak, že je $M \bigtriangledown \overline{OA}$ a $\mu(MOA)$. Protože B je na (OA), leží B na opačné straně od O než M. Je však $(OB) = (OM)^*$ a také $(OA) = (OM)^*$, takže $(OB) = (OA)$.

Naším nejbližším úkolem bude definovat uspořádání množiny všech bodů na přímce a to tak, aby mezi binární relací tohoto uspořádání, kterou budeme značit $\prec$, a ternární relací μ byl tento vztah: je-li $\mu(ABC)$, pak je buď $A \prec B \prec C$ nebo $C \prec B \prec A$ a obráceně.

DEFINICE. Uspořádání bodů přímky pomocí binární relace $\prec$, pro které platí ekvivalence

$$\mu(ABC) \Leftrightarrow A \prec B \prec C \text{ nebo } C \prec B \prec A$$

budeme nazývat *přirozeným uspořádáním*.

V dalším nám půjde nejdříve o důkaz existence přirozeného uspořádání. Za tím účelem ukážeme, že každému bodu X přímky lze přiřadit polopřímku, kterou označíme $p(X)$, tak, že pro každé dva body X a Y na přímce je jedna z obou polopřímek $p(X)$ a $p(Y)$ části druhé, čili že jsou ve vztahu inkluse. Nejdříve však několik pomocných vět.

VĚTA 11,10. *Jestliže je na přímce dána polopřímka (OA) a bod X, pak z obou polopřímek na $\overline{AO}$, jež mají počátek v bodě X, právě jedna je s polopřímkou (OA) ve vztahu inkluse.*

[14]) Viz poznámku [13]) na str. 47.

DŮKAZ. Je-li $X = O$, je věc zřejmá. Nechť X je na polopřímce (OA). Podle $\mathfrak{R}$, 2 existuje bod $M \nabla \overline{OX}$ tak, že $\mu(OXM)$. Potom podle VĚTY 11,9 je $(OA) = (OX) = (OM)$ a polopřímka (XM) je částí polopřímky $(OA) = (OM)$, neboť pro každý bod $Y \nabla \overline{XM}$, pro který je $\mu(XYM)$ resp. $\mu(XMY)$, platí $\mu(OXM)$, $\mu(XYM) \Rightarrow \mu(OYM)$ (podle VĚTY 11,4) resp. $\mu(OXM)$, $\mu(XMY) \Rightarrow \mu(OMY)$ (podle VĚTY 11,3). Naproti tomu polopřímky $(XM)^*$ a $(OA) = (OX)$ nejsou ve vztahu inkluse; zvolíme-li totiž $Z \nabla \overline{OA}$ tak, že $\mu(ZOX)$ (podle $\mathfrak{R}$, 2 to lze), pak Z není na (OX), je však na $(XO) = (XM)^*$. Vedle toho bod M je na (OX), není však na $(XM)^*$.

Není-li X na polopřímce (OA), je polopřímka (OA) částí polopřímky (XA), neboť je-li $\mu(OYA)$ resp. $\mu(OAY)$, je $\mu(XOA)$, $\mu(OYA) \Rightarrow \mu(XYA)$ resp. $\mu(XOA)$, $\mu(OAX) \Rightarrow \mu(XAY)$ (podle VĚTY 11,4 a VĚTY 11,3). Naproti tomu polopřímky (OA) a $(XA)^*$ nejsou ve vztahu inkluse, nýbrž jsou dokonce disjunktní, neboť pro každé Y, pro něž je $\mu(YXA)$, platí $\mu(XOA)$, $\mu(YXA) \Rightarrow \mu(YOA)$ (podle VĚTY 11,4), takže není Y na (OA).

Sledujeme-li vztahy mezi páry polopřímek téže přímky podle jejich průniku, vidíme, že nastávají pouze tyto možnosti:

1. dvě polopřímky nemají společný bod,

2. dvě polopřímky mají společný právě jeden bod — počátek obou polopřímek,

3. dvě polopřímky mají společné všechny body nějaké úsečky — počáteční body obou polopřímek jsou pak koncovými body této úsečky,

4. dvě polopřímky mají společné všechny body nějaké polopřímky, t. j. buď obě polopřímky splývají nebo jedna obsahuje druhou.

V případech 1, 2, 3 nejsou obě polopřímky ve vztahu inkluse, v případě 4 pak ano.

VĚTA 11,11. *Je-li polopřímka h obsažena v polopřímce k, pak je k^* obsažena v h^*.*

DŮKAZ. Budiž $\mu(O_1O_2A)$ a nechť $k = (O_1A)$, $h = (O_2A)$. Je-li $\mu(YO_1A)$, pak je $\mu(YO_2A)$ podle VĚTY 11,4, takže $(O_1A)^*$ je částí $(O_2A)^*$.

VĚTA 11,12. *Jestliže dvě polopřímky obsahují současně polopřímku třetí, pak jsou ve vztahu inkluse.*

DŮKAZ. Nechť polopřímky h, k, (OA) jsou různé a na téže přímce a nechť h i k obsahují polopřímku (OA). Označme počáteční bod polopřímky h písmenem O_1 a počáteční bod polopřímky k písmenem O_2. Podle VĚTY 11,9 lze psát $h = (O_1A)$, $k = (O_2A)$. Bod O_1 nemůže patřit do (OA), protože pak by $(O_1A) = h$ neobsahovala bod O. Podobně nemůže patřit do (OA) bod O_2. Je tedy současně $\mu(O_1OA)$ a $\mu(O_2OA)$. Podle VĚTY 11,5 je tedy buď $\mu(O_1O_2O)$ nebo $\mu(O_2O_1O)$. Je-li na př. $\mu(O_1O_2O)$, pak je $\mu(O_1O_2A)$ podle VĚTY 11,4 a pak (O_2A) je částí (O_1A), neboť je-li $\mu(O_2YA)$ resp. $\mu(O_2AY)$, pak je $\mu(O_1YA)$ resp. $\mu(O_1AY)$.

VĚTA 11,13. *Jestliže dvě polopřímky jsou současně obsaženy v polopřímce třetí, pak jsou ve vztahu inkluse.*

DŮKAZ plyne bezprostředně z VĚTY 11,10 a 11,9.

VĚTA 11,14. *Všechny polopřímky dané přímky lze rozdělit do právě dvou disjunktních tříd tak, že v téže třídě jsou každé dvě polopřímky ve vztahu inkluse, v různých třídách jsou polopřímky, jež ve vztahu inkluse nejsou.*

DŮKAZ. Na dané přímce zvolme polopřímku q. Do třídy S_1 dejme všechny polopřímky, jež jsou s q ve vztahu inkluse, do třídy S_2 dejme všechny ostatní.

1. *Ve třídě S_1 jsou každé dvě polopřímky ve vztahu inkluse.* Mějme dvě různé polopřímky h a k ze třídy S_1. Jestliže h obsahuje q a q obsahuje k nebo obráceně, jestliže k obsahuje q a q obsahuje h, pak je věc zřejmá. Je-li h a k obsaženo současně v q nebo obsahuje-li h a k současně polopřímku q, pak je tvrzení zřejmé podle VĚT 11,12 a 11,13.

2. *Podle* VĚTY 11,10 *nemůže třída S_1 obsahovat s polopřímkou h také polopřímku h^*.* Třída S_2 obsahuje tedy opačné polopřímky k polopřímkám třídy S_1 a podle VĚTY 11,11 třída S_2 má také tu vlastnost, že každé dvě polopřímky v ní jsou ve vztahu inkluse.

VĚTA 11,15. *Existují právě dvě přirozená uspořádání přímky a ta jsou navzájem inversní.*[15])

DŮKAZ. Pro body na přímce p zavedeme uspořádání takto: rozdělme všechny polopřímky na přímce p na dvě třídy, jak o tom mluví VĚTA 11,14. Každému bodu X přiřaďme ze třídy S_1 tu polopřímku, která má v bodě X počátek, a označme ji $p(X)$. Protože polopřímka má právě jeden počátek, mají dva různé body přiřazeny různé polopřímky a naopak. Jsou-li body X a Y různé, pak budeme říkat, že X je před Y,

[15]) Definici inversního uspořádání viz odst. 6, str. 30.

symbolicky $X \prec Y$, jestliže polopřímka $p(X)$ je obsažena v polopřímce $p(Y)$.

Je vidět, že takto definované uspořádání bodů vyhovuje oběma axiomům 1 a 2 pro uspořádání z odstavce **6**. Dokažme ještě, že je-li $\mu(ABC)$ a $A \prec B$, pak je také $B \prec C$. Avšak $A \prec B$ znamená, že $p(A)$ je obsaženo v $p(B)$. Sestrojme polopřímku h tak, že do ní dáme všechny body přímky $\overline{AB}$, které jsou od C po téže straně jako bod B. Je tedy $h = (CB)$ a h obsahuje $p(B)$. Avšak podle VĚTY 11,10 existuje k bodu C právě jedna polopřímka, jež je s $p(B)$ ve vztahu inkluse, je tedy $(CB) = p(C)$ a $p(B)$ je obsaženo v $p(C)$.

Z definice přirozeného uspořádání a z VĚTY 11,14 plyne, že existují dvě přirozená uspořádání bodů na přímce. Druhé uspořádání bychom dostali, kdybychom v definici vzali místo třídy $\boldsymbol{S}_1$ třídu $\boldsymbol{S}_2$. Obě přirozená uspořádání jsou navzájem inversní.

DEFINICE. Zvolíme-li určité přirozené uspořádání bodů na přímce, budeme říkat, že jsme přímku *orientovali* nebo že jsme na ní zvolili určitou *orientaci*. Orientace příslušející oběma inversním přirozeným uspořádáním bodů přímky budeme nazývat *opačnými orientacemi*. Přímku p, na níž jsme zvolili určitou orientaci, budeme nazývat *orientovanou* a budeme ji značit $\vec{p}$, v opačné orientaci symbolem $\vec{p}^*$.

OZNAČENÍ. Přímku $\overline{AB}$, na níž jsme zvolili orientaci tak, že je $A \prec B$, budeme značit $A\vec{B}$. Polopřímku na orientované přímce p, jež má počátek A a pro jejíž body X platí $A \prec X$, značíme $(A\vec{p})$.

VĚTA 11,16. *Přímka, která s body A, B, C leží v téže rovině a která protíná jednu ze tří úseček AB, BC, AC, protíná ještě alespoň jednu z nich.*

DŮKAZ. Jsou-li body A, B, C nekolineární, říká věta totéž jako axiom $\mathfrak{R}$, 4.

Buďtež tedy body A, B, C kolineární. Přímka $p \neq \overline{AB}$ nechť protíná úsečku AB, takže (podle definice) je incidentní s vnitřním bodem M úsečky AB, tedy $\mu(AMB)$. Pro body A, B, C platí právě jedna z možností: $\mu(ABC)$, $\mu(BCA)$, $\mu(CAB)$. Odtud dostáváme pro bod M vztahy:

$\mu(AMB), \mu(ABC) \Rightarrow \mu(AMC)$ (podle VĚTY 11,4),
$\mu(AMB), \mu(CAB) \Rightarrow \mu(BMC)$ (podle VĚTY 11,4),
$\mu(AMB), \mu(BCA) \Rightarrow$ buď $\mu(AMC)$, buď $\mu(CMB)$ (podle VĚTY 11,6).

VĚTA 11,17. *Přímka, která protíná dvě ze tří různých úseček AB, BC, CA neprotíná třetí.*

DŮKAZ. 1. *Předpokládejme předně, že body A, B, C* jsou kolineární: Nechť přímka a protíná úsečky AB a BC v bodě označeném písmenem M, takže platí $\mu(AMB)$ a $\mu(BMC)$. Při tom nemůže být $\mu(AMC)$, neboť kdyby tomu tak bylo, pak by podle VĚTY 11,5 platilo $\mu(AMC)$, $\mu(AMB) \Rightarrow \overline{\mu}(CMB)$, což by bylo ve sporu se vztahem $\mu(BMC)$.

2. *Nechť za druhé body A, B, C jsou nekolineární.* Nechť přímka a protíná úsečku AB v bodě P, úsečku BC v bodě Q. Pak a nemůže protínat úsečku AC. Předpokládejme naopak, že protíná také úsečku AC, a to v bodě R. Body P, Q, R jsou kolineární, některý z nich musí být podle VĚTY 11,2 mezi ostatními dvěma. Předpoklad, že je $\mu(PQR)$, vede ke sporu, neboť body P, R, A jsou nekolineární, přímka $\overline{CB}$ protíná úsečku RP a tedy podle axiomu $\mathfrak{R}$, 4 musí protnout buď AR, buď AP, ale obojí je nemožné podle $\mathfrak{R}$, 4. Právě tak vede ke sporu předpoklad, že $\mu(QRP)$ nebo $\mu(RPQ)$. Znamená to tedy, že přímka a nemůže protínat úsečku AC.

DEFINICE. Nechť body A, B a přímka p leží v téže rovině, při čemž A, B neleží na p. Potom říkáme, že body A a B leží *po téže straně* přímky p, jestliže p neprotíná úsečku AB. Protíná-li přímka p úsečku AB, pak říkáme, že body A, B leží *na různých stranách přímky p.*

VĚTA 11,18. *Každá přímka p roviny rozděluje body této roviny, které neleží na p, do dvou různých disjunktních tříd tak, že do téže třídy patří body ležící po téže straně přímky p, do různých tříd patří body, jež leží na různých stranách přímky p.*

DŮKAZ. Budiž v rovině dána přímka p. Vezměme v rovině bod P, jenž neleží na p, a utvořme dvě třídy, které označíme $\mathbf{S}_1$ a $\mathbf{S}_2$, takto: do $\mathbf{S}_1$ dáme bod P a bod X roviny $\overline{pP}$ dáme do třídy $\mathbf{S}_1$, jestliže X a P leží na téže straně od p, bod Y dáme do třídy $\mathbf{S}_2$, jestliže body Y a P leží na různých stranách od p.

Nyní musíme dokázat: 1. *Každý bod A roviny, který neleží na p, patří právě do jedné třídy.* To je ale zřejmé, neboť úsečka AP buď má s p společný bod nebo nemá.

2. *Každé dva body téže třídy leží na téže straně od přímky p.* Nechť body X a Y patří do třídy $\mathbf{S}_1$, $X \neq P \neq Y$. Přímka p neprotíná úsečky PX, PY, nemůže tedy podle VĚTY 11,16 protínat ani XY. Nechť body

X a Y patří do třídy S_2. Přímka p protíná úsečky PX, PY, nemůže již tedy podle VĚTY 11,17 protínat úsečku XY.

3. *Každé dva body různých tříd leží na různých stranách přímky p.* Nechť X je z třídy S_1, Y z třídy S_2. Přímka p protíná tedy úsečku PY, ale neprotíná úsečku PX. Podle VĚTY 11,16 protíná tedy p úsečku XY.

DEFINICE. *Polorovina*, určená přímkou p a bodem P — symbolicky ji budeme značit (p, P) — je množina bodů, do níž patří body přímky p, bod P a všechny body roviny $\overline{pP}$, jež leží od p po téže straně jako bod P. Přímka p se nazývá *hranicí* poloroviny (p, P). Poloroviny značíme někdy také malými řeckými písmeny.

Podle VĚTY 11,18 rozděluje každá přímka rovinu, ve které leží, na dvě poloroviny. Oběma polorovinám říkáme, že jsou opačné. Opačnou polorovinu k (p, P) značíme $(p, P)^*$.

VĚTA 11,19. *Nechť body A, B, C jsou nekolineární. Přímka $\overline{AB}$ nemá s polorovinou $(\overline{AC}, B)$ jiných společných bodů kromě těch, které leží na polopřímce (AB).*

DŮKAZ. Je-li D bod přímky $\overline{AB}$, který neleží na polopřímce (AB), pak platí $\mu(DAB)$ a podle definice poloroviny nemůže bod D ležet v polorovině $(\overline{AC}, B)$.

DEFINICE. Říkáme, že *bod leží uvnitř poloroviny*, jestliže leží v polorovině, ne však na její hranici. Podobně říkáme, že *polopřímka leží uvnitř poloroviny*, jestliže každý vnitřní bod polopřímky leží uvnitř poloroviny.

DEFINICE. Nechť p, q, r jsou tři polopřímky v téže rovině a s týmž počátkem, při čemž nechť p a r neleží na jedné přímce. Říkáme, že polopřímka q leží mezi polopřímkami p a r, symbolicky $\mu(pqr)$, jestliže polopřímka q protíná úsečku spojující libovolné dva body, ležící na polopřímkách p, r. (Podle $\mathfrak{R}$, 4 nezáleží na volbě obou těchto bodů.)

DEFINICE. Buďtež dány dvě polopřímky p, q se společným počátkem S, které neleží na téže přímce. *Úhlem* $\sphericalangle\, pq$ rozumíme množinu polopřímek, do níž vedle polopřímek p a q patří každá polopřímka r roviny $\overline{pq}$ s počátkem S, pro kterou platí $\mu(prq)$. Polopřímky p, q se nazývají *ramena* úhlu $\sphericalangle\, pq$, o všech ostatních polopřímkách úhlu $\sphericalangle\, pq$ říkáme, že *leží uvnitř* něho. Bod S se nazývá *vrcholem úhlu*.

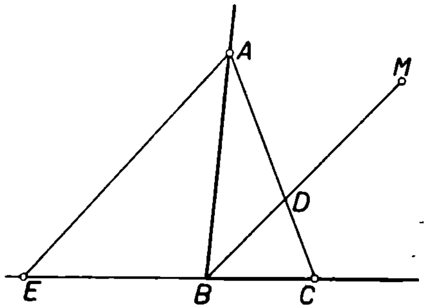
Má-li úhel vrchol B a ramena (BA) a (BC), pak ho značíme také

$\sphericalangle ABC$. Říkáme, že bod X leží *uvnitř úhlu* $\sphericalangle ABC$, jestliže uvnitř tohoto úhlu leží polopřímka (BX).

Někdy značíme úhel s rameny (PM) a $(P\vec{p})$ také krátce $\sphericalangle MP\vec{p}$.

VĚTA 11,20. *Mějme úhel* $\sphericalangle ABC$. *Bod* M *resp. polopřímka* (BM) *leží mezi* (BA) *a* (BC) *tehdy a jen tehdy, když* M *resp.* (BM) *leží současně uvnitř obou polorovin* $(\overline{BC}, A)$ *a* $(\overline{BA}, C)$.

DŮKAZ. 1. Leží-li M mezi rameny (BC) a (BA) (viz obr. 9), pak (BM) protíná úsečku AC, průsečík označme D. Vnitřní body úsečky AC a tedy i průsečík D leží uvnitř polorovin $(\overline{BC}, A)$, $(\overline{BA}, C)$, takže polopřímka (BM) leží současně uvnitř obou polorovin a tedy i bod M.



Obr. 9.

2. Nechť M leží současně uvnitř obou polorovin $(\overline{BC}, A)$, $(\overline{BA}, C)$ a budiž $E \neq B$ bod polopřímky $(BC)^*$. Uvažujme trojúhelník $\triangle ACE$. Přímka $\overline{BM}$ protíná stranu CE, tedy podle $\mathfrak{R}$, 4 musí ještě protínat buď EA nebo AC. Podle VĚTY 11,19 však stranu EA protnout nemůže, neboť body úsečky EA a bod M leží po různých stranách přímky $\overline{AB}$.

VĚTA 11,21. *Mějme úhel* $\sphericalangle pq$. *Polopřímka* $r \neq q$, *která má počátek ve vrcholu úhlu* $\sphericalangle pq$ *a leží uvnitř poloroviny* $(\bar{p}, q)$, *je buď mezi* p *a* q *nebo mezi* p^* *a* q.

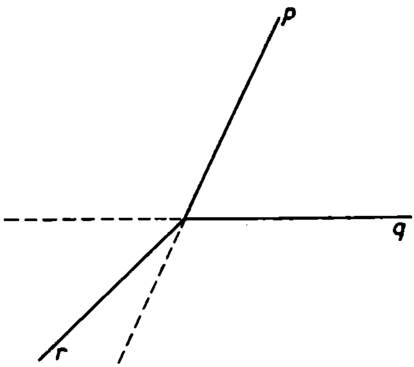
DŮKAZ. Nechť M je bod na polopřímce r různý od jejího počátku. Bod M leží uvnitř poloroviny $(\bar{p}, q)$, neleží však na q, neboť $r \neq q$. Bod M a podle toho tedy i polopřímka r je buď uvnitř poloroviny $(\bar{q}, p)$ nebo $(\bar{q}, p)^* = (\bar{q}, p^*)$. Je-li uvnitř poloroviny $(\bar{q}, p)$, je podle VĚTY 11,20 mezi p a q, je-li uvnitř poloroviny $(\bar{q}, p^*)$, je mezi p^* a q.

VĚTA 11,22. *Jestliže tři polopřímky mají společný počátek a leží v téže rovině, pak nejvýše jedna leží mezi ostatními dvěma.*

DŮKAZ. Nechť polopřímky p, q, r splňují podmínky naší věty a nechť na př. q leží mezi p a r. Je-li tedy A resp. B bod na p resp. na r, pak polopřímka q protíná úsečku AB. Průsečík označme C, takže je tedy

$\mu(ACB)$. Kdyby nyní polopřímka p ležela mezi polopřímkami q a r, muselo by být $\mu(BAC)$, což je nemožné vzhledem k VĚTĚ 11,2.

Vztah μ pro polopřímky nemá všechny vlastnosti jako vztah μ pro body na přímce. Neplatí totiž věta obdobná VĚTĚ 11,2, že by ze tří polopřímek se společným počátkem a ležících v téže rovině *právě jedna* ležela mezi ostatními dvěma. O tom se můžeme přesvědčit na příkladě polopřímek p, q, r, jestliže na př. polopřímka r leží současně uvnitř polorovin $(\bar{p}, q)^*$ a $(\bar{q}, p)^*$. Potom žádná z polopřímek p, q, r neleží mezi ostatními dvěma. (Viz obr. 10.)



Obr. 10.

Podobně jako jsme definovali pojem polopřímky a poloroviny, zavádí se pojem *poloprostoru*: je to množina, do níž patří body nějaké roviny a všechny body prostoru, ležící po téže její straně, při čemž opět definujeme, že body A, B leží po téže straně roviny α tehdy a jen tehdy, jestliže úsečka AB nemá s rovinou α společných bodů. Nebudeme zde však vlastnosti poloprostorů blíže rozvádět.

12. Axiomy shodnosti a jejich důsledky. Vztah „*úsečka AB je shodná s úsečkou CD*“ budeme symbolicky psát „$AB \equiv CD$“ a vztah „*úhel $\sphericalangle\, pq$ je shodný s úhlem $\sphericalangle\, rs$*“ budeme psát „$\sphericalangle\, pq \equiv \sphericalangle\, rs$“.

AXIOMY SHODNOSTI, $\mathfrak{S}$:

$\mathfrak{S}$, 1. *Shodnost úseček je vztah reflexivní a transitivní.*

$\mathfrak{S}$, 2. *Je-li $\mu(A_1B_1C_1)$, $\mu(A_2B_2C_2)$, $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, pak je také $A_1C_1 \equiv A_2C_2$.*

$\mathfrak{S}$, 3. *Buďtež dány body $A_1 \neq B_1$ a nechť p je polopřímka s počátkem A_2. Potom na polopřímce p existuje vždy alespoň jeden bod $B_2 \neq A_2$ tak, že je $A_1B_1 \equiv A_2B_2$.*

$\mathfrak{S}$, 4. *Jsou-li p, q polopřímky s týmž počátkem a $\bar{p} \neq \bar{q}$, pak je vždy $\sphericalangle\, pq \equiv \sphericalangle\, qp$.*

$\mathfrak{S}$, 5. *Je-li dán úhel $\sphericalangle\, p_1q_1$, polopřímka p_2 s počátkem S a polorovina ω s hranicí $\bar{p}_2$, pak v ω existuje právě jedna polopřímka q_2 s počátkem S a taková, že $\sphericalangle\, p_1q_1 \equiv \sphericalangle\, p_2q_2$.*

$\mathfrak{S}$, 6. *Buďtež dány dva trojúhelníky $\triangle\, A_1B_1C_1$ a $\triangle\, A_2B_2C_2$. Je-li*

$A_1B_1 \equiv A_2B_2$, $A_1C_1 \equiv A_2C_2$ a $\sphericalangle B_1A_1C_1 \equiv \sphericalangle B_2A_2C_2$, pak je také $\sphericalangle A_1B_1C_1 \equiv \sphericalangle A_2B_2C_2$.

Pojem shodnosti má v MODELU 1 obvyklý význam: dvě úsečky resp. dva úhly jsou *shodné*, jestliže je lze přemístit tak, že splynou. V MODELU 2 lze pojem shodnosti zavést tak, že úsečky AB a CD (kde $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, $D = (d_1, d_2, d_3)$) jsou shodné, jestliže je

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = (c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2 + (c_3 - d_3)^2.$$

Shodnost úhlů můžeme zavést pomocí shodnosti úseček na příklad takto: úhly $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle DEF$ budou shodné, jestliže bude $AB \equiv DE, BE \equiv EF, AC \equiv DF$. Pak MODEL 2 bude splňovat axiomy $\mathfrak{S}$.

V dalším odvodíme nejdůležitější důsledky axiomů shodnosti. Po větách o *shodnosti trojúhelníků* (12,4; 12,5; 12,8) zavedeme některé nové pojmy: úhly *vedlejší* a *vrcholové*, úhel *pravý* (existuje alespoň jeden úhel pravý — VĚTA 12,14; všechny pravé úhly jsou shodné — VĚTA 12,15), dále pojem *středu* úsečky a *osy* úsečky i úhlu. Na základě primitivních pojmů „mezi" a „shodnosti" je zaveden vztah „*menší* — *větší*" pro úsečky a úhly. Následuje věta pro další výklad fundamentální důležitosti, totiž věta o vnějším úhlu trojúhelníka (VĚTA 12,23).

Pomocí primitivních pojmů „mezi" a „shodnosti" lze také zavést *sčítání úseček a úhlů*. Přitom je však nutno *rozšířit* námi zavedený pojem úhlu (který odpovídá dosud jen t. zv. úhlům dutým), aby zahrnoval také úhel přímý a vypuklý. Dále je zaveden pojem *vzdálenosti dvou bodů A, B* jakožto třídy všech úseček shodných s úsečkou AB a podobně i pojem *velikosti úhlu* $\sphericalangle pq$ jakožto třídy všech úhlů shodných s úhlem $\sphericalangle pq$. Nezavádíme tedy vzdálenost a velikost úhlu jakožto *čísla*, protože v našem dalším výkladu se bez toho můžeme obejít. Věta o délce lomené čáry spojující dva body (VĚTA 12,32), jež je zobecněním důležité *trojúhelníkové nerovnosti* (VĚTA 12,26), uzavírá probírané vlastnosti vztahu shodnosti v rovině.

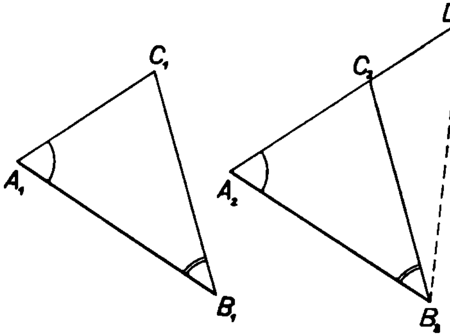
Zbývající část tohoto paragrafu je věnována *útvarům prostorovým*. Jde zejména o zavedení stěnového úhlu a o pojem kolmosti přímek a rovin. Závěrečné věty (12,45 a 12,46) se zabývají v podstatě tvrzeními o vztazích mezi úhlem a jeho kolmým průmětem.

VĚTA 12,1. *Jestliže pro tři kolineární body A, B, C platí $\mu(ABC)$, pak nemůže být $AB \equiv AC$.*

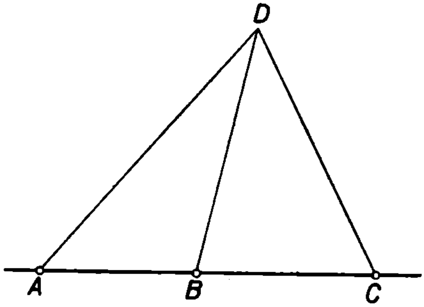
DŮKAZ. Nechť je $\mu(ABC)$ a nechť naopak platí $AB \equiv AC$. Mimo přímku $\overline{AB}$ zvolme bod D (viz obr. 11). Protože $AB \equiv AC$, $AD \equiv AD$, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$ je podle $\mathfrak{S}$, 6 $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$. Protože je $\mu(ABC)$, body B a C jsou v téže polorovině $(\overline{AD}, C)$. Podle $\mathfrak{S}$, 5 je polopřímka $\overline{DB}$ totožná s polopřímkou $\overline{DC}$, což je spor, neboť D neleží na $\overline{BC}$.

VĚTA 12,2. *Buďtež dány body $A_1 \neq B_1$ a nechť p je polopřímka s počátkem A_2. Potom na polopřímce p existuje vždy právě jeden bod B_2 tak, že platí $A_1B_1 \equiv A_2B_2$.*

DŮKAZ. Kdyby byly takové body dva, B_2 a B_2', pak by bylo $A_2B_2' \equiv \equiv A_2B_2$ a současně by platilo buď $\mu(A_2B_2'B_2)$ nebo $\mu(A_2B_2B_2')$. Podle VĚTY 12,1 jsou však obě možnosti ve sporu se vztahem $A_2B_2' \equiv A_2B_2$.



Obr. 11.



Obr. 12.

POZNÁMKA. *Shodnost úseček je vztah symetrický a má tu vlastnost, že vždycky platí $AB \equiv BA$,* jak se dá z axiomů $\mathfrak{S}$ snadno dokázat. Platí-li totiž $AB \equiv CD$, pak podle $\mathfrak{S}$, 3 existuje na polopřímce (AB) bod B', pro který platí $CD \equiv AB'$, čili vzhledem k transitivnosti shodnosti úseček také $AB \equiv AB'$. Podle VĚTY 12,2 je však $B = B'$, neboť B a B' leží na téže polopřímce (AB), takže platí také $CD \equiv AB$. Že vždycky platí $AB \equiv BA$, plyne z toho, že shodnost úseček je vztah reflexivní a že symboly AB i BA označují touž úsečku.

Později dokážeme, že také shodnost úhlů je vztah reflexivní, symetrický a transitivní.

VĚTA 12,3. *Jestliže body A_1, B_1, C_1 jsou kolineární a body A_2, B_2, C_2 jsou kolineární a jestliže platí $\mu(A_1B_1C_1)$ a $\mu(A_2B_2C_2)$ a jestliže ze vztahů $A_1B_1 \equiv A_2B_2$; $B_1C_1 \equiv B_2C_2$; $A_1C_1 \equiv A_2C_2$ platí alespoň dva, potom platí také třetí.*

DŮKAZ. Nechť je $\mu(A_1B_1C_1)$ a $\mu(A_2B_2C_2)$. Jestliže je $A_1B_1 \equiv A_2B_2$ a $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, potom je také $A_1C_1 \equiv A_2C_2$ podle $\mathfrak{S}$, 2. Budiž tedy $A_1B_1 \equiv A_2B_2$; $A_1C_1 \equiv A_2C_2$. Kdyby neplatilo $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, bylo by

$B_1C_1 \not\equiv B_2C_2$. Podle $\mathfrak{S}$, 3 existuje však na polopřímce (B_2C_2) bod C_2' tak, že $B_1C_1 \equiv B_2C_2'$. Bylo by tedy $C_2 \neq C_2'$. Protože je $\mu(A_1B_1C_1)$, $\mu(A_2B_2C_2')$, $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, $B_1C_1 \equiv B_2C_2'$, bylo by podle $\mathfrak{S}$, 2 $A_1C_1 \equiv \equiv A_2C_2'$, takže by platilo $A_2C_2 \equiv A_2C_2'$. To však je ve sporu s VĚTOU 12,2, neboť C_2 a C_2' jsou na téže polopřímce (A_2B_2) a přitom $C_2 \neq C_2'$

Jestliže je $B_1C_1 \equiv B_2C_2$ a $A_1C_1 \equiv A_2C_2$, potom důkaz probíhá stejně. Liší se pouze záměnou písmen A a C.

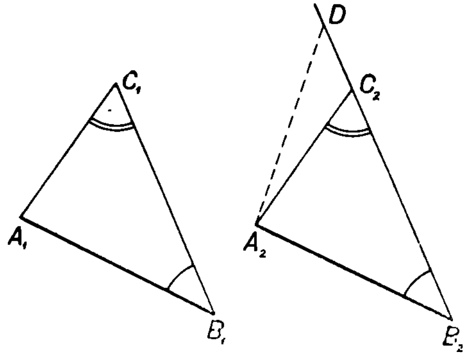
DEFINICE. O dvou trojúhelnících $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ říkáme, že jsou *shodné*, symbolicky $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_2B_2C_2$, jestliže platí vztahy:

$$A_1B_1 \equiv A_2B_2; \quad A_1C_1 \equiv A_2C_2; \quad B_1C_1 \equiv B_2C_2,$$
$$\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle C_2; \quad \sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2; \quad \sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2,$$

ve kterých píšeme $\sphericalangle C_1$ místo $\sphericalangle A_1C_1B_1$ a pod. (tohoto označení, pokud nepovede k nedorozumění, budeme používat i nadále).

VĚTA 12,4. *Jestliže pro dva trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ platí $A_1B_1 \equiv A_2B_2$; $A_1C_1 \equiv A_2C_2$; $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2$, pak jsou shodné.*

DŮKAZ. Máme dokázat, že platí $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle C_2$, $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$. Stačí však dokázat pouze $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, protože platnost vztahu $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$ potvrzuje axiom $\mathfrak{S}$, 6 přímo a vztah $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle C_2$ plyne z $\mathfrak{S}$, 6, když v něm zaměníme písmena B a C, což můžeme učinit vzhledem k $\mathfrak{S}$, 4. Kdyby bylo $B_1C_1 \not\equiv \not\equiv B_2C_2$, pak by na polopřímce (B_2C_2) existoval bod D (obr. 12) tak, že $B_2 \div D \div C_2$, $B_1C_1 \equiv \equiv B_2D$ (podle $\mathfrak{S}$, 3). Protože $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, bylo by podle $\mathfrak{S}$, 6 $\sphericalangle B_1A_1C_1 \equiv \sphericalangle B_2A_2D$ a body C_2 a D by ležely v téže polorovině $(\overline{B_2A_2}, C_2)$. Podle $\mathfrak{S}$, 5 by tedy polopřímky (A_2C_2) a (A_2D) byly totožné, což je spor, neboť A_2 neleží na $\overline{DC_2} = \overline{C_2B_2}$.



Obr. 13.

VĚTA 12,5. *Jestliže pro dva trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ platí $A_1B_1 \equiv A_2B_2$; $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2$; $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$, pak jsou shodné.*

DŮKAZ. Dokážeme-li, že $A_1C_1 \equiv A_2C_2$, jsme vzhledem k VĚTĚ 12,4 hotovi. Kdyby bylo $A_1C_1 \not\equiv A_2C_2$, pak by na polopřímce (A_2C_2) existoval bod D (viz obr. 13) tak, že $A_2 \div D \div C_2$, $A_1C_1 \equiv A_2D$. Podle $\mathfrak{S}$, 6 je za tohoto předpokladu $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle A_2B_2D$. Protože je také $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle A_2B_2C_2$ a protože body C_2 a D jsou v téže polorovině $(\overline{A_2B_2}, C_2)$, jsou podle $\mathfrak{S}$, 5 také polopřímky (B_2C_2) a (B_2D) totožné, což je spor, neboť B_2 neleží na $\overline{C_2D} = \overline{A_2C_2}$.

Věta 12,6. *Nechť každá trojice polopřímek p_1, q_1, r_1 a p_2, q_2, r_2 má týž počátek, leží v téže rovině a platí pro ni $\mu(p_1q_1r_1)$, $\mu(p_2q_2r_2)$. Jestliže ze tří vztahů $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \sphericalangle p_2q_2$, $\sphericalangle p_1r_1 \equiv \sphericalangle p_2r_2$, $\sphericalangle q_1r_1 \equiv \sphericalangle q_2r_2$ platí alespoň dva, je splněn i třetí.*

Důkaz. Společný počátek trojice p_1, q_1, r_1 označme O_1, trojice p_2, q_2, r_2 písmenem O_2. Nechť platí nejprve $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \sphericalangle p_2q_2$ a $\sphericalangle q_1r_1 \equiv \sphericalangle q_2r_2$ a předpokládejme, že jest $\sphericalangle p_1r_1 \not\equiv \sphericalangle p_2r_2$. Pak v polorovině $(\overline{p_2}, r_2)$ existuje polopřímka r' s počátkem O_2 (viz obr. 14) a taková, že $\sphericalangle p_1r_1 \equiv \sphericalangle p_2r'$, při čemž jest $r' \div r_2$. Budiž A_1 resp. A_2 bod na polopřímce p_1 resp. p_2 tak, že $O_1A_1 \equiv O_2A_2$ a bod B_1 resp. B_2 na polopřímce r_1 resp. r' tak, že $O_1B_1 \equiv O_2B_2$. Protože je $\mu(p_1q_1r_1)$, protíná q_1 úsečku A_1B_1; průsečík označme C_1. Na polopřímce (A_2B_2) zvolme bod C_2 tak, že $A_1C_1 \equiv A_2C_2$. Protože podle Věty 12,4 je $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, je podle Věty 12,3 také $C_1B_1 \equiv C_2B_2$. Ze vztahů $O_1A_1 \equiv O_2A_2$, $O_1B_1 \equiv O_2B_2$, $\sphericalangle p_1r_1 \equiv \sphericalangle p_2r'$ plyne podle Věty 12,4 $\sphericalangle O_1A_1C_1 \equiv \sphericalangle O_2A_2C_2$ a $\sphericalangle O_1B_1C_1 \equiv \sphericalangle O_2B_2C_2$. Ze vztahů $O_1A_1 \equiv$ $\equiv O_2A_2$, $A_1C_1 \equiv A_2C_2$, $\sphericalangle O_1A_1C_1 \equiv \sphericalangle O_2A_2C_2$ plyne podle Věty 12,4 $\sphericalangle A_1O_1C_1 \equiv \sphericalangle A_2O_2C_2$, takže podle $\mathfrak{S}$, 5 leží C_2 na q_2. Protože platí $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, $O_1B_1 \equiv O_2B_2$, $\sphericalangle O_1B_1C_1 \equiv \sphericalangle O_2B_2C_2$, dokážeme pomocí Věty 12,4, že $\sphericalangle C_1O_1B_1 \equiv \sphericalangle C_2O_2B_2$ čili $\sphericalangle q_1r_1 \equiv \sphericalangle q_2r'$. Protože je také $\sphericalangle q_1r_1 \equiv \sphericalangle q_2r_2$ a při tom je $r_2 \div r'$ a r_2 a r' leží v téže polorovině, je závěr ve sporu s $\mathfrak{S}$, 5.

Analogicky probíhá důkaz v obou ostatních případech.

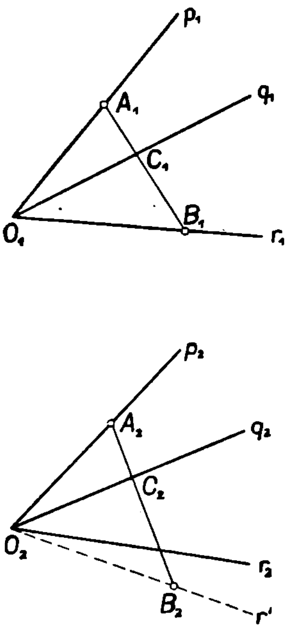
Věta 12,7. *Jestliže v trojúhelníku $\triangle ABC$ je $AC \equiv CB$, je $\sphericalangle A \equiv$ $\equiv \sphericalangle B$.*

Důkaz je důsledkem axiomu $\mathfrak{S}$, 4 a axiomu $\mathfrak{S}$, 6, použitého na $\triangle CAB$ a $\triangle CBA$.

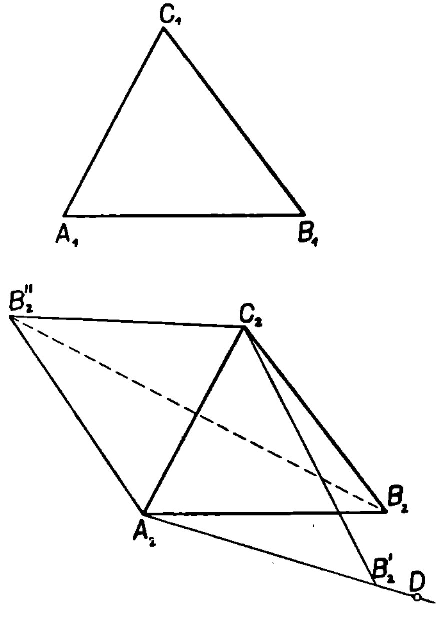
Definice. Trojúhelník, který má dvě shodné strany, se nazývá *rovnoramenný*.

VĚTA 12,8. *Jestliže pro dva trojúhelníky* $\triangle A_1B_1C_1$ *a* $\triangle A_2B_2C_2$ *platí* $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, $A_1C_1 \equiv A_2C_2$, $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, *pak jsou shodné.*

DŮKAZ. Vzhledem k VĚTĚ 12,4 stačí dokázat, že $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2$. Kdyby naopak bylo $\sphericalangle A_1 \not\equiv \sphericalangle A_2$, existovala by podle $\mathfrak{S}$, 5 polopřímka (A_2D) v polorovině $(\overline{A_2C_2}, B)$ (viz obr. 15) tak, že $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle C_2A_2D$,



Obr. 14.



Obr. 15.

při čemž by bylo $(A_2B_2) \neq (A_2D)$. Podle $\mathfrak{S}$, 3 leží na (A_2D) bod B_2' tak, že $A_1B_1 \equiv A_2B_2'$. Protože platí $A_1C_1 \equiv A_2C_2$, $A_1B_1 \equiv A_2B_2'$, $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle C_2A_2B_2'$, je podle VĚTY 12,4 také $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_2B_2'C_2$, speciálně tedy $B_1C_1 \equiv B_2'C_2$. Protože shodnost úseček je vztah symetrický a transitivní, trojúhelníky $\triangle A_2B_2C_2$ a $\triangle A_2B_2'C_2$ mají shodné strany. Podobně sestrojme trojúhelník $\triangle A_2B_2''C_2$ s vrcholem B_2'' na opačné straně od $\overline{A_2C_2}$ než je B_2, pro který platí $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle C_2A_2B_2''$ a $A_1B_1 \equiv A_2B_2''$ a tedy také $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_2B_2''C_2$. Uvažujme trojúhelníky $\triangle A_2B_2B_2''$ a $\triangle C_2B_2B_2''$. Protože je $A_2B_2 \equiv A_2B_2''$ a $C_2B_2 \equiv C_2B_2''$, platí podle VĚTY 12,7 $\sphericalangle A_2B_2B_2'' \equiv \sphericalangle A_2B_2''B_2$ a $\sphericalangle C_2B_2B_2'' \equiv \sphericalangle C_2B_2''B_2$

čili podle VĚTY 12,6 je $\sphericalangle A_2B_2''C_2 \equiv \sphericalangle A_2B_2C_2$. Odtud pomocí VĚTY 12,4 plyne, že $\triangle A_2B_2''C_2 \equiv \triangle A_2B_2C_2$, speciálně tedy $\sphericalangle C_2A_2B_2'' \equiv \equiv \sphericalangle C_2A_2B_2$. Analogicky dokážeme, že $\sphericalangle C_2A_2B_2'' \equiv \sphericalangle C_2A_2B_2'$. Protože je $(A_2B_2) \neq (A_2B_2'')$, máme vzhledem k $\mathfrak{S}$, 5 spor.

VĚTA 12,9. *Je-li $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \sphericalangle p_2q_2$ a $\sphericalangle p_2q_2 \equiv \sphericalangle p_3q_3$, pak je také $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \sphericalangle p_3q_3$.*

DŮKAZ. Zvolme body $O_1, O_2, O_3, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ tak, aby platilo $O_1A_1 \equiv O_2A_2$, $O_2A_2 \equiv O_3A_3$, $O_1B_1 \equiv O_2B_2$, $O_2B_2 \equiv O_3B_3$, $\sphericalangle A_1O_1B_1 \equiv \sphericalangle p_1q_1$, $\sphericalangle A_2O_2B_2 \equiv \sphericalangle p_2q_2$, $\sphericalangle A_3O_3B_3 \equiv \sphericalangle p_3q_3$. Podle VĚTY 12,4 je potom $A_2B_2 \equiv A_2B_2$, $A_2B_2 \equiv A_3B_3$. Protože shodnost úseček je vztah symetrický a transitivní, je $O_1A_1 \equiv O_3A_3$, $O_1B_1 \equiv O_3B_3$, $A_1B_1 \equiv A_3B_3$, takže podle VĚTY 12,8 platí $\triangle O_1A_1B_1 \equiv \equiv \triangle O_3A_3B_3$, speciálně tedy $\sphericalangle A_1O_1B_1 \equiv \sphericalangle A_3O_3B_3$ čili $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \equiv \sphericalangle p_3q_3$.

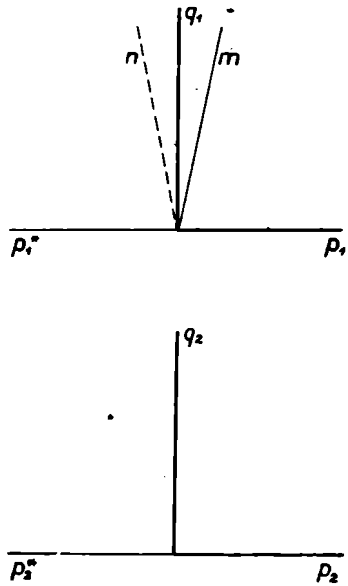
POZNÁMKA. *Shodnost úhlů je vztah reflexivní, symetrický a transitivní.* Podle $\mathfrak{S}$, 4 platí totiž $\sphericalangle pq \equiv \sphericalangle qp$ a současně $\sphericalangle qp \equiv \sphericalangle pq$, takže vzhledem k transitivnosti, o které nás poučuje VĚTA 12,10, platí $\sphericalangle pq \equiv \sphericalangle pq$. Dokažme tedy ještě, že shodnost úhlů je také vztah symetrický. Platí-li $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \sphericalangle p_2q_2$, pak podle $\mathfrak{S}$, 5 existuje v polorovině $(\overline{p}_1, q_1)$ polopřímka q_1' (jež má společný počátek s p_1) tak, že je $\sphericalangle p_2q_2 \equiv \sphericalangle p_1q_1'$. Vzhledem k transitivnosti tedy platí $\sphericalangle p_1q_1 \equiv \equiv \sphericalangle p_1q_1'$, a protože q_1 i q_1' leží v téže polorovině $(\overline{p}_1, q_1)$, platí podle $\mathfrak{S}$, 5 $q_1 = q_1'$, takže jest $\sphericalangle p_2q_2 \equiv \sphericalangle p_1q_1$.

VĚTA 12,10. *Nechť body A, B, C a D, E, F jsou kolineární, při čemž nechť je $\mu(ABC)$ a E leží na polopřímce (DF). Je-li $AB \equiv DE$ a $AC \equiv \equiv DF$, pak je také $\mu(DEF)$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že naopak platí $\mu(DFE)$. Na polopřímce $(CB)^*$ zvolme bod G tak, aby bylo $CG \equiv FE$. Protože je $\mu(ACG)$ a $\mu(DFE)$ a $AC \equiv DF$, $CG \equiv FE$, je podle $\mathfrak{S}$, 2 také $AG \equiv DE$. Protože je také $AB \equiv DE$ a při tom $G \neq B$ a G a B jsou na téže straně od A, je to vzhledem k VĚTĚ 12,2 spor.

VĚTA 12,11. *Buďtež dány dva shodné úhly $\sphericalangle ab \equiv \sphericalangle pq$. Jestliže c je polopřímka úhlu $\sphericalangle ab$, pak existuje polopřímka r, jež je polopřímkou úhlu $\sphericalangle pq$ a jež splňuje vztahy $\sphericalangle ac \equiv \sphericalangle pr$, $\sphericalangle cb \equiv \sphericalangle rq$.*

DŮKAZ. Zvolme body A, B, C, P, Q, R tak, že úhel $\sphericalangle ABC$ je týž jako $\sphericalangle ab$ a $\sphericalangle PQR$ týž jako $\sphericalangle pq$, při čemž vzhledem k $\mathfrak{S}$, 3 můžeme předpokládat, že jest $AB \equiv PQ$, $BC \equiv QR$. Pak je také $AC \equiv PQ$, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle QPR$, $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle QRP$. Protože c leží uvnitř úhlu $\sphericalangle ab$, protíná c úsečku AC. Průsečík označme D. Zvolme S na polopřímce (PR) tak, že $AD \equiv PS$. Podle VĚTY 12,10 je $\mu(PSR)$, takže podle VĚTY 12,3 je také $CD \equiv RS$. Podle axiomu $\mathfrak{S}$, 6 aplikovaného na trojúhelníky $\triangle ABD$ a $\triangle PQS$ je $\sphericalangle ABD \equiv$ $\equiv \sphericalangle PQS$ a podobně je $\sphericalangle CBD \equiv$ $\equiv \sphericalangle RQS$. Polopřímka (QS) má tedy vlastnost polopřímky r, o níž je řeč v naší větě.



Obr. 16.

DEFINICE. Dva úhly nazýváme *vedlejší*, jestliže mají společné jedno rameno (a tedy i vrchol) a jestliže jejich zbývající ramena jsou opačné polopřímky.

VĚTA 12, 12. *Vedlejší úhly shodných úhlů jsou také shodné.*

DŮKAZ. Nechť body trojic A_1, B_1, C_1 a A_2, B_2, C_2 jsou nekolineární, při čemž nechť $\sphericalangle A_1B_1C_1 \equiv \sphericalangle A_2B_2C_2$. Na polopřímce $(B_1C_1)^*$ resp. $(B_2C_2)^*$ zvolme bod C_1' resp. C_2'.

Můžeme předpokládat, že $B_1A_1 \equiv$ $\equiv B_2A_2$, $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, $B_1C_2' \equiv B_2C_2'$. Podle $\mathfrak{S}$, 2 je potom $C_1C_1' \equiv C_2C_2'$. Podle VĚTY 12,4 aplikované na trojúhelníky $\triangle B_1A_1C_1$ a $\triangle B_2A_2C_2$ je $C_1A_1 \equiv C_2A_2$, $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle A_2$ a podle VĚTY 12,4 aplikované na trojúhelníky $\triangle C_1C_1'A_1$ a $\triangle C_2C_2'A_2$ je $C_1'A_1 \equiv C_2'A_2$, $\sphericalangle C_1C_1'A_1 \equiv \sphericalangle C_2C_2'A_2$. Podle axiomu $\mathfrak{S}$, 6 aplikovaného na $\triangle C_1'B_1A_1$ a $\triangle C_2'B_2A_2$ je $\sphericalangle C_1'B_1A_1 \equiv \sphericalangle C_2'B_2A_2$.

VĚTA 12,13. *Budiž dán úhel $\sphericalangle pq$. Pak platí $\sphericalangle pq \equiv \sphericalangle p^*q^*$.*

DŮKAZ plyne z VĚTY 12,12.

DEFINICE. Úhly $\sphericalangle pq$ a $\sphericalangle p^*q^*$ se nazývají *vrcholové*.

DEFINICE. Úhel shodný se svým vedlejším se nazývá *pravý*.

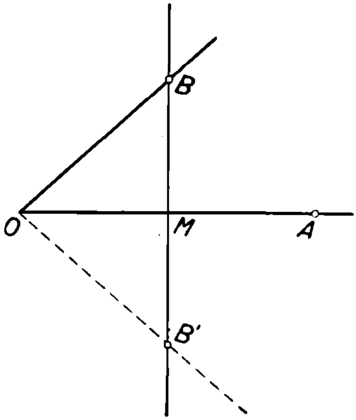
VĚTA 12,14. *Existuje pravý úhel.*

DŮKAZ. Vezměme libovolný úhel $\sphericalangle AOB$. Podle $\mathfrak{S}$, 5 existuje polopřímka OB' (viz obr. 16) tak, že $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle AOB'$, při čemž body

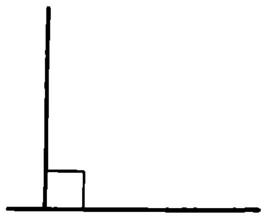
B a B' jsou na různých stranách přímky $\overline{AO}$ a při čemž podle $\mathfrak{S}$, 3 je $OB \equiv OB'$. Označme průsečík $\overline{OA}$ a $\overline{BB'}$ písmenem M. Podle $\mathfrak{S}$, 6 je $\sphericalangle\, BMO \equiv \sphericalangle\, B'MO$, takže úhly $\sphericalangle\, BMO$ a $\sphericalangle\, B'MO$ jsou pravé.

VĚTA 12,15. *Všechny pravé úhly jsou shodné.*

DŮKAZ. Mějme dva pravé úhly $\sphericalangle\, p_1q_1$ a $\sphericalangle\, p_2q_2$. To znamená, že $\sphericalangle\, p_1q_1 \equiv \sphericalangle\, q_1p_1^*$, $\sphericalangle\, p_2q_2 \equiv \sphericalangle\, q_2p_2^*$. Za předpokladu, že neplatí $\sphericalangle\, p_1q_1 \equiv \sphericalangle\, p_2q_2$, existuje podle $\mathfrak{S}$, 5 právě jedna polopřímka m (viz obr. 17) s počátkem ve vrcholu úhlu $\sphericalangle\, p_1q_1$ a v polorovině $(\overline{p}_1, q_1)$ tako-



Obr. 17.



Obr. 18.

vá, že platí $\sphericalangle\, p_1m \equiv \sphericalangle\, p_2q_2$, a při tom $m \neq q_1$. Podle VĚTY 11,20 je buď $\mu(p_1mq_1)$, buď $\mu(q_1mp_1^*)$. Je-li na př. $\mu(p_1mq_1)$, pak existuje podle VĚTY 12,11 polopřímka n tak, že je $\mu(q_1np_1^*)$ a $\sphericalangle\, p_1m \equiv \sphericalangle\, p_1^*n$ a při tom $n \neq m$. Je ale $\sphericalangle\, p_2q_2 \equiv \sphericalangle\, p_1^*n$ a také (podle VĚTY 12,12) $\sphericalangle\, p_2q_2 \equiv$ $\equiv \sphericalangle\, q_2p_2^* \equiv \sphericalangle\, mp_1^*$, což je vzhledem k $\mathfrak{S}$, 5 spor. Je zřejmé, že ke sporu vede také zbývající předpoklad, že platí $\mu(q_1mp_1^*)$.

OZNAČENÍ. Pravý úhel budeme v textu značit také písmenem R. Na obrázcích budeme pravý úhel vyznačovat malým čtverečkem, jako je to na obr. 18.

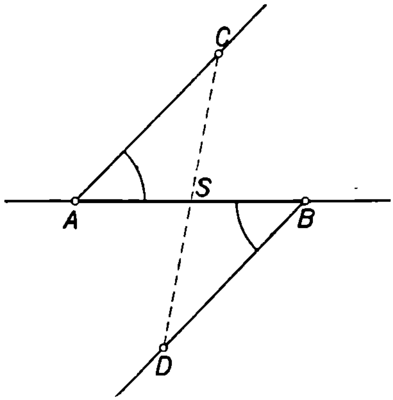
VĚTA 12,16. *Budiž dána polopřímka p a polorovina s hranicí $\overline{p}$. Pak v této polorovině existuje právě jedna polopřímka, mající počátek společný s danou polopřímkou p a svírající s ní pravý úhel.*

DŮKAZ. *Existence* takové polopřímky plyne z VĚTY 12,14. Kdyby existovaly takové polopřímky *dvě*, q a q', pak by podle VĚTY 12,15 bylo $\sphericalangle\, pq \equiv \sphericalangle\, pq'$ a to by byl vzhledem k $\mathfrak{S}$, 5 spor.

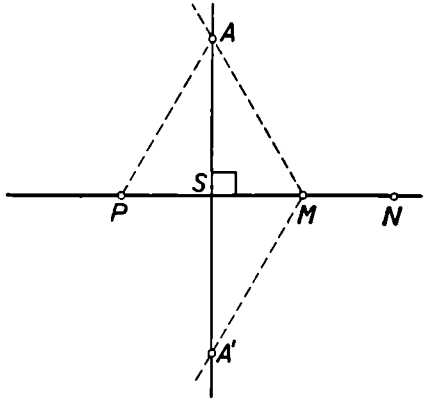
Definice. Nechť polopřímky p a q mají společný počátek a svírají pravý úhel. Pak říkáme, že přímky $\overline{p}$ a $\overline{q}$ jsou *k sobě kolmé*, nebo že jsou to *kolmice*. Symbolicky to značíme $\overline{p} \perp \overline{q}$.

Věta 12,17. *Daným bodem na přímce lze vést v dané rovině (incidentní s přímkou) právě jednu kolmici k této přímce.*

Důkaz plyne z Věty 12,16.



Obr. 19.



Obr. 20.

Definice. Bod O přímky AB se nazývá *středem úsečky* AB, jestliže platí $AO \equiv OB$.

Za pomoci Věty 12,1 lze sporem snadno dokázat, že střed úsečky leží mezi jejími koncovými body.

Věta 12,18. *Každá úsečka má střed a to právě jeden.*

Důkaz. *Existence*: mějme úsečku AB (viz obr. 19) a nechť body C a D jsou v opačných polorovinách s hranicí $\overline{AB}$ a při tom nechť $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABD$ a $AC \equiv BD$. Úsečka CD protíná přímku $\overline{AB}$, neboť C a D jsou na různých stranách od $\overline{AB}$, průsečík označme S. Podle Věty 12,4 je $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$, čili též $CB \equiv DA$. Podle Věty 12,8 je $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$, tedy $\sphericalangle ADS \equiv \sphericalangle BCS$. Podle Věty 12,5 je $\triangle ADS \equiv \triangle BCS$, čili $AS \equiv BS$.

Jednoznačnost: nechť úsečka AB má dva středy O_1 a O_2; je tedy $AO_1 \equiv O_1B$, $AO_2 \equiv O_2B$ a $\mu(AO_1B)$, $\mu(AO_2B)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $\mu(AO_1O_2)$. Budiž nyní O' takový bod polopřímky (AO_1), že je $AO' \equiv BO_2$. Podle VĚTY 12,10 platí současně se vztahem $\mu(BO_2O_1)$ vztah $\mu(AO'O_1)$, takže je jistě $O' \neq O_2$, při čemž oba body leží na polopřímce (AO_1). To je ale vzhledem k $AO' \equiv AO_2$ spor (VĚTA 12,2).

DEFINICE. O polopřímce r s počátkem ve vrcholu úhlu $\sphericalangle\, pq$, která leží v jeho rovině a splňuje vztah $\sphericalangle\, pr \equiv \sphericalangle\, rq$, říkáme, že *úhel půlí* nebo že je to jeho *půlící polopřímka.*

VĚTA 12,19. *Mějme rovnoramenný trojúhelník $\triangle\, ABC$, $AB \equiv AC$. Půlící polopřímka úhlu $\sphericalangle\, A$ stojí na stranu BC kolmo a půlí ji.*

DŮKAZ. Označme průsečík BC s půlící polopřímkou úhlu $\sphericalangle\, A$ písmenem O. Podle VĚTY 12,4 je $\triangle\, AOB \equiv \triangle\, AOC$.

VĚTA 12,20. *Každý úhel má půlící polopřímku a to právě jednu.*

DŮKAZ plyne z VĚTY 12,19 a VĚTY 12,18.

VĚTA 12,21. *Bodem mimo přímku lze k ní (v rovině určené daným bodem a danou přímkou) vést právě jednu kolmici.*

DŮKAZ. *Existence.* Budiž dána přímka $\overline{MN}$ a mimo ni bod A (viz obr. 20). Určeme bod A' v polorovině $(\overline{MN}, A)^*$ tak, aby bylo $\sphericalangle\, AMN \equiv \sphericalangle\, A'MN$, $AM \equiv A'M$. Úsečka AA' protne přímku $\overline{MN}$, průsečík označme S. Trojúhelník $\triangle\, AMA'$ je rovnoramenný, podle VĚTY 12,19 je tedy $\overline{AA'}$ kolmice na $\overline{MN}$.

Jednoznačnost. Předpokládejme, že bodem A procházejí dvě různé kolmice na přímku $\overline{MN}$, kterou protínají v bodech S_1 a S_2. Je tedy $S_1 \neq S_2$ a bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí $M \neq S_1 \neq N$ a $M \neq S_2 \neq N$. Na polopřímce $(S_1A)^*$ určeme bod A' tak, aby platilo $S_1A \equiv S_1A'$; podobně určeme na $(S_2A)^*$ bod A'', pro který platí $S_2A \equiv S_2A''$. Pomocí vět o shodnosti trojúhelníků snadno dokážeme, že $\triangle\, MNA \equiv \triangle\, MNA'$ a $\triangle\, MNA \equiv \triangle\, MNA''$, z čehož plyne, že $A' = A''$. Přímky $\overline{AS_1}$ a $\overline{AS_2}$, které jsou různé, mají tedy dva různé průsečíky A a $A' = A''$, což je ve sporu s $\mathfrak{I}$, 4.

DEFINICE. Přímka se nazývá *osou úsečky*, jestliže ji protíná v půlícím bodě a stojí na ní kolmo. Je-li p půlící polopřímka úhlu, pak přímka $\overline{p}$ se nazývá jeho *osou.*

VĚTA 12,22. *Budiž dána úsečka AB. Pro bod P platí vztah $AP \equiv BP$ tehdy a jen tehdy, jestliže bod P leží na ose úsečky AB.*

DŮKAZ. Platí-li $AP \equiv BP$, pak trojúhelník $\triangle\, ABP$ je rovnoramenný a věta je podle VĚTY 12,19 správná. Je-li bod P na ose úsečky $\overline{AB}$

a označíme-li průsečík osy s AB písmenem H, pak trojúhelníky $\triangle AHP$ a $\triangle BHP$ jsou shodné. Odtud plyne naše věta.

DEFINICE. Nechť A_1B_1 a A_2B_2 jsou dvě úsečky. Jestliže C je vnitřní bod úsečky A_1B_1 takový, že je $A_1C_1 \equiv A_2B_2$, pak říkáme, že úsečka A_1B_1 je *větší* než úsečka A_2B_2 čili že úsečka A_2B_2 je *menší* než úsečka A_1B_1, symbolicky $A_1B_1 > A_2B_2$ nebo $A_2B_2 < A_1B_1$.

Z vlastnosti relace μ plyne, že je-li $A_1B_1 > A_2B_2$ a $A_2B_2 > A_3B_3$, pak také $A_1B_1 > A_3B_3$, takže relace $<$ pro úsečky je transitivní.

DEFINICE. Nechť $\sphericalangle p_1q_1$ a $\sphericalangle p_2q_2$ jsou dva úhly. Jestliže uvnitř úhlu $\sphericalangle p_1q_1$ existuje polopřímka r tak, že je $\sphericalangle p_1r \equiv \sphericalangle p_2q_2$, pak říkáme, že úhel $\sphericalangle p_1q_1$ je větší než $\sphericalangle p_2q_2$ nebo že $\sphericalangle p_2q_2$ je menší než $\sphericalangle p_1q_1$, což symbolicky píšeme $\sphericalangle p_1q_1 > \sphericalangle p_2q_2$ nebo $\sphericalangle p_2q_2 < < \sphericalangle p_1q_1$.

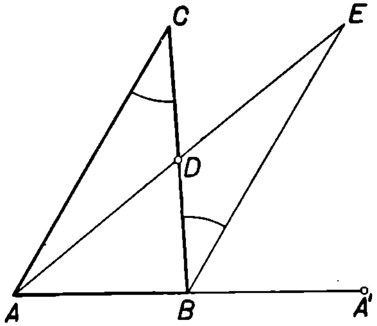
Je vidět, že relace $<$ pro úhly je také transitivní.

DEFINICE. Úhel menší než pravý se nazývá *ostrý*, úhel větší než pravý je *tupý*.

DEFINICE. *Vnější úhel trojúhelníka* je vedlejší úhel některého jeho úhlu. Úhly trojúhelníka nazýváme také *vnitřními*.

VĚTA 12,23. *Vnější úhel trojúhelníka je větší než kterýkoli vnitřní, který s ním není vedlejší.*

DŮKAZ. Budiž dán trojúhelník $\triangle ABC$ a nechť bod A' je na polopřímce $(BA)^*$. Dokážeme, že je $\sphericalangle A'BC > \sphericalangle ACB$.



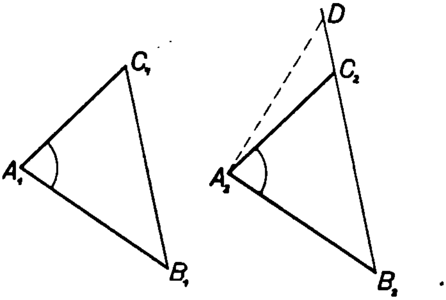
Obr. 21.

Budiž D (viz obr. 21) půlící bod strany CB a E bod na polopřímce $(DA)^*$ takový, že $AD \equiv DE$. Bod E je uvnitř poloroviny $(\overline{AB}, C)$, protože polopřímka (AD) leží v této polorovině a je také uvnitř poloroviny $(\overline{BC}, A)^*$ čili $(\overline{CB}, A')$, protože je na opačné straně od $\overline{BC}$ než A. Proto polopřímka (BE) je uvnitř úhlu $\sphericalangle CBA'$, takže je $\sphericalangle CBE < < \sphericalangle CBA'$. Je však $\sphericalangle CBE \equiv \sphericalangle ACB$, neboť podle VĚTY 12,13 je $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle EDB$ a podle VĚTY 12,4 je tudíž $\triangle ADC \equiv \triangle EDB$. Skutečně tedy $\sphericalangle ACB < \sphericalangle A'BC$.

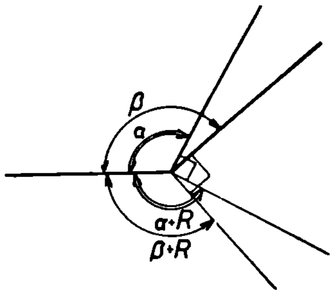
Podobně se dokáže, že $\sphericalangle CAB < \sphericalangle CBA'$.

VĚTA 12,24. *Jestliže pro dva trojúhelníky* $\triangle A_1B_1C_1$ *a* $\triangle A_2B_2C_2$ *platí* $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$, $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle C_2$, *pak jsou shodné.*

DŮKAZ. Vzhledem k VĚTĚ 12,5 stačí dokázat, že platí $C_1B_1 \equiv C_2B_2$. Předpokládejme, že jest $C_1B_1 \not\equiv C_2B_2$, takže potom pro bod D polopřímky (B_2C_2) (viz obr. 22), pro který je $B_1C_1 \equiv B_2C_2$, platí $C_2 \neq D$.



Obr. 22.



Obr. 23.

Podle VĚTY 12,23 platí $\sphericalangle A_2C_2B_2 > \sphericalangle A_2DB_2$, zatím co ze vztahu $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_2B_2D$ plyne, že jest $\sphericalangle A_2DB_2 \equiv \sphericalangle A_1C_1B_1$. To vede však ke sporu s předpokladem, že je $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle C_2$.

VĚTA 12,25. *V trojúhelníku leží proti větší straně větší úhel a naopak proti většímu úhlu větší strana.*

DŮKAZ. Budiž dán trojúhelník $\triangle ABC$. Máme dokázat, že z $AC < CB$ plyne $\sphericalangle ABC < \sphericalangle CAB$ a naopak, že z $\sphericalangle ABC < \sphericalangle CAB$ plyne $AC < CB$. Obojí se ale snadno dokáže pomocí VĚTY 12,7 a VĚTY 12,23.

DEFINICE. *Součtem úseček* A_1B_1 *a* A_2B_2 rozumíme jakoukoli úsečku AC té vlastnosti, že existuje vnitřní bod B úsečky AC takový, že je $AB \equiv A_1B_1$, $BC \equiv A_2B_2$. Pak píšeme symbolicky $AC \equiv A_1B_1 + A_2B_2$.

Je-li $AB < CD$, pak *rozdílem úseček* AB a CD rozumíme úsečku MN takovou, že je $AB \equiv CD + MN$. Potom píšeme $MN \equiv AB - CD$.

Vztah $AB \equiv CD + CD + \ldots + CD$, při čemž na pravé straně je n sčítanců, budeme psát stručně $AB \equiv n \,.\, CD$ nebo také

$$CD \equiv \frac{AB}{n}.$$

Dříve než budeme definovat součet úhlů, rozšíříme námi dosud zavedený pojem úhlu. Součet úhlů $\sphericalangle p_1q_1$ a $\sphericalangle p_2q_2$ bychom mohli zavést ovšem již nyní a to na př. jakožto jakýkoli úhel $\sphericalangle pq$ takový, že existuje polopřímka r, jež má v jeho vrcholu počátek, leží v rovině $\overline{pq}$ a má tu vlastnost, že je $\sphericalangle pr \equiv \sphericalangle p_1q_1$ a $\sphericalangle rq \equiv \sphericalangle p_2q_2$. Potom by ale pro vzájemnou polohu polopřímek p, r, q mohly nastat tyto možnosti:

1. buďto je $\mu(prq)$, na př. v případě, že sčítáme dva ostré úhly;

2. nebo není $\mu(prq)$, takže potom žádná z polopřímek p, r, q neleží mezi ostatními dvěma. To nastane, když na příklad sčítáme dva tupé úhly;

3. nebo otázka, je-li $\mu(prq)$, nemá smysl, protože polopřímky p a q jsou opačné. To nastane, když sčítáme na př. dva vedlejší úhly.

V případě 1 by naše definice plně vyhovovala, kdežto v případě 2 by měla jistou nevýhodu: jestliže by na př. α, β, γ byly úhly a jestliže by $\alpha + \gamma$ a $\beta + \gamma$ byly součty podle případu 2 potom by se mohlo stát, že ačkoliv by bylo $\alpha < \beta$, přesto by pro $\alpha + \gamma$ a $\beta + \gamma$ pojímané jako úhly v dosavadním smyslu platilo $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ (viz obr. 23). V případě 3 by pak nemělo vůbec smysl mluvit o úhlu $\sphericalangle pq$. Abychom se vyhnuli všem těmto potížím, rozšíříme dosavadní pojem úhlu zavedením *nevlastních úhlů.*

Definice. Úhly, které jsme dosud definovali, budeme nazývat *vlastní. Nevlastním úhlem* $\sphericalangle pq$, kde p, q jsou dvě polopřímky se společným počátkem S, které neleží na téže přímce, rozumíme množinu polopřímek, do níž vedle polopřímek p a q patří každá polopřímka r roviny $\overline{pq}$ s počátkem S, pro kterou neplatí $\mu(prq)$. Mnohdy nevlastní úhel nazýváme také *úhel vypuklý*, zatím co každý úhel vlastní se nazývá také *úhel dutý.*

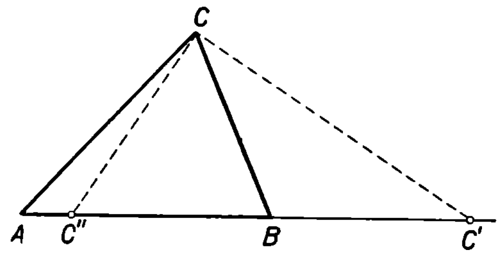
Definice. Jsou-li p, q dvě opačné polopřímky s počátkem S, pak množina polopřímek, do níž vedle polopřímek p a q patří každá polopřímka mající počátek S a ležící v určité polorovině s hranicí $\overline{p} = \overline{q}$, je *nevlastní úhel* $\sphericalangle pq$, který se nazývá *úhel přímý.*

Definice. Budiž p polopřímka s počátkem S. Množina všech polopřímek roviny, které mají počátek v bodě S, je *nevlastní úhel* $\sphericalangle pp$, který se nazývá *úhel plný.*

Podobně jako u úhlu vlastního nazývají se u nevlastního úhlu $\sphericalangle pq$ polopřímky p, q jeho *ramena* a o všech ostatních polopřímkách úhlu $\sphericalangle pq$ se říká, že *leží uvnitř* něho. Také zde se společný počátek ramen nazývá *vrcholem úhlu.* Nevlastní úhel s vrcholem B a rameny (BA), (BC) značíme také $\sphericalangle ABC$.

Poznámka. Pro nevlastní úhly jsme zavedli totéž označení jako pro úhly vlastní. V dalším budeme však pod symboly $\sphericalangle pq$ a $\sphericalangle ABC$ rozumět jen úhly vlastní, pokud nebude výslovně uveden opak. Někdy budeme také úhly, ať už vlastní nebo nevlastní, značit jediným malým řeckým písmenem α, β, γ atd.

Definice. Shodnost pro úhly nevlastní budiž zavedena takto: všechny přímé úhly jsou shodné; jsou-li $\sphericalangle p_1q_1$ a $\sphericalangle p_2q_2$ dva vypuklé úhly, pak říkáme, že jsou shodné tehdy a jen tehdy, když jsou shodné vlastní úhly $\sphericalangle p_1q_1$, $\sphericalangle p_2q_2$.



Obr. 24.

Poznámka. Naše definice relace $<$ pro úhly vlastní má smysl i pro úhly nevlastní. Podle této definice je úhel dutý vždy menší než úhel přímý nebo vypuklý, úhel přímý je vždy menší než úhel vypuklý a úhel vypuklý je vždy menší než úhel plný.

Definice. Jsou-li $\sphericalangle p_1q_1$ a $\sphericalangle p_2q_2$ dva úhly, z nichž žádný není vypuklý ani plný (jsou tedy buď oba duté nebo jeden dutý a druhý přímý nebo oba přímé), pak *součtem* těchto úhlů budeme rozumět jakýkoli úhel $\sphericalangle pq$ (vlastní nebo nevlastní) té vlastnosti, že existuje vnitřní polopřímka r tohoto úhlu, pro kterou platí $\sphericalangle pr \equiv \sphericalangle p_1q_1$ a $\sphericalangle rq \equiv \equiv \sphericalangle p_2q_2$. Že úhel α je součtem úhlů β a γ píšeme symbolicky $\alpha \equiv \equiv \beta + \gamma$.

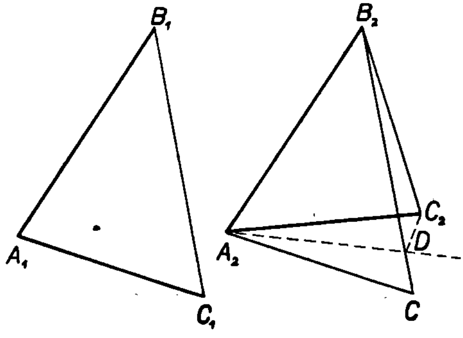
Poznámka. Je zřejmé, že součtem dvou pravých úhlů je úhel přímý, který proto značíme také často $2R$. Někdy místo názvů *úhel dutý* resp. *přímý* resp. *vypuklý* se užívá názvu *úhel menší* resp. *rovný* resp. *větší než dvà pravé úhly* (než $2R$). Dále je zřejmé, že součtem dvou přímých úhlů je úhel plný, který se proto často značí $4R$.

Definice. Je-li $\alpha < \beta$, pak *rozdílem úhlů* α a β budeme rozumět ten úhel γ, pro který je $\alpha = \beta + \gamma$. Potom budeme psát také $\gamma = \alpha - \beta$.

Jestliže je $\alpha = \beta + \beta + \ldots + \beta$, při čemž na pravé straně je n sčítanců, budeme psát stručně $\alpha = n \,.\, \beta$ nebo také $\beta = \dfrac{\alpha}{n}$.

VĚTA 12,26. *Každá strana trojúhelníka je menší než součet a větší než rozdíl obou zbývajících stran.*

DŮKAZ. Mějme dán trojúhelník $\triangle ABC$ a nechť bod C' (viz obr. 24) leží na polopřímce $(BA)^*$, při čemž $BC \equiv BC'$. Je zřejmé, že $\sphericalangle ACC' > \sphericalangle BCC' \equiv \sphericalangle AC'C$, takže podle VĚTY 12,25 v trojúhelníku $\triangle ACC'$ je $AC' > AC$, $AC' \equiv AB + BC$. Budiž nyní na př. $AB > CB$. Pak existuje na úsečce AB vnitřní bod C'' tak, že $C''B \equiv CB$. Úhel $\sphericalangle AC''C$ je vedlejší k úhlu $\sphericalangle CC''B \equiv \equiv \sphericalangle C''CB$, úhel $\sphericalangle ACC''$ je menší než vedlejší úhel úhlu $\sphericalangle C''CB$, tedy menší než $\sphericalangle AC''C$. Odtud podle VĚTY 12,25 plyne naše tvrzení $AC < AC'' = AB - CB$.



Obr. 25.

VĚTA 12,27. *Buďtež dány trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ takové, že $A_1B_1 \equiv A_2B_2$ a $A_1C_1 \equiv A_2C_2$. Potom z $\sphericalangle B_1A_1C_1 > \sphericalangle B_2A_2C_2$ plyne $B_1C_1 > B_2C_2$ a obráceně.*

DŮKAZ. Nechť trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ splňují podmínky věty. V polorovině $(\overline{A_2B_2}, C_2)$ určeme bod C (viz obr. 25) tak, že $\triangle A_2B_2C \equiv \triangle A_1B_1C_1$. Je-li $\sphericalangle B_1A_1C_1 > \sphericalangle B_2A_2C_2$, pak strana A_2C_2 bude uvnitř úhlu $\sphericalangle B_2A_2C$ a půlící polopřímka úhlu $\sphericalangle C_2A_2C$ bude také uvnitř úhlu $\sphericalangle B_2A_2C$, takže tato půlící polopřímka protne úsečku B_2C v bodě, který označíme D. Zřejmě platí $\triangle A_2C_2D \equiv \triangle A_2CD$, takže také $DC \equiv DC_2$. V trojúhelníku $\triangle B_2C_2D$ je $B_2C_2 > B_2D + DC_2 \equiv \equiv B_2C$, což jsme měli dokázat.

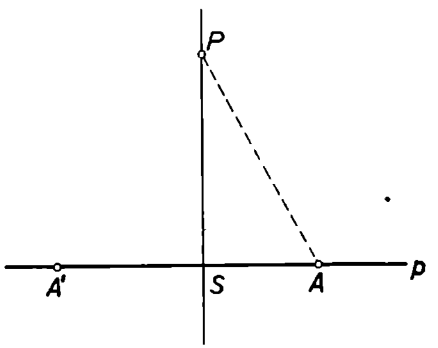
Jestliže je $B_1C_1 > B_2C_2$, pak nemůže být $\sphericalangle B_1A_1C_1 < \sphericalangle B_2A_2C$ (podle právě provedeného důkazu) ani nemohou být oba úhly shodné (podle vět o shodnosti trojúhelníků).

VĚTA 12,28. *V trojúhelníku je součet kterýchkoli dvou vnitřních úhlů menší než dva pravé.*

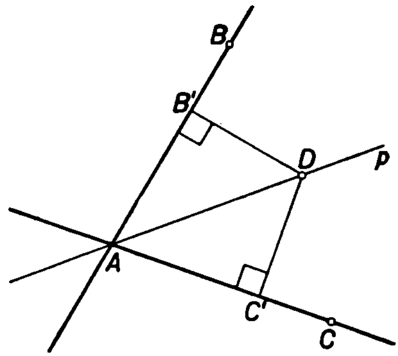
DŮKAZ. Budiž dán $\triangle ABC$. Máme-li dokázat, že $\sphericalangle A + \sphericalangle B < < 2R$, pak uvážíme, že $\sphericalangle A < \sphericalangle B^*$, kde $\sphericalangle B^*$ je vnější úhel při vrcholu B, a že $\sphericalangle B + \sphericalangle B^* \equiv 2R$.

VĚTA 12,29. *Budiž dána přímka p a bod P mimo ni. Je-li S průsečík přímky p s kolmicí vedenou bodem P k přímce p, pak pro každý bod $A \neq S$ přímky p platí $AP > SP$.*

DŮKAZ. Nechť A' je bod polopřímky $(SA)^*$ (viz obr. 26). Podle VĚTY 12,23 je $\sphericalangle PSA \equiv \sphericalangle PSA' > \sphericalangle PAS$, takže podle VĚTY 12,25 je opravdu $PS < PA$.



Obr. 26.



Obr. 27.

DEFINICE. *Vzdáleností dvou bodů* budeme rozumět každou úsečku shodnou s úsečkou spojující oba body. Podobně *velikostí úhlu* budeme rozumět každý úhel s ním shodný.

DEFINICE. *Vzdáleností bodu A od množiny bodů $\mathbf{S}$*, do níž A nepatří, budeme rozumět vzdálenost MN takovou, že

1. pro všechny body B z $\mathbf{S}$ platí $MN \leqq AB$,
2. je-li vzdálenost $M'N'$ taková, že platí $MN < M'N'$, pak existuje v $\mathbf{S}$ bod P tak, že $AP < M'N'$.[17])

DEFINICE. *Vzdáleností bodu od přímky* resp. *roviny* budeme rozumět vzdálenost od množiny všech jejích bodů.

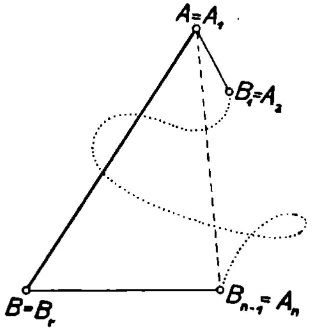
VĚTA 12,30. *Budiž dána přímka p a bod P mimo ni. Vzdálenost bodu P od přímky p je úsečka, spojující bod P a průsečík přímky p s kolmicí vedenou bodem P na přímku p.*

[17]) Je tedy vzdálenost bodu A od množiny $\mathbf{S}$ infimum všech vzdáleností AX, kde bod X probíhá všechny body z množiny $\mathbf{S}$. Existuje-li tedy mezi vzdálenostmi AX vzdálenost *nejmenší*, je to přímo také vzdálenost A od $\mathbf{S}$. Toho je použito při důkazu VĚTY 12,30.

DŮKAZ plyne okamžitě z VĚTY 12,29.

VĚTA 12,31. *Jsou-li* $\overline{AB}$ *a* $\overline{AC}$ *dvě přímky a je-li* p *osa úhlu* $\sphericalangle BAC$, *pak všechny body osy* p *mají od obou přímek* $\overline{AB}$ *a* $\overline{AC}$ *stejné vzdálenosti.*

DŮKAZ. Zvolme na ose p bod $D \neq A$ (viz obr. 27) a veďme jím kolmice $\overline{DC'}$ a $\overline{DB'}$ na přímky $\overline{AC}$ a $\overline{AB}$. Podle definice osy a podle VĚTY 12,13 je $\sphericalangle B'AD \equiv \sphericalangle C'AD$. Podle VĚTY 12,24 o shodnosti trojúhelníků je $\triangle AB'D \equiv \triangle AC'D$, takže vzdálenosti bodu D od přímek $\overline{AB}$ a $\overline{BC}$ jsou stejné.



Obr. 28.

OZNAČENÍ. Vzdálenost dvou bodů A a B značíme stejně jako úsečku, tedy AB. Podobně vzdálenost bodu A od přímky $a = \overline{BC}$ značíme aA nebo Aa nebo $A\ \overline{BC}$ a od roviny $\alpha = \overline{BCD}$ symbolem $A\alpha$, $A\ \overline{BCD}$. Podobně velikost úhlu značíme stejně jako úhel nebo také někdy malými řeckými písmeny.

DEFINICE. *Lomenou čarou spojující body* A, B nazýváme jakoukoli množinu n úseček ($n > 1$), $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ takových, že $A = A_1$, $B_1 = A_2$, $B_2 = A_3$, $\ldots$, $B_{n-1} = A_n$, $B_n = B$, při čemž alespoň jeden z bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ leží mimo úsečku AB.

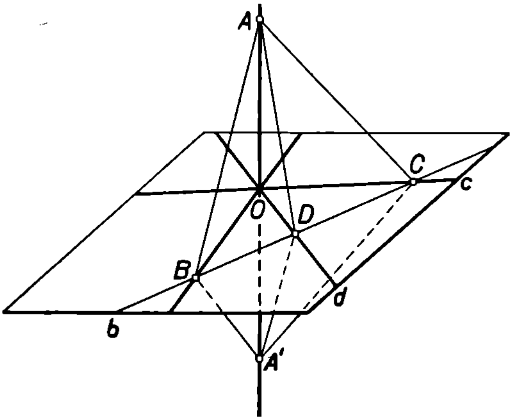
VĚTA 12,32. *Úsečka* AB *je kratší než jakákoli lomená čára spojující body* A *a* B.

DŮKAZ. Pro lomenou čáru se dvěma úsečkami bylo tvrzení dokázáno VĚTOU 12,26. Pro lomenou čáru s více úsečkami (jejich počet označme n) dokážeme větu takto: Vezměme v úvahu poslední úsečku A_nB_n (viz obr. 28). Podle předešlého je $AB < AA_n + A_nB_n$. Zbytek lomené čáry mezi A a $A_n = B_{n-1}$ obsahuje již jen $n - 1$ úseček a pro případ $n - 1$ úseček můžeme větu považovat za správnou, neboť podobně jako jsme přešli od případu s n úsečkami k případu s $n - 1$ úsečkami, mohli bychom přejít od $n - 1$ k $n - 2$, od $n - 2$ k $n - 3$, a tak dále až k přechodu od $n = 4$ k $n = 3$ a posléze od $n = 3$ k $n = 2$, pro kterýžto případ je již věta dokázána. Můžeme tedy psát $AA_n < A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots + A_{n-1}B_{n-1}$, takže je $AB < A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots + A_{n-1}B_{n-1} + A_nB_n$.

Nyní se budeme zabývat důsledky axiomů shodnosti pro geometrii prostoru.

Věta 12,33. *Nechť přímka* $\overline{OA}$ *je kolmá ke dvěma různým přímkám* $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. *Přímka* $\overline{OA}$ *je kolmá na přímku* $\overline{OD}$, *při čemž* $\overline{OB} \neq \overline{OD} \neq \overline{OC}$ *tehdy a jen tehdy, když přímka* $\overline{OD}$ *leží v rovině* $\overline{OBC}$.

Důkaz. Nechť předně přímka $\overline{OD}$ leží v rovině $\overline{OBC}$ (viz obr. 29). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že body B, C, D jsou kolineární, při čemž je $\mu(BDC)$. Budiž A' bod polopřímky (OA)*, při čemž $OA \equiv OA'$. Potom $\triangle OBA \equiv \triangle OBA'$ a $\triangle OCA \equiv \triangle OCA'$, takže je $AB \equiv A'B$, $AC \equiv A'C$. Protože také $BC \equiv BC$, je $\triangle ABC \equiv \triangle A'BC$ čili $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle A'BD \Rightarrow \triangle ABD \equiv \triangle A'BD$, $AD \equiv A'D$. Odtud je vidět, že $\triangle OAD \equiv \triangle OA'D$, takže $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle A'OD$ čili přímky $\overline{OA}$ a $\overline{OD}$ jsou kolmé.



Obr. 29.

Nyní naopak předpokládejme, že přímky $\overline{OA}$ a $\overline{OD}$ jsou kolmé. Dokážeme, že $\overline{OD}$ leží v rovině $\overline{OBC}$. Roviny $\overline{AOD}$ a $\overline{OBC}$ mají společný bod O, mají tedy společnou celou přímku. Tato přímka i přímka $\overline{OD}$ leží v rovině $\overline{AOD}$, obě procházejí bodem O a obě stojí kolmo na $\overline{OA}$ ($\overline{OD}$ podle předpokladu, druhá podle první části našeho důkazu), takže podle Věty 12,17 obě splývají.

Definice. *Přímka je kolmá na rovinu*, jestliže ji protíná a stojí kolmo na všechny přímky roviny, jež procházejí jejím průsečíkem s rovinou. V tomto případě také říkáme, že *rovina je kolmá na přímku.*

Protože dvě kolmice jsou vždy různé, nemůže přímka ležet v rovině, na kterou je kolmá.

Věta 12,34. *Přímka, jež má s rovinou* α *společný bod* A, *je kolmá na tuto rovinu, jestliže je kolmá alespoň na dvě různé přímky roviny* α, *které procházejí bodem* A.

Důkaz plyne z Věty 12,33.

VĚTA 12,35. *Bodem na přímce prochází právě jedna rovina kolmá na tuto přímku.*

DŮKAZ. Přímkou veďme dvě různé roviny a v každé veďme daným bodem na přímce kolmici k této přímce. Podle VĚTY 12,33 a definice kolmosti přímky s rovinou je rovina určená oběma kolmicemi kolmá na danou přímku. Že tato rovina je jediná, která má vlastnost uvedenou v naší větě, lze za pomoci VĚTY 12,17 snadno dokázat sporem.

VĚTA 12,36. *Každým bodem roviny lze k ní vést právě jednu kolmici.*

DŮKAZ. Bodem v dané rovině vedeme v ní dvě různé přímky a ke každé vedeme daným bodem rovinu kolmou. Obě roviny mají společný bod, tedy i celou přímku. Ta je podle VĚTY 12,33 kolmá na danou rovinu; že tato kolmice je určena jednoznačně, dokáže se pomocí VĚTY 12,17 snadno sporem.

VĚTA 12,37. *Budiž dána úsečka. Bod prostoru má od koncových bodů úsečky stejné vzdálenosti tehdy a jen tehdy, leží-li v rovině, jež prochází středem úsečky a je kolmá na přímku úsečky.*

DŮKAZ. Vedeme-li přímkou úsečky nějakou rovinu, pak bod této roviny má podle VĚTY 12,22 od koncových bodů úsečky stejné vzdálenosti tehdy a jen tehdy, leží-li na ose úsečky. Všechny osy úsečky leží podle VĚTY 12,33 v rovině kolmé na přímku úsečky a tato rovina prochází zřejmě středem uvažované úsečky.

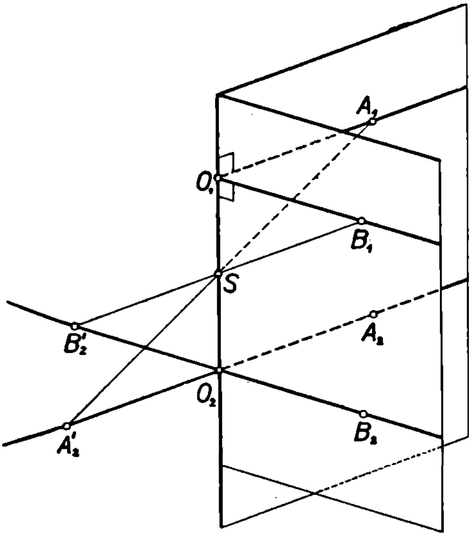
DEFINICE. Dvě poloroviny se společnou hranicí, které se nedoplňují na rovinu, nazýváme *stěnovým úhlem.* Obě poloroviny jsou *stěnami* stěnového úhlu a společná hranice je jeho *hranou.*

Rovina, která neobsahuje hranu stěnového úhlu, má s tímto stěnovým úhlem společné dvě polopřímky. O úhlu (vlastním) určeném těmito polopřímkami budeme říkat, že *vznikl průsekem stěnového úhlu s rovinou.*

VĚTA 12,38. *Úhly vzniklé průsekem stěnového úhlu s jakýmikoli dvěma rovinami kolmými na jeho hranu jsou shodné.*

DŮKAZ. Buďtež O_1 a O_2 dva body hrany stěnového úhlu a $\sphericalangle A_1O_1B_1$ a $\sphericalangle A_2O_2B_2$ oba úhly vzniklé průsekem stěnového úhlu s rovinami $\overline{A_1O_1B_1}$ a $\overline{A_2O_2B_2}$, jež jsou kolmé na hranu $\overline{O_1O_2}$. Budiž S (viz obr. 30) střed úsečky O_1O_2 a budiž A_2' bod na polopřímce $(SA_1)^*$ a B_2' bod na polopřímce $(SB_1)^*$, při čemž $SA_1 \equiv SA_2'$, $SB_1 \equiv SB_2'$. Ze shodnosti $\triangle SO_1A_1 \equiv \triangle SO_2A_2'$ a $\triangle SO_1B_1 \equiv \triangle SO_2B_2'$ plyne, že úhly $\sphericalangle A_2'O_2S$ a

$\sphericalangle B_2'O_2S$ jsou pravé, protože $\sphericalangle A_1O_1S$ a $\sphericalangle B_1O_1S$ jsou pravé, takže body A_2' a B_2' leží v rovině $\overline{A_2O_2B_2}$. Přitom A_2' leží v rovině $\overline{O_1O_2A_1}$ a B_2' leží v rovině $\overline{O_1O_2B_1}$, takže $\sphericalangle A_2O_2B_2 \equiv \sphericalangle A_2'O_2B_2'$, ježto jsou vrcholové. Protože úhly $\sphericalangle A_1SB_1$ a $\sphericalangle A_2'SB_2'$ jsou také vrcholové, platí $\triangle A_1SB_1 \equiv \triangle A_2'SB_2'$, takže $A_1B_1 \equiv A_2'B_2'$. Odtud plyne shodnost $\triangle A_1O_1B_1 \equiv \triangle A_2'O_2B_2'$ a odtud vztah $\sphericalangle A_1O_1B_1 \equiv \sphericalangle A_2'O_2B_2'$, takže nakonec také platí $\sphericalangle A_1O_1B_1 \equiv \sphericalangle A_2O_2B_2$.



Obr. 30.

Definice. *Velikostí stěnového úhlu* budeme rozumět velikost úhlu, vzniklého průsekem stěnového úhlu s rovinou kolmou na jeho hranu. Stěnový úhel nazveme *pravý*, jestliže bude mít velikost pravého úhlu.

Definice. O dvou rovinách, které tvoří pravé stěnové úhly, budeme říkat, že *stojí na sobě kolmo* nebo že *jsou k sobě kolmé*.

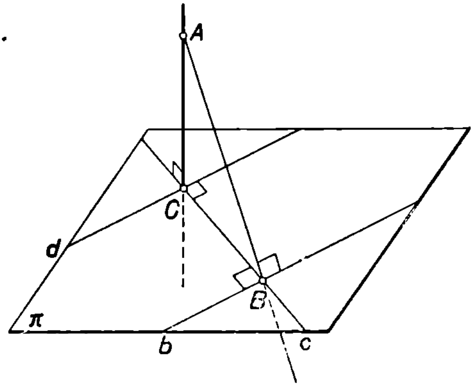
Věta 12,39. *Dvě roviny, které mají společný bod, stojí k sobě kolmo tehdy a jen tehdy, když kolmice vedená společným bodem na jednu rovinu leží v rovině druhé.*

Důkaz. Budiž předně přímka p kolmá na rovinu π a budiž P její průsečík s π. Jestliže ϱ je rovina procházející přímkou p a s průsečnice ϱ a π, pak rovina σ vedená bodem P kolmo na s obsahuje přímku p a průsečnice rovin σ a π musí být kolmá na p podle definice kolmosti přímky p s rovinou π. Tedy stěnový úhel rovin π a ϱ je pravý.

Jsou-li naopak roviny π a ϱ k sobě kolmé a bod P na jejich průsečnici s a δ rovina vedená bodem P kolmo k s, pak průsečnice ϱ a δ stojí kolmo na π, neboť je kolmá na s i na průsečnici π a δ. Obsahuje tedy ϱ kolmici vedenou bodem P na rovinu π.

Věta 12,40. *Každým bodem prostoru lze k dané rovině vést právě jednu kolmici.*

Důkaz. Je-li daný bod na rovině, je věta správná podle Věty 12,36. Budiž tedy bod A mimo rovinu π (viz obr. 31). Nechť b je libovolná přímka roviny π, B takový bod na b, že $AB \perp b$, a budiž přímka $c \bigtriangledown B$, π kolmá na b. Je-li $\overline{AB} \perp_{\bullet} c$, jsme s důkazem hotovi. Není-li tomu tak, veďme v rovině $\overline{Ac}$ bodem A kolmici k přímce c, její průsečík s c označme C. Roviny π a $\overline{Ac}$ jsou kolmé, ježto π obsahuje kolmici b na $\overline{Ac}$, a proto přímka $d \bigtriangledown C$, vedená kolmo na $\overline{Ac}$, leží v π. Je tedy přímka $\overline{AC}$ kolmá ke dvěma přímkám roviny π a tedy kolmá k π. Nyní snadno dokážeme sporem, že bodem P lze k rovině π vést nejvýše jednu kolmici. Kdyby totiž existovaly dvě, pak v rovině ϱ proložené oběma kolmicemi by existovaly dvě kolmice vedené bodem P k průsečnici rovin π a ϱ, což by byl vzhledem k Větě 12,21 spor.



Obr. 3

Věta 12,41. *Vzdálenost bodu od roviny je dána vzdáleností tohoto bodu od průsečíku roviny s kolmicí, vedenou k ní daným bodem.*

Důkaz. Podle definice vzdálenosti stačí dokázat, že vzdálenost daného bodu od každého bodu roviny, různého od průsečíku roviny a kolmice vedené na ni daným bodem, je větší než vzdálenost daného bodu od tohoto průsečíku. To je však zřejmé podle toho, co platí o vzdálenosti bodu od přímky.

Věta 12,42. *Každým bodem prostoru lze k dané rovině vést rovinu kolmou.*

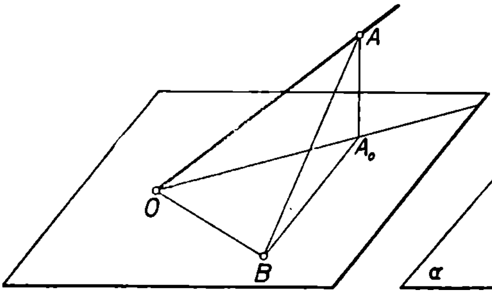
Důkaz. Podle Věty 12,40 lze každým bodem vést k rovině kolmici a podle Věty 12,39 každá rovina incidentní s touto kolmicí je kolmá na danou rovinu.

Věta 12,43. *Každými dvěma různými kolmicemi k rovině lze proložit právě jednu rovinu.*

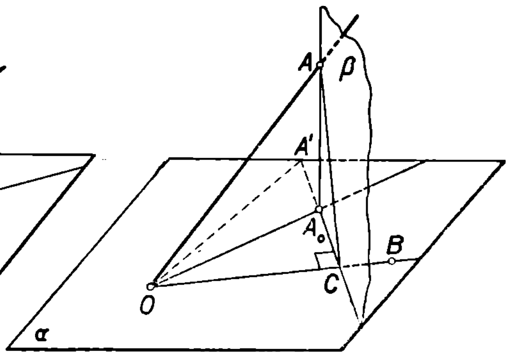
Důkaz. Každá z obou kolmic určuje s průsečíkem druhé kolmice s danou rovinou rovinu, jež je kolmá na danou rovinu, takže podle VĚTY 12,39 obsahuje i druhou kolmici.

VĚTA 12,44. *Každou přímkou prostoru lze proložit rovinu kolmou na danou rovinu.*

DŮKAZ. Jsou-li daná přímka a rovina navzájem k sobě kolmé, je to patrné z VĚTY 12,39.



Obr. 32.



Obr. 33.

Není-li daná přímka kolmá na danou rovinu, zvolme na přímce dva body a veďme jimi kolmici k rovině. Podle VĚTY 12,43 leží obě kolmice v rovině, která je kolmá na rovinu danou.

VĚTA 12,45. *Nechť polopřímka* (OA) *má počátek* O *v rovině, v níž však sama neleží a k níž není kolmá. Budiž* A_0 *průsečík roviny s kolmicí vedené k ní bodem* A. *Je-li* B *bod roviny, jenž neleží na polopřímce* (OA_0), *pak je vždy* $\sphericalangle AOA_0 < \sphericalangle AOB$.

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $OA_0 \equiv OB$ (viz obr. 32). Potom je $AB > AA_0$, protože $\sphericalangle AA_0B$ je pravý. V trojúhelnících $\triangle AOA_0$ a $\triangle AOB$ je $AO \equiv AO$, $A_0O \equiv OB$, $AA_0 < AB$, takže podle VĚTY 12,27 je $\sphericalangle AOA_0 < \sphericalangle AOB$.

VĚTA 12,46. *Nechť polopřímka* (OA) *má počátek v rovině* α, *v níž však sama neleží a k níž není kolmá. Budiž* A_0 *průsečík roviny* α *s kolmicí vedenou k ní bodem* A. *Neleží-li bod* B *roviny* α *na* (OA_0) *a přitom* $\sphericalangle BOA_0$ *je ostrý, pak* $\sphericalangle AOB > \sphericalangle A_0OB$.

DŮKAZ. Bodem A veďme rovinu β (viz obr. 33) kolmou na přímku

$\overline{OB}$. Rovina β stojí kolmo na rovinu α a obsahuje přímku $\overline{AA_0}$, bodem A_0 prochází kolmo na $\overline{OB}$ průsečnice rovin α a β, která protíná přímku $\overline{OB}$ v bodě C. Bod C leží dokonce na polopřímce (OB), protože je $\sphericalangle BOA_0 < R$. Trojúhelník $\triangle AA_0C$ je pravoúhlý při A_0, proto $AC > A_0C$. Určíme-li v polorovině $(\overline{OC}, A_0)$ bod A' tak, že $\triangle OCA' \equiv \triangle OCA$, pak bod A' leží na polopřímce $(A_0C)^*$, takže $\sphericalangle COA_0 < \sphericalangle COA' \equiv \sphericalangle COA$.

13. Spojitost. V tomto paragrafu se budeme zabývat axiomem Cantorovým a axiomem Archimedovým, jejichž důsledky se týkají vlastností, jež obvykle shrnujeme pod název *spojitost*. Přitom Cantorův axiom patří svou formulací mezi axiomy rozmístění, Archimedův mezi axiomy shodnosti.

$\mathfrak{R}$, 5. (CANTORŮV AXIOM.) *Je-li dána taková (nekonečná) posloupnost úseček $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$ na přímce, že*

1. *každá úsečka posloupnosti leží uvnitř úsečky předcházející, t. j. pro $i < k$ je $\mu(A_iA_kB_i), \mu(A_iB_kB_i)$,*

2. *neexistuje úsečka, která by ležela uvnitř všech úseček posloupnosti $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$*

pak existuje na přímce právě jeden bod, který leží uvnitř všech úseček posloupnosti $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$

$\mathfrak{S}$, 7. (ARCHIMEDŮV AXIOM.) *Nechť AB a CD jsou libovolné úsečky, při čemž $AB > CD$. Pak na přímce $\overline{AB}$ existuje konečný počet bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tak, že je $\mu(AA_1A_2), \mu(A_1A_2A_3), \ldots$ a $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \ldots \equiv A_{n-1}A_n \equiv CD$ a při tom $\mu(ABA_n)$ (čili vždy existuje přirozené číslo n tak, že je $AB < n\,.\,CD$).*

V tomto paragrafu si nejdříve ukážeme (VĚTA 13,2), že současná platnost axiomu Cantorova a Archimedova je ekvivalentní s jistou větou o Dedekindově řezu, který jsme definovali v odstavci **6**. Jde totiž o to, že podle VĚTY 11,8 každý bod přímky vytvořuje na množině všech bodů přímky Dedekindův řez, zatím co věta, že ke každému Dedekindovu řezu existuje vytvořující bod, nemusí vždy platit (viz odstavec **6**). Jsou-li však splněny oba naše axiomy, pak tato věta *vždy platí* a obráceně, oba axiomy se dají z této věty dokázat.

V dalším pak ukážeme, že tvrzení analogická axiomům Cantora a Archimeda platí také *pro úhly*. Nejdůležitějšími důsledky obou axiomů jsou tvrzení, že úsečku (a úhel) *lze postupným půlením libovolně zmenšit* (VĚTY 13,1 a 13,5), a věta, že *součet vnitřních úhlů trojúhelníka není větší než dva pravé* (VĚTA 13,6).

VĚTA 13,1. *Jsou-li AB a CD dvě úsečky, $AB > CD$, pak existuje vždy přirozené číslo n tak, že $\frac{AB}{2^n} < CD$.*

DŮKAZ. Kdyby pro každé n bylo $\frac{AB}{2^n} > CD$, pak by neexistovalo přirozené číslo k tak, že by platilo $k \cdot CD > AB$, což by bylo ve sporu s Archimedovým axiomem.

VĚTA 13,2. *Tvrzení, že ke každému Dedekindovu řezu množiny bodů na přímce (s přirozeným uspořádáním) existuje bod, který tento řez vytvořuje, je ekvivalentní se současnou platností axiomu Cantorova a Archimedova.*

DŮKAZ. I. *Předpokládejme nejdříve současnou platnost Cantorova i Archimedova axiomu a dokažme, že pak existuje vytvořující bod libovolného Dedekindova řezu.* Nechť tedy $(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)$ je řez na množině bodů přímky a budiž A_1 bod z $\mathbf{S}_1$ a B_1 bod z $\mathbf{S}_2$. Půlící bod X úsečky A_1B_1 je buď vytvořující nebo není, takže X leží v jedné z obou tříd řezu. V tomto druhém případě označme A_2B_2 tu z obou polovičních úseček A_1X, XB_1, která má koncové body v různých třídách, při čemž A_2 je v $\mathbf{S}_1$. Nyní můžeme opakovat právě provedenou úvahu s půlícím bodem úsečky A_2B_2. Dostaneme buď vytvořující bod nebo úsečku A_3B_3 a tak buď jednou přijdeme k vytvořujícímu bodu nebo dostaneme nekonečnou posloupnost úseček $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ při čemž všechny body A_i leží v $\mathbf{S}_1$. Tato posloupnost má zřejmě vlastnost 1 Cantorova axiomu a podle VĚTY 13,1 i vlastnost 2. Existuje tedy podle $\mathfrak{R}$, 5 právě jeden bod D společný všem úsečkám posloupnosti.

Ukážeme nyní, že bod D je vytvořující. Podle konstrukce všechny body A_i leží jednak v $\mathbf{S}_1$, jednak po stejné straně bodu D. Neexistuje tedy bod X z $\mathbf{S}_1$ tak, že by bylo $\mu(A_1DX)$, protože podle vlastnosti 2 posloupnosti $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ existuje úsečka A_kB_k, která neobsahuje bod X, takže nemůže být $\mu(A_kXB_k)$. Protože je $\mu(A_1A_kD)$ a $\mu(A_1DX)$, je $\mu(A_kDX)$ (podle VĚTY 11,4). Protože je $\mu(A_kDX)$ a $\mu(A_kDB_k)$, je buď $\mu(DXB_k)$, buď $\mu(DB_kX)$ (podle VĚTY 11,5) čili buď $\mu(A_kXB_k)$, buď $\mu(A_kB_kX)$. Musí tedy být $\mu(A_kB_kX)$, takže X patří do $\mathbf{S}_2$, což je spor. Podobně dokážeme, že neexistuje bod Y z $\mathbf{S}_2$, pro který by bylo $\mu(B_1DY)$.

II. *Předpokládejme nyní, že ke každému Dedekindovu řezu existuje vytvořující bod, a dokažme odtud platnost Cantorova i Archimedova axiomu.*

a) *Důkaz Cantorova axiomu*: Mějme posloupnost úseček A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$, která má vlastnost 1 i 2 Cantorova axiomu. Sestrojme nyní Dedekindův řez $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ na množině bodů přímky $\overline{A_1B_1}$ takto: přímku $\overline{A_1B_1}$ uspořádáme tak, že $A_1 \succ B_1$. Body $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ lze označit vždy tak, že je jednak $A_1 \preceq A_2 \preceq A_3 \preceq \ldots$, jednak $B_1 \succeq B_2 \succeq B_3 \succeq \ldots$ Do třídy $\boldsymbol{S}_1$ dáme s každým bodem A_i všechny body X, pro něž je $X \prec A_i$ (pro $i = 1, 2, \ldots$). Do třídy $\boldsymbol{S}_2$ dáme ostatní body přímky $\overline{A_1B_1}$. Je zřejmé, že

1. pro každý bod X přímky $\overline{A_1B_1}$ buď existuje bod A tak, že je $X \prec A_i$, nebo neexistuje. Jsou tedy splněny podmínky a), b) definice Dedekindova řezu (viz odst. **6**, str. 34).

2. Budiž X bod z $\boldsymbol{S}_1$ a Y bod z $\boldsymbol{S}_2$. K bodu X existuje bod A_k tak, že je $X \prec A_k$. Protože pro všechna i jest $A_i \prec Y$, je také $A_k \prec Y$, takže je $X \prec Y$ a je splněna podmínka c) definice řezu (viz odst. **6**, str. 34).

Skupiny $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ tvoří tedy Dedekindův řez a podle předpokladu existuje právě jeden bod D, který ho vytvořuje. Tedy pro všechna i platí $A_i \prec D$, $D \prec B_i$, takže bod D leží uvnitř všech úseček posloupnosti $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$

2. *Důkaz Archimedova axiomu.* Předpokládejme nyní, že jsou dány úsečky AB a CD, při čemž na př. $AB > CD$, a předpokládejme, že na přímce $\overline{AB}$ jsou dány body $A_1, A_2, A_3, \ldots$ tak, že $A \prec B$, $A \prec A_1 \prec$ $\prec A_2 \prec \ldots$, $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \ldots \equiv CD$. Z předpokladu, že by pro všechna i bylo $A_i \prec B$, odvodíme spor.

Nechť tedy pro všechna i je $A_i \prec B$. Rozdělme body přímky $\overline{AB}$ do dvou tříd $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$. Do $\boldsymbol{S}_1$ dejme všechny body A_i a všechny body X, pro něž existuje A_k tak, že $X \prec A_k$. Do $\boldsymbol{S}_2$ dejme ostatní body přímky $\overline{AB}$ (do $\boldsymbol{S}_2$ patří na př. B). Je zřejmé, že $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ je Dedekindův řez. Existuje tedy bod D, který ho vytvořuje, takže všechny body z $\boldsymbol{S}_1$ leží před, všechny body z $\boldsymbol{S}_2$ za bodem D. Bod D nesplývá s žádným bodem A_i. Označme E ten bod, pro který platí $E \prec D$, $ED \equiv AA_1$. Protože E patří do $\boldsymbol{S}_1$, existuje k tak, že je $E \prec A_k \prec D$. Pak je $A_kD <$ $< ED \equiv AA_1$, takže pro bod F takový, že $A_k \prec F$, $A_kF \equiv AA_1$ platí $D \prec F$. Je však $F = A_{k+1}$ a to je spor.

Analogicky k Dedekindovu řezu množiny bodů přímky nebo úsečky definujeme *Dedekindův řez množiny polopřímek vlastního úhlu i vytvořující polopřímku* tohoto řezu, při čemž množinu polopřímek vlastního úhlu předpokládáme uspořádánu vztahem μ pro polopřímky. Zde musíme tedy vzít v úvahu definici řezu s podmínkami a), b), c') — viz odst. 6, str. 34 a 35.

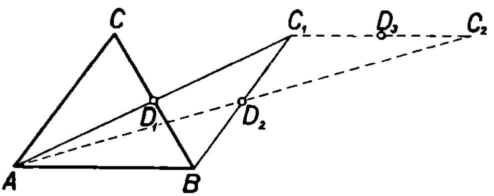
Dokážeme, že pro vlastní úhly platí tvrzení, že ke každému Dedekindovu řezu existuje vytvořující polopřímka a že také pro ně platí Archimedův axiom.

VĚTA 13,3. *Je-li dán Dedekindův řez množiny polopřímek vlastního úhlu, pak existuje polopřímka úhlu, která tento řez vytvořuje.*

DŮKAZ. Uvažujme Dedekindův řez množiny polopřímek vlastního úhlu $\sphericalangle POQ$. Každé polopřímce úhlu $\sphericalangle POQ$ přiřaďme bod na úsečce PQ, totiž její průsečík s PQ. Je vidět, že Dedekindův řez množiny polopřímek úhlu $\sphericalangle POQ$ určuje Dedekindův řez množiny odpovídajících bodů úsečky PQ. Z existence vytvořujícího bodu D na úsečce plyne existence vytvořující polopřímky, jíž je zřejmě polopřímka (OD).

VĚTA 13,4. *Cantorův i Archimedův axiom zůstanou v platnosti, když v nich nahradíme úsečku, resp. bod, resp. přímku vlastním úhlem, resp. polopřímkou, resp. množinou všech polopřímek s týmž počátkem.*

DŮKAZ. Podle předcházející věty existuje ke každému Dedekindovu řezu množiny polopřímek vlastního úhlu polopřímka vytvořující. Zbytek důkazu je analogický II. části důkazu VĚTY 13,2.



Obr. 34.

VĚTA 13,5. *Jsou-li dány dva duté úhly $\alpha > \beta$, pak existuje vždy přirozené číslo n tak, že $\frac{\alpha}{2^n} < \beta$.*

DŮKAZ. Tvrzení plyne z Archimedova axiomu pro úhly analogicky jako VĚTA 13,1 z axiomu $\mathfrak{S}$, 7.

VĚTA 13,6. *V trojúhelníku součet všech tří vnitřních úhlů není větší než dva pravé.*

DŮKAZ. Budiž dán trojúhelník $\triangle ABC$ a označme úhly při vrcholech A, B, C, postupně α, β, γ a nechť $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$. Budiž D_1 (viz obr. 34) půlící bod strany BC a C_1 bod na polopřímce (D_1A) takový, že $AD_1 \equiv \equiv D_1C_1$. Protože $\triangle AD_1C \equiv \triangle C_1D_1B$, je součet úhlů trojúhelníka $\triangle ABC_1$ týž, jako v $\triangle ABC$. Při tom je $\sphericalangle BAC_1 \leqq \frac{1}{2}\alpha$, neboť podle předpokladu je $CA \leqq AB$, takže v trojúhelníku $\triangle ABC_1$ je $BC_1 \leqq \leqq AB$, čili $\sphericalangle BAC_1 < \sphericalangle AC_1B \equiv \sphericalangle CAC_1$.

Nyní můžeme pomocí půlícího bodu D_2 strany BC_1 sestrojit trojúhelník $\triangle AC_1C_2$, potom $\triangle AC_2C_3, \ldots$ atd. Při tom bod D_{i+1} volíme vždy na té straně, která leží proti nejmenšímu z úhlů v trojúhelníku $\triangle AC_{i-1}C_i$ a bod C_{i+1} spojíme s jedním z obou bodů C_{i-1} a C_i tak, aby jeho vzdálenost od C_{i+1} byla menší než od A. Potom pro každý z trojúhelníků $\triangle AC_{i-1}C_i$ můžeme opakovat podobnou úvahu jako pro úhel $\sphericalangle BAC_1$, takže pro úhly trojúhelníků při vrcholu A je $\sphericalangle C_{i-1}AC_i \leqq \frac{\alpha}{2^i}$. Vedle toho součet úhlů těchto trojúhelníků je stále týž jako u trojúhelníka $\triangle ABC$. Předpokládejme nyní, že trojúhelník $\triangle ABC$ má součet úhlů větší než $2R$, a budiž δ takový úhel, že $\alpha + \beta + \gamma = 2R + \delta$. Úhel δ je tedy vždy dutý. Podle Archimedova axiomu (Věta 13,5) existuje n tak, že je $\delta > \frac{\alpha}{2^n}$. Trojúhelník $\triangle AC_{n-1}C_n$ má součet $2R + \delta$, jeden jeho úhel je však menší než δ, je tedy součet zbývajících dvou větší než $2R$. To však není podle Věty 12,28 možné a máme spor.