KAPITOLA V.

HARMONICKÉ FUNKCE. VYJÁDŘENÍ REGULÁRNÍCH FUNKCÍ POMOCÍ INTEGRÁLŮ

§ 46. Integrál funkce komplexní proměnné. Budiž v jisté konečné oblasti D definována jednoznačná a spojitá funkce

$$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \tag{1}$$

a budiž C libovolná, po úsecích hladká (viz § 8) křivka, náležející cele oblasti D včetně koncových bodů a, b. Křivku C rozdělíme libovolným způsobem na n dílů body $z_0 = a, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = b$, které budou ležet na křivce v pořádku určeném jejich indexy. Označíme $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k = \Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k$ a vybereme v každé části (z_{k-1}, z_k) křivky C libovolný bod $\zeta_k = \xi_k + \mathrm{i}\eta_k$ a utvoříme součet

$$\left.\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\, \Delta z_k = \sum_{1}^{n}\{u(\xi_k, \eta_k)\, \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\, \Delta y_k\} + \\ + \mathrm{i}\sum_{1}^{n}\{v(\xi_k, \eta_k)\, \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\, \Delta y_k\}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Součet (2) nazveme *integrálním součtem* funkce $f(z)$ pro dané dělení na křivce C^*a dané body ζ_k (velikost sumy s_n závisí zřejmě jak na výběru bodů z_k, tak na výběru bodů ζ_k). Nakonec budeme uvažovat libovolnou posloupnost dělení křivky C takovou, že pro délku nej-největšího z dílků n-tého dělení platí

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} |\Delta z_k| = \delta_n \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Definice. Limita integrálních součtů (2) pro libovolnou posloupnost dělení křivky C vyhovujících rovnici (3) se nazývá *integrálem* funkce $f(z)$ podél křivky C a značí se symbolem

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\, \Delta z_k. \tag{4}$$

Za uvedených podmínek *limita* (4) *vždy existuje a je nezávislá jak* *na výběru posloupnosti rozdělení křivky, tak na volbě bodů* ζ_k (existenční věta pro integrál). Důkaz: Podle (2) je

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{u(\xi_k, \eta_k)\, \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\, \Delta y_k\} +$$

$$+ \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{v(\xi_k, \eta_k)\, \Delta x_k + v(\xi_k, \eta_k)\, \Delta y_k\}$$

a v kursech analysy se dokazuje, že sumy vpravo pro libovolné spojité funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ a po úsecích hladkou křivku C konvergují k pevným limitám, jsou-li splněny podmínky (3), a že tato limita je nezávislá jak na výběru čísel (x_k, y_k), tak na výběru (ξ_k, η_k).

Tyto limity jsou křivkovými integrály reálné proměnné, a tedy

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u(x,y)\,dx - v(x, y)\,dy + \mathrm{i}\int_C v(x,y)\,dx + u(x, y)\,dy \tag{5}$$

Z (5) plyne, že integrál funkce komplexní proměnné má všechny vlastnosti křivkových integrálů reálné proměnné. Uveďme na př. *větu o odhadu integrálu:*

Věta [1]. *Je-li funkce $f(z)$ omezená na křivce C, t. j.* $|f(z)| \leqq M$, pak

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq Ml, \tag{6}$$

kde l je délka oblouku křivky C.

Důkaz: Vybereme libovolnou posloupnost dělení křivky C, která vyhovuje podmínce (3). Máme

$$|s_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\, \Delta z_k\right| \leqq \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\, |\Delta z_k| \leqq M \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$$

a odtud

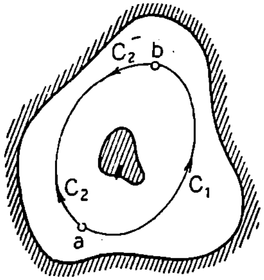
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\, \Delta z_k\right| \leqq M \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| = M \,.\, l,$$

neboť podle (3) $\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$, t. j. délka lomené čárky interpolující křivku C pro $n \to \infty$ konverguje k délce oblouku křivky C.

§ 47. Cauchyho integrální věta. Hledejme podmínky pro to, aby integrál $\int_C f(z)\,dz$ podél libovolné křivky C ležící v oblasti D nezávisel na křivce C a byl pouze funkcí svých koncových bodů. K tomu stačí a je nutné, aby integrál funkce $f(z)$ podél uzavřené křivky C ležící v D byl rovný nule:*)

$$\oint_C f(z)\,dz = 0. \tag{7}$$

Důkaz: Bude-li rovnice (7) splněna a C_1 a C_2 budou dvě různé cesty spojující body a a b (a, b, c_1 a C_2 leží v D), vezmeme uzavřenou křivku C skládající se z křivek C_1 a C_2, z nichž druhou bereme v opačném smyslu: $C = C_1 + C_2^-$ (viz obr. 83). Pak podle (7) a vlastnosti křivkových integrálů máme



Obr. 83.

$$0 = \oint_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz,$$

odkud

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz,$$

a integrál v oblasti D je nezávislý na integrační cestě. Naopak nechť integrál v oblasti D nezávisí na integrační eestě a C budiž libovolná uzavřená křivka v D. Vybereme na ni dva libovolné body a_1 a a_2 a označíme C_1 a C_2 oba oblouky křivky C takto získané. Pak máme (obr. 83)

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz$$

a je tedy vyplněna rovnice (7).

Dále platí tato integrální věta Cauchyho:

Věta [2]. *Je-li $f(z)$ regulární funkce v jednoduše souvislé oblasti D, pak v této oblasti integrál z funkce $f(z)$ nezávisí na integrační cestě, t. j. pro libovolnou uzavřenou křivku C platí*

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

*) Kroužek v integrálu (7) značí uzavřenost integrační cesty.

Z podmínek regularity naší funkce plyne, že parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ existují v každém bodě oblasti D a vyhovují rovnicím Cauchy-Riemannovým (viz § 14). Dokážeme větu Cauchyho za doplňujícího předpokladu, že tyto derivace jsou spojité.*) Jak plyne z rovnice (5), převede se úloha (7) na otázku anulování reálných křivkových integrálů

$$\oint_C u\, dx - v\, dy \quad \text{a} \quad \oint_C v\, dx + u\, dy. \tag{8}$$

Jak je známo z kursu analysy, k tomu, aby integrál

$$\oint_C P\, dx + Q\, dy$$

podél uzavřené křivky C ležící v jednoduše souvislé oblasti D byl rovný nule, stačí, aby**):

1. parciální derivace funkcí $P(x; y)$ a $Q(x, y)$ existovaly a byly všude spojité v oblasti D,

2. v každém bodě v oblasti D byla splněna rovnice

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Pro integrály (8) je podmínka 1. splněna v důsledku našich předpokladů. Podmínka 2. nabýbá tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{9}$$

což jsou zřejmě Cauchy-Riemannovy rovnice (§ 14), které jsou splněny ve všech bodech oblasti. Tím je naše věta dokázána.

Poznámka. Platí i věta obrácená k větě Cauchyho:

---

*) Podrobný důkaz věty Cauchyho nalezne čtenář v knize I. I. Privalova: Vvedenije v těoriju funkcij kompleksnogo pereměnnogo (Úvod do theorie funkcí komplexní proměnné) GOSTĚCHIZDAT, Moskva, 1948. [Nebo v knize K. Knopp: Funktionentheorie I, Sammlung Göschen, 1937, Berlin. *Pozn. překl.*]

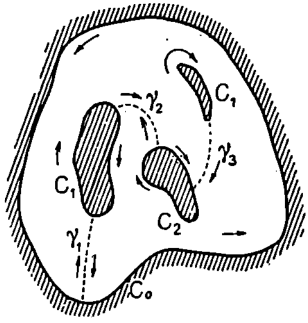
**) Doporučujeme čtenáři, aby si zapamatoval důkaz této věty a její předpoklady o jednoduché souvislosti oblasti D a spojitosti parciálních derivací.

Věta. *Budiž $f(z)$ spojitá v jednoduše souvislé oblasti D a nechť*

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

podél libovolné uzavřené křivky C. Pak je $f(z)$ regulární v oblasti D.

Důkaz této věty zde nebudeme uvádět. Cauchyho věta nám dovoluje definovat novým způsobem regulární funkce. Stará i nová definice je ekvivalentní. Jednoznačná funkce se nazývá regulární v jednoduše souvislé oblasti D, je-li spojitá v této oblasti, a její integrál podél libovolné uzavřené křivky ležící v této oblasti je roven nule.



Obr. 84.

Věta Cauchyho se dá zevšeobecnit i pro vícenásobně souvislé oblasti. Budiž dána $(n+1)$-násobně souvislá oblast D ohraničená křivkami C_0 (vnější hranice), $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ (vnitřní hranice) a funkce $f(z)$ regulární v uzavřené oblasti $\overline{D}$ (obr. 84). Provedeme výřezy $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$, které převedou oblast D v jednoduše souvislou oblast D', a označíme C' její hranici. Protože je D' jednoduše souvislá a $f(z)$ regulární v $\overline{D'}$, je podle věty Cauchyho

$$\oint_{C'} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Zvolíme si nyní takový smysl oběhu na C', aby oblast D' ležela vlevo. Pak bude smysl oběhu na C_0 kladný, na $C_1, C_2, \ldots, C_n$ záporný a cesty $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ budou proběhnuty vždy dvakrát v opačných směrech. Podle vlastností křivkových integrálů je

$$\oint_{C'} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{10}$$

(integrály podél γ_k se vzájemně ruší).

Jestliže při oběhu hranice oblasti D budeme orientovat křivky tak, aby i v tomto případě ležela celá oblast D vlevo, změní se smysl oběhu na křivkách $C_1, C_2, \ldots, C_n$ a bude (píšeme C_k^- místo C_k):

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_0} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz = 0. \tag{11}$$

Vzorec (11) nám dává *zevšeobecněnou větu Cauchyho pro oblast libovolné souvislosti*:

Věta [3]. *Je-li $f(z)$ regulární v uzavřené oblasti D, pak její integrál podél hranice oblasti D, vzaté tak, že celá oblast leží po jedné straně, je roven nule.*

Poznámka. Podrobná analysa ukazuje, že věta 3 zůstává v platnosti, je-li $f(z)$ regulární v otevřené oblasti D a pouze spojitá v uzavřené oblasti $\bar{D}$.

§ 48. Residuová věta. Vzorec Čaplyginův. Ze vzorce (10) též plyne, že je-li $f(z)$ regulární všude uvnitř křivky C, kromě částí ohraničených křivkami $C_1, C_2, \ldots, C_n$, je

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz \tag{12}$$

(ve vzorci (12) probíháme všechny křivky v kladném směru). Speciálně je-li $f(z)$ regulární v prstenci mezi křivkami C_k a C_k', je

$$\oint_{C_k} f(z)\,dz = \oint_{C_k'} f(z)\,dz. \tag{13}$$

Dále se často vyskytne případ, že funkce $f(z)$ bude regulární všude uvnitř C s výjimkou konečného počtu bodů $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tyto body budeme nazývat *singulárními body**) funkce $f(z)$. Okolo každého z nich opíšeme dostatečně malou kružnici c_k tak, aby uvnitř c_k neležel už žádný další singulární bod, aby jednotlivé kružnice c_k neměly žádné společné body a všechny ležely uvnitř C.

Podle (13) se integrál z $f(z)$ podél C nezmění, nahradíme-li C libovolnou křivkou ležící cele uvnitř C a obsahující jen jediný singulární bod a_k, a tedy závisí jen na funkci $f(z)$ a bodu a_k. Velikost tohoto integrálu, kterou pro zjednodušení dalších úvah dělíme faktorem $2\pi i$, se nazývá *residuem* funkce $f(z)$ v bodě a_k a značí se symbolem

$$\operatorname{res} f(a_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} f(z)\,dz. \tag{14}$$

*) Podrobnou definici viz § 61.

Pomocí vzorce (12) můžeme vyslovit Cauchyho residuovou větu:

Věta [4]. *Budiž $f(z)$ regulární v oblasti $\bar{D}$ ohraničené křivkou C až na konečný počet singulárních bodů $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ležících uvnitř C; pak integrál z funkce $f(z)$ podél křivky C je roven součtu residuí v bodech a_k násobenému faktorem $2\pi i$:*

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res} f(a_k). \tag{15}$$

Později (v kapitole VI) se budeme podrobněji zabývat charakterem singulárních bodů a uvedeme též některé způsoby výpočtu residuí, aniž počítáme příslušné integrály. Věty [4] možno použít k výpočtu integrálů funkcí komplexní proměnné a jistých integrálů funkcí reálné proměnné (viz kap. VII). Zde se omezíme pouze na uvedení řady vzorců, v nichž najde náš vzorec uplatnění.

a) *Stanovení úhrnného náboje a úhrnné práce.* Budiž dáno libovolné elektrostatické rovinné pole a budiž C libovolná uzavřená křivka, kterou je možno opsat jistým proužkem, nemajícím náboje. Pak podle vzorců (33) § 37 úhrnný náboj pole rozprostřený uvnitř C je

$$q = \frac{1}{4\pi} \oint_C (\mathbf{E}, \mathbf{n}^0)\,ds = \frac{1}{4\pi} \oint_C dU(x, y), \tag{16}$$

kde $U(x, y)$ je silová funkce pole. Označíme $F(z) = U + iV$ komplexní potenciál pole. Podle našich předpokladů je funkce $F(z)$ regulární v jistém proužku opsaném kolem křivky C. Pak $U(x, y) = \operatorname{Re} F(z)$, $dU(x, y) = \operatorname{Re} dF(z) = \operatorname{Re} F'(z)\,dz$ a vzorec (16) bude mít tvar

$$q = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \oint_C F'(z)\,dz. \tag{17}$$

Je-li speciálně uvnitř křivky C pouze konečný počet bodových nábojů v bodech $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pak podle residuové věty

$$q = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} F'(a_k)\} = -\tfrac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} F'(a_k). \tag{18}$$

Podobně ze vzorce (26) § 37 plyne, že práce potřebná k přenesení náboje $q = +1$ podél křivky C je

$$A = \int_C \mathrm{d}V(x, y) = \mathrm{Im}\int_C \mathrm{d}F(z) = \mathrm{Im}\int_C F'(z)\,\mathrm{d}z. \tag{19}$$

b) *Stanovení toku a cirkulace rychlosti.* Na základě vzorce (50) § 39 zcela analogicky odvodíme, že tok vektoru rychlosti uvnitř uzavřené křivky C, okolo které je možno opsat jistý proužek neobsahující ani zřídla, ani víry, je

$$Q = \oint_C (\mathbf{V}, \mathbf{n}^0)\,\mathrm{d}s = \oint_C \mathrm{d}\psi(x, y) = \mathrm{Im}\oint_C \Phi'(z)\,\mathrm{d}z, \tag{20}$$

kde $\psi(x, y)$ je proudová funkce a $\Phi(z) = \varphi(x, y) + \mathrm{i}\psi(x, y)$ komplexní potenciál proudění.

Ze vzorce (48) téhož § plyne, že cirkulace rychlosti podél křivky C je

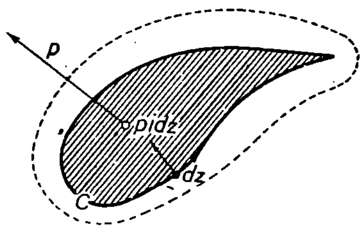
$$\Gamma = \oint (\mathbf{V}, \mathbf{s}^0)\,\mathrm{d}s = \oint \mathrm{d}\varphi(x, y) = \mathrm{Re}\oint \Phi'(z)\,\mathrm{d}z. \tag{21}$$

Spojením vzorců (20) a (21) dostaneme vztah

$$\Gamma + \mathrm{i}Q = \mathrm{Re}\oint_C \Phi'(z)\,\mathrm{d}z + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\oint_C \Phi'(z)\,\mathrm{d}z = \oint_C \Phi'(z)\,\mathrm{d}z. \tag{22}$$

Jsou-li speciálně uvnitř křivky C zřídla a víry jen v konečném počtu bodů $a_1, a_2, \ldots, a_n$, můžeme pomocí residuové věty přepsat (20) a (21) ve tvaru

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\,\Phi'(a_k), \\ \Gamma &= -\,2\pi\,\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\,\Phi'(a_k). \end{aligned} \tag{23}$$



Obr. 85.

c) *Čaplyginův vzorec.* Velikost tlaku při rovinném proudění ideální kapaliny je dána Bernouilliho vzorcem

$$p = A - \tfrac{1}{2}\varrho V^2, \tag{24}$$

kde A je jistá konstanta, ϱ hustota kapaliny a $V = |\mathbf{V}|$ modul rychlosti proudění.

Nechť kapalina obtéká nějakou uzavřenou křivku C. Tlak na křivce C má směr normály namířené dovnitř, a tedy velikost síly působící na element oblouku $ds = |dz|$ křivky C je

$$p\mathrm{i}\,dz = A\mathrm{i}\,dz - \tfrac{1}{2}\varrho \mathrm{i} V^2\,dz$$

a úhrnná síla působící na celou křivku C je rovna vektorovému součtu $p\mathrm{i}\,dz$, t. j.

$$P = X + \mathrm{i}Y = \oint_C p\mathrm{i}\,dz = -\tfrac{1}{2}\varrho \mathrm{i} \oint_C V^2\,dz$$

(kde integrál $\oint_C A\mathrm{i}\,dz$ podle residuové věty je roven nule). Na křivce C má rychlost v důsledku obtékání směr tečny

$$\boldsymbol{V} = \overline{\Phi'(z)} = V e^{\mathrm{i}\varphi},$$

kde $\varphi = \arg dz$ ($dz = ds\,.\,e^{\mathrm{i}\varphi}$). Odtud $V = \overline{\Phi'(z)}\,.\,e^{-\mathrm{i}\varphi}$ a náš vzorec nabude tvaru

$$\boldsymbol{P} = -\tfrac{1}{2}\varrho \mathrm{i} \oint_C [\overline{\Phi'(z)}]^2\, e^{-2\mathrm{i}\varphi}\,dz = -\tfrac{1}{2}\varrho \mathrm{i} \oint_C [\overline{\Phi'(z)}]^2\, \overline{dz},$$

neboť $e^{2\mathrm{i}\varphi}\,dz = e^{\mathrm{i}\varphi}\,ds = \overline{dz}$. Přejdeme-li ke komplexně sdruženým veličinám, dostaneme hodnotu vektoru komplexně sdruženého s vektorem $\boldsymbol{P}$. Vektor $\overline{\boldsymbol{P}}$ udává velikost a směr vztlaku, působící na křivku C:

$$\overline{\boldsymbol{P}} = X - \mathrm{i}Y = \tfrac{1}{2}\varrho \mathrm{i} \oint_C [\Phi'(z)]^2\,dz. \tag{25}$$

Posledně uvedený vzorec pochází od S. A. Čaplygina. Nemá-li proudění žádné zdroje ani vichry vně obtékaného profilu, můžeme podle residuové věty nahradit konturu C libovolnou jinou (a k výpočtu vhodnější) křivkou, ležící vně obtékaného profilu.

§ 49. Neurčitý integrál. Funkce $F(z)$ se nazývá primitivní funkcí k funkci $f(z)$, platí-li

$$F'(z) = f(z).$$

Libovolné dvě primitivní funkce jedné a téže funkce $f(z)$ se navzájem liší jen o konstantu. Důkaz. Z definice plyne, že obě dvě primitivní funkce $F_1(z)$ a $F_2(z)$ i jejich rozdíl

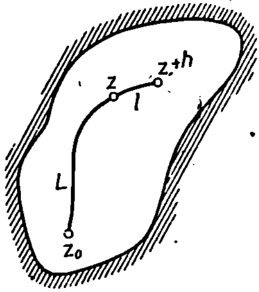
$$\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z) = U(x, y) + \mathrm{i}V(x, y)$$

jsou regulární v jisté oblasti D. Dále

$$\Phi'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial x} \equiv 0,$$

a tedy $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial x} \equiv 0$. Z Cauchy-Riemannových rovnic plyne $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0$ a odtud, plyne jak se dokazuje v analyse, že funkce $U(x, y)$ a $V(x, y)$ jsou konstantní v oblasti D. Tedy i $\Phi(z) = C = \text{const}$ a

$$F_1(z) = F_2(z) + C.$$



Obr. 86.

Je zřejmé, že připočtením libovolné konstanty k primitivní funkci dostaneme opět primitivní funkci. Má-li tedy funkce $f(z)$ aspoň jednu primitivní funkci, má jich nekonečně mnoho.

Množina všech primitivních funkcí se nazývá *neurčitý integrál* a označuje se symbolem

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Z toho, co bylo řečeno, plyne, že neurčitý integrál představuje množinu funkcí, lišících se navzájem jen o libovolnou adiční konstantu.

Věta [5]. *Budiž $f(z)$ regulární v jednoduše souvislé oblasti D a budiž z_0 jistý pevný bod v této oblasti. Pak funkce*

$$F(z) = \int_{L\,z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

kde integrujeme podél libovolné cesty L mezi body z_0 a z ležící uvnitř oblasti D, je regulární uvnitř D a je primitivní vzhledem k $f(z)$.

Z Cauchyho věty plyne, že $\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$ definuje nějakou jednoznačnou funkci $F(z)$. Zbývá jen dokázat, že $F'(z)$ existuje a je rovna $f(z)$. Budiž z libovolný bod v D a zvolme si číslo $\varepsilon > 0$. Pak najdeme takové komplexní číslo h, že úsečka l s koncovými body z a $z + h$ ještě leží v D a že pro všechna ζ, pro která je $|\zeta - z| < |h|$, platí nerovnost

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Z vlastností křivkových integrálů plyne, že

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

při čemž můžeme předpokládat, že integrujeme podél úsečky l (obr. 86). Z definice integrálu plyne ihned

$$\int_z^{z+h} \mathrm{d}\zeta = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1 \,.\, \Delta\zeta_k = h,$$

neboť součet

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta\zeta_k = (\zeta_1 - z) + (\zeta_2 - \zeta_1) + \ldots + (z + h - \zeta_{n-1}) =$$
$$= z + h - z = h.$$

Můžeme tedy psát

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\left\{\int_z^{z+h} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - f(z)\int_z^{z+h}\mathrm{d}\zeta\right\} =$$
$$= \frac{1}{h}\int_z^{z+h}\left\{f(\zeta) - f(z)\right\}\mathrm{d}\zeta.$$

Použijeme-li nerovnosti $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ a věty **[1]**, dostaneme

$$\left|\frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z)\right| \leqq \frac{1}{|h|}\,\varepsilon\,.\,|h| = \varepsilon,$$

což značí, že limita

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = F'(z) = f(z)$$

existuje. Tím je věta dokázána.

Důsledek. *Budiž funkce $f(z)$ regulární v jednoduše souvislé oblasti D; pak můžeme psát její neurčitý integrál také takto:*

$$\int f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{L\,z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z + C, \tag{26}$$

kde integrujeme podél libovolné cesty v D mezi body z_0 a z a kde C je libovolná konstanta.

Důsledek plyne přímo z věty 5 našeho paragrafu a z existenční věty integrálu (viz § 46).

Důsledek 2. *Vzorec Newtonův-Leibnizův. Budiž $f(z)$ regulární v jednoduše souvislé oblasti D; pak integrál podél cesty ležící cele uvnitř D s krajními body z_1 a z je roven rozdílu funkčních hodnot příslušné primitivní funkce v těchto bodech.*

$$\int_{L\,z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1). \tag{27}$$

Důkaz. Podle věty 5 je

$$F(z) = \int_{L\,z_1}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z + C,$$

kde C je konstanta. Položme $z = z$ a máme $F(z_1) = C$. Odtud

$$\int_{L\,z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - C = F(z_2) - F(z_1).$$

Z uvedeného je vidět, že se definice primitivní funkce a výpočet omezeného integrálu (vzorec Newtonův-Leibnizův) pro komplexní proměnnou shoduje s ekvivalentními pojmy pro funkci reálné proměnné. V důsledku toho platí pro primitivní funkce elementárních funkcí vzorce platné v theorii funkcí reálné proměnné.

§ 50. Integrování mocnin $(z - a)$. Nejprve budeme integrovat funkci $w = \dfrac{1}{z}$. Tato funkce má singulární bod v bodě $z = 0$, tedy integrál podél kružnice C: $|z| = R$ může být nenulový. Pro výpočet dosadíme: $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, odtud $\mathrm{d}z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{i}\mathrm{d}\varphi$ a

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{i}\mathrm{d}\varphi}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi\mathrm{i}. \tag{28}$$

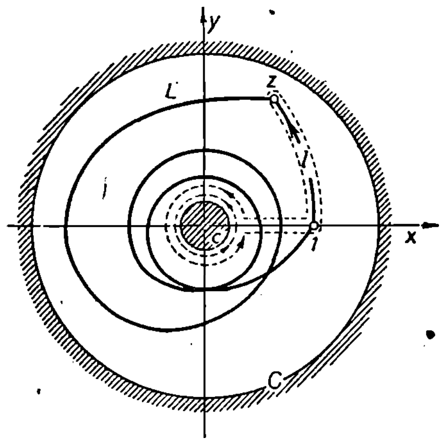
Odtud a z (19) plyne, že se residuum funkce $w = \frac{1}{z}$ v singulárním bodě $z = 0$ rovná jedné.

Zkoumejme nyní hodnotu integrálu z $\frac{1}{z}$ podél libovolné cesty l s koncovými body 1 resp. z, která neprochází bodem 0. Za oblast D vezmeme rovinu z s výřezem podél záporné reálné osy. Pak hlavní větev logaritmu v oblasti D

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z \leqq \pi$$

je jednou z primitivních funkcí funkce $\frac{1}{z}$, neboť $\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z}$. Také $\int_{1}^{z}{}_{C} \frac{dz}{z}$ je primitivní funkcí téže funkce a tedy podle (26)

$$\int_{1}^{z}{}_{C} \frac{dz}{z} = \ln z + C.$$



Obr. 87.

Položíme v naší rovnici $z_0 = 1$, dostaneme $C = 0$ a

$$\int_{1}^{z} \frac{dz}{z} = \ln z. \tag{29}$$

Výraz (29) nazýváme *integrální vyjádření hlavní hodnoty logaritmu.*

Budiž nyní cesta L křivka s koncovými body 1 resp. z, libovolněkrát opisující bod $z = 0$, ale neprocházející jím.

Vezměme si nyní takovou kružnici c se středem v bodě $z = 0$, uvnitř které neleží žádný z bodů cesty l resp. L (taková kružnice vždycky existuje, protože ani jedna z obou cest neprochází bodem $z = 0$). Nyní sestrojme ještě s ní koncentrickou kružnici C takovou, že obě cesty l v L, leží uvnitř této kružnice (obr. 87). Označme L' uzavřenou křivku skládající se z křivky l a L^-, kde L^- značí křivku L orientovanou ve směru od bodu z do 1. Podle vzorce (13) se hodnota integrálu $\int\limits_{L'} \frac{dz}{z}$ nezmění, jestliže deformujeme L' libovolným způsobem, ale tak, že ještě zůstane celá v prstenci mezi křivkami c a C. Deformujeme tedy L' v L'' takto: L'' tvoří dvakrát proběhnutá (v opačných směrech) křivka l, a úsečka na reálné kladné poloose mezi bodem 1 a kružnicí c (taktéž dvakrát proběhnutá) a konečně n-krát proběhnutá kružnice c. Číslo n budeme brát kladně, bude-li oblouk L orientován proti pohybu hodinových ručiček, v opačném případě záporně (tak na př. na obr. 87 $n = -2$). Pak se integrály podél dvakrát počítaných oblouků resp. úseček ruší a zbude jen integrál podle kružnice, který se podle (28) rovná $2\pi n i$ (při čemž dbáme na znaménko čísla n podle naší úmluvy), a tedy

$$\int\limits_C \frac{dz}{z} - \int\limits_L \frac{dz}{z} = \int\limits_{L''} \frac{dz}{z} = 2\pi n i$$

a

$$\int\limits_{1\ L}^{z} \frac{dz}{z} = \int\limits_1^z \frac{dz}{z} - 2\pi n i = \ln z - 2\pi n i = \operatorname{Ln} z. \tag{30}$$

Tím jsme odvodili hodnotu integrálu z $\frac{1}{z}$ podél libovolné cesty s koncovými body 1 resp. z. Je jasné, že výraz (30) dá při vhodné volbě cesty L libovolnou hodnotu funkce $\operatorname{Ln} z$. *Vztah (30) je tedy integrálním vyjádřením funkcí* $\operatorname{Ln} z$.

Nyní přejdeme k obecnější funkci $(z - a)^n$, kde n je libovolné celé číslo, kladné, záporné nebo nula. Budiž C libovolná uzavřená cesta opisující jednou bod a. Označme c dostatečně malou kružnici o středu v bodě $z = a$, ležící cele uvnitř C. Pak je funkce $(z - a)^n$ regulární pro každé n v prstenci mezi křivkami c a C a podle (13) je

$$\oint\limits_C (z - a)^n \, dz = \oint\limits_c (z - a)^n \, dz,$$

kde obě kontury probíháme v tomtéž (třeba kladném) smyslu. Druhý z integrálů vyčíslíme podobně jako v (19). Položme $z - a = re^{i\varphi}$, kde r je poloměr kružnice c, $dz = re^{i\varphi} i \, d\varphi$, a dostaneme

$$\oint_C (z - a)^n \, dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{in\varphi} r e^{i\varphi} i \, d\varphi = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi.$$

Funkce $e^{i\lambda\varphi}$ je však integrabilní a integruje se podle pravidel platných v analyse reálné proměnné (viz § 8); pro $n \neq -1$ dostaneme

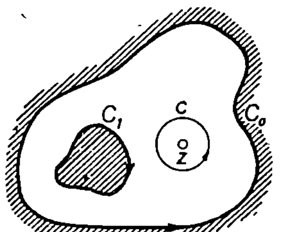
$$\oint_c (z - a)^n \, dz = \frac{r^{n+1}}{n+1} [e^{i(n+1)\varphi}]_0^{2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1} \{e^{i2(n+1)\pi} - 1\} = 0,^{*)}$$

neboť pro libovolné celé n $e^{i(n+1)\pi} = 1$. Pro $n = -1$ zřejmě

$$\oint_c (z - a)^{-1} \, dz = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Shrneme-li získané výsledky, máme *pro celistvá n*

$$\oint_c (z - a)^n \, dz = \begin{cases} 0 \text{ pro } n \neq -1, \\ 2\pi i \text{ pro } n = -1. \end{cases} \tag{31}$$



Obr. 88.

Odtud vidíme, že regularita funkce uvnitř integrační cesty není nutnou podmínkou pro anulování integrálu; funkce $(z - a)^n$ se singularitou v bodě $z = a$ a $n \neq -1$ má integrál (31) pro kladná celá n roven nule. Tentýž fakt plyne i z residuové věty, podle které integrál $\oint_C f(z) \, dz$ je roven nule nejen tehdy, je-li funkce $f(z)$ regulární uvnitř integrační cesty C, nýbrž i tehdy, má-li uvnitř C singulární body, jejichž součet residuí je nulový, nebo pouze jediný singulární bod, ale s nulovým residuem.

§ 51. Integrální věta Cauchyho. Obsahem této věty je fundamentální vlastnost regulárních funkcí. Ukazuje se, že funkce regulární v oblasti $\bar{D}$ je plně definována svými hodnotami $f(\zeta)$ na hranici D.

*) Pro kladná n plyne tato rovnice též přímo ze základní věty Cauchyho.

Jinak řečeno, pomocí hodnot funkce na hranici jisté oblasti je možno definovat hodnoty ve všech bodech uvnitř této oblasti.

Integrální vzorec Cauchyho zní

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \tag{32}$$

Předpokládáme, že funkce $f(z)$ je regulární v uzavřené oblasti $\overline{D}$, z je libovolný vnitřní bod této oblasti a integrujeme podél hranice oblasti D tak, že při oběhu hranice leží oblast stále vlevo. (Hranice se ovšem může skládat po případě i z více různých křivek, viz obr. 88.)

Důkaz. Zvolíme si libovolně malé číslo $\varepsilon > 0$ a opíšeme okolo bodu z kružnici c $|\zeta - z| = r$ takovou, že pro všechny body ζ této kružnice platí nerovnost

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \tag{33}$$

(kde ovšem tuto kružnici volíme tak, aby ležela celá v D). To lze vždycky učinit, neboť funkce $f(z)$ je spojitá. V oblasti $\overline{D}^*$, která vznikne z oblasti $\overline{D}$ vynětím kruhu $|\zeta - z| < r$, je funkce $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ regulární. Použitím věty Cauchyho (§ 48) dostaneme

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \oint_c \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

kde c probíháme v kladném smyslu. Podle vzorce (31) § 50 můžeme psát*)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

a odtud

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta;$$

---

*) Podle vzorce (31) je $1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d\zeta}{\zeta - z}$, a $f(z)$ je konstantní při integraci podle ζ.

a podle (33) věty [1] § 46

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - f(z)\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r}\cdot 2\pi r = \varepsilon.$$

Podle předpokladu jsme volili ε libovolně malé; levá strana rovnice nezávisí na ε, tedy je rovna nule. Tím je věta dokázána.

Poznámka 1. Budeme-li volit bod z vně křivky C, bude funkce $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ regulární všude v $\overline{D}$ a podle věty Cauchyho bude

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = 0. \tag{34}$$

Poznámka 2. Věta Cauchyho neztrácí platnost, je-li funkce $f(z)$ regulární jen uvnitř oblasti $\overline{D}$ a spojitá v uzavřené oblasti $\overline{D}$. Důkaz této věty nebudeme zde uvádět, nicméně jí budeme dále používat.

§ 52. Existence derivací vyšších řádů. Cauchyho integrální věta (32) nám umožňuje konstrukci regulární funkce $f(z)$ v oblasti D z jejích hodnot na hranici této oblasti. Tento vztah má smysl i v obecnějším případě, kdy C je libovolná (po případě neuzavřená křivka) v otevřené rovině z a jsou na ní dány hodnoty jisté spojité funkce $f(\zeta)$:

$$\boxed{F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.} \tag{35}$$

Integrál (35) se nazývá *integrálem typu Cauchyho*.

Věta [6]. *Funkce definovaná integrálem typu Cauchyho je regulární v každém (konečném) bodě z, který neleží na křivce C. Ve všech takových bodech má funkce $F(z)$ derivace až do libovolného řádu dané vztahem*

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \tag{36}$$

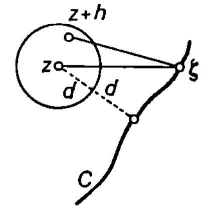
Dokážeme nejprve, že v bodě, který neleží na křivce C existuje

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \tag{37}$$

Důkaz. Odhadneme rozdíl mezi pravou stranou rovnice (37) a výrazem

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i h}\int\limits_C \left\{ \frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} \right\} f(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}.$$



Obr. 89.

Budiž $2d$ nejmenší vzdálenost mezi bodem z a body ζ křivky C. Zvolme $|h| < d$; pak pro všechna ζ křivky C bude $|\zeta - z| > d$ a dále $|\zeta - z - h| > d$ (obr. 89) a odtud

$$\frac{1}{|\zeta - z|} < \frac{1}{d}; \quad \frac{1}{|\zeta - z - h|} < \frac{1}{d}.$$

Budiž dále M maximum funkce $|f(\zeta)|$ na křivce C (které vždycky existuje, neboť $f(z)$ je spojitá na C a proto ohraničená, § 13). Pak podle věty **[1]** předešlé kapitoly

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2}\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_C \frac{hf(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2}\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{Ml}{2\pi d^3}\,|h|,$$

kde l je délka křivky C. Pravá strana konverguje k nule s $|h|$, a tedy derivace

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2}$$

existuje. Tím je dokázána prvá část věty. Důkaz existence druhé derivace

$$\lim_{h\to 0} \frac{F'(z+h)-F'(z)}{h} = F''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2}$$

a vyšších derivací se dokáže postupně stejným způsobem.

Poznámka. Vzorec (36) pro derivaci funkce pomocí integrálu typu Cauchyho (35) obdržíme též n-násobným derivováním integrálu

(35) podle parametru z a věta [1] neříká nic jiného, než že toto derivování podle parametru je přípustné.

Z věty [6] plyne ve speciálním případě z regularity funkce $f(z)$ v jisté uzavřené oblasti existence všech derivací funkce v této oblasti. To je ihned vidět z této úvahy: funkce $f(z)$ je definována integrálem Cauchyho, který je speciálním případem integrálu typu Cauchyho a tedy podle věty [6] má derivace všech řádů. Tím je dokázána tato věta:

Věta [7]. *Libovolná funkce regulární v uzavřené oblasti D má uvnitř této oblasti derivace libovolného řádu dané vztahem*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{38}$$

kde C je hranice oblasti.

Poznámka 1. Všechny derivace regulární funkce jsou regulární funkce. To plyne okamžitě z věty [7], podle které jsou všechny derivace diferencovatelné funkce.

Poznámka 2. Definujeme-li $0! = 1$ a $f^{(0)}(z) = f(z)$, pak vzorec (38) platí i pro $n = 0$ a souhlasí s integrálním vzorcem Cauchyho (35).

Vidíme, že z pouhé existence první derivace plyne v jisté uzavřené oblasti bez jakýchkoliv dalších omezení existence a regularita všech ostatních derivací libovolně vysokého řádu. Touto vlastností se podstatně liší diferencovatelné funkce komplexní proměnné od diferencovatelných funkcí reálné proměnné.

§ 53. Vlastnosti regulárních funkcí.

Vytkněme ještě několik dalších vlastností regulárních funkcí plynoucích z Cauchyho integrální věty. Budiž C kružnice $|z - \zeta| = r$ a položme $\zeta - z = re^{i\varphi}$; Cauchyho vzorec bude mít tvar

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\, r i e^{i\varphi}}{r e^{i\varphi}} \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) \, d\varphi. \end{aligned} \tag{39}$$

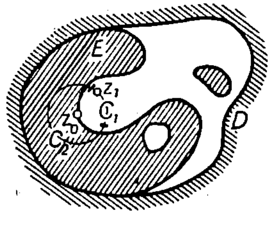
Vzorec (39) se nazývá vzorec Gaussův. Z něho okamžitě plyne *věta o střední hodnotě regulárních funkcí.*

Věta [8]. *Budiž $f(z)$ regulární v uzavřeném kruhu, pak její hodnota ve středu tohoto kruhu je rovna její střední hodnotě na kruhu:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi})\, d\varphi. \tag{40}$$

Z věty o střední hodnotě plyne věta o maximu modulu:

Věta [9]. *Budiž $f(z)$ regulární v uzavřené oblasti $\overline{D}$ a nikoliv identicky rovna konstantě; pak její modul nenabývá svého maxima ve vnitřním bodě oblasti D.*



Obr. 90.

Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy funkce $|f(z)|$ nabývá svého maxima M ve vnitřním bodě oblasti a označme E množinu všech bodů (vnitřních) z D, v kterých $|f(z)| = M$. Je-li E totožná s $\overline{D}$, t. j. všude v $\overline{D}$ platí $|f(z)| = M$, pak je $f(z)$ identicky rovna konstantě všude v $\overline{D}$.

Důkaz. Je-li $M = 0$, je to zřejmé. Je-li $M \neq 0$, je $f(z) \neq 0$ a funkce

$$\ln f(z) = \ln|f(z)| + i \arg f(z)$$

je regulární (jako složená funkce regulárních funkcí) v D. Její reálná část je ale podle předpokladů konstantní a z Cauchy-Riemannových rovnic

$$\frac{\partial \arg f(z)}{\partial x} = -\frac{\partial \ln|f(z)|}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \arg f(z)}{\partial y} = \frac{\partial \ln|f(z)|}{\partial x} = 0$$

plyne, že i její imaginární část je konstantní.*) Funkce $\ln f(z)$ je tedy konstantní, a tedy i $f(z)$ je konstantní všude v $\overline{D}$, což je proti předpokladu.

Není-li E totožná s $\overline{D}$, existuje její hraniční bod, označme jej z_0,**) který bude vnitřním bodem oblasti D (viz § 6). Protože je $f(z)$ podle

---

*) Jestliže jsou obě první parciální derivace nějaké funkce v jisté oblasti identicky rovny nule, je tato funkce konstantní v této oblasti. (Viz K. Petr: Počet diferenciální, str. 317, JČMF, Praha, 1923. *Pozn. překl.*)

**) Hranice množiny je definována stejně jako hranice oblasti.

předpokladu spojitá, bude $|f(z_0)| = M$, neboť v každém okolí bodu z_0 lze najít body patřící do E. Sestrojíme pak kružnici $|z - z_0| = r$ patřící cele do D tak, aby na ní ležel bod z_1, který nepatří do E (to je vždy možno učinit, protože bod z_0 byl podle předpokladů hraniční). Pak je $|f(z_1)| < M$ a můžeme najít takové okolí C_1 bodu z_1 na této kružnici v němž platí $|f(z)| \leqq M - \varepsilon$. Označme dále C_2 zbytek z kružnice $|z - z_0| = r$ (obr. 90). Pak podle (40) bude

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(z)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi r} \left\{ \int_{C_1} f(z)\, ds + \int_{C_2} f(z)\, ds \right\}.$$

Podle věty **[1]** předcházející kapitoly

$$M = |f(z_0)| \leqq \frac{(M - \varepsilon)\, l_1 + M l_2}{2\pi r} = M - \frac{\varepsilon l_1}{2\pi r},$$

kde l_1 je délka kružnice C_1 a l_2 délka kružnice C_2. Poslední nerovnost vede však ke sporu a tím je naše věta dokázána.

Poznámka 1. Protože $|f(z)|$ podle věty **[2]** § 13 nabývá svého maxima v uzavřené oblasti $\overline{D}$, musí tohoto maxima nabývat na hranici oblasti D (předpokládáme, že funkce $f(z)$ je regulární v $\overline{D}$ a nerovná se identicky nule).

Poznámka 2. Je-li $f(z) \neq \text{const}$ regulární v uzavřené oblasti $\overline{D}$ a nemá v této oblasti žádné nulové body, pak platí zcela obdobná věta i o minimu modulu funkce $f(z)$. V důkazu stačí nahradit pouze funkci $f(z)$ funkcí $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ rovněž regulární v oblasti $\overline{D}$ a aplikovat větu **[9]**.

Ze vztahu (38) plyne pro *odhad derivace funkce* regulární v kruhu $|\zeta - z| \leqq R$:

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_{|\zeta - z| = R} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \right| \leqq \frac{n!\, M \,.\, 2\pi R}{2\pi R^{n+1}} = \frac{n! M}{R^n}, \qquad (41)$$

kde M je maximum modulu funkce $f(z)$ na kružnici $|\zeta - z| = R$. Speciálně pro prvou derivaci platí

$$|f'(z)| \leqq \frac{M}{R}. \qquad (42)$$

Předpokládejme nyní, že $f(z)$ je regulární v celé otevřené rovině a je tam ohraničená, t. j. všude platí $f(z) \leqq M$. Nerovnost (42) platí pak pro všechny konečné body a všechna kladná R. Provedeme-li v nerovnosti (42) limitní přechod pro $R \to \infty$, dostaneme vztah

$$|f'(z)| \equiv 0,$$

který platí v libovolném bodě roviny. Odtud $f'(z) \equiv 0$ a $f(z) \equiv \text{const}$ (viz př. 16, kap. 1). Tím jsme dokázali tuto větu:

Věta [10]. *Funkce $f(z)$ regulární a ohraničená v celé otevřené rovině, je konstantní (Liouville).*

Poznámka 1. Při formulaci existenční věty o konformním zobrazení libovolné jednoduše souvislé oblasti na jednotkový kruh jsme vyloučili případ, že by touto oblastí byla celá uzavřená rovina nebo rovina s jedním vyňatým bodem. Příčina tohoto vyloučení je nyní jasná: Neboť funkce $f(z)$, zobrazující otevřenou rovinu na jedničkový kruh, byla by regulární v celé otevřené rovině a kromě toho by byla omezená: $|f(z)| \leqq 1$. Podle Liouvillovy věty by to však byla konstanta a zobrazení by nebylo konformní. Neexistuje tedy konformní zobrazení otevřené a tím spíše uzavřené celé roviny na jedničkový kruh. Rovinu s vyňatým bodem $z = a$ převedeme na právě uvedený případ pomocí zobrazení $\zeta = \dfrac{1}{z - a}$.

Poznámka 2. Věta Liouvillova může být značně zesílena:

Nechť funkce $f(z)$ je regulární v celé otevřené rovině a nechť nenabývá hodnot ležících na jisté křivce l v rovině w. Pak je tato funkce rovna konstantě.

Abychom dokázali naši větu, sestrojíme konformní zobrazení $\omega = \varphi(w)$ vnějšku křivky l na vnitřek jedničkového kruhu (což je vždy možné podle existenční věty § 23) a budeme zkoumat složenou funkci $\omega = \varphi[f(z)] = \Phi(z)$. Je zřejmě regulární všude v otevřené rovině a ohraničená, neboť její hodnoty leží uvnitř jednotkového kruhu. Pak podle Liouvilleovy věty $\Phi(z) = \text{const}$ a odtud, protože $\varphi(z) \neq \text{const}$ plyne $f(z) = \text{const}$.

§ 54. Harmonické funkce. Budiž

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

funkce regulární v jisté oblasti D. Pak v každém bodě oblasti D existuje derivace

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{43}$$

(viz § 14). Odtud plyne i existence parciálních derivací $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.
Avšak podle tvrzení § 52 je $f'(z)$ též regulární funkce v D a existuje

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{44}$$

[kde jsme znovu použili (43)]. Z (44) plyne existence druhých parciálních derivací funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$. Jelikož je $f''(z)$ spojitá, jsou i parciální derivace spojité. Podobně bychom mohli totéž odvodit pro derivace všech řádů.

Z (44) plynou vztahy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

t. j. funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ vyhovují parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{45}$$

t. zv. rovnici Laplaceově (Δ je t. zv. Laplaceův diferenciální operátor).

D e f i n i c e. Reálná funkce dvou proměnných se nazývá *funkcí harmonickou* v oblasti D, má-li spojité parciální derivace prvního a druhého řádu a hoví-li Laplaceově diferenciální rovnici (45).

Dokázali jsme větu

Věta [11]. *Reálná a imaginární část regulární funkce komplexní proměnné $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ v oblasti D jsou harmonické funkce v této oblasti.*

Dvě harmonické funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ svázané rovnicemi Cauchy-Riemannovými se nazývají *sdružené:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{46}$$

Dokážeme si nyní, že v *jednoduše souvislé oblasti* je možno k libovolné harmonické funkci $u(x, y)$ sestrojit funkci $v(x, y)$ s ní sdruženou. Úloha přejde na konstrukci funkce $v(x, y)$ z daných jejích prvních parciálních derivací. Tuto úlohu řeší integrál

$$\int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y,$$

kde z_0 je pevný, $z = x + \mathrm{i}y$ proměnný bod. Podle (45) nezávisí tento integrál na integrační cestě a je funkcí pouze z nebo, což je totéž, x a y. Je tedy funkce $v(x, y)$ určena až na adiční konstantu integrálem

$$v(x, y) = \int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y + C, \tag{47}$$

kde C je libovolná konstanta. Funkce

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \tag{48}$$

je regulární v oblasti D, neboť splňuje Cauchy-Riemannovy rovnice (46); funkce (47) je tedy harmonická.

Stejným způsobem se konstruuje k dané harmonické funkci $v(x, y)$ s ní konjugovaná funkce $u(x, y)$. Tím jsme dokázali tuto větu:

Věta [12]. *Každá harmonická funkce v jisté oblasti D tvoří reálnou nebo imaginární část jisté regulární funkce v této oblasti.*

Poznámka. Je-li oblast D vícenásobně souvislá, nemusí být funkce daná integrálem (47) ani funkce (48) jednoznačně určena. Viz § 38, kde se řeší kvalitativně podobné problémy.

Věty **[11]** a **[12]** dovolují přenést vlastnosti funkcí regulárních i na funkce harmonické. Především vyslovíme důležitou větu:

Věta [13]. *Budiž $u(z)$*) harmonická v jisté jednoduše souvislé oblasti D a budiž $z = \varphi(\zeta)$ regulární v oblasti Δ, a nechť funkční hodnoty funkce $z = \varphi(\xi)$ leží v oblasti D. Pak složená funkce $u[\varphi(\zeta)] = u(\zeta)$ je harmonická v oblasti Δ.*

*) Píšeme pro jednoduchost $u(z)$ místo $u(x, y)$. Tohoto označení budeme používat i v dalším.

Důkaz. Sestrojíme regulární funkci v oblasti D, jejíž reálná část je funkce $u = \operatorname{Re} f(z)$. Pak $U(\zeta) = \operatorname{Re} f[\varphi(\zeta)]$, a protože $f[\varphi(\zeta)] = F(\zeta)$ je regulární v Δ, je $U(\zeta)$ v Δ harmonická.

Z věty **[7]** § 52 plyne: *libovolná harmonická funkce má parciální derivace všech řádů, které jsou opět harmonické.*

Oddělením reálné části v (39) dostáváme *větu o střední hodnotě harmonických funkcí*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi})\, d\varphi. \tag{49}$$

O extrému harmonických funkcí platí věta:

Věta [14]. *Je-li $u(z) \not\equiv$ const harmonická v uzavřené oblasti $\overline{D}$, nenabývá svého extrému v žádném vnitřním bodě oblasti D.*

Větu stačí dokázat pro maximum harmonické funkce. Pro důkaz věty o minimu harmonické funkce stačí uvažovat funkci $v(z) = -u(z)$, jejíž maximum je minimem funkce $u(z)$, a použít dokázané věty o maximu [$v(z)$ je též harmonická].

Důkaz provedeme sporem. Nechť harmonická funkce $u(z)$ nabývá svého maxima v některém vnitřním bodě oblasti D, který označíme z_0. Oblast D převedeme vhodným způsobem pomocí výřezů v jednoduše souvislou oblast D' (viz § 47) tak, že bod z_0 zůstane vnitřním bodem oblasti D'. Pak sestrojíme funkci $v(z)$ sdruženou k funkci $u(z)$ a označíme $\varphi(z) = u(z) + iv(z)$. Funkce $e^{\varphi(z)}$ bude regulární v D' a její modul bude $|e^{\varphi(z)}| = e^{u(z)}$. Podle předpokladu však funkce $e^{u(z)} = |e^{\varphi(z)}|$ nabývá maxima ve vnitřním bodě oblasti D', což je ve sporu s větou **[9]**. Tím je věta **[14]** dokázána.

Pro harmonické funkce platí i *věta Liouvilleova* z § 53:

Je-li harmonická funkce $u(z)$ ohraničená v celé otevřené rovině, $m \leq u(z) \leq M$, pak je konstantní. Důkaz. Sestrojíme regulární funkci $f(z)$, kde $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$. Podle předpokladu leží hodnoty funkce $f(z)$ v pásu $m \leq u \leq M$, a tedy podle poznámky 2 k větě Liouvillově je $f(z) \equiv$ const a odtud ihned $u(z) = \operatorname{Re} f(z) \equiv$ const.

§ 55. Problém Dirichletův. Mnohé úkoly matematické fysiky vedou na úlohu sestrojit funkci harmonickou v jisté oblasti z jejích hodnot na hranici této oblasti. Se speciálním případem této úlohy jsme se setkali vlastně již v § 45, kde jsme konstruovali potenciál z jeho hodnot na reálné ose.

Budeme nyní přesně formulovat naši úlohu. Pro zjednodušení našich úvah zavedeme několik předpokladů: oblast D budiž jednoduše souvislá, hranice oblasti D křivka C budiž hladká a hodnoty funkce $u(z)$ na této křivce $\tilde{u}(\zeta)$ — buďtež dány spojitou funkcí bodů ζ křivky C.

Problém Dirichletův neboli *prvý hraniční problém* harmonických funkcí spočívá v konstrukci funkce $u(z)$, která je

1. *harmonická v oblasti D,*
2. *spojitá v uzavřené oblasti $\overline{D}$,*
3. *na hranici C oblasti D nabývá daných hodnot*

$$u(\zeta) = \tilde{u}(\zeta).$$

Dokážeme si nejprve jednoznačnost řešení.

Věta [15]. *V dané oblasti D pro dané hodnoty $\tilde{u}(\zeta)$ neexistuje více než jedno řešení Dirichletova problému.*

Důkaz věty **[15]** provedeme za doplňujícího předpokladu, že předpokládané řešení je harmonické v uzavřené oblasti $\overline{D}$.

Nechť $u_1(z)$ a $u_2(z)$ jsou dvě taková řešení. Jejich rozdíl je funkce harmonická v $\overline{D}$ na křivce C rovná nule. Maximum i minimum této funkce je pak rovno nule a podle věty **[14]** je $u(z) \equiv 0$. Odtud ihned plyne platnost vztahu $u_1(z) \equiv u_2(z)$ všude v uzavřené oblasti $\overline{D}$ a naše věta je dokázána.

Poznámka. Podrobnějším rozborem se dokáže, že věta [14] zůstane v platnosti i v případě, když je funkce harmonická v oblasti D a pouze spojitá v uzavřené oblasti $\overline{D}$. Odtud ihned plyne důkaz věty **[15]** za těchže předpokladů.

Teprve nyní dokážeme methodu řešení Dirichletova problému. Nechť z_0 je libovolný vnitřní bod oblasti D a nechť funkce

$$w = f(z; z_0), \quad f(z_0; z_0) = 0 \tag{50}$$

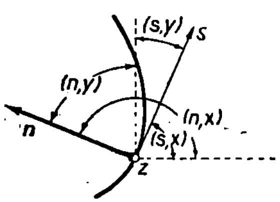
zobrazí jedno-jednoznačně a konformně oblast D na jednotkový kruh $|w| < 1$ (funkce (50) závisí na volbě bodu z_0, to je zdůrazněno jejím označením). Předpoklady, pro které byl vysloven Dirichletův problém, doplníme předpokladem, že funkce (50) je regulární v uzavřené oblasti $\overline{D}$.*) Funkce $u(z)$ harmonická v oblasti $\overline{D}$ přejde pomocí funkce $z = \varphi(w)$, $\varphi(0) = z_0$ [inversní k funkci (50)] na funkci

$$U(w) = u[\varphi(w)],$$

harmonickou v uzavřeném jednotkovém kruhu $|w| \leqq 1$ (viz větu 13). Podle věty o střední hodnotě (§ 54)

$$U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\omega)\, \mathrm{d}\Theta, \tag{51}$$

kde $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}$ je bod na kružnici $|w| = 1$. Přejdeme v (51) k veličinám vztahujícím se k rovině z. Je $U(0) = u[\varphi(0)] = u(z_0)$, $U(\omega) = u[\varphi(\omega)] = u(\zeta)$, kde ζ je bod na kontuře C. Zavedeme na křivce C jako parametr oblouk s měřený v kladném smyslu od pevného bodu ζ_0, takže



Obr. 91.

$$\mathrm{d}\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial s}\, \mathrm{d}s.$$

Vzorec (51) přejde na tvar

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_C u(\zeta) \frac{\partial \Theta}{\partial s}\, \mathrm{d}s. \tag{52}$$

Zavedeme dále (obr. 91) směr vnitřní normály n ke křivce C a máme

$$\cos(s, x) = \cos(n, y), \quad \cos(s, y) = -\cos(n, x);$$

odtud

$$\frac{\partial \Theta}{\partial s} = \frac{\partial \Theta}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \cos(s, y) = \frac{\partial \Theta}{\partial x} \cos(n, y) - \frac{\partial \Theta}{\partial y} \cos(n, x). \tag{53}$$

Sestrojíme nejprve funkci

$$\ln \frac{1}{f(z; z_0)} = \ln \frac{1}{|f(z; z_0)|} + \mathrm{i} \arg \frac{1}{f(z; z_0)} = g(z; z_0) - \mathrm{i}\Theta(z; z_0),$$

jejíž reálná část je funkce

$$g(z; z_0) = \ln \frac{1}{|f(z; z_0)|}, \tag{54}$$

*) To bude zajištěno, bude-li křivka C analytická, viz poznámka v § 82.

která bývá obyčejně nazývána *Greenova funkce* v oblasti D pro bod z_0. Odvodíme si některé její vlastnosti. Předně je zřejmé, že

$$g(z_0; z_0) = \ln \frac{1}{|f(z_0; z_0)|} = \infty; \quad g(\zeta; z_0) = \ln \frac{1}{|f(\zeta; z_0)|} = 0,$$

kde ζ je libovolný bod na kontuře C (vzpomeňme, že $w = f(z; z_0)$ zobrazí oblast D na jedničkový kruh s okrajovými podmínkami (50). Greenova funkce je všude v D kromě bodu $z = z_0$ harmonická, neboť

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

(je reálnou částí regulární funkce).

Bez důkazu uvedeme: Greenova funkce je symetrická

$$g(z; z_0) = g(z_0; z);$$

odkud speciálně plyne, že pro $z_0 \neq z$ je též harmonická vzhledem k $z_0 = x_0 + iy_0$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_0^2} = 0.$$

Protože funkce $\ln \dfrac{1}{f(z; z_0)}$ je na kontuře C regulární, je podle Cauchy-Riemannových rovnic $\dfrac{\partial g}{\partial x} = -\dfrac{\partial \Theta}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial \Theta}{\partial x}$; z (53) plyne*)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial g}{\partial x} \cos(n, x) = \frac{\partial g}{\partial n}. \tag{55}$$

A (52) má tvar

$$\mu(z_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_C u(\zeta) \frac{\partial g(\zeta; z_0)}{\partial n} \, ds. \tag{56}$$

---

*) Jak je vidět z odvození (55), platí tento vztah pro všechny regulární funkce $f(z) = u(z) + iv(z)$ a pro libovolné dvojice navzájem kolmých směrů s a n, zvolených jako na obr. 91. Použijeme-li tohoto nového označení, bude mít (55) tvar

$$-\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial n}. \tag{55'}$$

Tento vzorec obsahuje v sobě jako speciální případ i Cauchy-Riemannovy rovnice, jak se snadno přesvědčíme dosazením $n = x$, $s = -y$, resp. $s = x$, $u = y$.

Vzorec (56) se nazývá *vzorcem Greenovým. Pomocí Greenova vzorce, jak jsme právě dokázali, můžeme sestrojit harmonickou funkci v oblasti D z jejích hodnot na hranici oblasti D, t. j. vzorec Greenův řeší Dirichletův problém.*

Budiž nyní dána na hranici oblasti D libovolná reálná spojitá funkce $\tilde{u}(\zeta)$. Pomocí Greenova vzorce můžeme sestrojit v oblasti D funkci

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \tilde{u}(\zeta) \frac{\partial g(\zeta; z)}{\partial n} \, ds \tag{57}$$

[kde jsme proti (56) dosadili za z_0 z a místo $u(\zeta)$ $\tilde{u}(\zeta)$]. Ovšem z našich úvah nikterak neplyne, že tato funkce řeší Dirichletův problém. Abychom to dokázali, museli bychom se přesvědčit, že takto konstruovaná funkce je harmonická v oblasti D a že její hodnoty konvergují k hodnotě $\tilde{u}(\zeta)$, když konverguje bod z k hraničnímu bodu ζ. Úvahami, které zde nebudeme pro jejich složitost uvádět, lze dokázat, že za našich předpokladů [$\tilde{u}(\zeta)$ je spojitá a hraniční křivka C hladká] tomu vskutku tak je. *Vzorec* (57) *je tedy řešením Dirichletova problému.*

Poznámka 1. V aplikacích se velmi často stane, že funkce $\tilde{u}(\zeta)$ má na hranici body nespojitosti prvého druhu (t. j. limity zprava i zleva existují a liší se o konečné číslo). Pak je možné dokázat, že funkce $u(z)$ definovaná vztahem (57) je harmonická v oblasti D a její hodnoty konvergují k hodnotám funkce $\tilde{u}(\zeta)$, blíží-li se bod z k hraničnímu bodu ζ, v němž je funkce $\tilde{u}(\zeta)$ spojitá. Pro hraniční body nespojitosti funkce $\tilde{u}(\zeta)$ limita funkce $u(z)$ neexistuje a závisí na způsobu, jakým se bod z blíží bodu nespojitosti ζ funkce $\tilde{u}(\zeta)$. Všechny takové hodnoty leží však mezi hodnotou limity funkce $\tilde{u}(\zeta)$ zleva a zprava.

Poznámka 2. Z právě uvedených úvah plyne, že známe-li jedno-jednoznačné konformní zobrazení dané oblasti na jedničkový kruh, můžeme pomocí Greenovy formule řešit Dirichletův problém. Dokážeme, že naopak *umíme-li řešit Dirichletův problém pro jistou oblast D, lze sestrojit jedno-jednoznačné konformní zobrazení této oblasti na jedničkový kruh.*

Podle existenční věty § 23 takové zobrazení pomocí funkce $w = f(z)$,

$f(z_0) = 0$ existuje. Předpokládejme, že toto zobrazení již známe, a uvažujme funkci

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}. \tag{58}$$

Funkce $\varphi(z)$ je regulární a od nuly různá pro všechna z různá od z_0. Pro $z \to z_0$ $\varphi(z) \to f'(z_0) \neq 0$ (zobrazení je konformní). Odtud plyne, jak dokážeme později (§ 66), regulárnost funkce $\varphi(z)$ v celé oblasti D. Protože $\varphi(z)$ je v D všude nenulová, je funkce $g(z) = \ln|\varphi(z)|$ harmonická v D. Na hranici D je

$$g(\zeta) = \ln \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\right| = \ln \frac{1}{|\zeta - z_0|}, \tag{59}$$

neboť $w = f(z)$ zobrazí D na jednotkový kruh.

Přitom ovšem funkci $w = f(z)$ zprostředkující zobrazení dosud neznáme. Z okrajových podmínek (59) zkonstruujeme harmonickou funkci $g(z)$ (což lze podle věty **[15]** učinit jen jedním způsobem), a pak sestrojíme s ní sdruženou funkci $h(z)$ (která je určena kvadraturami až na adiční konstantu h_0). Funkce $\ln\varphi(z) = g(z) + ih(z) + ih_0$ je tedy určena až na ryze imaginární adiční konstantu ih_0. Pak odtud a z (58) určíme $f(z) = (z - z_0)\, e^{1 \ln \varphi(z)}$ (až na činitel e^{ih_0}, který geometricky značí pootočení kruhu w) v souhlase s okrajovými podmínkami pro funkci $f(z)$ (viz § 23).

§ 56. Integrál Poissonův a Schwarzův. Dále budeme se zabývat velmi častým případem, kdy oblast D je tvořena kruhem $|z| < R$. Podle (25) § 22 je zobrazení tohoto kruhu na jednotkový kruh dáno funkcí

$$w = f(z; z_0) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$$

a Greenova funkce má tvar

$$g(z; z_0) = -\ln \left|\frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}\right|.$$

Zavedeme si polární souřadnice vztahy $z_0 = re^{i\varphi}$, $\zeta = Re^{i\psi}$ (ζ leží na kružnici $|z| = R$) a zavedeme na kružnici obecný parametr ψ místo oblouku s. Pak $ds = R\, d\psi$ a podle (55)

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \frac{\partial \arg f(\zeta; z_0)}{\partial g} = \frac{1}{R} \frac{\partial \arg f(\zeta; z_0)}{\partial \psi}.$$

Protože $g(\zeta; z_0) = 0$, platí

$$\frac{\partial \arg f(\zeta; z_0)}{\partial \psi} = -\mathrm{i}\,\frac{\partial \ln f(\zeta; z_0)}{\partial \psi}$$

a

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -\frac{\mathrm{i}}{R}\,\frac{\partial \ln f(\zeta; z_0)}{\partial \psi} = -\frac{\mathrm{i}}{R}\,\frac{\partial}{\partial \psi}\ln\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{R - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\psi-\varphi)}} =$$

$$= \frac{1}{R}\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}.$$

Dosadíme-li tento výraz do (57) a píšeme-li ještě $u(\psi)$ místo $\tilde{u}(\zeta)$ a $R\,\mathrm{d}\psi$ místo $\mathrm{d}s$, dostáváme konečně

$$u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\psi)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}\,\mathrm{d}\psi. \tag{60}$$

Vzorec (60) se nazývá *integrál Poissonův* a řeší Dirichletův problém pro kruh.

Zcela obdobný tvar má příslušný Greenův vzorec pro horní polorovinu $y > 0$. Odvození je zcela analogické, jen místo vztahu (25) § 22 vyjdeme od vztahu (23) téhož paragrafu, který nám poskytuje zobrazení poloroviny na jednotkový kruh. Po provedení příslušných výpočtů dostaneme *Poissonův integrál pro polorovinu*

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)\,\frac{y\,\mathrm{d}\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}, \tag{61}$$

kde $u(\xi)$ jsou dané okrajové podmínky pro harmonickou funkci podél reálné osy. Funkce $u(\xi)$ musí být všude spojitá až na konečný počet bodů nespojitosti prvého druhu (viz poznámku v předcházejícím paragrafu).

Čtenář si sám snadno dokáže, že pro t. zv. *jádro Poissonova integrálu* pro kruh platí vztah

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2} = \operatorname{Re}\frac{\zeta + z}{\zeta - z}$$

(kde $\zeta = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$, $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$).

Zkoumejme funkci

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\psi) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, d\psi + Ai, \tag{62}$$

kde A je reálná konstanta. Podle věty [6] o Cauchyho integrálu (§ 52) je tato funkce regulární uvnitř kruhu $|z| < R$. Z konstrukce vyplývá, že její reálná část je totožná s Poissonovým integrálem (60). Vzorec (62) nám tedy umožňuje konstrukci regulární funkce unvitř kruhu z hodnot $u(\psi)$ její reálné části na hraniční kružnici. Nazývá se běžně *Schwarzovým integrálem.*

Ve Schwarzově integrálu zůstává neurčena konstanta A. Položme $z = 0$ a je

$$f(0) = u(0) + iv(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\psi) \, d\psi + Ai.$$

Podle věty o střední hodnotě je integrál vpravo roven $u(0)$ a tedy $A = v(0)$ a *integrál Schwarzův* nabývá konečného tvaru

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\psi) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, d\psi + iv(0). \tag{63}$$

Snadno se přesvědčíme, že *Schwarzův integrál pro polorovinu* má tvar

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\xi) \, d\xi}{\xi - z} + B, \tag{64}$$

kde B je reálná konstanta; spojitá reálná funkce $v(\xi)$ splňuje předpoklad: existují dvě reálné konstanty C a α takové, že pro dostatečně velké $|\xi|$ platí nerovnost $|v(\xi)| \leqq \frac{C}{|\xi|^\alpha}$. Vzorec (64) nám umožňuje konstrukci regulární funkce v horní polorovině z hraničních hodnot její imaginární části na reálné ose. K důkazu stačí uvážit, že následkem vztahu

$$\frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} = \operatorname{Im} \frac{1}{\xi - z}$$

je imaginární část (64) totožná s Poissonovým integrálem (61), kde místo u je funkce v. Předpoklady pro funkci $v(\xi)$ zajišťují existenci integrálu (64).

Poznámka. Podobně jako jsme postupovali v případě Poissonova integrálu a Cauchyho integrálu pro jednoduše souvislou oblast D s hladkou hranicí C, můžeme místo funkce $f(\zeta)$ uvažovat libovolnou spojitou funkci $\tilde{f}(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta)$ a obdržíme tak integrál Cauchyho typu, který podle věty **[6]** § 52 definuje funkci regulární v oblasti D:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\tilde{f}(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \tag{65}$$

Proti Poissonově integrálu je tu ten rozdíl, že *funkce definovaná integrálem typu Cauchyho nekonverguje k $\tilde{f}(\zeta)$, konverguje-li z k hraničnímu bodu ζ.* Snadno odkryjeme příčinu tohoto faktu. Tak na př. integrál Schwarzův (62) je funkce regulární uvnitř kruhu, jednoznačně určená až na adiční konstantu, která je určena reálnou částí své hraniční podmínky. Tedy i imaginární část limity regulární funkce (až na adiční konstantu) je určena její reálnou částí. Protože však v našem případě nejsou spojité funkce $\tilde{u}(\zeta)$ a $\tilde{v}(\zeta)$ vázány žádným vztahem, není žádných důvodů se domnívat, že součet $\tilde{f}(\zeta) = \tilde{u}(\zeta) + i\tilde{v}(\zeta)$ bude nabývat limitních hodnot funkce regulární v D.

§ 57. Použití v theorii pole. Uvedeme zde některé výsledky theorie pole založené na výsledcích odvozených v předcházejících paragrafech. Předně:

a) *potenciální a silová funkce elektrostatického pole bez nábojů;*

b) *potenciál a proudová funkce rovinného proudění kapaliny v poli, ve kterém nejsou ani zřídla ani víry;*

c) *proudová funkce a teplota tepelného rovinného proudění v poli bez tepelných zdrojů*

jsou vesměs harmonické funkce.

To plyne okamžitě podle věty **[11]** z regulárnosti odpovídajících komplexních potenciálů. Místa bodových nábojů resp. zřídla a víry resp. tepelná zřídla jsou singulárními body těchto funkcí.

Dále uvedeme několik vlastností těchto polí, při čemž budeme pro konkretnost formulovat tyto vlastnosti pro elektrostatické pole.

1. *Jestliže je v elektrostatickém poli uzavřená ekvipotenciální čára C o konstantním potenciálu $V(z) = V_0$, pak buď v jejím vnitřku leží singulární body pole, nebo je potenciál všude uvnitř C konstantní* (v posledním případě je i $U(z) \equiv$ const, t. j. $F(z) \equiv$ const, a odtud $E = 0$ a pole vymizí).

Důkaz plyne přímo z věty **[15]**, kde potenciál je funkcí řešící Dirichletův problém s okrajovou podmínkou $V(z) = V_0$. Řešením tohoto případu je zřejmě konstanta $V(z) \equiv V_0$, která je harmonická v oblasti D, a jak plyne z existenční věty, je to jediné řešení naší úlohy.

2. *V elektrostatickém poli nemohou existovat uzavřené silokřivky.*

Důkaz provedeme sporem. Nechť existuje uzavřená silokřivka $U(z) = C$; pak v jejím okolí leží s jedné strany body, v nichž je $U(z) > C$, a s druhé strany body, pro něž $U(z) < C$, a tedy ve směru vnější resp. vnitřní normály $\frac{\partial U}{\partial n} \leqq 0$. Nechť uvedený vztah platí pro vnitřní normálu. Pak podle (55′) ve směru s (viz obr. 91) platí $\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{\partial U}{\partial n} \geqq 0$ a funkce $V(z)$ v tomto směru roste. Pak bychom však při proběhnutí silokřivky kolem dokola obdrželi hodnotu funkce $V(z)$ odlišnou od výchozí hodnoty, což je ve sporu s jednoznačností funkce $V(z)$ (§ 37). Tím je naše věta dokázána.*)

3. *Ani silokřivky, ani ekvipotenciální čáry nemohou začínat nebo končit ve vnitřním bodě pole.*

Důkaz provedeme pro ekvipotenciální čáry. Důkaz provedeme sporem. Nechť ekvipotenciální čára $V(z) = C$ končí ve vnitřním bodě z_0 pole; pak si lze zvolit dostatečně malé okolí tohoto bodu tak, že v něm je všude buď $V(z) \leqq C$, nebo $V(z) \geqq C$ (obr. 92). Takové okolí lze vždy najít, neboť části, pro než $V(z) \leqq C$ nebo $V(z) \geqq 0$, jsou odděleny čarou $V(z) =$ const, ale naše okolí je právě tak zvoleno, že čára $V(z) =$ const je nedělí na dvě části. Funkce $V(z)$ tedy nabývá svého mi-

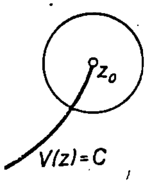
*) Vlastnost 2. plyne také z toho, že podél uzavřené siločáry by měly všechny projekce E_s totéž znaménko, a tedy cirkulace E podél této křivky by byla od nuly různá, což je nemožné (viz § 36).

nima nebo maxima v bodě z_0, což je ve sporu s větou [14]. Tím je naše věta dokázána. Dodejme ještě, že tato věta platí zřejmě pro libovolnou harmonickou funkci.

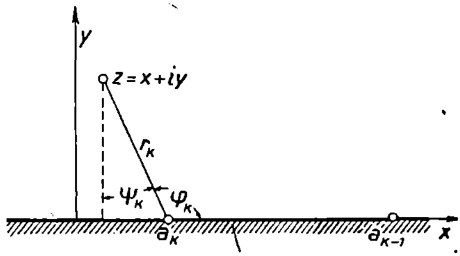
Z vlastností 2. a 3. plyne:

4. *V elektrostatickém poli mohou silokřivky spojovat pouze okrajové body pole (na př. místa bodových nábojů) nebo probíhat do nekonečna.*

Závěrem uvedeme ještě několik příkladů na použití integrálu Poissonova a Schwarzova.



Obr. 92.



Obr. 93.

Příklad 1. *Polorovina s* $n+1$ *elektrodami* $(-\infty, a_1), (a_1 a_2), \ldots, \ldots, (a_n, \infty)$ nesoucími po řadě potenciály $v_0, v_1, \ldots, v_n$, kde body a_k jsou zřejmě body isolujícími. K stanovení potenciálu pole v horní polorovině použijeme Poissonova integrálu (61):

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) \frac{y \, d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} = \frac{v_0 y}{\pi} \int_{-\infty}^{a_1} \frac{d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} +$$

$$+ \frac{v_1 y}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} + \ldots + \frac{v_n y}{\pi} \int_{a_n}^{\infty} \frac{d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} =$$

$$= \frac{v_0}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{a_1 - x}{y} + \tfrac{1}{2}\pi \right) + \frac{v_1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{a_2 - x}{y} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg} \frac{a_1 - x}{y} \right) + \ldots + \frac{v_n}{\pi} \left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} \frac{a_n - x}{2} \right) = \frac{v_0 + v_n}{2} +$$

$$+ \frac{v_0 - v_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a_1 - x}{y} + \ldots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a_n - x}{y}.$$

Jak je vidět z obr. 93, je $\operatorname{arctg} \frac{a_k - x}{y} = \psi_2 = \varphi_k - \frac{1}{2}\pi$, kde $\varphi_k = \arg(z - a_k)$ je úhel mezi vektorem $z - a_k$ a osou x, takže pro potenciál dostáváme výraz

$$\begin{aligned} V(x, y) &= v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi} \varphi_1 + \ldots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \varphi_n = \\ &= v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi} \arg(z - a_1) + \ldots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \arg(z - a_n). \end{aligned} \tag{66}$$

Známe-li potenciální funkci, snadno stanovíme komplexní potenciál jako regulární funkci, mající funkci (66) za svoji imaginární část:

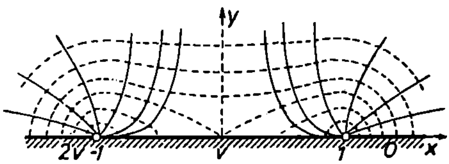
$$F(z) = \mathrm{i}v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi} \ln(z - a_1) + \ldots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi} \ln(z - a_n) \tag{67}$$

(kde ln je libovolná z hlavních hodnot logaritmu). Podle (34) kap. IV stanovíme vektor napětí pole:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\overline{\mathrm{i}F'(z)} = \frac{v_0 - v_1}{\mathrm{i}\pi} \left(\overline{\frac{1}{z - a_1}}\right) + \ldots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\mathrm{i}\pi} \left(\overline{\frac{1}{z - a_n}}\right) = \\ &= \frac{v_0 - v_1}{\mathrm{i}\pi} \frac{z - a_1}{|z - a_1|^2} + \ldots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\mathrm{i}\pi} \frac{z - a_n}{|z - a_n|^2}. \end{aligned} \tag{68}$$

Příklad 2. *Polorovina s třemi elektrodami* $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$, nesoucími po řadě potenciál $2v$, v, 0, je zřejmě speciální případ předcházejícího příkladu; komplexní potenciál pole je podle (67)

$$F(z) = \frac{v}{\pi} \ln(z + 1) + \frac{v}{\pi} \ln(z - 1). \tag{69}$$



Obr. 94.

Silová funkce

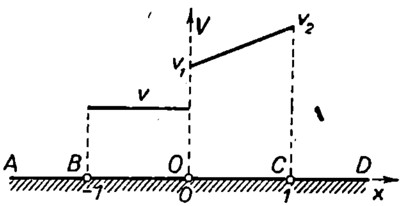
$$U = \operatorname{Re} F(z) = \frac{v}{\pi} \ln|z + 1|\,|z - 1|$$

a silokřivkami pole jsou křivky

$$|z + 1|\,|z - 1| = C = \text{const},$$

což jsou Cassiniho křivky s ohnisky v bodech ± 1 (viz př. 12 úvodu a př. 3 § 58). Na obr. 94 jsou čárkovány, ekvipotenciální linie jsou vytaženy plně.

Příklad 3. *Rozdělení potenciálu na reálné ose je dáno obr. 95. Úkolem je najít komplexní potenciál v horní polorovině.*



Obr. 95.

K podobným úlohám vede výpočet transformátorů, provádíme-li výpočet pomocí konformního zobrazení a chceme-li registrovat změnu potenciálu podél cívky o vysokém napětí (na obr. 95 odpovídají polopřímky AB a CD v konformním zobrazení uzemněnému plášti transformátoru, úsečka BO cívce o nízkém napětí a OC cívce o vysokém napětí). Úlohu budeme řešit pomocí Schwarzova integrálu (64) a dostaneme:

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z} + B =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{0} v \frac{d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} \{(v_2 - v_1)\,\xi + v_1\} \frac{d\xi}{\xi - z} + B =$$

$$= \frac{v}{\pi} \ln \frac{z}{z+1} + \frac{1}{\pi} \{v_1 + (v_2 - v_1)\,z\} \ln \frac{z-1}{z} + \frac{v_2 - v_1}{\pi} + B.$$

Vypustíme nepodstatné konstanty a dostaneme:

$$F(z) = \frac{v}{\pi} \ln \frac{z}{z+1} + \frac{v_1 + (v_2 - v_1)\,z}{\pi} \ln \frac{z-1}{z}. \tag{70}$$

ÚLOHY.

Vypočtěte integrály:

1. $\int_{L\,-i}^{\,i} |z|\, dz$ podél: a) úsečky, b) levé půlkružnice $|z| = 1$, c) pravé půlkružnice $|z| = 1$.

2. $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{2z-1}{z(z-1)}\,dz.$

3. $\displaystyle\int_0^1 z \sin z\,dz.$

4. $\displaystyle\int_{L\,0}^{1+i} e^{\bar{z}}\,dz$ podél: a) lomené čáry 0, 1, 1 + i, b) lomené čáry 0, i, 1 + i.

5. Jakou hodnotu má integrál $\displaystyle\int_L |dz|$? Jaký je jeho geometrický smysl?

6. Jak je velké residuum funkce $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ v bodě $z = i$? Určete pomocí a) přímého výpočtu, b) pomocí Cauchyho integrální věty.

7. Vypočtěte pomocí Cauchyho integrální věty:

$$I = \oint_C \frac{\sin\frac{1}{4}\pi z}{z^2 - 1}\,dz,$$

kde C je kružnice $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

8. Vypočtěte

$$I = \int_C \frac{e^z\,dz}{(z^2+1)^3},$$

kde C je elipsa $4y^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$.

9. Dokažte, že je-li $|f(z)| \equiv \text{const}$ na hranici jednoduše souvislé oblasti, $f(z)$ regulární v oblasti $\overline{D}$, leží uvnitř této oblasti aspoň jeden nulový bod funkce $f(z)$ (kde předpokládáme, že funkce $f(z)$ není konstantní). Na základě této věty dokažte, že se křivka, která je geometrickým místem bodů, jejichž součin vzdáleností od n pevných bodů zvaných ohniska je stálý, rozpadne nejvýše na n částí.

10. Budiž $f(z) \neq \text{const}$ regulární v kruhu $|z| < R$ a budiž $M(r)$ maximum funkce $|f(z)|$ na kružnici $(z) = r$, $r < R$. Dokažte, že funkce $M(r)$ je rostoucí.

11. Stanovte podmínku pro to, aby trojčlen $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ byl harmonickou funkcí.

12. Budiž $f(z)$ regulární a od nuly různá v oblasti D. Dokažte přímým výpočtem, že všude v této oblasti $\Delta \ln|f(z)| = 0$ a $\Delta|f(z)| > 0$ (kde Δ je Laplaceův diferenciální operátor).

13. Stanovte regulární funkci $w = f(z)$ s podmínkou $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$, jejíž reálná část je

$$u = \frac{\sin 2x}{\cosh 2y - \cos 2x}.$$

14. Najděte funkci harmonickou v jednotkovém kruhu, která má na oblouku $\widehat{\alpha\beta}$ hodnotu 1 a na zbytku oblouku jednotkové kružnice hodnotu nula.

15*. Dokažte, že pro jádro Poissonova integrálu pro kruh platí

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2} = \left|\frac{\zeta^* - z}{\zeta - z}\right|,$$

kde $\zeta = Re^{i\psi}$ a ζ^* je druhý konec sečny ζz.

16*. Pomocí výsledku příkladu 15* dokažte, že pro integrand Poissonova integrálu pro kruh platí

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\omega,$$

kde $\omega = \arg\zeta^*$. Pomocí výsledku interpretujte geometricky příklad 14.

17. Dokažte: Funkce, harmonická v horní polorovině a nabývající hodnoty 1 na úsečce ab reálné osy a hodnoty nula na zbytku osy, geometricky značí zorný úhel, pod kterým vidíme úsečku ab z bodu z.

18*. Odvoďte Schwarzův vzorec pro pás $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{u_+(\xi) + u_-(\xi)\}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\cosh(\xi - z)} -$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\sinh z\int_{-\infty}^{\infty}\{u_+(\xi) - u_-(\xi)\}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\cosh(\xi - z)\cosh 2\xi},$$

kde $u_+(\xi)$ a $u_-(\xi)$ jsou hodnoty reálné části funkce $f(z)$ na přímkách $y = +\frac{1}{2}\pi$ a $y = -\frac{1}{2}\pi$.