POUŽITÍ THEORIE RESIDUÍ.

§ 72. Výpočet integrálů typu $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx$, kde $R(x)$ je racionální lomená funkce.

Předpokládejme, že $R(\sin x, \cos x)$ je spojitá funkce argumentu x v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Methodu výpočtu vysvětlíme na jednotlivých typických příkladech.

Příklad 1.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2}, \quad 0 < p < 1.$$

Položíme

$$e^{ix} = z \tag{1}$$

tedy $ix = \ln z$, $dx = \frac{dz}{iz}$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, a pro interval $0 \leqq x \leqq 2\pi$ oběhne bod z jednotkovou kružnici. Tedy

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(1 - pz - \frac{p}{z} + p^2\right)} = \oint_{|z|=1} \frac{i\,dz}{pz^2 - (p^2 + 1)z + p}.$$

Integrand má dva póly, které určíme z rovnice

$$pz^2 - (p^2 + 1)z + p = 0,$$

odkud máme ihned $z_1 = p$, $z_2 = \frac{1}{p}$. Z obou pólů jen pól z_1 leží uvnitř jednotkové kružnice a tedy podle Cauchyho residuové věty (§ 48)

$$I = i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{pz^2 - (p^2 + 1)z + p} = i[2\pi i \operatorname{res} f(z_1)].$$

Residuum funkce za integračním znaménkem v bodě $z = z_1$ vypočteme podle vzorce (42) § 67:

$$\operatorname{res} f(z_1) = \frac{1}{[pz^2 - (p^2 + 1)z + p]'_{z=p}} = \frac{1}{p^2 - 1}.$$

Takže

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2} = -2\pi \frac{1}{p^2 - 1} = 2\pi \frac{1}{1 - p^2}. \quad (2)$$

Poznamenejme ještě, že se integrál snadno vyčíslí pomocí Poissonova integrálu (60) § 56, položíme-li $\psi = x$, $\varphi = 0$, $R = 1$, $r = p$, $U(\psi) = \dfrac{1}{1 - p^2}$.

Příklad 2. Toutéž substitucí (1) je též řešitelný integrál

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(p + q\cos x)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left\{p + \frac{q}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right\}^2} =$$

$$= -i \oint_{|z|=1} \frac{z\,dz}{\left\{\frac{q}{2}z^2 + pz + \frac{q}{2}\right\}^2}.$$

Integrand má póly druhého řádu v bodech $z_1 = \dfrac{1}{q}(-p + \sqrt{p^2 - q^2})$, $z_2 = \dfrac{1}{q}(-p - \sqrt{p^2 - q^2})$. Budiž $p > q > 0$; pak pól z_2 leží vně jednotkové kružnice. Residuum c_{-1} v bodě z_1 se vypočte pomocí vzorce (40) § 67, položíme-li $m = 2$. Uvážíme-li, že

$$\tfrac{1}{2}qz^2 + pz + \tfrac{1}{2}q = \tfrac{1}{2}q(z - z_1)(z - z_2),$$

dostaneme

$$c_{-1} = \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}\left\{\frac{z(z - z_1)^2}{\frac{1}{4}q^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2}\right\} = \left[\frac{4}{q^2}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z - z_2)^2}\right]_{z = z_1} =$$

$$= -\frac{4}{q^2}\frac{z_1 + z_2}{(z_1 - z_2)^3} = \frac{p}{(p^2 - q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Podle residuové věty dostáváme hledaný výsledek:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(p + q\cos z)^2} = -i2\pi i c_{-1} = \frac{2\pi p}{(p^2 - q^2)^{\frac{3}{2}}}; \; p > q > 0. \quad (3)$$

Analogicky se vypočtou i integrály podobných typů.

Příklad 3. K výpočtu integrálu

$$I = \int_0^{\pi} \operatorname{cotg}(x - a)\, \mathrm{d}x,$$

kde $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\beta \neq 0$ (pro $\beta = 0$ integrál diverguje), použijeme substituce

$$\boxed{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(x-a)} = z.}$$

Vypočteme ještě $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}z}{2\mathrm{i}z}$, $\operatorname{cotg}(x - a) = \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-a)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-a)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-a)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-a)}} = \mathrm{i}\dfrac{z+1}{z-1}$.

Mění-li se x v intervalu 0 do π, obíhá bod z kružnici

$$|z| = |\mathrm{e}^{2\beta + 2\mathrm{i}(x-\alpha)}| = \mathrm{e}^{2\beta}.$$

Tedy

$$I = \oint_{|z|=e^{2\beta}} \mathrm{i}\frac{z+1}{z-1}\frac{\mathrm{d}z}{2\mathrm{i}z} = \frac{1}{2}\oint_{|z|=e^{2\beta}} \frac{z+1}{z-1}\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Pro $\beta > 0$ je poloměr kružnice $\mathrm{e}^{2\beta} > 1$; tedy uvnitř leží oba póly integrandu $z_1 = 0$, $z_2 = 1$. Oba tyto póly jsou prvého řádu a příslušná residua vypočteme podle (42) § 67; dostaneme

$$r_1 = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = -1,\ r_2 = \frac{\varphi(1)}{\psi'(1)} = 2$$

(v prvém případě jsme dosadili $\varphi(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$, $\psi(z) = z$, ve druhém $\varphi(z) = \dfrac{z+1}{z}$, $\psi(z) = z - 1$). Pro $\beta < 0$ je poloměr kružnice $\mathrm{e}^{2\beta} < 1$. Uvnitř tedy leží jen jeden pól integrandu, a to pól $z_1 = 0$ s residuem $r_1 = -1$, takže konečně pro $\beta > 0$ $I = \frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}(r_1 + r_2) = \pi\mathrm{i}$ a pro $\beta < 0$ $I = \frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}r_1 = -\pi\mathrm{i}$.

Oba příklady můžeme shrnout v jeden a píšeme

$$I = \int_0^{\pi} \operatorname{cotg}(x - a)\, \mathrm{d}x = \pi\mathrm{i} \operatorname{sign} \beta,\quad \operatorname{Im} a = \beta \neq 0, \tag{4}$$

kde $\operatorname{sign}\beta$ je znaménko β a rovná se $+1$ pro $\beta > 0$ a -1 pro $\beta < 0$.

§ 73. Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} \alpha x\, \mathrm{d}x$, kde $R(x)$ je racionální lo-

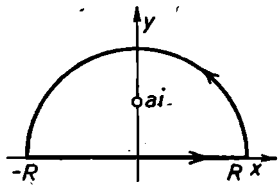
mená funkce argumentu x. Nejprve se budeme zabývat výpočtem integrálů, kde goniometrická funkce vypadla:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Pro konvergenci integrálu (5) je nutno učinit tyto předpoklady: Funkce $R(x)$ je pro všechny hodnoty x spojitá a stupeň čitatele je nejméně o dvě menší než stupeň jmenovatele. Není-li totiž splněn poslední předpoklad, integrál (5) diverguje.

Příklad 1. Pro výpočet integrálu

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^3}$$



Obr. 107.

zvolíme za integrační cestu úsečku $(-R_1, R)$ reálné osy a horní půlkružnici $|z| = R$ (obr. 107) a budeme zkoumat funkci

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^3}.$$

Uvnitř cesty L leží jeden z pólů naší funkce, a to $z_0 = ai$, který je třetího řádu a má residuum

$$c_{-1} = \frac{1}{2!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \left\{ \frac{(z - ai)^3}{(z^2 + a^2)^3} \right\} = \left[\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \frac{1}{(z + ai)^3} \right]_{z=ai} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 4}{(2ai)^5} = \frac{3}{16a^5 i}.$$

Podle residuové věty

$$\oint_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\, c_{-1} = \frac{3\pi}{8a^5}, \tag{6}$$

kde C_R je horní půlkružnice $|z| = R$. Podle věty o odhadu integrálu § 46 pro dostatečně velká R je

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \frac{1}{R^6} \max_{|z|=R} \frac{1}{\left| 1 + \frac{a^2}{z^2} \right|^3} \cdot \pi R \leq \frac{C}{R^5},$$

kde C je jistá konstanta (pro dostatečně velká R je $\left|1 + \frac{a^2}{z^2}\right|^3$ velmi blízké 1). Odtud

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

a ze vztahu (6) dostáváme pro hledaný výsledek*)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{3\pi}{8a^5}. \tag{7}$$

Analogicky se vypočtou i integrály obsahující goniometrické funkce.

Příklad 2. Pro výpočet integrálu

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{x^2 + a^2}$$

zvolíme tutéž integrační cestu jako v předešlém příkladě a budeme zkoumat funkci

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2},$$

která je pro $z = x$ shodná s funkcí za integračním znaménkem. Na půlkružnici C_R je $|e^{iz}| = e^{-y} < 1$, neboť $y = \operatorname{Im} z > 0$, a pro dostatečně velká R dostáváme jako v předcházejícím příkladě odhad**)

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqq \frac{C}{R^2}\,\pi R = \frac{c\pi}{R},$$

z kterého je vidět, že $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Uvnitř L leží jen jeden pól funkce $f(z)$ $z = ai$ s residuem

$$c_{-1} = \frac{\varphi(ai)}{\psi'(ai)} = \frac{e^{-a}}{2ai} = \frac{1}{2ae^a i}$$

---

*) Integrál (7) můžeme vyčíslit též elementárně buď trojnásobným postupným integrováním per partes, nebo pomocí goniometrické substituce. Oba způsoby výpočtu však jsou dosti složité.

**) Kdybychom položili $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + a^2}$, nebyl by podobný odhad možný, neboť na C_R by $|\cos z|$ rychle vzrůstala.

(kde $\varphi(z) = e^{iz}$, $\psi(z) = z^2 + a^2$) a podle residuové věty

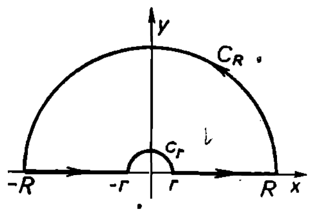
$$\oint_L f(z)\,dz = \int_{-R}^{0} \frac{e^{ix}\,dx}{x^2+a^2} + \int_0^R \frac{e^{ix}\,dx}{x^2+a^2} + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i c_{-1} = \frac{\pi}{ae^a}. \qquad (8)$$

Prvý z integrálů (8) přejde substitucí $x' = -x$ na integrál $-\int_R^0 \frac{e^{-ix'}\,dx'}{x'^2+a^2} = \int_0^R \frac{e^{-ix}\,dx}{x^2+a^2}$, kde jsme se opět vrátili k staré proměnné. Sečteme-li oba integrály, dostaneme $2\int_0^R \frac{\cos x\,dx}{x^2+a^2}$. Rovnice (8) přejde na tvar

$$\oint_L f(z)\,dz = 2\int_0^R \frac{\cos x\,dx}{x^2+a^2} + \int_{C_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{ae^a}.$$

Použijeme-li odhadu $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$, dostaneme pro $R \to \infty$ z poslední rovnice hledaný výsledek*)

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2ae^a}. \qquad (9)$$



Obr. 108.

Příklad 3. Pro výpočet integrálu

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

použijeme pomocné funkce

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z},$$

jejíž imaginární část pro $z = x$ je shodná s funkcí za integračním znaménkem. Cesta zobrazená na obr. 107 je pro integrování v našem

*) Neurčitý integrál $\int \frac{\cos x\,dx}{x^2+a^2}$ není možno vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

případě nevhodná, neboť $f(z)$ nabývá nekonečně velkých hodnot pro $z = 0$. Abychom se vyhnuli tomuto úskalí, použijeme menší půlkružnice $|z| < r$, $y > 0$, ležící uvnitř půlkružnice C_R obr. 107 (viz obr. 108), a budeme dvakrát limitovat $r \to 0$ a $R \to \infty$. V takto sestrojené oblasti je $f(z)$ regulární a podle Cauchyho věty § 47

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \tag{10}$$

Prvý z integrálů (10) přejde substitucí $t = -x$ na $\int_R^r \frac{e^{-it}}{t} dt = = -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx$, kde jsme přešli opět ke staré proměnné; sloučíme-li ho s třetím z integrálů (10) dostáváme $2i\int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$. Pro odhad modulu čtvrtého z integrálů (10) nestačí omezenost funkce $|e^{iz}|$ na kružnici C_R neboť délka půlkružnice a modul jmenovatele jsou stejného řádu pro $|z|$. Budeme proto integrovat per partes, kde $\frac{1}{z} = u$, $e^{iz}\,dz = dv$, a dostaneme

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \frac{e^{iz}}{iz}\Big|_{-R}^{R} + \int_{C_R} \frac{e^{iz}\,dz}{iz^2} = \frac{e^{iR} + e^{-iR}}{iR} + \frac{1}{i}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2} dz.$$

Část mimo integrál zřejmě konverguje k nule pro $R \to \infty$ a modul integrálu je menší nebo roven $\frac{1}{R^2}\pi R = \frac{\pi}{R}$, a tedy též konverguje k nule pro $R \to \infty$. Čtvrtý z integrálů tedy konverguje k nule pro $R \to \infty$. Pro odhad druhého z integrálů (10) pro $r \to 0$ použijeme Laurentova rozvoje funkce $\frac{e^{iz}}{z}$ v okolí bodu $z = 0$:

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots}{z} = \frac{1}{z} + P(z),$$

kde $P(z)$ je normální část Laurentova rozvoje, která je zřejmě regulární v okolí bodu $z = 0$. Protože pro $r \to 0$ délka oblouku půlkružnice C_r konverguje k nule a $P(z)$ je ohraničená, je $\lim\limits_{r\to 0} \int\limits_{C_r} P(z)\,\mathrm{d}z = 0$ a tedy

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0} \left\{ \int\limits_{C_r} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int\limits_{C_r} \mathrm{d}z \right\} = \lim_{r\to 0} \int\limits_{C_r} \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

V posledním integrálu položíme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\mathrm{d}z = r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$ a integrál přejde v $\int\limits_{\pi}^{0} \mathrm{i}\,\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{i}\pi$. Dostáváme tedy konečně z (10) pro $r \to 0$ a $R \to \infty$

$$2\mathrm{i} \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \mathrm{i}\pi = 0,$$

odkud

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \tag{11}$$

je hledaný výsledek.

Příklad 4. Zcela analogicky vypočteme integrál*)

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad a \geqq 0,\ b \geqq 0.$$

Použijeme pomocné funkce

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$$

a budeme integrovat podle cesty obr. 108. Dostaneme

$$\int\limits_{-R}^{-r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_r^R f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{12}$$

*) Poznamenejme, že tento integrál nelze vyjádřit jako rozdíl integrálů $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2}\,\mathrm{d}x$ a $\int\limits_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2}\,\mathrm{d}x$, neboť tyto integrály jsou divergentní.

Záměnou x na $-x$ sloučíme třetí integrál s prvým a dostaneme $2\int\limits_r^R \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx$. Odhad čtvrtého integrálu bude jednodušší než v předcházejícím případě, neboť vzhledem k tomu, že $|e^{iaz}| = e^{-ay} \leqq 1$, a $|e^{ibz}| = e^{-by} = 1$ (pro $a \geqq 0$, $b \geqq 0$), máme $|f(z)| \leqq \frac{2}{R^2}$ a

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)\,dz\right| \leqq \frac{2}{R^2}\,\pi R \to 0 \text{ pro } R \to \infty.$$

Pro odhad druhého integrálu rozvineme funkci $f(z)$ v Laurentovu řadu v okolí bodu $z = 0$:

$$f(z) = \frac{i(a-b)\,z + \frac{(iaz)^2 - (ibz)^2}{2!} + \ldots}{z^2} = \frac{1}{2}\,i\frac{(a-b)}{z} + P(z),$$

kde $P(z)$ je regulární v okolí bodu $z = 0$. Odtud jako v příkladě 3 dostaneme

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{C_r} f(z)\,dz = i(a-b)\,(-i\pi) = (a-b)\,\pi$$

a z (12) pro $r \to 0$ a $R \to \infty$ dostáváme

$$2\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx + (a-b)\,\pi = 0;$$

hledaný výsledek je

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,(b-a)\,\pi. \tag{13}$$

§ 74. Ostatní integrály. Úspěšné použití residuové věty pro výpočet ostatních integrálů je obyčejně vázáno na výběr vhodné integrační cesty.

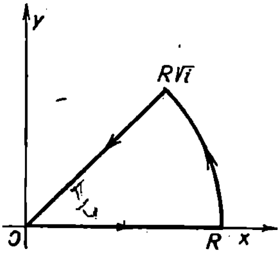
Příklad 1. Tak zvané Fresnelovy integrály

$$\int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx, \quad \int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx$$

je výhodné počítat současně. Použijeme funkce

$$f(z) = e^{iz^2},$$

jejíž reálná resp. imaginární část pro $z = x$ je shodná s prvním resp. s druhým z Fresnelových integrálů. Poznamenejme ještě, že na ose prvního kvadrantu, t. j. pro $z = r\sqrt{i}$, je funkce $f(z) = e^{-r^2}$ shodná s integrandem Poissonova integrálu*)



Obr. 109.

$$\int_0^\infty e^{-r^2}\,dr = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}. \qquad (14)$$

Použijeme tohoto faktu a zvolíme si integrační cestu z obr. 109. $f(z)$ je regulární uvnitř takto konstruované oblasti a podle Cauchyho věty

$$\int_0^R e^{ix^2}\,dx + \int_{C_R} e^{iz^2}\,dz + \int_R^0 e^{-r^2}\sqrt{i}\,dr = 0 \qquad (15)$$

(pro integrování podél osy prvního kvadrantu volíme za proměnnou r, takže je $z = r\sqrt{i}$, $dz = dr\sqrt{i}$). Jako v předešlých příkladech budeme limitovat pro $R \to \infty$. Abychom odhadli druhý z integrálů (15), budeme integrovat per partes

$$\int_{C_R} e^{iz^2}\,dz = \int_{C_R} \frac{de^{iz^2}}{2iz} = \frac{e^{iz^2}}{2iz}\Bigg|_R^{R\sqrt{i}} + \frac{1}{2i}\int_{C_R} \frac{e^{iz^2}}{z^2}\,dz.$$

Modul funkce mimo integrační znaménko se rovná

$$\left|\frac{e^{-R^2}}{2i\sqrt{i}R} - \frac{e^{iR^2}}{2iR}\right| \leqq \frac{e^{-R^2}}{2R} + \frac{1}{2R}$$

a konverguje pro $R \to \infty$ k nule. Modul integrandu $\left|\dfrac{e^{iz^2}}{z^2}\right| =$ $= \left|\dfrac{e^{i(R^2\cos 2\varphi + iR^2\sin 2\varphi)}}{z^2}\right| = \dfrac{e^{-R^2\sin 2\varphi}}{R^2}$, kde jsme položili $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, je na kružnici C_R menší než $\dfrac{1}{R^2}$, neboť je $\sin 2\varphi \geqq 0$ a $e^{-R^2\sin 2\varphi} \leqq 1$.

*) Viz př. 9 cvičení kap. VII.

Podle věty o odhadu integrálu

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz^2}}{z^2}\,dz\right| \leqq \frac{1}{R^2}\frac{\pi}{4}R = \frac{\pi}{4R}$$

a pro $R \to \infty$ konverguje k nule, takže v (15) pro $R \to \infty$ dostáváme

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx - \sqrt{i}\int_0^\infty e^{r^2}\,dr = 0$$

a ze (14) po dosazení

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx + i\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{i}\sqrt{\pi} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Porovnáme-li reálné a imaginární části obou stran rovnice, dostáváme hledaný výsledek:

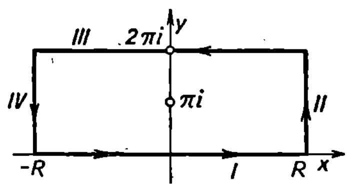
$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad (16)$$

Příklad 2. Pro výpočet integrálu

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax}\,dx}{1+e^x}$$

volíme pomocnou funkci

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}.$$



Obr. 110.

Použijeme toho, že funkce e^z má ryze imaginární periodu $2\pi i$, a toho, že se funkce e^{az} změní jen o konstantní součinitel $e^{2\pi a i}$ pro přírůstek $2\pi i$ argumentu z ($e^{a(z+2\pi i)} = e^{2\pi a i}e^{az}$). Vybereme si tedy integrační cestu podle obr. 110. Uvnitř čtyřúhelníka leží jen jediný singulární bod funkce $f(z)$: pól prvého řádu v bodě $z = \pi i$ (kde $e^z + 1 = 0$) s residuem

$$c_{-1} = \frac{e^{a\pi i}}{(1+e^z)'_{z=\pi i}} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}.$$

Podle residuové věty je

$$\int_I f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{II} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{III} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{IV} f(z)\,\mathrm{d}z = -\,2\pi \mathrm{i}\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}}. \tag{17}$$

Avšak

$$\int_I f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x,\ \int_{III} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{R}^{-R} \frac{\mathrm{e}^{a(x+2\pi\mathrm{i})}}{1+\mathrm{e}^{x+2\pi\mathrm{i}}}\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{e}^{2\pi a\mathrm{i}} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$$

Na úsečce II máme $|f(z)| \leqq \left|\frac{\mathrm{e}^{a(R+\mathrm{i}y)}}{1+\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}y}}\right| \leqq \frac{\mathrm{e}^{aR}}{\mathrm{e}^R-1}$, neboť podle (18) úvodu je $|\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}y}+1| \geqq |\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}y}| - 1 = \mathrm{e}^R - 1$, a tedy

$$\left|\int_{II} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqq 2\pi \frac{\mathrm{e}^{aR}}{\mathrm{e}^R-1} = 2\pi \frac{\mathrm{e}^{(a-1)R}}{1-\mathrm{e}^{-R}}$$

konverguje k nule pro $R \to \infty$ a pro $a < 1$, což předpokládáme.

Analogicky na úsečce IV

$$|f(z)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}y}}{1+\mathrm{e}^{-(R+\mathrm{i}y)}}\right| \leqq \frac{\mathrm{e}^{-aR}}{1-\mathrm{e}^{-R}},$$

neboť

$$|1+\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}y}| \geqq 1 - |\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}y}| = 1 - \mathrm{e}^{-R},$$

a tedy

$$\left|\int_{IV} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqq 2\pi \frac{\mathrm{e}^{-aR}}{1-\mathrm{e}^{-R}}.$$

konverguje k nule pro $R \to \infty$ a pro $a > 0$, což též předpokládáme. Tak pro $0 < a < 1$ dostáváme z (17) v limitě pro $R \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} - \mathrm{e}^{2\pi a\mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = -\,2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}}$$

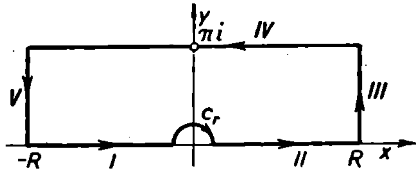
a odtud hledaný integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = -2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}}}{1-\mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}} = \pi \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-a\pi\mathrm{i}}} = \frac{\pi}{\sin a\pi},\ 0 < a < 1. \tag{18}$$

Pro $a < 0$ a též i pro $a > 1$ integrál diverguje, jak se snadno přesvědčíme.

<u>Příklad 3.</u> Integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^{x}}\, dx$$



Obr. 111.

není možno rozložit na dva integrály

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 - e^{x}}\, dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{bx}}{1 - e^{x}}\, dx,$$

neboť každý z nich diverguje v bodě $x = 0$, kde integrand vzrůstá nade všechny meze. Položíme-li $z = x + \pi i$, pak $1 - e^{z} = 1 - e^{x+\pi i} = 1 + e^{x}$ je od nuly různé pro $x = 0$ a pro výpočet můžeme použít výsledku předešlého příkladu. Zvolíme tedy pomocnou funkci

$$f(z) = \frac{e^{az} - e^{bz}}{1 - e^{z}}$$

a integrační cestu volíme podle obr. 111, kde se vyhneme bodu $z = 0$, protože funkce $f(z)$ v něm není definována. Uvnitř oblasti obr. 111 je $f(z)$ regulární a podle Cauchyho věty*)

$$\int_{I} + \int_{C_r} + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV} + \int_{V} = 0. \tag{19}$$

V okolí bodu $z = 0$ rozvedeme funkci v řadu

$$f(z) = \frac{1 + az + \frac{(az)^2}{2} + \ldots - \left(1 + bz + \frac{(bz)^2}{2} + \ldots\right)}{1 - \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots\right)} =$$

$$= \frac{a - b + \frac{a^2 - b^2}{2} z + \ldots}{-1 - \frac{1}{2}z - \ldots} = (b - a) + c_1 z + \ldots$$

*) Pro jednoduchost nepíšeme výraz za integračním znaménkem, který zůstává beze změny.

17*

a bod $z = 0$ je pro ni bodem odstranitelné singularity. Je ohraničena pro $z \to 0$ a tedy v (19) konverguje $\int\limits_{C_r} \to 0$ pro $r \to 0$. Integrály podél úseček III a V konvergují k nule pro $R \to \infty$ a pro $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ (což předpokládáme). Dokáže se to zcela obdobným způsobem jako v předešlém příkladě, takže (19) nám v limitě pro $r \to 0$, $R \to \infty$ dává

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^{x}}\, dx + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 + e^{x}}\, dx + \int\limits_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{a(x+\pi i)} - e^{b(x+\pi i)}}{1 - e^{x+\pi i}}\, dx = 0,$$

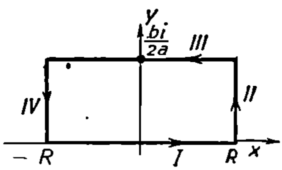
neboli

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^{x}}\, dx = e^{a\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^{x}}\, dx - e^{b\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{bx}}{1 + e^{x}}\, dx.$$

Odtud pomocí (18) dostáváme konečně hledaný výsledek

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^{x}}\, dx = \frac{\pi e^{a\pi i}}{\sin a\pi} - \frac{\pi e^{b\pi i}}{\sin b\pi} =$$

$$= \pi(\operatorname{cotg} a\pi + i) - \pi(\operatorname{cotg} b\pi + i) = \pi(\operatorname{cotg} a\pi - \operatorname{cotg} b\pi),$$
$$0 < a < 1,\ 0 < b < 1. \tag{20}$$



Obr. 112.

Příklad 4. Integrál

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx,$$

který se často vyskytuje v theorii vedení tepla, je zevšeobecněním integrálu Poissonova (14). Použijeme pomocné funkce

$$f(z) = e^{-az^2},$$

která na reálné ose přechází ve funkci e^{-ax^2}, jejíž integrál vypočteme podle (14). Na přímce $y = h$ přechází ve funkci $e^{-a(x+ih)^2} = e^{-ax^2} \cdot e^{-2iahx} \cdot e^{ah^2} = e^{ah^2} e^{-ax^2} (\cos 2ahx - i \sin 2ahx)$, jejíž reálná část je pro $h = \dfrac{b}{2a}$ shodná s funkcí pod integračním znaménkem našeho integrálu. Zvolíme si tedy za integrační cestu obdélník na obr. 112 a podle věty Cauchyho je integrál po jeho obvodu

$$\int_{I} + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV} = 0.$$

Bude

$$\int_{I} = \int_{-R}^{R} e^{-ax^2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{0}^{R\sqrt{a}} e^{-t^2}\, dt$$

(kde jsme dosadili $x\sqrt{a} = t$ a použili toho, že integrand je funkce sudá) a integrál pro $R \to \infty$ konverguje podle (14) k $\frac{2}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Pro třetí z integrálů platí

$$\int_{III} = \int_{-R}^{R} e^{-a\left(x+\frac{bi}{2a}\right)^2} dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-R}^{R} e^{-ax^2} e^{-bix}\, dx.$$

Pro integrály na úsečkách II a IV je $x = \pm R$ a

$$|e^{-az^2}| = e^{-a\,\mathrm{Re}\, z^2} = e^{-a(R^2-y^2)} \leqq e^{\frac{b^2}{4a}} e^{-aR^2}$$

$\left(\text{kde jsme místo } y \text{ dosadili jeho maximum } \frac{b}{2a}\right)$, a tedy jestliže $a > 0$ (což předpokládáme), konvergují integrály $\int_{II}$ a $\int_{IV}$ k nule pro $R \to \infty$. Dostáváme tedy z naší rovnice v limitě pro $R \to \infty$:

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} - e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-bix}\, dx = 0,$$

odkud porovnáním reálných částí plyne*)

---

*) Porovnáním imaginárních částí dostáváme triviální výsledek

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \sin bx\, dx = 0,$$

neboť integrovaná funkce je lichá.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \, e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Jelikož je integrand funkce sudá, dostáváme po snadné úpravě hledaný výsledek

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \, e^{-\frac{b^2}{4a}}, \quad a > 0. \tag{21}$$

§ 75. Integrály mnohoznačných funkcí.

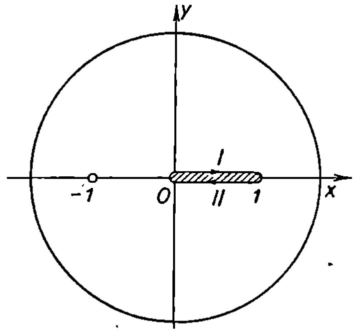
Příklad 1. Hledejme integrál

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3} \, dx.$$

Použijeme pomocné funkce

$$f(z) = \frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3},$$

která má v komplexním oboru tyto vlastnosti: 1. v rovině s vyňatou úsečkou (0, 1) se $f(z)$ rozpadá na čtyři regulární větve, 2. na opačných okrajích výřezu má $f(z)$ různé hodnoty, 3. každá z větví $f(z)$ má v bodě $z = \infty$ nulový bod druhého řádu. Vlastnost 1. plyne z toho, že při oběhu bodu z po libovolné křivce jednou kolem dokola bodů $z = 0$ a $z = 1$ vzroste $\arg z$ i $\arg(1 - z)$ o $+ 2\pi$ a tedy $\arg z(1 - z)$ o $2\pi + 3 \, . \, 2\pi = 8\pi$ a $\sqrt[4]{z(1 - z)^3}$ nabude opět výchozí hodnoty. Pro další výpočty vybereme si tu z větví $f(z)$, která na horním okraji výřezu(I) nabývá kladných hodnot, takže $\arg z = \arg(1 - z) = 0$ (viz obr. 113). Při oběhu bodu $z = 1$ ve směru naznačeném na obr. 113 se $\arg z$ nezmění, ale $\arg(1 - z)$ bude rovný $- 2\pi$, t. j. hodnoty odmocniny na horním (I) a dolním okraji (II) výřezu se budou lišit koeficientem $e^{-i\frac{1}{4}6\pi} = e^{-i\frac{1}{2}3\pi} = i$ (vlastnost 2.). Vlastnost 3. plyne nakonec z toho, že po dostatečně velké $|z|$ je řád čitatele roven řádu z a řád jmenovatele řádu z^3.*)



Obr. 113.

Zvolíme si integrační cestu podle obr. 113 a v dvojnásobně souvislé oblasti, kterou takto obdržíme, se budeme zabývat jednoznačnou větví funkce $f(z)$, kterou jsme si výše zvolili. Podle residuové věty, která platí i pro vícenásobné souvislé oblasti, pokud jsou v nich uvažované funkce jednoznačné, máme

$$\int_I + \int_{II} + \int_{C_R} = 2\pi i c_{-1},$$

kde c_{-1} je residuum zvolené větve funkce $f(z)$ v bodě $z = -1$. Podle vlastnosti 3. je integrál $\int_{C_R} = 0$ pro dostatečně velká R, neboť residuum funkce $f(z)$ v bodě $z = \infty$ je rovno nule (§ 69). Z vlastnosti 2. plyne pro integrály $\int_I$ a $\int_{II}$ podél úsečky $(0, 1)$

$$\int_I + \int_{II} = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\, dx + i\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\, dx = (1-i)\, I,$$

takže

$$I = \frac{2\pi i}{1-i}\, c_{-1}. \tag{22}$$

Přesněji se to dokáže takto: Pro dostatečně velké $|z|$ lze čitatele rozložit v řadu

$$\sqrt[4]{z^4 + 3z^3 - 3z^2 + z} = z\left(1 + \frac{3}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right)^{\frac{1}{4}} = z\left(1 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots\right)$$

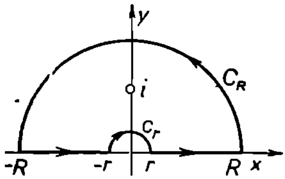
a $f(z)$ má Laurentův rozvoj

$$f(z) = \frac{z\left(1 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots\right)}{z^3\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^2}\right)} = \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots\right)$$

a odtud ihned plyne naše tvrzení.

Zbývá jen najít residuum c_{-1}. Regulární větev funkce $f(z)$ má v bodě $z = -1$ pól třetího řádu a tedy podle (40) § 67

$$c_{-1} = \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \frac{d^2}{dz^2} [f(z)(1 + z)^3] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \sqrt[4]{z(1 - z)^3}\Big|_{z=-1}.$$



Obr. 114.

Při výpočtu je třeba dbát ostražitosti a nezaměnit větve funkce $f(z)$. Větev, kterou jsme zvolili, je v bodě $z = -1$ charakterisována hodnotami $\arg z = \pi$, $\arg(z - 1) = 0$, a proto musíme po derivování dosadit $z = e^{\pi i}$, $1 - z = 2$. Derivujeme podle Leibnizova vzorce (zde není možno odstranit závorky, abychom neporušili předpoklady o argumentech) a dostáváme

$$c_{-1} = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{4}(-\tfrac{3}{4})\, z^{-\frac{7}{4}} (1 - z)^{\frac{3}{4}} + 2\tfrac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}} \,.\, \tfrac{3}{4}(1 - z)^{-\frac{3}{4}} + z^{\frac{1}{4}}\, \tfrac{3}{4}(-\tfrac{1}{4})\,(1 - z)^{-\frac{5}{4}}]_{z=-1} = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{3}{16} e^{-\frac{7\pi i}{4}} \,.\, 2^{\frac{3}{4}} - \tfrac{3}{8} e^{-\frac{3\pi i}{4}}\, 2^{-\frac{1}{4}} - \tfrac{3}{16} e^{\frac{\pi i}{4}}\, 2^{-\frac{5}{4}}) = -\frac{3}{64\sqrt[4]{2}}\, e^{\frac{\pi i}{4}} = -\frac{3\sqrt[4]{2}}{64 \,.\, 2}(1 + i).$$

Dosadíme do (22) a dostáváme hledaný výsledek

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1 - x)^3}}{(1 + x)^3}\, dx = -\frac{2\pi i}{1 - i}\, \frac{3\sqrt[4]{2}}{64 \,.\, 2}(1 + i) = \frac{3\pi\sqrt[4]{2}}{64}. \qquad (23)$$

Příklad 2. Pro výpočet integrálu

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{(x^2 + 1)^2}$$

volíme integrační cestu naznačenou na obr. 114. Bod $z = 0$ vypouštíme, neboť funkce za integračním znaménkem nabývá v bodě $z = 0$ nekonečně velkých hodnot. V takto konstruované oblasti je pomocná funkce

$$f(z) = \frac{\ln z}{(z^2 + 1)^2}$$

jednoznačná, bereme-li hlavní hodnotu logaritmu (t. j. $0 \leqq \arg z \leqq \pi$). Má pól druhého řádu v bodě $z = \mathrm{i}$, jehož residuum najdeme podle vzorce

$$c_{-1} = \lim_{z \to \mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} [f(z)\,(z - \mathrm{i})^2] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\ln z}{(z + \mathrm{i})^2}\bigg|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\pi + 2\mathrm{i}}{8}.$$

Podle residuové věty

$$\int_{-R}^{-r} + \int_{C_R} + \int_{r}^{R} + \int_{C_R} = 2\pi \mathrm{i} c_{-1} = \frac{\pi^2 \mathrm{i}}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

Abychom odhadli $\int\limits_{C_R}$, uvážíme, že pro $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$

$$|\ln z| = \sqrt{\ln^2 R + \varphi^2} \leqq \sqrt{\ln^2 R + \pi^2} < 2 \ln R$$

$$\frac{1}{|z^2 + 1|^2} \leqq \frac{C}{R^4},$$

kde C je konstanta. Podle věty o odhadu integrálu je tedy

$$\left|\int_{C_R}\right| \leqq \frac{2C \ln R}{R^4} \,.\, \pi R$$

a integrál $\int\limits_{C_R} \to 0$ pro $R \to \infty$. Abychom odhadli $\int\limits_{C_r}$, uvážíme, že pro $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$

$$|\ln z| = \sqrt{\ln^2 r + \varphi^2} \leqq 2 \ln \frac{1}{r}$$

a

$$\frac{1}{|z^2 + 1|^2} \leqq C.$$

Tedy

$$\left|\int_{C_r}\right| \leqq 2C \ln \frac{1}{r} \,.\, \pi r$$

a integrál $\int\limits_{C_r}$ konverguje k nule pro $r \to 0$. V limitě pro $r \to 0$ a $R \to \infty$ dostáváme tedy

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\ln z \,\mathrm{d}z}{(z^2 + 1)^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{\ln x \,\mathrm{d}x}{(x^2 + 1)^2} = \tfrac{1}{4}\pi^2 \mathrm{i} - \tfrac{1}{2}\pi.$$

V prvém integrálu je $z < 0$ a tedy $\ln z = \ln(-z) + \pi i$, odkud plyne

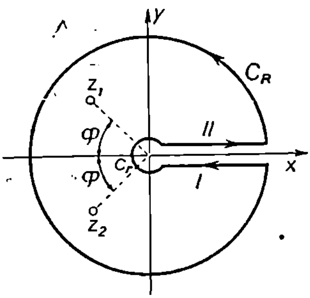
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\ln(-z)\,dz}{(z^2+1)^2} + \pi i \int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{(z^2+1)^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x^2+1)^2} = \tfrac{1}{4}\pi^2 i - \tfrac{1}{2}\pi.$$

Dosadíme v prvních dvou integrálech $-z = x$ a po záměně mezí dostáváme

$$2\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x^2+1)^2} + \pi i \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \tfrac{1}{4}\pi^2 i - \tfrac{1}{2}\pi. \tag{24}$$

Integrál $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$ vypočteme jako v př. I § 73, takže je

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \tfrac{1}{4}\pi.$$



Obr. 115.

Porovnáním imaginárních částí v (24) dostáváme hledaný výsledek:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x^2+1)^2} = -\tfrac{1}{4}\pi. \tag{25}$$

P ř í k l a d 3. Pro výpočet integrálu

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x+a)^2+b^2}$$

zvolíme integrační cestu podle obr. 115 a pomocnou funkci

$$f(z) = \frac{\ln^2 z}{(z+a)^2+b^2},$$

kde bereme regulární větev logaritmu, pro niž $0 \leqq \arg z \leqq 2\pi$. Na horním a dolním okraji výřezu nabývá $\ln^2 z$ hodnot $\ln^2 x$ resp. $(\ln x + 2\pi i)^2 = \ln^2 x + 4\pi i \ln x - 4\pi^2$ a hodnoty $\ln^2 x$ se navzájem vyruší, což nám umožňuje výpočet hledaného integrálu. Uvnitř takto konstruované oblasti má funkce $f(z)$ dva póly prvého řádu v bodech $z_{1,2} = -a \pm bi$, jejichž residua jsou

$$c_{-1}^{(1)} = \frac{\ln^2 z_1}{[(z+a)^2+b^2]'_{z=z_1}} = \frac{\ln^2(-a+bi)}{2bi} = \frac{1}{2bi}[\ln r + i(\pi - \varphi)]^2$$

$$c_{-1}^{(2)} = \frac{\ln^2 z_2}{[(z+a)^2+b^2]'_{z=z_2}} = \frac{\ln^2(-a-bi)}{-2bi} = -\frac{1}{2bi}[\ln r + i(\pi + \varphi)]^2,$$

kde $r = \sqrt{a^2+b^2}$ a $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Podle residuové věty

$$\int_I + \int_{C_r} + \int_{II} + \int_{C_R} = 2\pi i(c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)}) = \frac{\pi}{b}4\varphi(\pi - i\ln r).$$

Jako v předešlém příkladě se dokáže, že $\lim\limits_{r\to 0}\int\limits_{C_r} = \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} = 0$, takže v limitě pro $r \to 0$ a $R \to \infty$ dostáváme

$$\int_\infty^0 \frac{\ln(x+2\pi i)^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{(x+a)^2+b^2} = -4\pi i\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x+a)^2+b^2} +$$

$$+ 4\pi^2\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{4\pi\varphi}{b}(\pi - i\ln r).$$

Avšak

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\int_{\frac{a}{b}}^\infty \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{b}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right) =$$

$$= \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \frac{\varphi}{b};$$

po zkrácení a úpravě dostáváme hledaný integrál

$$\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{\varphi\ln r}{b} = \frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}. \tag{26}$$

Příklad 4. Pro výpočet integrálu

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$$

znova použijeme integrační cesty z obr. 115 a pomocné funkce

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z} = \frac{e^{(a-1)\ln z}}{1+z},$$

kde za $\ln z$ bereme tu větev logaritmu, pro kterou $0 \leqq \arg z \leqq 2\pi$. Tato funkce je jednoznačná v takto konstruované oblasti a je tam všude regulární kromě v bodě $z = -1$, v němž má pól prvého řádu. Residuum v tomto bodě je rovno

$$\operatorname{res} f(-1) = \frac{e^{(a-1)\ln(-1)}}{(1+z)'_{z=-1}} = e^{\pi(a-1)i} = -e^{a\pi i}$$

(kde jsme položili $-1 = e^{\pi i}$) a podle residuové věty

$$\int_I + \int_{C_r} + \int_{II} + \int_{C_R} = -2\pi i e^{a\pi i}$$

K odhadu $\int_{C_R}$ použijeme toho, že pro $|z| = R > 1$ je $|f(z)| = \frac{R^{a-1}}{|1+z|} \leqq \leqq \frac{R^{a-1}}{R-1}$, a tedy

$$\left|\int_{C_R}\right| \leqq \frac{R^{a-1}}{R-1}\,\pi R \leqq CR^{a-1},$$

kde C je jistá konstanta. Odtud pro $a < 1$ (což předpokládáme) snadno zjistíme, že pro $R \to \infty$ integrál $\int_{C_R} \to 0$. Stejně tak pro

$$|z| = r < 1, \quad |f(z)| = \frac{r^{a-1}}{|1+z|} \leqq \frac{r^{a-1}}{1-r}$$

a

$$\left|\int_{C_R}\right| \leqq \pi\,\frac{r^{a-1}}{1-r}\,r \leqq C_1 r^a.$$

Z toho přímo plyne, že pro $a > 0$ (což předpokládáme) $\int_{C_R} \to 0$ pro $r \to 0$. Tedy pro $r \to 0$, $R \to \infty$ bude v limitě pro $0 < a < 1$

$$\int_{\infty}^{0}{}_I f(z)\,dz + \int_{0}^{\infty}{}_{II} f(z)\,dz = -2\pi i e^{a\pi i}$$

V druhém integrálu integrujeme podél horního okraje výřezu a je

$z = x$ a $f(z) = \dfrac{x^{a-1}}{1+x}$, v druhém integrujeme podél dolního okraje a je $z = x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}$ a

$$f(z) = \frac{x^{a-1}\,\mathrm{e}^{2\pi(a-1)\mathrm{i}}}{1+\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}} = \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}\,\frac{x^{a-1}}{1+x},$$

takže poslední rovnice nabývá tvaru

$$\mathrm{e}^{-2a\pi\mathrm{i}}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}}$$

a

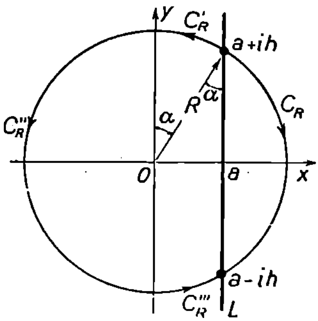
$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}-1} = \pi\,\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{-a\pi\mathrm{i}}} = \frac{\pi}{\sin a\pi},\quad 0 < a < 1. \tag{27}$$

Tento integrál se dá též substitucí $x = \mathrm{e}^t$ převést na integrál př. 2 § 74.

§ 76. Vyjádření funkcí pomocí integrálů. Mějme integrál

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z}\,\mathrm{d}z,$$

kde integrujeme podél přímky $\mathrm{Re}\,z = a$ $(a > 0)$ rovnoběžné s imaginární osou. Budiž nejprve $t < 0$. Pro kruhovou úseč omezenou přímkou $\mathrm{Re}\,z = a$ a obloukem C_R kružnice $|z| = R$ podle Cauchyho integrální věty § 47 platí



Obr. 116.

$$\int_{a-\mathrm{i}h}^{a+\mathrm{i}h} \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z}\,\mathrm{d}z = 0 \tag{28}$$

(kde $h = \sqrt{R^2 - a^2}$ a integrujeme po obvodě C_R v záporném smyslu oběhu). Abychom odhadli druhý integrál, integrujeme per partes

$$\int\limits_{C_R}\frac{e^{zt}}{z}\,dz = \frac{1}{t}\int\limits_{C_R}\frac{de^{zt}}{z} = \frac{1}{t}\,\frac{e^{zt}}{z}\Bigg|_{a-ih}^{a+ih} + \frac{1}{t}\int\limits_{C_R}\frac{e^{zt}}{z^2}\,dz.$$

Je $\left|\frac{e^{(a+ih)t}}{a+ih} - \frac{e^{(a-ih)t}}{a-ih}\right| \leqq \frac{2e^t}{R}$; funkce mimo integrační znaménko tedy konverguje k nule pro $R \to \infty$ (a i t jsou pevné). Na C_R je $\left|\frac{e^{zt}}{z^2}\right| = \frac{e^{xt}}{R^2} \leqq \frac{1}{R^2}$ (podle předpokladu $x > 0$ a $t < 0$ a tedy $e^{xt} \leqq 1$).

Odtud $\left|\int\limits_{C_R}\frac{e^{zt}}{z^2}\,dz\right| \leqq \frac{1}{R^2}\,\pi R = \frac{\pi}{R}$ a integrál $\int\limits_{C_R}$ též konverguje k nule pro $R \to \infty$. Tedy pro všechna $t < 0$ konverguje druhý z integrálů (28) k nule pro $R \to \infty$ a vztah (28) v limitě pro $R \to \infty$ nabývá tvaru

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{zt}}{z}\,dz = 2\pi i f(t) = 0,\ t < 0,$$

a tedy $f(t) = 0$ pro všechna $t < 0$. Buďiž nyní $t > 0$ a budeme integrovat podél kruhové úseče doplňující kruhovou úseč případu $t < 0$ (viz obr. 116). Uvnitř úseče má naše funkce jediný singulární bod, a to pól prvého řádu v bodě $z = 0$ s residuem $c_{-1} = \frac{1}{(z_0)'} = 1$, takže podle residuové věty bude

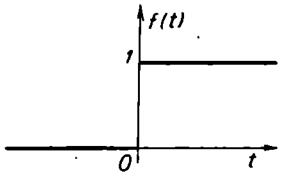
$$\int\limits_{a-ih}^{a+ih} + \int\limits_{C'_R} + \int\limits_{C''_R} + \int\limits_{C'''_R} = 2\pi i c_1 = 2\pi i. \tag{29}$$

Délky oblouků C'_R a C''' jsou rovny $\alpha R = R \arcsin\frac{a}{R} \sim R\frac{a}{R} = a$ a konvergují k a pro $R \to \infty$. Modul integrandu na těchto obloucích je $\left|\frac{e^{zt}}{z}\right| = \frac{e^{xt}}{R} \leqq \frac{e^{at}}{R}$ a konverguje k nule pro $R \to \infty$ (je $t < 0$ a $x \leqq a$, a, t jsou pevné) a tedy $\int\limits_{C'_R} \to 0$ a $\int\limits_{C'''_R} \to 0$ pro $R \to \infty$. Abychom odhadli integrál $\int\limits_{C''_R}$, budeme integrovat per partes

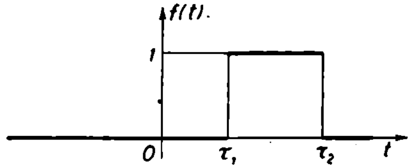
$$\int\limits_{C''_R} = \frac{1}{t}\,\frac{e^{zt}}{z}\Bigg|_{+iR}^{-iR} + \frac{1}{t}\int\limits_{C''_R}\frac{e^{zt}}{z^2}\,dz,$$

kde je $\left|\dfrac{e^{-iRt}}{-iR} - \dfrac{e^{iRt}}{iR}\right| \leqq \frac{1}{2}R$, $\left|\dfrac{e^{zt}}{z^2}\right| \doteq \dfrac{e^{xt}}{R^2} \leqq \dfrac{1}{R^2}$ (neboť $t > 0$ a na C''_R je $x < 0$). Tedy $\int\limits_{C''_R} \to 0$ pro $R \to \infty$, takže pro všechna $t > 0$ a v limitě pro $R \to \infty$ nabývá (29) tvaru

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{z}\,dz = 2\pi i f(t) = 2\pi i,\ t > 0,$$



Obr. 117.



Obr. 118.

a tedy $f(t) = 1$ pro všechna $t > 0$. Shrneme oba výsledky do jediného zápisu

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{z}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0, \\ 1 & \text{pro } t > 0. \end{cases}} \tag{30}$$

Integrál*) (30) tedy representuje jistou funkci, jejíž graf je sestrojen na obr. 117.

---

*) Pro $t = 0$ dostaneme divergentní integrál $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{dz}{z}$. Budeme-li však místo něho brát t. zv. hlavní hodnotu nevlastního integrálu ve smyslu Cauchyho, t. j.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iN}^{a+iN}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\ln\frac{a+iN}{a-iN} = \frac{1}{2\pi i}\ln(-1) = \frac{1}{2},$$

bude existovat a bude roven aritmetickému průměru hodnot funkce (30) v bodě $t = 0$ zprava a zleva. (V úvaze je podstatné, že integrál bereme v symetrickém intervalu od $a - iN$ do $a + iN$.)

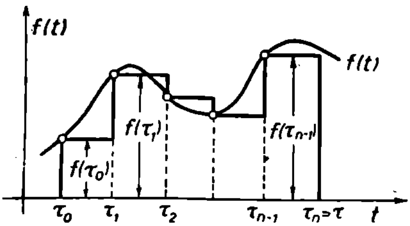
Záměnou t na $t - \tau$ v (30) dostaneme integrál

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{z(t-\tau)}}{z} dz = \begin{cases} 0 \text{ pro } t < \tau \\ 1 \text{ pro } t < \tau. \end{cases} \tag{31}$$

Položíme-li dále v (31) nejprve τ rovno τ_1 a pak τ rovno τ_2 $(\tau_1 < \tau_2)$ a odečteme-li od prvého integrálu druhý, dostaneme integrál

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} \frac{e^{-z\tau_1} - e^{-z\tau_2}}{z} dz =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ pro } t < \tau_1, \\ 1 \text{ pro } \tau_1 < t < \tau_2, \\ 0 \text{ pro } \tau_2 < t, \end{cases} \tag{32}$$



Obr. 119.

který representuje funkci, jejíž graf je na obr. 118. Tímto způsobem je možno representovat jakoukoliv „schodovitou“ funkci, jejíž graf je na obr. 119:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} \frac{e^{-z\tau_k} - e^{-z\tau_{k+1}}}{z} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) e^{-z\tau_k} \Delta\tau_k \right\} dz, \tag{33}$$

kde

$$\Delta\tau_k = \frac{1 - e^{-z(\tau_{k+1} - \tau_k)}}{z} =$$

$$= (\tau_{k+1} - \tau_k) - \frac{1}{2!} (\tau_{k+1} - \tau_k)^2 z + \frac{1}{3!} (\tau_{k+1} - \tau_k)^3 z^2 - \ldots$$

Jestliže nyní zvětšíme číslo n tak, že největší z rozdílů $\tau_{k+1} - \tau_k$ bude konvergovat k nule, t. j. $\Delta\tau_k$ bude veličinou nekonečně malou, ekvivalentní s $\tau_{k+1} - \tau_k$, pak se i suma (33) bude lišit velmi málo od integrálu a v limitě bude

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau} f(\tau)\, e^{-z\tau}\, d\tau \right\} dz,$$

kde $f(t)$ je funkce z obr. 119 v intervalu (τ_0, τ), vyjádřená pomocí integrálu. Nebudeme se zde zabývat přesným důkazem limitního přechodu k integrálu. Poslední vzorec ve tvaru

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-z\tau}\, d\tau \right\} dz} \tag{34}$$

platí pro libovolnou funkci $f(t)$, definovanou na reálné ose a splňující tyto předpoklady:

a) funkce $f(t)$ je v libovolném (konečném) intervalu $\langle -T, T\rangle$ reálné osy po úsecích hladká (t. j. její graf je křivka po úsecích hladká, viz § 8),

b) integrál $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} f(t)\, dt$ je absolutně konvergentní.

(34) je možno též přepsat do dvou vzájemně oddělených vzorců

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} g(z)\, dz,$$

kde

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\tau} f(\tau)\, d\tau \tag{35}$$

Funkcionální zobrazení, které přiřazuje funkci $f(t)$ funkci $g(z)$ vztahem (35), se nazývá *Laplaceova transformace*. První ze vztahů (35) „obrací" druhou, t. j. vyjadřuje funkci $f(t)$ pomocí jejího obrazu $g(z)$. Druhý ze vztahů (35) můžeme ovšem též považovat za obrácení prvého. Proto nazýváme vztahy (35) *inversními vztahy Laplaceovy transformace*. Laplaceovy transformace se velmi často používá v matematické fysice.*)

*) Viz na př. Carslaw-Jaeger: Operational Methods in Applied Mathematics, Oxford University Press 1941 (ruský překlad Karslou i Eger: Operacionnyje metody v prikladnoj matěmatike, Gosinoizdat, Moskva, 1948), Wagner: Opera-

(Pokračování na násl. str.)

§ 77. Logaritmické residuum. Princip argumentu. *Logaritmickým residuem* funkce $f(z)$ v bodě $z = a$ nazýváme residuum její logaritmické derivace $\frac{f'(z)}{f(z)}$ v tomto bodě. Logaritmická derivace $\frac{f'(z)}{f(z)}$ může mít singularity v singulárních bodech funkce i v jejích nulových bodech. Budiž $z = a$ nulový bod řádu n funkce $f(z)$; pak její Laurentův rozvoj v okolí tohoto bodu má tvar (§ 62):

$$f(z) = c_n(z - a)^n + c_{n+1}(z - a)^{n+1} + \ldots, \quad c_n \neq 0$$

a tedy

$$f'(z) = nc_n(z - a)^{n-1} + (n + 1)\, c_{n+1}(z - a)^n + \ldots$$

Odtud pro Laurentovu řadu logaritmické derivace v okolí bodu $z = a$ máme

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{nc_n(z - a)^n + (n + 1)\, c_{n+1}(z - a)^{n+1} + \ldots}{c_n(z - a)^{n-1} + c_{n+1}(z - a)^n + \ldots} =$$

$$= \frac{1}{z - a} \cdot \frac{nc_n + (n + 1)\, c_{n+1}(z - a) + \ldots}{c_n + c_{n+1}(z - a) + \ldots}.$$

Podíl dvou regulárních funkcí je regulární v bodě, v němž je dělitel různý od nuly, a tedy v okolí tohoto bodu je funkce rozvinutelná v potenční řadu. Absolutní člen se určí jako podíl absolutních členů. Tedy

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - a}\{n + c_0'(z - a) + c_1'(z - a)^2 + \ldots\} =$$

$$= \frac{n}{z - a} + c_0' + c_1'(z - a) + \ldots \tag{36}$$

---

torenrechnung nebst Anvendungen in Physik und technik, Leipzig, 1940, Vodička: Operátorový počet a jeho technicko-fysikální použití, JČMF, Praha, 1949, kde je též uvedena další literatura. M. I. Kontorovič: Operacionnoje isčislenije i nestacionarnije javlenija v električeskich cepjach, GOSTĚCHIZDAT, Moskva, 1949. T. Karmán, M. Biot: Mathematical Methods in engineering, (ruský překlad: T. Karman i M. Bio: Matematičeskie metody v inženernom děle, OGIZ, GOSTĚCHIZDAT, Moskva, 1948), kap. X., V. A. Ditkin i P. J. Kuzněcov: Spravočnik po operacionnomu isčisleniju, GOSTĚCHIZDAT, Moskva, 1951, Lurje: Operacionnoje isčislenije, Moskva, 1951 (zaměřeno na mechaniku), M. Gardner, J. Byrnes: Transients in Linear Systems, (ruský překlad: Gardner i Berns: Pěrechodnije processy v linejnych systemach s sosredotočennymi postojannymi, GOSTĚCHIZDAT, Moskva, 1951, Lavrentěv-Šabat: Metody funkcij kompleksnogo pereměnogo, GOSTĚCHIZDAT, Moskva 1951, kap. VI (v této knize najde čtenář mnoho doplňující látky k látce vykládané v této knize). (Pozn. překl.)

je Laurentův rozvoj logaritmické derivace v okolí bodu $z = a$. Odtud je ihned vidět, že má v bodě $z = a$ pól prvého řádu s residuem rovným n. *Logaritmické residuum v nulovém bodě funkce $f(z)$ je rovno řádu tohoto nulového bodu.*

Budiž nyní $z = b$ pólem řádu p funkce $f(z)$; pak lze v okolí bodu $z = b$ rozvinout funkci $f(z)$ v řadu

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-b)^p} + \frac{c_{-p+1}}{(z-b)^{p-1}} + \ldots, \quad c_{-p} \neq 0$$

a $f'(z)$ v řadu

$$f'(z) = \frac{-pc_{-p}}{(z-b)^{p+1}} + \frac{-(p-1)\,c_{-p+1}}{(z-b)^p} + \ldots$$

a tedy

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-b} \cdot \frac{-pc_{-p} - (p-1)\,c_{-p+1}(z-b) + \ldots}{c_{-p} + c_{-p+1}\,(z-b) + \ldots} =$$

$$= \frac{1}{z-b}\{-p + c_0'(z-b) + c_1'(z-b)^2 + \ldots\},$$

odkud dostáváme Laurentův rozvoj logaritmické derivace v okolí bodu $z = b$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z-b} + c_0' + c_1'(z-b) + \ldots \tag{37}$$

Z (37) vidíme ihned, že $z = b$ je pólem prvého řádu funkce $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ s residuem $-p$. *Logaritmické residuum funkce v pólu je rovno záporně vzatému řádu tohoto pólu.*

Použijeme těchto výsledků k důkazu jedné věty o argumentu funkce, t. zv. *principu argumentu*. Budiž $f(z)$ regulární všude v uzavřené oblasti $\bar{D}$ kromě konečného počtu bodů $b_1, b_2, \ldots, b_m$, kde má póly řádů $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$, a nechť má nulové body v bodech a_1, $a_2, \ldots, a_l$ řádů $n_1, n_2, \ldots, n_l$. Předpokládejme ještě, že funkce $f(z)$ nemá na hranici C oblasti D ani póly, ani nulové body.*)

Za těchto předpokladů je logaritmická derivace regulární na hranici

*) Lze dokázat, že *konečnost* počtu nulových bodů a pólů vyplývá z této podmínky.

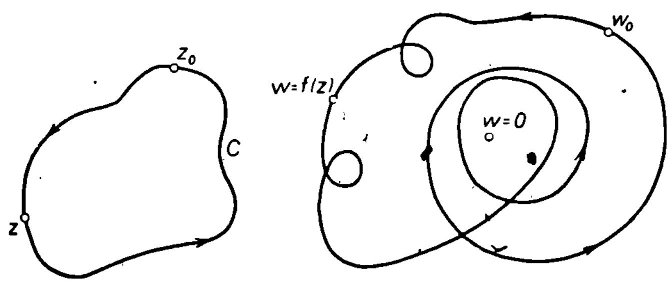
C a má uvnitř C jen konečný počet singularit. Podle residuové věty a použitím právě odvozených výsledků je

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i(n_1 + n_2 + \ldots + n_s - p_1 - p_2 - \ldots - p_m) = \tag{38}$$
$$= 2\pi i(N - P),$$

kde N a P označují počet nulových bodů a počet pólů funkce $f(z)$ uvnitř C, při čemž každý počítáme s násobností jeho řádu.

Ujasníme si geometrický smysl naší věty. Je

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \oint_C d\ln f(z) = \oint_C d\ln|f(z)| + i\oint_C d\arg f(z),$$



Obr. 120.

(kde ln i arg jsou některé jednoznačné a spojité větve obou funkcí). Protože funkce $\ln|f(z)|$ je jednoznačná, nabude opět při oběhnutí kontury C od jistého bodu z_0 výchozí hodnoty a je

$$\oint_C d\ln|f(z)| = \ln|f(z_0)| - \ln|f(z_0)| = 0.$$

Při oběhu kontury C se může hodnota $\arg f(z)$ změnit, jestliže při tom bod $w = f(z)$ oběhne počátek $w = 0$ (na obr. 120 se konečná hodnota $\arg f(z_0)$ liší od výchozí o 6π). Je tedy

$$\oint_C d\arg f(z) = \Delta_C \arg f(z),$$

kde jsme symbolem Δ_C označili změnu $\arg f(z)$ při oběhnutí kontury C (t. j. rozdíl mezi konečnou a výchozí hodnotou). Tato změna může být obecně nenulová.

Tedy

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\Delta_C \arg f(z)$$

a vzorec (38) možno psát

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_C \arg f(z) = N - P. \tag{39}$$

Vzorec (39) vyjadřuje tento princip:

Princip argumentu. *Je-li funkce $f(z)$ regulární všude v uzavřené oblasti $\overline{D}$ kromě konečného počtu pólů a nemá na hranici této oblasti ani póly ani nulové body, pak rozdíl nulových bodů a pólů této funkce uvnitř oblasti D, kde každý pól resp. nulový bod počítáme s násobností jeho řádu, je roven přírůstku* $\arg f(z)$ *při oběhu hranice C dělenému 2π.*

Jako příklad dokážeme Rouchéovu větu:

Jsou-li $f(z)$ a $g(z)$ regulární v uzavřené oblasti $\overline{D}$ a je-li na hranici této oblasti $|f(z)| > |g(z)| > 0$, mají funkce $f(z)$ a $f(z) + g(z)$ v této oblasti stejný počet nulových bodů (každý nulový bod počítáme s příslušnou násobností).

Důkaz. Budiž C hranice oblasti D. Je $\arg [f(z) + g(z)] = \arg f(z) + \arg \left\{1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right\}$ a tedy $\Delta_C \arg [f(z) + g(z)] = \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg \left\{1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right\}$. Podle předpokladu pro všechna z na C je však $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$, a tedy bod $\omega = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ leží uvnitř kružnice $|\omega - 1| < 1$. Tento kruh neobsahuje bod $\omega = 0$, a tedy ω se při oběhu křivky C vrátí ke své výchozí hodnotě. Tedy $\Delta_C \arg \left\{1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right\} = 0$ a

$$\Delta_C \arg [f(z) + g(z)] = \Delta_C \arg f(z).$$

Jelikož ani $f(z)$, ani $f(z) + g(z)$ nemají v $\overline{D}$ žádné póly, poslední vztah podle principu argumentu znamená, že obě funkce mají v D stejný počet nulových bodů (neboť na C je $|f(z)| > 0$ a $|f(z) + g(z)| \geqq \geqq |f(z)| - |g(z)| > 0$, takže je možno použít principu argumentu). Rouchéova věta je velmi příhodná pro výpočet počtu nulových bodů.

Příklad 1. Abychom stanovili počet nulových bodů funkce

$$z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0,$$

ležících v jednotkovém kruhu $|z| < 1$, položíme $f(z) = z^8 - 4z^5$ a $g(z) = z^2 - 1$. Na kružnici $|z| = 1$ bude $|f(z)| = |z^3 - 4| \geqq 4 - |z|^3 = = 3$, $|g(z)| = |z^2 - 1| \leqq |z^2| + 1 = 2$. Můžeme tedy použít věty Rouchéovy a počet nulových bodů naší funkce je roven počtu nulových bodů funkce $z^8 - 4z^5 = z^5(z^3 - 4)$ uvnitř kruhu $|z| < 1$, který činí 5, neboť $z^3 - 4 \neq 0$ pro $|z| < 1$.

Příklad 2. Abychom stanovili počet nulových bodů funkce

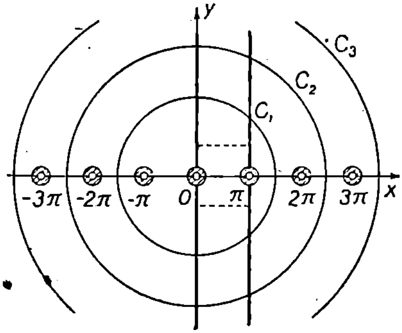
$$e^{z-\lambda} = z, \ \lambda > 1$$

uvnitř jednotkového kruhu $|z| < 1$, položíme $f(z) = z$, $g(z) = e^{z-\lambda}$. Na kružnici $|z| = 1$ je $|f(z)| = 1$, $|g(z)| = e^{x-\lambda} < e^{1-\lambda} < 1$, neboť $\lambda > 1$, a použijeme-li opět věty Rouchéovy, je počet nulových bodů naší funkce roven počtu nulových bodů funkce $f(z) = z$ uvnitř jednotkového kruhu. Funkce $f(z) = z$ má jediný takový bod, a to $z = 0$. Všimneme si ještě toho, že reálná funkce $\varphi(x) = e^{x-\lambda} - x$ nabývá kladné hodnoty v bodě $x = 0$ a záporné hodnoty v bodě $x = 1$, t. j. kořen leží v intervalu $(0, 1)$. Odtud plyne, že hledaný kořen je reálný a kladný.

Příklad 3. Dokážeme si zde jako příklad t. zv. fundamentální větu algebry: *Libovolný mnohočlen n-tého stupně*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \ (a_0 \neq 0)$$

má právě n kořenů. (Přitom počítáme mnohonásobný kořen s příslušnou násobností.) Položíme $f(z) = a_0 z^n$ a $g(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$. Na kružnici $|z| = R$ je $|f(z)| = |a_0| R^n$ a $|g(z)| \leqq |a_1| R^{n-1} + \ldots + |a_n|$. Protože mocnina R^n pro přirozené n roste rychleji než libovolný mnohočlen stupně $n - 1$, lze najít tak velké R, že na kružnici $|z| = R$ platí $|f(z)| > |g(z)|$. S druhé strany je $\lim_{z \to \infty} g(z) = \infty$, a tedy pro dostatečně velké R je na kružnici $|z| = R$ $|g(z)| > 0$. Pak podle věty Rouchéovy je počet nulových bodů funkce $P(z) = f(z) + g(z)$ a funkce $f(z)$ uvnitř kruhu $|z| < R$ stejný, ale počet nulových bodů druhé funkce v tomto kruhu je roven právě n, což se mělo dokázat. Protože $\lim\limits_{z \to \infty} P(z) = \infty$, leží zřejmě v tomto kruhu všechny nulové body funkce $P(z)$.



Obr. 121.

§ 78. Rozklad funkce cotg z v nekonečný součet zlomků. Mittag—Lefflerova věta.

Funkce

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}$$

je meromforní (§ 71) a má póly prvého řádu v bodech $z_k = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) s residui $R_k = \left.\dfrac{\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z=k} = 1$. Dokážeme, že naše funkce je ohraničena v celé rovině (z) s vynětím libovolně malých okolí bodů z_k: $|z - z_k| < r$. Protože $\operatorname{cotg} z$ je funkce periodická s periodou π, nabývá stejných hodnot v pásech $k\pi \leqq \operatorname{Re} z \leqq (k + 1)\,\pi$ a stačí tedy dokázat její ohraničenost v pásu $0 \leqq \operatorname{Re} z \leqq \pi$ s vyňatými půlkružnicemi $|z| < r$, $\operatorname{Re} z > 0$ a $|z - \pi| < r$, $\operatorname{Re} z < \pi$. Je

$$|\operatorname{cotg} z| \leqq \frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| + |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}|}{||\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| - |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}||} = \frac{\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y}}{|\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{y}|},$$

a tedy pro $y = 1$ je $|\operatorname{cotg} z| \leqq \dfrac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}} = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-2y}}{1 - \mathrm{e}^{-2y}} \leqq \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-2}}{1 - \mathrm{e}^{-2}}$

a funkce je ohraničená. Podobně pro $y < -1$ dostaneme

$$|\operatorname{cotg} z| \leqq \frac{\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y}}{\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{y}} = \frac{1 + \mathrm{e}^{2y}}{1 - \mathrm{e}^{2y}} \leqq \frac{1 + \mathrm{e}^{-2}}{1 - \mathrm{e}^{-2}}$$

a funkce je opět ohraničená. Potom však z vlastností spojitých funkcí (§ 13) plyne, že funkce je ohraničená i pro $-1 \leqq y \leqq 1$.

Tedy $|\mathrm{cotg} z|$ je ohraničená v celé rovině (z) s vynětím bodů z_k, pro něž platí $|z - z_k| < r$, a lze najít takové číslo M, že s výjimkou uvedených bodů je pro všechna z

$$|f(z)| < M. \tag{40}$$

Jelikož $\mathrm{cotg} z$ má v bodě $z = 0$ pól prvého řádu s residuem rovným jedné, je hlavní část jejího Laurentova rozvoje v okolí bodu $z = 0$ rovna $\frac{1}{z}$, a tedy funkce

$$f(z) = \mathrm{cotg} z - \frac{1}{z}$$

má v bodě $z = 0$ odstranitelnou singularitu. Z lichosti naší funkce plyne $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = 0$ (neboť při průchodu bodem $z = 0$ třeba po ose x musí měnit znaménko a zůstat spojitá). Položíme tedy definitoricky $f(0) = 0$ a funkce $f(z)$ bude regulární v bodě $z = 0$.

Označme C_n kružnici $|z| = (n + \frac{1}{2})\pi$ a budiž z bod, ležící uvnitř této kružnice a různý od bodu z_k. Funkce $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ má pak uvnitř C_n póly prvého řádu v bodech $\zeta = z$ a $\zeta = z_k$ $(0 < |k| \leqq n)$ s residui $R' = \left.\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)'}\right|_{\zeta = z} = f(z)$ a $R'_k = \left.\frac{\zeta \cos\zeta - \sin\zeta}{\zeta(\zeta - z)(\sin\zeta)'}\right|_{\zeta = k\pi} = \frac{1}{k\pi - z}$.

Podle Cauchyho residuové věty pro $z \neq k\pi$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_n} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = f(z) + \sum_{k=-n}^{n}{}' \frac{1}{k\pi - z}, \tag{41}$$

kde znak $\sum'$ znamená, že při sčítání vynecháváme index $k = 0$ (neboť bod $\zeta = 0$ není pólem funkce $f(\zeta)$). Dosadíme-li $z = 0$ do (41), dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_n} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta} = \sum_{k=-n}^{n}{}' \frac{1}{k\pi}, \tag{42}$$

neboť $f(0) = 0$. Dosadíme-li (42) do (41) a můžeme přepsat (41) na tvar

$$f(z) = -\sum_{k=-n}^{n}{}' \frac{1}{k\pi - z} + \sum_{k=-n}^{n}{}' \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta} =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n}{}' \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) + \frac{z}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta(\zeta - z)}. \tag{41'}$$

Nechme nyní $n \to \infty$ a z nechť zůstane pevné. Protože pro $r < \frac{1}{2}\pi$ leží všechny C_n v oblasti, pro kterou platí (40), a v posledním vzorci $|\zeta| = \varrho_n$, $\frac{1}{|\zeta - z|} \leqq \frac{1}{|\zeta| - |z|} = \frac{1}{\varrho_n - |z|}$, kde $\varrho_n = (n + \frac{1}{2})\pi$ je poloměr kružnice C_n, je

$$\left| \oint_{C_n} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta(\zeta - z)} \right| \leqq \frac{M \,.\, 2\pi\varrho_n}{\varrho_n(\varrho_n - |z|)},$$

a tedy $\oint_{C_n} \to 0$ pro $n \to \infty$. V limitě nabývá (41') tvaru

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right), \quad z \neq k\pi,$$

odkud

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right), \quad z \neq k\pi. \tag{43}$$

V konečném kruhu $|z| \leqq A$ pro dostatečně velká $|k|$ platí pro modul obecného členu řady (43)

$$\left| \frac{z}{(z - k\pi)\,k\pi} \right| = \frac{1}{k^2} \, \frac{|z|}{\pi \left| \pi - \frac{z}{k} \right|} \leqq \frac{A}{\pi \left(\pi - \frac{A}{|k|} \right)} \cdot \frac{1}{k^2}.$$

Koeficient při $\frac{1}{k^2}$ je ohraničený a řada $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{k^2}$ konverguje. Odtud ihned vidíme, že řada (43) konverguje počínaje n-tým členem *stejnoměrně a absolutně v libovolném kruhu* $|z| < A$.

Z toho plyne, že pro libovolné konečné $z \neq k\pi$ můžeme v řadě (43) přestavit členy libovolným způsobem. Sloučíme-li v (43) vždy dva členy, které mají stejný modul a jejichž indexy mají opačné znaménko, můžeme (43) přepsat ve tvaru

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}, \quad z \neq k\pi. \tag{44}$$

Odvodíme ještě vzorec, který dostaneme z (43) a (44) záměnou z na πz:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z - k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}. \tag{45}$$

Residua pólů funkce $\operatorname{cotg} z$ $z = k\pi$ se vesměs rovnají jedné, a tedy $\frac{1}{z - k\pi}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ jsou hlavními částmi jejich Laurentovských rozvojů v okolí bodů $z = k\pi$. Rozvoj (43) se skládá z hlavních částí Laurentových rozvojů a je v tomto smyslu analogický rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky (§ 71). Řada $\frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{z - k\pi}$, pozůstávající jen z hlavních částí Laurentových rozvojů, je divergentní, jak se snadno dokáže. Proto byly v rozvoji (43) k hlavním částem připojeny ještě členy $\frac{1}{k\pi}$, které zaručují konvergenci řady (43).

Napíšeme-li si Taylorův rozvoj pro $\frac{1}{z - k\pi} = -\frac{1}{k\pi} - \frac{z}{k^2\pi^2} - \ldots$,

vidíme, že $\frac{1}{k\pi}$ je prvým členem Taylorova rozvoje hlavní části podle mocnin z, vzatým se znaménkem minus. Podobné tvrzení platí pro meromorfní funkce obecně. Platí

Mittag-Lefflerova věta. *Nechť je $f(z)$ meromorfní a má póly v bodech $z = a_k$, $|a_1| \leqq |a_2| \leqq \ldots$ s hlavními částmi Laurentova rozvoje $g_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) = G_k(z)$; nechť $h_k^{(p)}(0) = G_k(0) + G_k'(0)\, z + \ldots + \frac{G_k^{(p)}(0)}{p!} z^p$ je začátek Taylorova rozvoje hlavní části $g_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$ podle mocnin z. Pak existuje posloupnost celých čísel p_k a celistvá funkce $f_0(z)$ tak, že rozvoj*

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ g_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) h_k^{(p_k)}(z) \right\} \tag{46}$$

konverguje absolutně a stejnoměrně pro všechna $z \neq a_k$ v každém konečném kruhu $|z| \leqq A$.

Rozklad (46) je analogický rozkladu racionální funkce lomené na celistvou část a parciální zlomky a nazývá se *Mittag-Lefflerovým rozvojem funkce* $f(z)$. Setkáváme se s ním v mnoha důležitých problémech.

§ 79. Rozklad sin z v nekonečný součin. Věta Weierstrassova. Řada (44) konverguje stejnoměrně v libovolném konečném kruhu $|z| \leq A$ pro $z \neq k\pi$. Lze tedy najít pro libovolné číslo $\varepsilon > 0$ takové číslo $N_0 = N_0(\varepsilon)$, že pro všechna $N > N_0$ je v rozvoji

$$\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{N} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} + \alpha_N(z), \tag{47}$$

$$|\alpha_N(z)| < \varepsilon, \tag{48}$$

pro všechna $z \neq k\pi$ v kruhu $|z| \leqq A$. Levá strana rovnice (47) je funkce regulární v bodě $z = 0$, když položíme levou stranu v bodě $z = 0$ rovnu nule (viz předcházející paragraf). Integrujeme-li podél libovolné cesty od bodu $z = 0$ do bodu $z \neq k\pi$ (integrační cesta neobsahuje body $z = k\pi$), dostaneme

$$\ln \frac{\sin z}{z}\Bigg|_0^z = \sum_{k=1}^{N} \ln(z^2 + k^2\pi^2)\Bigg|_0^z + \int_0^z \alpha_N(z)\, dz.$$

Funkce $\dfrac{\sin z}{z}$ je v bodě $z = 0$ rovna jedné (plyne z předpokladu o regularitě) a tedy $\ln \dfrac{\sin z}{z}\Bigg|_0^z = \ln \dfrac{\sin z}{z} - \ln 1 = \ln \dfrac{\sin z}{z}$ a $\ln(z^2 + k^2\pi^2)\Bigg|_0^z =$ $= \ln \dfrac{z^2 - k^2\pi^2}{-k^2\pi^2} = \ln\left(1 - \dfrac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$. Naše poslední rovnice nabude tvaru

$$\ln \frac{\sin z}{z} = \sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) + \beta_N(z), \tag{49}$$

kde v důsledku (48) pro všechna $z \neq k\pi$ z kruhu $|z| < A$

$$|\beta_N(z)| = \left|\int_0^z \alpha_N(z)\, dz\right| < \varepsilon \,.\, 2A \tag{50}$$

(libovolný bod $z \neq k\pi$ z kruhu $|z| < A$ můžeme spojit v bodem $z = 0$ křivkou, jejíž délka $< 2A$; v úvaze předpokládáme, že integrujeme podél takové křivky).

Přepíšeme (49) na tvar

$$\frac{\sin z}{z} = e^{\beta_N(z)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right),$$

kde Π je znak pro násobení. Z nerovnosti (50) plyne, že pro $z \neq k\pi$ z kruhu $|z| < A$ je $\lim\limits_{N\to\infty} \beta_N(z) = 0$ a tedy pro $N \to \infty$ $e^{\beta_N(z)} \to 1$ a

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) = \frac{\sin z}{z}.$$

Definice. Existuje-li limita

$$f(z) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} (1 + f_k(z)) \tag{51}$$

a je-li různá od nuly v každém bodě jisté oblasti D, říkáme, že *nekonečný součin* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 + f_k(z))$ konverguje v oblasti D k funkci $f(z)$.

Poznámka. Snadno se dokáže, že v konvergentním nekonečném součinu tvaru (51) je $f_k(z) \to 0$, že součin tvaru (51) konverguje současně s řadou $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ (jsou-li funkce $f_k(z)$ od jistého indexu počínaje téhož znaménka pro pevné z), že součin (51) konverguje absolutně a že je možno libovolně přemisťovat jeho členy, konverguje-li řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ absolutně atd.

Poznámka 2. Jestliže jsou mezi členy součinu (51) členy, které nabývají hodnoty 0 v bodě z, a jestliže po vynětí těchto členů je (51) konvergentní v našem smyslu, říkáme, že (51) *konverguje k nule* v tomto bodě. Předpoklad, že limita (51) je od nuly různá, je nutný, chceme-li, aby si nekonečný součin zachoval vlastnost konečného součinu, totiž že je rovný nule tehdy a jen tehdy, je-li aspoň jeden z činitelů rovný nule.

Můžeme tedy nyní říci, že pro $z \neq k\pi$ z kruhu $|z| \leqq A$ můžeme $\sin z$ psát jako nekonečný součin

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{52}$$

Pro $z = k\pi$ konverguje tento součin k nule a naše vyjádření $\sin z$ nekonečným součinem je platné *pro všechna* z z kruhu $|z| < A$. Protože můžeme číslo A volit libovolně veliké, platí naše *vyjádření funkce* $\sin z$ *ve tvaru nekonečného součinu pro všechna konečná* z. Tento součin po prvé odvodil (jiným způsobem) Euler.

Kdybychom v naší úvaze vyšli místo z (44) z rovnice (43), dostali bychom místo (52) součin

$$\sin z = z \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}}, \tag{53}$$

kde znak $'$ značí, že v součinu vynecháváme index $k = 0$. Vyjádření (53) je rovněž platné pro všechna konečná z.

Vztah (53) připomíná rozklad mnohočlenu v kořenové činitele

$$P(z) = A(z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_n) = B \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right),$$

známý čtenáři z algebry (pro funkci $\sin z$ jsou body $a_k = k\pi$ rovněž nulovými body). Rozklad $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)$ obsahující jen činitele, kteří odpovídají nulovým bodům, je divergentní, jak se snadno dokáže. V rozkladu (53) byli proto ještě připojeni činitelé $e^{\frac{z}{k\pi}}$, kteří zaručují konvergenci součinu (53).

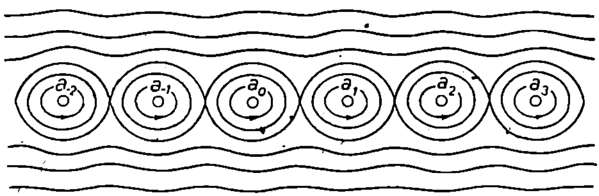
Podobný rozklad je možno najít pro libovolnou celistvou funkci a platí

Weierstrassova věta. *Budiž $f(z)$ celistvá funkce s nulovými body v bodech $z = a_k$ $(0 < |a_1| \leqq |a_2| \leqq \ldots \leqq |a_k| \leqq \ldots)$; nulové body počítáme s příslušnou násobností; dále nechť má funkce v bodě $z = 0$ nulový bod řádu $n (n \geqq 0)$; budiž $h_k^{(p)}(z) = -\frac{z}{a_k} - \frac{z^2}{2a_k^2} - \ldots - \frac{z^p}{pa_k^p}$ začátek Tay-*

lorova rozvoje funkce $\ln\left(1-\frac{z}{a_k}\right)$ *podle mocnin z. Pak existuje posloupnost celých čísel* p_k *a celistvá funkce* $f_0(z) \neq 0$ *taková, že pro všechna konečná z platí rozklad*

$$f(z) = f_0(z)\, z^n \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right) e^{-h_k^{(p_k)}(z)}\,. \tag{54}$$

Rozklad (54), který je analogický rozkladu mnohočlenu na kořenové činitele, se nazývá *Weierstrassovým rozkladem funkce* $f(z)$.



Obr. 122.

Příklad. Mějme nekonečnou řadu bodových vírů se stejnou intensitou Γ, jež jsou rozprostřeny v bodech $z = a_0 + kl$, t. j. leží na jisté přímce ve stejné vzdálenosti, která je rovna l od sebe (*vírový řetězec*, obr. 122).

Z počátku budiž počet vírů konečný a roven $2N + 1$ ($|k| \leq N$). Komplexní potenciál proudění v libovolném bodě $z \neq a_k$ se pak rovná součtu komplexních potenciálů jednotlivých vírů:

$$w = \Phi_N(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\mathrm{Ln}\,\frac{\pi(z-a_0)}{i} + \sum_{k=1}^{N}\left(\mathrm{Ln}\,\frac{z-a_k}{-kl} + \mathrm{Ln}\,\frac{z-a_k}{kl}\right)\right\}$$

(kde jsme násobili $z - a_0$ číslem $\frac{\pi}{l}$ a $(z - a_k)$ číslem $\frac{1}{-kl}$, čímž se změnila jen nepodstatná adiční konstanta; viz § 39). Po úpravě můžeme psát

$$\Phi_N(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\,\mathrm{Ln}\left\{\frac{\pi(z-a_0)}{l}\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{(z-a_0)^2}{k^2l^2}\right)\right\}.$$

Členy tohoto výrazu se liší od členů výrazu (54) jen tím, že místo z

zde máme $\frac{\pi(z - a_0)}{l}$. Dostáváme tedy v limitě pro $N \to \infty$ *komplexní potenciál vírového řetězce:*

$$w = \Phi(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} \left\{ \frac{\pi(z - a_0)}{l} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(z - a_0)^2}{k^2 l^2}\right) \right\} = \tag{55}$$
$$= \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} \sin \frac{\pi(z - a_0)}{l}.$$

Analogicky se odvodí vzorec pro komplexní potenciál nekonečně mnoha bodových nábojů velikosti $+q$ rozprostřených v těchže bodech a_k:

$$w = F(z) = -2qi \operatorname{Ln} \left\{ \frac{\pi(z - a_0)}{l} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(z - a_0)^2}{k^2 l^2}\right) \right\} =$$
$$= 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{\sin \frac{\pi(z - a_0)}{l}}.$$

§ 80. Eulerova funkce $\Gamma(z)$. Budeme nejprve definovat *logaritmickou derivaci Eulerovy funkce $\Gamma(z)$:*

$$\psi(1 + z) = -C - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z + k} - \frac{1}{k}\right), \tag{56}$$

kde C je konstanta, jejíž velikost ještě určíme. Řada (56) sestává z členů řady (45) pro π cotgπz se zápornými indexy.*) Je to vlastnost, které si všimneme ještě později. Rozvoj (56) je zřejmě Mittag-Lefflerovým rozvojem funkce $\psi(1 + z)$, která *je tedy meromorfní a má póly prvého řádu v bodech $z = -1, -2, -3, \ldots$*

Eulerova funkce $\Gamma(z)$, nazývaná též gamma funkce, je definována svou logaritmickou derivací

$$\ln \Gamma(1 + z) = \int_0^z \psi(1 + z)\, dz = -Cz - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\ln\left(1 + \frac{z}{k}\right) - \frac{z}{k}\right\}, \tag{57}$$

kde $z \neq -k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$); integrujeme podél libovolné cesty, která

*) Vzorce (45) a (56) se liší ještě znaménkem k.

neprochází právě uvedenými body. K tomu nás opravňuje stejnoměrná konvergence řady (56).

Odlogaritmováním rovnice (57) dostáváme

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = e^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}, \tag{58}$$

kde nekonečný součin konverguje, neboť je částí Weierstrassova rozvoje pro $\sin \pi z$, odpovídající záporným indexům k,**) Z (58) plyne, že funkce $\dfrac{1}{\Gamma(1+z)}$ je celistvá a má nulové body v bodech $z = -k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ a jen v těchto bodech. *Funkce $\Gamma(1+z)$ nenabývá nikde hodnoty nulové, je meromorfní a má póly prvého řádu v bodech $z = -k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ a jen v těchto bodech.*

Z (58) plyne dále: $\Gamma(1) = 1$. Jelikož podle předpokladu $\Gamma(2) \neq 0$ a konstanta C není ještě určena, položme $\Gamma(2) = 1$. Pak určíme konstantu C takto: Z (57) plyne

$$0 = -C - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \right\}$$

a tedy

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) \right\} = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k} - \ln \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right\}.$$

Přidáme-li k výrazu v závorce člen $\dfrac{1}{n+1}$, který nezmění hodnotu limity, neboť v limitě je $\dfrac{1}{n+1} \to 0$, a jestliže místo $n+1$ píšeme n, dostáváme konečně pro C vyjádření

$$C = \lim_{n\to\infty} \left\{ 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \right\}. \tag{59}$$

**) Viz vzorec (53), kde jsme zaměnili k za $-k$ a z za $4\pi z$.

Konstanta C se nazývá *Eulerovou konstantou**) a naší úvahou je dokázána její existence.

Odvoďme si nyní některé vztahy pro funkci $\Gamma(z)$. Především z (56) dostaneme pro $z \neq k$

$$\psi(1 + z) - \psi(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z + k - 1} - \frac{1}{z + k} \right\} = \frac{1}{z},$$

neboť všechny ostatní členy se zruší. Integrujeme a dostaneme rovnici $\ln\Gamma(1 + z) - \ln\Gamma(z) = \ln z + A$, kde zbývá ještě určit integrační konstantu A. Je $\Gamma(1 + z) = Az\Gamma(z)$; položíme-li $z = 1$, dostaneme $A = 1$, neboť $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, a konečně hledaný vztah

$$\Gamma(1 + z) = z\Gamma(z). \tag{60}$$

Rekurentní vztah, který jsme právě odvodili, umožňuje výpočet $\Gamma(z)$ v pásech $k < \operatorname{Re} z \leq k + 1$ a $k - 2 < \operatorname{Re} z \leq k - 1$, jsou-li známy hodnoty v pásu $k - 1 < \operatorname{Re} z \leq k$. Pomocí (60) dostaneme postupně:

$$\Gamma(z + 2) = (z + 1)\Gamma(z + 1) = (z + 1)\, z\Gamma(z),$$
$$\Gamma(z + 3) = (z + 2)\Gamma(z + 2) = (z + 2)(z + 1)z\Gamma(z)$$

a konečně pro celistvá kladná n:

$$\Gamma(z + n) = (z + n - 1)(z + n - 2) \ldots z\Gamma(z) \tag{61}$$

Pomocí vzorce (61) můžeme stanovit hodnoty funkce $\Gamma(z)$ v celé rovině, známe-li hodnoty v pásu $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$.

Speciálně položíme-li $z = 1$, dostaneme

$$\Gamma(1 + n) = n!. \tag{62}$$

odkud je vidět, že $\Gamma(z)$ *je pokračováním celočíselné funkce $n!$ do komplexního oboru.*

Pomocí (61) můžeme též najít residua funkce $\Gamma(z)$ v jejích pólech. Podle uvedeného vzorce je

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z(z + 1) \ldots (z + n)}\, \Gamma(z + n + 1),$$

*) Její přibližná hodnota je 0,5772157.

odkud podle (41) § 67

$$\operatorname{res}\Gamma(-n) =$$

$$= \lim_{z\to -n} (z + n)\,\Gamma(z) = \lim_{z\to -n} \frac{1}{z(z + 1)\dots(z + n - 1)}\,\Gamma(z + n + 1) =$$

$$= \frac{1}{-n(-n + 1)\dots(-1)}\,\Gamma(1)$$

a konečně

$$\operatorname{res}\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{63}$$

Dále plyne ze vzorce (58)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{z}{\Gamma(1 + z)} = z e^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

a

$$\frac{1}{\Gamma(1 - z)} = e^{-Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{\frac{z}{k}}.$$

Vynásobením těchto rozvojů tak, že násobíme odpovídající členy (snadno se dokáže, že je tento postup dovolen), dostaneme:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(1 - z)} = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

Porovnáme-li náš výraz s rovnicí (52), vidíme, že se pravá strana rovná $\frac{1}{\pi}\sin \pi z$, a tedy

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{64}$$

Vzorec (64) nám dovoluje výpočet hodnot funkce $\Gamma(z)$ v pásu $0 < \operatorname{Re} z \leq 1$ (a tedy i hodnot funkce $\Gamma(z)$ v celé rovině) pomocí hodnot z pásu $0 < \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}$. Speciálně pro $z = \frac{1}{2}$ dostaneme $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi$, odkud

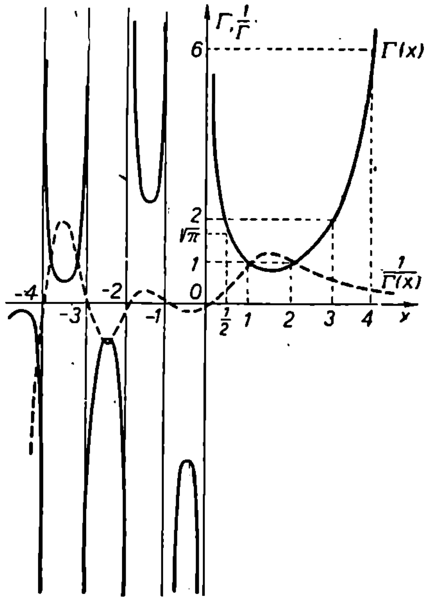
$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \tag{65}$$

V závěru uvedeme ještě tabulku s hodnotami funkce $\Gamma(x)$ v intervalu (1, 2) reálné osy:

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$\Gamma(x)$	0,9514	S,9182	0,8975	0,8873	0,8862	0,8935	0,9086	0,9314	0,9618

Průběh funkce $\Gamma(x)$ je pro reálná x graficky znázorněn na obr. 123, kde je též zobrazena funkce $\frac{1}{\Gamma(x)}$. Obecný průběh funkce $\Gamma(x)$ jasně plyne z jejích vlastností, které jsme výše uvedli. Poznamenejme ještě, že rychlé přibližování minim funkce $\Gamma(x)$ k záporné ose pro $x \to -\infty$ je spjato s rychlým ubýváním jejích residuí v pólech. Podle (63) je v okolí bodu $z = -n$

$$\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{1}{x+n} + $$
$$+ c_0 + x c_1(x+n) + \dots$$



Obr. 123.

a s růstem n velmi prudce klesá koeficient hlavní části Laurentova rozvoje.

§ 81. Vyjádření Γ-funkce pomocí integrálu.

Integrál

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \tag{66}$$

kde t je reálná proměnná, $z = x + iy$ komplexní parametr a pod t^{z-1} rozumíme $e^{(z-1)\ln t}$ (§ 32), konverguje pro všechna z z pravé poloroviny $\operatorname{Re} z > 0$. Důkaz: $|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t+(x-1)\ln t} = e^{-t}t^{x-1}$. Činitel e^{-t} zaručuje konvergenci (66) na pravém okraji pro všechna x a činitel t^{x-1} konvergenci na levém okraji pro $x > 0$.

Mějme posloupnost funkcí

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt.$$

Protože $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \to e^{-t}$ pro $n \to \infty$ a horní mez integrálu v $f_n(z)$ též $\to \infty$ pro $n \to \infty$, je $f_n(z) \to f(z)$. Přesný důkaz tohoto tvrzení nespadá do rámce naší knihy, a proto od něho upustíme. Dosadíme do výrazu pro $f_n(z)$ novou proměnnou $\tau = \frac{t}{n}$ a integrujeme per partes:

$$f_n(z) = n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n\, \tau^{z-1}\, d\tau = n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n\, d\,\frac{\tau^z}{z} =$$

$$= \frac{n^z}{z}\, \tau^z\, (1 - \tau)^n \Big|_0^1 + \frac{n^z}{z}\, n \int_0^1 (1 - \tau)^{n-1}\, \tau^z\, d\tau = \frac{n^z}{z}\, n \int_0^1 (1 - \tau)^{n-1}\, \tau^z\, d\tau,$$

kde výraz stojící mimo integrál je roven nule. Budeme nyní znova integrovat per partes tak dlouho, až nám za integračním znaménkem zmizí výraz $(1 - \tau)$. Výrazy stojící mimo integrál budou vždy po dosazení mezí rovny nule a po konečném počtu kroků dostaneme:

$$f_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z + 1) \ldots (z + n - 1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1}\, d\tau =$$

$$= \frac{n^z n!}{z(z + 1)\,(z + z) \ldots (z + n - 1)\,(z + n)} =$$

$$= \frac{e^{z \ln n}}{z\left(1 + \frac{z}{1}\right)\left(1 + \frac{z}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{z}{n}\right)}.$$

Výsledek si ještě trochu upravíme. Násobíme čitatele i jmenovatele zlomku číslem $e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$ a dostaneme:

$$f_n(z) = \frac{e^{-z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}}{z(1+z)\,e^{-z}\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-\frac{z}{2}}\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}} =$$

$$= \frac{1}{ze^{z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}}.$$

Použijeme-li ještě (59), (58), (60), dostaneme konečně

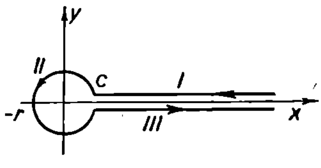
$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z) = \frac{1}{ze^{Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}} = \frac{\Gamma(1+z)}{z} = \Gamma(z).$$

Jako výsledek jsme tedy dostali *integrální vyjádření Γ-funkce:*

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt,\ \operatorname{Re} z > 0.} \tag{67}$$

Mějme nyní integrál

$$F(z) = \int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\,d\zeta,$$



Obr. 124.

kde integrujeme podél cesty vyznačené na obr. 124. Cesta je složena z horního a dolního okraje reálné poloosy a oblouku kružnice $|\zeta| = r$. Pod ζ^{z-1} budeme rozumět funkci $e^{(z-1)\ln\zeta}$, kde $\ln\zeta$ je ta větev logaritmu, pro niž $0 \leqq \arg\zeta \leqq 2\pi$. Na úseku (I) je $\zeta = t$ a $\zeta^{z-1} = e^{(z-1)\ln t} = t^{z-1}$, na úseku (II) je $\zeta = te^{2\pi i}$ a $\zeta^{z-1} = e^{(z-1)(\ln t+2\pi i)} = e^{2\pi i z}t^{z-1}$, a tedy

$$F(z) = \int_I + \int_{II} + \int_{III} = \int_\infty^r e^{-t}t^{z-1}\,dt + \int_{II} e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\,d\zeta +$$

$$+ e^{2\pi i z}\int_r^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt = (e^{2\pi i z} - 1)\int_r^\infty e^{-t}t^{z-2}\,dt + \int_{II}.$$

Předpokládejme nyní, že $\operatorname{Re} z > 0$; pak na úseku (II) $\zeta = re^{i\varphi}$, $|e^{-\zeta}\zeta^{z-1}| = e^{-r\cos\varphi}\, e^{(x-1)\ln r - \varphi y} > Ar^{x-1}$, kde A je jistá konstanta, a $|\int_{II}| < Ar^{x-1} 2\pi r \doteq A_1 r^x$, takže $\int_{II} \to 0$ pro $r \to 0$. V limitě dostaneme po odečtení (67)

$$F(z) = (e^{2\pi i z} - 1) \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt = (e^{2\pi i z} - 1)\, \Gamma(z),$$

a tedy konečně

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \int_C e^{-\zeta} \zeta^{z-1}\, d\zeta. \tag{68}$$

Integrální vyjádření Γ-funkce jsme odvodili pro body z ležící v pravé polorovině. Čitatel výrazu (68), t. j. integrál $\int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\, d\zeta$, je však funkce celistvá a rovněž jmenovatel je funkce celistvá s nulovými body v bodech $z = k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Pravá strana rovnice (68) je tedy regulární ve všech konečných bodech kromě bodů $z = k$. Levá strana rovnice (68) je podle toho, co jsme si dokázali dříve, regulární ve všech konečných bodech kromě bodů $z = k$ $(k = 0, -1, -2, \ldots)$. Pro pravou polorovinu jsou obě funkce shodné, a proto podle věty o jednoznačnosti (§ 62) budou shodné pro všechny body oblasti, v níž jsou regulární, a *rovnice (68) nám dává integrální vyjádření Γ-funkce, platné pro všechna konečná z kromě uvedených výjimek.**)

Vyjádření (68) je zajímavé také z toho důvodu, že definuje meromorfní funkci $\Gamma(z)$ jako podíl dvou celistvých funkcí (viz § 71).

Položíme-li v (68) místo z výraz $1 - z$, dostaneme:

$$\Gamma(1 - z) = \frac{1}{e^{-2\pi i z} - 1} \int_C e^{-\zeta} \zeta^{-z}\, d\zeta = \frac{e^{-2\pi i z}}{e^{-2\pi i z} - 1} \int_C e^{-\zeta} (-\zeta)^{-z}\, d\zeta =$$

$$= \frac{i}{2 \sin \pi z} \int_C e^{-\zeta} (-\zeta)^{-z}\, d\zeta.$$

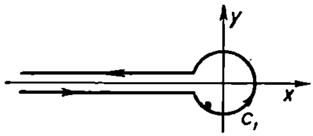
Zaměníme ještě ζ a $-\zeta$, při čemž se integrační cesta C z obr. 124

*) Pro $\operatorname{Re} z \leqq 0$ nelze v ní přejít k limitě pro $r \to 0$ jako v případě $\operatorname{Re} z > 0$.

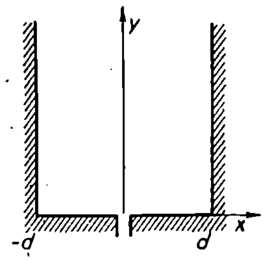
zamění cestou C_1 z obr. 125, a použijeme (64). Po úpravě dostáváme integrální vyjádření funkce $\Gamma(z)$:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} e^{\zeta}\zeta^{-z}\,d\zeta. \tag{69}$$

Integrální vyjádření (68) a (69) se nazývají *Hankelovy vzorce.*



Obr. 125.



Obr. 126.

ÚLOHY

1. Vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}$; b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{\cos x + a}$, $a > 1$; c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax\,dx}{x^4+1}$; d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$;

e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x(1+x^2+x^4)}$; f) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^{-a}}{1+2x\cos\lambda+x^2}$ $-1 < a < 1$ $-\pi < \lambda < \pi$;

g) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}$; h) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^2\ln x\,dx}{(1+x^2)^2}$; i) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx$.

2. Která funkce má integrální vyjádření

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{tz}}{z^2}\,dz,$$

kde integrujeme podél přímky $\operatorname{Re} z = a > 0$; t reálná proměnná.

3. Dokažte, že rovnice $\lambda - z - e^{-z} = 0$, kde $\lambda > 0$, má v pravé polorovině jediný kořen, a to reálný.

4. Dokažte: Je-li $f(z)$ regulární v kruhu $|z| \leqq 1$ a $|f(z)| < 1$, má rovnice $f(z) = z$ uvnitř tohoto kruhu jediný kořen (t. zv. samodružný bod při zobrazení $w = f(z)$).

5. Najděte rozklad funkcí:

a) $\operatorname{tg} z$; b) $\dfrac{1}{\sin z}$, c) $\dfrac{\pi}{\cos \pi z}$ a d) $\dfrac{1}{e^z - 1}$

v řadu parciálních zlomků.

6. Rozložte v nekonečné součiny funkce:
a) $e^z - 1$; b) $\cos \pi z - \cos \pi z_0$; c) $\cosh z - \cos z$.

7. Stanovte komplexní potenciál pole nekonečně mnoha bodových nábojů stejné velikosti se střídavými znaménky, které jsou rozprostřeny v bodech: $z_k = kd$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

8. Jaký je komplexní potenciál proudění kapaliny v nádobě zobrazené na obr. 126, kde je ve středu dna vyvrtán malý otvor, jímž vytéká Q litrů kapaliny za sec. Použijte methody zrcadlení na stěnách (§ 45).

9. Vypočtěte pomocí Γ-funkce Poissonův integrál

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

10. Dokažte, že v pásu $0 < \operatorname{Re} z < 1$ je

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-it}\, dt = \Gamma(z) \cdot e^{-\frac{\pi i z}{2}},$$

a pomocí uvedeného vztahu vypočtěte pro $n > 1$ integrály

a) $\displaystyle\int_0^\infty \cos(t^n)\, dt$; b) $\displaystyle\int_0^\infty \sin(t^n)\, dt$; c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t^n)}{t^n}\, dt$.

11. Dokažte, že se Eulerova funkce prvního druhu (t. zv. betafunkce) $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1 - t)^{q-1}\, dt$, kde $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} q > 0$, vyjádří pomocí Γ-funkce vztahem

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\, \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$

12. Vypočtěte pomocí Γ-funkce integrály:

a) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p}\varphi \cos^{2q}\varphi \, \mathrm{d}\varphi$; b) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{tg}^p\varphi \, \mathrm{d}\varphi$;

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$; d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m \, \mathrm{d}x}{(a+bx^n)^p}$ $(a > 0, b > 0, np > m + 1)$.