ŘEŠENÍ ÚLOH.

ÚVOD.

1. a) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$, b) Bod z leží v obdélníku $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$, $-1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$. $\varrho = 2\sin\frac{\alpha}{2}$ a $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \nu\pi$, kde $\nu = 0$ nebo $\nu = -1$ určí se z požadavku aby bod z ležel v uvedeném obdélníku, t. j. $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. **2.** Z druhé rovnice plyne $-z_3 = z_1 + z_2$ a tedy $|z_1 + z_2| = |z_3| = |z_1|$; t. j. body z_1, z_2, z_3 a $z_1 + z_2$ leží na téže kružnici a $\triangle z_1 z_2 (z_1 + z_2)$ je rovnostranný. Vektory z_1 a $z_1 + z_2$ tedy svírají úhel 60° a podobný výsledek dostaneme i pro vektory z_2 a $z_1 + z_2$. Z toho plyne: vektory z_1 a z_2 svírají spolu úhel 120° a jsou stejně dlouhé. Cyklickou záměnou dostaneme totéž pro úhel vektorů z_2, z_3 resp. z_3, z_1. Tvoří tedy z_1, z_2, z_3 vrcholy rovnostranného trojúhelníka vepsaného do kružnice o poloměru $|z_1|$. **3.** $z_4' = -z_1 + z_2 + z_3$, $z_4'' = z_1 - z_2 + z_3$, $z_4''' = z_1 + z_2 - z_3$.

4. $z_c = \dfrac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$. **5.** $z_k = z_1 + (z_1 - z_0)\dfrac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - e^{i\frac{2\pi}{n}}}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1}$. **6.** Vyjádřete v souřadnicích; součet čtverců úhlopříček rovnoběžníka je roven součtu čtverců všech jeho stran. **7.** $\cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$. **8.** $\pm(2 + i)$; $2e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)i}$; $\sqrt[6]{2}\,e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)i}$. **9.** $1 + i$, $1 + 2i$; $i \pm 2$. **10.** $1 - i$, i; $\lambda(1 - i)$, $\lambda(1 + i)$. **11.** a) Osa úsečky ab, b) přímka, c) lichoběžník, d) elipsa s ohnisky a a b pro $\alpha > |b - a|$, úsečka ab pro $\alpha = |b - a|$ a prázdná množina pro $\alpha < |b - a|$, e) vnitřek paraboly $y^2 = 1 - 2x$, f) Pravá polorovina s vyňatým kruhem $x^2 + y^2 - 2x - 1 \leq 0$. **12.** a) $\dfrac{x}{x^2 + y^2} = \alpha$ soustava kružnic dotýkajících se osy y, b) $\dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1} = \operatorname{tg}\alpha$ soustava kružnic procházejících body ± 1, c) $(x - 1)^2 + y^2 = \alpha^2\{(x + 1)^2 + y^2\}$ soustava kružnic, d) Geometrické místo bodů majících od bodů ± 1 stálý součin vzdáleností α, t. zv. Cassiniho ovály. Body ± 1 se nazývají ohniska. Pro $\alpha < 1$ se křivky rozpadají na dvě „vačky" okolo bodů ± 1, pro $\alpha = 1$ dostáváme Bernoulliho lemniskatu („brejle"), pro $\alpha > 1$ dostáváme uzavřené křivky mající podobu deformovaného oválu. Viz obr. 67. e) $z^2 + 2az + b = (z - z_1)(z - z_2)$, kde z_1, z_2 jsou kořeny trojčlenu, křivky tedy tvoří soustavu Cassiniho oválů s ohnisky v bodech z_1, z_2. **13.** Dosadíme

$x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ a dostaneme $z\bar{z} + (1 + \frac{1}{2}i)\,z + (1 - \frac{1}{2}i)\,\bar{z} = 1$, $z^2 + \bar{z}^2 = 2$. **14.** $\xi = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\eta = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $u = \dfrac{\xi}{\xi^2+\eta^2}$, $v = \dfrac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$.

15. a) $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma(\xi^2 + \eta^2) = 0$ — kružnice procházející počátkem; pro $\gamma = 0$ přímka $\alpha\xi + \beta\eta = 0$, shodná s danou. b) $\alpha + \beta\xi + \gamma\eta + \delta(\xi^2 + \eta^2) = 0$ kružnice, pro $\delta = 0$ přímka. c) $\xi^2 - \eta^2 = (\xi^2 + \eta^2)^2$ čili $\left[\left(\xi - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \eta^2\right] \times$ $\times \left[\left(\xi + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \eta^2\right] = \frac{1}{4}$ Bernoulliho lemniskata s ohnisky v bodech $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

d) $\dfrac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2} = 2p\xi$ čili $\eta = \sqrt{\dfrac{2p\xi^3}{1-2p\xi}}$ kissoida.

KAPITOLA I.

1. Souřadnice bodu $Z: \xi = \dfrac{4R^2x}{4R^2+r^2}$, $\eta = \dfrac{4R^2y}{4R^2+r^2}$, $\zeta = \dfrac{2Rr^2}{4R^2+r^2}$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$, R je poloměr koule, osy ξ a η souhlasí s osami x a y, osa ζ souhlasí se svislým průměrem koule. a) obrazy bodů z a $-z$ leží v průsečících poledníku a rovnoběžky, které proházejí obrazem jednoho z obou bodů. b) obrazy bodů z a $\bar{z}$ leží na téže rovnoběžce, která prochází obrazem jednoho z obou bodů, a to na polednících, které jsou souměrně položeny podle poledníku odpovídajícího reálné ose. **2.** a) Ne. b) Ano. **3.** a) Je $r_n = \left(\sqrt{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^2 + \dfrac{y^2}{x^2}}\right)^n$,

$$\lim_{n\to\infty} \ln r_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}n \ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\ln[1 + 2xt + (x^2+y^2)\,t^2]}{2t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2x + 2t\,(x^2+y^2)}{2[1 + 2xt + (x^2+y^2)\,t^2]} = x$$ (kde jsme dosadili $t = \dfrac{1}{n}$ a použili L'Hospitalova pravidla), tedy $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = e^x$. Podobně $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \lim n \operatorname{arctg} \dfrac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} = y$,

takže konečně $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$. b) $\dfrac{2}{2-i}$. **4.** a) $x = (\alpha+\beta)\cos t$, $y = (\alpha-\beta)\sin t$ elipsa s poloosami $|\alpha+\beta|$ a $|\alpha-\beta|$, b) $r = e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$, kde $a = \alpha + i\beta$, $z = re^{i\varphi}$ — logaritmická spirála. **5.** Je $\dot{z} = \dot{r}e^{i\varphi} +$

$+ r\dot{\varphi}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi}$, $\ddot{z} = (\ddot{r} + r\dot{\varphi}^2)\, e^{\mathrm{i}\varphi} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})\, \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi}$; koeficienty při $e^{\mathrm{i}\varphi}$ a $\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi}$ dají hledané veličiny. **6.** Hledaná rychlost je $v = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}|z|f'(z)$. **7.** Zobecněný Ohmův zákon dává $\left(R + \dfrac{1}{C\omega\mathrm{i}}\right)\mathcal{J} = \mathcal{E}$, komplexní proud $\mathcal{J} = I_0 e^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi + \delta)}$, kde $I_0 = \dfrac{E_0}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(C\omega)^2}}}$ a $\operatorname{tg}\delta = \dfrac{1}{RC\omega}$. **8.** $w = \sin 2\varphi$ — jednotková úsečka.

9. Dokažte, že rovnoběžkám odpovídají v zobrazení opět rovnoběžky. **10.** Paraboly $u = \dfrac{v^2}{4\alpha^2} - \alpha^2$ a paraboly $u = \beta^2 - \dfrac{v^2}{4\beta^2}$ s vyjmutými vrcholy.

11. a) Kružnice dotýkající se souřadných os v počátku $u^2 + v^2 = \dfrac{1}{\alpha}u$, $u^2 + v^2 = -\dfrac{1}{\beta}v$. b) Kružnice $u^2 + v^2 - 2v\operatorname{cotg}\alpha = 1$. c) Elipsy $x = \frac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\varphi$, $y = \frac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\varphi$ a hyperboly $\dfrac{x^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{y^2}{\sin^2\alpha} = 1$; ohniska všech křivek jsou v bodech ± 1. d) Lemniskata $\varrho = \sqrt{2|\cos 2\Theta|}$. **12.** Rovina s vyjmutou kladnou poloosou; $u = r^3\cos 3\varphi = \alpha$, $v = r^3 \sin 3\varphi = \beta$. **13.** $f(z) = 1$ mezi parabolami $y = x^2$ a $y = 2x^2$, $f(z) = 0$ všude v rovině mimo uvedenou oblast.

14. $w = \operatorname{tg}\varphi$ je všude spojitá s výjimkou přímek $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$. **15.** a **16.** Použijte Cauchy-Riemannových rovnic. **17.** a) Regulární pro $z \neq \infty$. b) Regulární pro $z \neq 0$. c) Není nikde regulární, je mnohoznačná. d) Není nikde regulární, třebaže je v bodě $z = 0$ diferencovatelná.

KAPITOLA II.

1. $\mathrm{d}u + \mathrm{i}\,\mathrm{d}v = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$; je-li $\mathrm{d}u + \mathrm{i}\,\mathrm{d}v = A(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y)$, pak $A = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{\mathrm{i}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$; odkud plynou rovnice Cauchy-Riemannovy, opak se ověří přímo. **2.** $L = \int_C |f'(z)|\,|\mathrm{d}z|$, $S = \iint_D |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3. $\left.\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z_1} = \infty$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z_2} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$. **4.** $S = \frac{8}{3}$, $L = 2\ln(1 + \sqrt{2})\, e^{1+\sqrt{2}}$. **5.** $L =$

$= 2\sqrt{2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$ — dostáváme eliptický integrál, viz § 89. **6.** Z podmínky kolmosti gradientů dostaneme $\frac{v_y}{u_x} = -\frac{v_x}{u_y} = \lambda$, z druhé podmínky plyne $\lambda = \pm 1$. Případ $\lambda = -1$ vede k zobrazením měnícím orientaci, případ $\lambda = +1$ k zobrazením konformním. **7.** $w + 1 = 2i(z - i)$ čili $w = 1 + 2iz$, $|dw - \Delta w| = |z - i|^2$. **8.** Polopás s vyňatým půlkruhem, sestrojeným nad základnou polopásu jako nad průměrem. **9.** Čtvrtý kvadrant s vyňatým půlkruhem $|w - \frac{1}{2}| \leqq \frac{1}{2}$. **10.** x-ové souřadnice bodů sdružených současně podle obou kružnic jsou $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -4$. Hledané zobrazení: $w = \frac{4z + 1}{z + 4}$, $R = 2$. **11.** $\frac{w - 1}{w + 1} = a\frac{z - 1}{z + 1}$, kde a je libovolná komplexní konstanta. **12.** $w = i\frac{1 - z}{1 + z}$. **13.** $w = \frac{1}{1 - z}$. **14.** $w = 2i\frac{z - i}{z + i}$, $R = 2$. **15.** φ je argument bodu na kružnici $|w| = 1$, na který se zobrazí bod $z = \infty$. Přímkám $\operatorname{Im} z = \text{const}$ odpovídají kružnice dotýkající se kružnice $|w| = 1$ v bodě $e^{i\varphi}$, přímkám $\operatorname{Re} z = \text{const}$ kružnice protínající tutéž kružnici pod pravým úhlem v tomtéž bodě. **16.** $w = \frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_1}\frac{z - a_1}{z - a_3}$. **17.** a, b, c a d reálné, $ad - bc > 0$.

KAPITOLA III.

1. $\sin(x + iy) = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x$; $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$; $\operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cosh 2y + \cos 2x}$. **4.** Při oběhu kružnice obsahující body 0 a 1 ve svém vnitřku v kladném smyslu se změní argument výrazu pod odmocninou o 6π, a tedy hodnota odmocniny nabude své výchozí hodnoty $\sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{7}{12}\pi}$. **5.** $\ln 3 + i\pi$. **6.** Funkce $\omega = z + \sqrt{z^2 - 1}$ zobrazí danou oblast na horní polorovinu. **7.** $w_1 = e^{-e(1+\pi i)}$, $w_2 = e^{-e(1-\pi i)}$. **8.** Kružnice $|z| = \text{const}$ a paprsky $\arg z = \text{const}$. **9.** $f(z_1) = f(z_2)$ plyne buď $z_1 = z_2$, nebo $z_1 + z_2 + 2 = 0$, v druhém případě $|z_2| \geqq 2 - |z_1|$, a tedy oba body nemohou ležet uvnitř jednotkového kruhu. **10.** Z $f(z_1) = (fz_2)$ plyne buď $z_1 = z_2$ nebo $z_1z_2 = 1$. V druhém případě nemohou oba body ležet současně v horní polorovině. Rovina s výřezy podél polopřímek $-\infty < u < -1$, $1 < u < \infty$, $v = 0$. **11.** Pravá polorovina s výřezem podél polopřímky $1 < u < \infty$; b) kruh $|w| < 1$, soustava kružnic procházejících body $\pm i$ a soustava kružnic, podle nichž jsou tyto dva body sdruženy; c) rovina s výřezy podél polopřímek

$v = \pm \pi$, $-\infty < u < -1$; d) kruh $u^2 + v^2 < 2v$; e) kruh $|w| < 1$, kružnicím $|w| = \varrho$ odpovídají lemniskaty $(x^2 + y^2)[(4 - x)^2 + y^2] = 16\varrho^2$ a paprskům $\arg w = \varphi$ — hyperboly. **12.** a) Rovina s výřezy podél polopřímek $v = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $-\infty < u < 0$; b) horní polorovina s výřezy podél úseček $u = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ $0 < v < h$. **13.** a) $\zeta = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ zobrazí výseč na půlkruh, $\omega = \left(\dfrac{\xi + 1}{\zeta - 1}\right)^2$ na polorovinu, zbývá použít vzorce (23) kap. II.; b) $w = \dfrac{1}{\pi} \ln \left(i \dfrac{1 + z}{1 - z}\right)$; c) substitucí $\zeta = \frac{7}{3}z$ dostaneme elipsu s ohnisky v bodech ± 1, zobrazením $\zeta = \frac{1}{2}\left(\omega + \dfrac{1}{\omega}\right)$ přejde tato elipsa ve kružnici $|\omega| = 3$; dosadíme ještě $\omega = 3w$ a dostaneme jednotkovou kružnici. Konečný výsledek: $w = \frac{1}{9}(z + \sqrt{z^2 - 9})$; d) $\omega = \sqrt{\zeta}$ zobrazí parabolu $\xi = \dfrac{\eta^2}{4\alpha^2} - \alpha^2$ na přímku $\operatorname{Im} \omega = \alpha$; vezmeme $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}p}$ a parabola bude $\eta^2 = 2p(\xi + \frac{1}{2}p)$; zobrazením $\zeta = z - \frac{1}{2}p$ přejde tato parabola v danou parabolu $y^2 = 2px$; zbývá jen dosadit $w = \omega - i\sqrt{\frac{1}{2}p}$ a dostaneme konečný výsledek $w = \sqrt{z - \frac{1}{2}p} - i\sqrt{\frac{1}{2}p}$. e) Použijeme vlastností zobrazení $z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \dfrac{1}{\zeta}\right)$, f) logaritmické spirály protínají polopřímky $\arg z = \text{const}$ pod konstantním úhlem, $\zeta = \ln z$ převádí tyto polopřímky v rovnoběžky a v důsledku konformnosti zobrazení převádí danou oblast v jistý pás. Další zobrazení jsou zřejmá. **14.** a) $\zeta = \frac{1}{2}\pi z$, $\zeta_1 = e^{\zeta}$, $\omega = \zeta_1^2$, $\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\omega + \dfrac{1}{\omega}\right)$, dostaneme polorovinu s výřezy podél polopřímek $\operatorname{Re} \omega_1 < \cosh \pi$, $\operatorname{Re} \omega_1 > \cosh 2\pi$ $(\operatorname{Im} \omega_1 = 0)$, b) $\zeta = \frac{1}{2}\pi z$, $\zeta_1 = e^{\zeta}$, $\zeta_2 = \dfrac{\zeta_1 - i}{\zeta_1 + i}$, $\omega = \zeta_2^2$ a dále jako sub a); c) $\zeta = \dfrac{1}{z}$ zobrazí danou oblast na vertikální pás s vodorovným výřezem, další viz př. 4, § 33; d) $\zeta = \dfrac{1}{z}$ zobrazí danou oblast na pás $-1 < \operatorname{Re} \zeta < 1$ s výřezem podél polopřímky $\operatorname{Re} \zeta = 0$ $\operatorname{Im} \zeta > \frac{1}{2}$; e) pomocí $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ zobrazíme danou oblast na vnějšek úsečky $-d < \operatorname{Re} \zeta < d$, pak použijeme $\omega = \dfrac{1}{d}\zeta$ a zobrazení inversní k prvému a dostaneme vnějšek kruhu;

f) $\zeta = \dfrac{1+z}{1-z}$, $\zeta_1 = \zeta^{\frac{4}{3}}$, $\omega = \dfrac{1-\zeta_1}{1+\zeta_1}$ a dostaneme horní polorovinu s výřezem podél úsečky imaginární osy, dále viz př. 1 § 27; g) sled zobrazení je tento: pootočení, dilatace, $\omega = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$, podobnost, $\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\zeta_1 + \dfrac{1}{\zeta_1}\right)$ a dostaneme vnějšek úsečky. Další je zřejmé; h) $\omega = \sqrt{z}$ zobrazí danou oblast na polopás $0 < \operatorname{Im}\omega < 1$, $\operatorname{Re}\omega > -2$ a další viz př. 2 § 33; i) body ± 1 jsou sdruženy podle kružnice $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 1$, pak aplikujeme $\zeta = \dfrac{z+1}{z-1}$, $\zeta_1 = \zeta^2$ a dále jako sub b); k) analogicky jako sub g).

KAPITOLA IV.

1. $r^2 = c_1 \sin 2\varphi$, $r^2 = c_2 \cos 2\varphi$, $E = \dfrac{2\mathrm{i}}{\bar{z}^3}$. **2.** $w = \ln \sinh \pi z + c$, $|\sinh \pi z| = \text{const.}$ **3.** $V = \varphi\left(\dfrac{x^2 + y^2}{2x}\right)$, $E_1 : E_2 = 1 : 2$. **5.** Hyperboly s ohnisky v bodech $\pm a$, kvartiky (křivky čtvrtého stupně) $y = \sqrt{1 + \dfrac{H^2}{x^2 + C^2}}$ (viz obr. 75). **6.** Nábojem $2q$ v počátku a čtyřmi náboji $-q$ v bodech $\pm \sqrt{\pm \mathrm{i}}$. **8.** $\sigma = \dfrac{V}{2\pi^2} \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

9. $w = 4\pi \mathrm{i} \operatorname{Ln} \dfrac{z - \mathrm{i}\sqrt{3}}{z + \mathrm{i}\sqrt{3}}$, v bodě $z = 2\mathrm{i} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ je hustota náboje $\sigma = \dfrac{\sqrt{3}}{2 + \sin\varphi}$.

10. $w = \dfrac{\mathrm{i}}{\ln 2} \operatorname{Ln} \dfrac{4z + 1}{z + 4}$; na prvém válci $9a$ a $25a$; na druhém $2a$ a $18a$, kde $a = \dfrac{1}{60\pi \ln 2}$. **11.** $w = 100\mathrm{i}\left\{1 - \dfrac{\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})}{\operatorname{Ln}(2 + \sqrt{3})}\right\}$.

12. $w = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{Ln} \dfrac{\cosh\left(\dfrac{\pi}{\alpha} \operatorname{Ln} \dfrac{z}{a}\right) + 1}{\cosh\left(\dfrac{\pi}{\alpha} \operatorname{Ln} \dfrac{z}{a}\right) - 1} = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{Ln} \operatorname{cotgh}\left(\dfrac{\pi}{2\alpha} \operatorname{Ln} \dfrac{z}{a}\right)$; $\operatorname{tg} \dfrac{\pi v}{2} = \dfrac{\sin \dfrac{\pi\varphi}{\alpha}}{\sinh\left(\dfrac{\pi}{\alpha} \ln \dfrac{r}{a}\right)}$.

13. $\dfrac{Q}{\pi} \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$. **14.** $w = \dfrac{Q}{2\pi} \ln\left(1 + \dfrac{4}{z^4}\right)$, proudnice $\sin 4\varphi = c(r^4 + 4 \sin^4\varphi)$. **15.** $w = \dfrac{2V_0}{\pi} \operatorname{Ln}\left(\dfrac{1 - z^2}{1 + z^2} \sqrt{z^2 + 1}\right) + \dfrac{V_0 \ln 2}{\pi}$. **16.** $w = \dfrac{Q}{2\pi} \ln(z^6 + a^6)$.

KAPITOLA V.

1. a) i; b) 2i; c) 2i. **2.** 4πi. **3.** i(sinh1 − cosh1). **4.** a) $e^{1-i} - 1$; b) $(e - 1) \times \times (e^{-i} - 1)$. **5.** Délka oblouku křivky L. **6.** $\frac{1}{2i}$. **7.** $\pi \frac{\sqrt{2}}{2}$i. **8.** $-\frac{1}{2}\pi(2i - 1)e^i$.

9. Funkce $|f(z)|$ nemá extrémy uvnitř oblasti; Cassiniho křivky s n ohnisky definované rovnicí $|P_n(z)| = \text{const}$, kde $P_n(z)$ je mnohočlen stupně n. **11.** $a + c = 0$. **13.** Dosadíme $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, pak $u = \frac{\sin(z + \bar{z})}{\cos(z - \bar{z}) - \cos(z + \bar{z})} = \frac{1}{2}(\operatorname{cotg} z + \operatorname{cotg} \bar{z})$ a tedy $f(z) = \operatorname{cotg} z + iC$, okrajová podmínka dává $C = 0$. **14.** Poissonův vzorec dává $u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{(1 - r^2)\,d\psi}{1 - 2r\cos(\psi - \varphi) + r^2} = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{1+r}{1-t}\operatorname{tg}\frac{\beta - \varphi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{\alpha - \varphi}{2}\right]$. **17.** Použijeme (61).

KAPITOLA VI.

1. a) Polorovina $\operatorname{Re} z > 1$; b) jako v § 64 napíšeme řadu ve tvaru $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inz}$; v rovině $\zeta = e^{iz}$ bude jejím konvergenčním oborem mezikruží; v rovině (z) vodorovný pás. **2.** a) ∞; b) 1. **3.** a) $\sqrt[3]{i}\left(1 + \frac{z - i}{i}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{i}\left\{1 + \frac{1}{3}i(z - i) - \frac{1}{2i^2} \cdot \frac{2}{3^2}(z - i)^2 + \frac{1}{3!i^3}\frac{2 \cdot 5}{3^3}(z - i)^3 - \frac{1}{4!\,i^4}\frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4}(z - i^4) + \ldots\right.$, kde $\sqrt[3]{i}$ nabývá všech možných hodnot; b) $\operatorname{Ln}(i + zi) = i(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi) + \frac{z - i}{i} - \frac{(z - i)^2}{2i^2} + \frac{(z - i)^3}{3i^3} + \ldots$, kde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **4.** $f(z) = e^{\frac{\ln(1+z)}{z}}$; dosazením řady pro $\zeta = \frac{\ln(1 + z)}{z}$ do řady pro e^ζ dostaneme $f(z) = e\left(1 - \frac{1}{2}z + \frac{\pi}{24}z^2 - \ldots\right)$.

5. $f(z)$ má zřejmě singularitu v bodě $z = 1$; je $f(z) = z^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(z^2)^{2^n} = z^2 + f(z^2)$, a tedy singularita bude i v bodě $z^2 = 1$; dále $f(z) = z^2 + z^4 + f(z^4)$, a tedy singularita bude i v bodě $z^4 = 1$ atd. **6.** a) dvě jednoznačné; b) jedna dvojznačná; c) jedna dvojznačná; d) dvě jednoznačné; e) jedna jednoznačná; f) nekonečně mnoho jednoznačných; g) jedna nekonečně mnohoznačná. **7.** Dosadíme $t = \cos\varphi$ a rozložíme $f(z)$ v parciální zlomky: $-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}ze^{-i\varphi}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}ze^{i\varphi}}$; každý z nich rozvineme v geometrickou řadu; dostaneme $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}} z^n$, odkud $T_n(\cos\varphi) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\varphi$.

8. a) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nt$; b) $-2 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nt$. Návod: dosadíme $e^{it} = z$, obdržené řady rozvineme v Laurentovu řadu a odtud dostaneme hledaný výsledek.

9. a) $-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{5}{6z^3} - \ldots$, b) $\pm z \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm z \left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots\right)$, kde součinitele a_k dostaneme vynásobením řad; c) funkce nemá Laurentův rozvoj, neboť v okolí bodu $z = \infty$ nelze konstruovat regulární větev; d) rozvoj každé z větví je $\frac{b-a}{z} + \frac{b^2 - a^2}{2z^2} + \frac{b^3 - a^3}{3z^3} + \ldots + 2k\pi i$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$. **10.** $I_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} (\frac{1}{2}t)^{n+2k}$. Rozvoj dostaneme substitucí $\zeta = \frac{1}{2}t \left(z - \frac{1}{z}\right)$ do řady pro e^{ζ} a srovnáním podle mocnin z. Ze vzorce pro koeficienty Laurentovy řady dostáváme: $J_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\frac{t}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{z^{n+1}}$; integrujeme-li podél $|z| = 1$ a dosadíme-li $z = e^{i\varphi}$, dostaneme $J_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_0^{2\pi} e^{it \sin\varphi} e^{-ni\varphi}\, i\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\psi - t \sin\psi)\, d\psi$, neboť $\int_0^{2\pi} \sin(n\psi - \sin\psi)\, d\psi = 0$, o čemž se lehko přesvědčíme substitucí $\psi = 2\pi - \Theta$. **11.** Bod $z = 1$ je singulární bod funkce. **12.** Prvá z funkcí je spojitá v bodě $x = 0$ spolu se všemi svými derivacemi, druhá má v bodě $z = 0$ podstatně singulární bod. **14.** a) podstatně singulární bod $z = 1$; póly prvého řádu v bodech $z = 2k\pi i$; bod $z = \infty$ je neisolovaný singulární bod (hromadný bod pólů); b) póly prvého řádu v bodech $z = -\frac{1}{4}\pi + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3)$, kde $\sin z + \cos z = 0$; bod $z = \infty$ je neisolovaný singulární bod; c) v bodech $z = (2k + 1)\, \pi i$ póly prvého řádu; bod $z = \infty$ je neisolovaný singulární bod; d) podstatně singulární bod $z = \infty$. **15.** a) $a = -2$, použijeme Cauchyho residuové věty. **16.** a) $\left(\frac{1}{\cos z}\right)_{z=k\pi} = (-1)^k$; b) $z_k = e^{i\frac{2k+1}{n}\pi}$, $\operatorname{res} f(z_k) = -\frac{z_k}{n}$, $\operatorname{res} f(\infty) = 0$ pro $n \neq 1$, $\operatorname{res} f(\infty) =$

$= -1$ pro $n = 1$; c) $\operatorname{res} f(-1) = (-1)^{n+1}\binom{n+1}{2n}$, $\operatorname{res} f(\infty) = (-1)^n\binom{n+1}{2n}$; d) 0; e) 0; f) $\operatorname{res} f(-1) = e^{-1}$, $\operatorname{res} f(\infty) = -\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \ldots\right) = -e^{-1}$; g) $e^b - e^a$. **17.** $Q = 0$, $\Gamma = 2\pi$, **18.** $(2n + 1)\, q$.

KAPITOLA VII.

1. a) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$; c) $\frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{a}{\sqrt{2}} + \sin\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$; d) $\frac{1}{2}\pi$; e) $\frac{1}{2}\pi\left\{1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$; f) $\frac{\pi \sin a\lambda}{\sin a\pi \sin\lambda}$; g) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; h) $\frac{1}{4}\pi$; i) $\frac{1}{8}\pi^3$. **2.** $f(t) = 0$ pro $t < 0$, $f(t) = t$ pro $t \geqq 0$. **5.** a) $\operatorname{tg} z = \operatorname{cotg} z - 2\operatorname{cotg} 2z = 2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\frac{1}{4}\pi^2 - z^2}$; b) $\frac{1}{\sin z} = \operatorname{cotg} z + \operatorname{tg}\frac{z}{2} = \frac{1}{z} + 2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^2 - k^2\pi^2}$; c) $4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)}{4z^2 - (2k-1)^2}$ [záměnou z na $\frac{1}{2} - z$ v b)]; d) $\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\operatorname{cotg}\frac{iz}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + 2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^2 + 4k^2\pi^2}$.

6. a) $e^z - 1 = 2ie^{\frac{1}{2}z}\sin\frac{z}{2i} = e^{\frac{1}{2}z} z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2k^2}\right)$; b) $\cos\pi z - \cos\pi z_0 = -2\sin\pi\frac{z + z_0}{2}\sin\pi\frac{z - z_0}{2} = -\frac{1}{2}\pi^2(z^2 - z_0^2)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{(z + z_0)^2}{4k^2}\right)\left(1 - \frac{(z - z_0)^2}{4k^2}\right)$; c) $\cosh z - \cos z = \frac{\sin 2\pi z}{2\sin\pi z} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2}\right)$. **7.** $w = 2qi\operatorname{Ln}\operatorname{cotg}\frac{\pi z}{2d}$; použijeme rozvoje pro $\sin\pi z$ a $\cos\pi z$. **8.** $w(z) = \frac{Q}{\pi}\ln\sin\frac{\pi z}{2d}$. **9.** Dosadíme $x = \sqrt{t}$, integrál přejde na tvar $\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$. **10.** Integrováním funkce $f(\zeta) = \zeta^{z-1}e^{-\zeta}$ po obvodu čtvrtiny kruhu $|\zeta| = R$, $0 < \arg\zeta < \frac{1}{2}\pi$ a limitováním $R \to \infty$. a) $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n}$; b) $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}$; c) $\frac{1}{n-1}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n}$. **11.** Do integrálu, který definuje B — funkci, dosadíme $t = \frac{\tau}{1 + \tau}$ a dostaneme $B(p, q) = \int_0^{\infty}\frac{\tau^{p-1}}{(1 + \tau)^{p+q}}\,d\tau\,(+)$. Do integrálu $\Gamma(p + q) = \int_0^{\infty} t^{p+q-1}e^{-t}\,dt$ zavedeme novou proměnnou σ vztahem $t = (1 + \tau)\,\sigma$ a dostaneme $\dfrac{1}{(1+\tau)^{p+q}} = \dfrac{1}{\Gamma(p+q)} \times$ $\times \int\limits_0^\infty \sigma^{p+q-1} e^{-(1+\tau)\sigma}\, d\sigma$. Dosadíme tento výraz do integrálu (+) a zaměníme pořádek integrace: $B(p, q) = \dfrac{1}{\Gamma(p+q)} \int\limits_0^\infty \tau^{p-1}\, d\tau \int\limits_0^\infty \sigma^{p+q-1} e^{-(1+\tau)\sigma}\, d\sigma = \dfrac{1}{\Gamma(p+q)} \times$ $\times \int\limits_0^\infty \sigma^{q-1} e^{-\sigma}\, d\sigma \,.\int\limits_0^\infty (\tau\sigma)^{p-1} e^{-(\tau\sigma)}\, d(\tau\sigma) = \dfrac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. **12.** a) $\frac{1}{2}B(p + \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2}) =$ $= \dfrac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\,\Gamma(q+\frac{1}{2})}{2\Gamma(p+q+1)}$; b) $\dfrac{\pi}{2 \sin \dfrac{(p+1)\,\pi}{2}}$; c) $\dfrac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{2\pi}}$; d) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \dfrac{a^{-p}}{n} \times$

$$\times \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+1}{n}\right) \Gamma\left(p - \dfrac{m+1}{n}\right)}{\Gamma(p)}.$$

KAPITOLA VIII.

1. a) Zobrazíme horní polorovinu obrazce na polorovinu $\zeta = e^{\frac{\pi z}{H}}$ a pomocí principu symetrie dostaneme zobrazení celého obrazce na rovinu s výřezy podél polopřímek $\left(-\infty, e^{-\frac{d\pi}{H}}\right)$ a $\left(e^{\frac{d\pi}{H}}, \infty\right)$. Zbývá aplikovat zobrazení $\omega = \dfrac{\zeta - \cosh \dfrac{d\pi}{H}}{\sinh \dfrac{d\pi}{H}}$ a $w = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$; b) dosadíme $\zeta = \dfrac{1}{z}$, vezmeme jednu osminu obrazce — výseč $0 < \arg\zeta < \frac{1}{4}\pi$; aplikujeme zobrazení $\zeta_1 = \zeta^n$, $\omega = \zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 - 1}$, $w = \sqrt[4]{\omega}$; dostaneme výseč $0 < \arg w < \frac{1}{4}\pi$, $|w| > 1$, při čemž uvedeným částím hranice odpovídají polopřímky. Z principu symetrie plyne, že takto konstruovaná funkce zobrazí danou oblast na vnějšek kruhu. Dostáváme

$w = \dfrac{1}{z} \sqrt[4]{1 - \sqrt{1 - z^7}}$ čili $z = \dfrac{w\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{1 + w^8}}$. **4.** a) Jako v cvič. 13 d) kap. III zobrazíme parabolu na přímku. Uvnitř paraboly není toto zobrazení jedno-jednoznačné. Nicméně zprostředkuje jedno-jednoznačné zobrazení horní poloviny dané oblasti na polopás. Tento polopás zobrazíme na polorovinu a daná oblast se při tom zobrazí na rovinu s výřezem podél polopřímky. Další je zřejmé; b) jako v cvič. 13. e) kap. III vezmeme funkci, která zobrazí hyperbolu na ramena jistého úhlu, horní polovina dané oblasti se při tom zobrází na vnitřek úhlu s jistým výřezem. Další je zřejmé; c) jako v př. 13 c) kap. III vezmeme funkci, která zobrazí elipsu na jistou kružnici, horní polovina dané oblasti se při tom zobrazí na polovinu jistého mezikruží. Logaritmická funkce zobrazí toto mezikruží na jistý obdélník. Z principu symetrie plyne, že se pak i vnitřek elipsy zobrazí na jistý obdélník. Pak zbývá už jen aplikovat eliptickou funkci sn.

5. a) Rozdělit podél $y = x$ a umocnit dvěma. Další je zřejmé; b) $\zeta = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$, rozdělit podél imaginární osy. Další je zřejmé; c) rozříznout podél imaginární osy, umocnit dvěma a pak rozříznout podél reálné osy. Další je zřejmé. **6.** Rozříznout podél imaginární osy, umocnit dvěma a pak aplikovat zobrazení $\omega = \dfrac{\zeta - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}\zeta}$, $\omega_1 = \sqrt{\omega}$, $\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\omega_1 + \dfrac{1}{\omega_1}\right)$; dostaneme dolní polorovinu. Další je zřejmé. **7.** a) $z = A \displaystyle\int_0^w \frac{\sqrt{w}}{(w - 1)(w + a)}\, \mathrm{d}w$, kde $a = \dfrac{H^2}{h^2}$, $A = \dfrac{H^2 + h^2}{\pi h \mathrm{i}}$. b) Použijeme principu symetrie a $z = A \displaystyle\int_0^w \frac{w^{-1-\alpha}}{w + 1}\, \mathrm{d}w + B$, kde $A = \dfrac{h}{\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}$, $B = \mathrm{i}h$ zobrazí horní polovinu dané oblasti na polorovinu;

$$\text{c)}\quad z = A \int_0^w \frac{\sqrt{w}}{(w - 1)(w - a)(w + b)}\, \mathrm{d}w, \text{ kde } \frac{A\pi}{(a + 1)(1 + b)} = h_1$$

$$\frac{A\pi\sqrt{a}}{(a - 1)(a + b)} = h_2, \quad \frac{A\pi\sqrt{b}}{(b + 1)(a + b)} = h_3; \text{ d) } z = r\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \int_0^w \frac{w(w - 1)}{\sqrt{(w - k)^3}}\, \mathrm{d}w - a.$$

(Argument konstanty před integrálem se stanoví z podmínky: pro $w = u > 1$ je úhel pootočení zobrazení $\arg \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = -\frac{1}{4}\pi$.) Dále použijeme podmínky, že bodu $w = 1$ odpovídá bod $z = a\mathrm{i}$. Odtud $k = \frac{1}{4}$, $r = \dfrac{3a}{2\sqrt{2}}$;

$$\text{e)}\quad z = A \int_0^w \frac{(w + 1)}{(w + a)^\alpha w^{1-\alpha}}\, \mathrm{d}w + a, \text{ kde } a \text{ je reálná konstanta. Konstanty } A \text{ a } a$$

se vyčíslí stejně jako v d) pomocí dvojic odpovídajících si bodů. **9.** Provedeme pomocný výřez podél imaginární osy, pravou polovinu zobrazíme na horní polorovinu pomocí Christoffelova-Schwarzova vzorce a použijeme principu symetrie. **10.** a) Rozříznout podél imaginární osy a použít př. 2 § 83 a principu symetrie; b) pás $0 < y < h$ zobrazíme pomocí $\zeta = e^{\frac{2\pi z}{h}}$ na rovinu s výřezem podél kladné reálné poloosy; daným úsečkám odpovídají úsečky $\left(e^{\frac{-2\pi a}{h}}, e^{\frac{2\pi a}{h}}\right)$ na horním a dolním okraji výřezu. Pak aplikujeme $\omega = A\zeta + B$, kde konstanty A a B určíme tak, aby tyto úsečky přešly v jednotkové

$$\left(A = \frac{1}{\sin \frac{2\pi a}{h}},\ B = -\operatorname{cotgh} \frac{2\pi a}{h}\right).$$

Pak ještě použijeme $w = \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$. Použijeme-li na konec ještě principu symetrie, dostaneme konečně hledané mnohoznačné zobrazení.