

# Funkce komplexní proměnné

---

## Elementární funkce

In: B. A. Fuks (author); B. V. Šabat (author); Oldřich Koníček (translator): Funkce komplexní proměnné. (Czech). Praha: Přírodovědecké nakladatelství, 1953. pp. 49–110.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402740>

## Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fysiků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## KONFORMNÍ ZOBRAZENÍ.

**§ 15. Konformní zobrazení.** Budiž  $w = f(z)$  funkce diferencovatelná v bodě  $z$  a budiž  $f'(z) \neq 0$ . Položíme

$$\Delta z = \Delta r \cdot e^{i\varphi}, \quad \Delta w = \Delta \rho e^{i\psi}, \quad f'(z) = Ae^{i\alpha},$$

a podle definice derivace a podle věty [2] § 12 bude\*)

$$|f'(z)| = A = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta \rho}{\Delta r}, \quad \arg f'(z) = \alpha = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\psi - \varphi). \quad (1)$$

Nechť se nyní blíží bod  $\zeta = z + \Delta z$  bodu  $z$  po jisté křivce  $C$ . Jemu odpovídající bod  $\omega = f(\zeta)$  se bude blížit bodu  $w = f(z)$  po jiné křivce  $\gamma$ , která odpovídá křivce  $C$  v zobrazení  $w = f(z)$  (viz obr. 17). Křivka  $C$  je definována pomocí komplexní funkce reálné proměnné  $t$ :

$$\zeta = \zeta(t) \quad (\zeta(t_0) = z),$$

a odpovídající křivka  $\gamma$  má rovnici:

$$\omega = \omega(t) = f[\zeta(t)] \quad (\omega(t_0) = w).$$

Předpokládejme, že křivka  $C$  má tečnu v bodě  $z$ . Pak můžeme předpokládat, že existuje  $\zeta'(t_0) \neq 0$ . Z pravidla o derivaci složené funkce a z předpokladu  $f'(z) \neq 0$  plyne,  $\omega'(t_0) = f'(z) \zeta'(t_0) \neq 0$ , t. j.  $\gamma$  má též tečnu v bodě  $w$ . Označme si  $\varphi_0$ , resp.  $\psi_0$ , úhly, které tyto tečny svírají s osami  $x$ , resp.  $u$ . Pak  $\varphi_0 = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varphi$  a  $\psi_0 = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \psi$  a druhý výraz v (1) přejde na tvar\*\*)

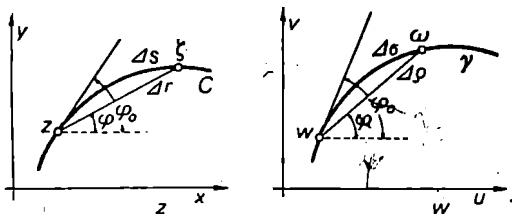
$$\arg f'(z) = \psi_0 - \varphi_0. \quad (2)$$

\*) Jestliže  $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ , pak vybereme takové hodnoty  $\varphi$  a  $\psi$ , aby jejich rozdíl  $\psi - \varphi$  ležel v intervalu  $(-\pi, \pi)$  a (1) pak dává hlavní větve argumentu. Je-li  $\alpha = \pi + 2k\pi$ , vybereme  $\varphi$  a  $\psi$  tak, aby rozdíl  $\psi - \varphi$  ležel v intervalu  $(0, 2\pi)$ , a pak z rovnice (1) dostaneme  $\alpha = \pi$ .

\*\*\*) Jako doplňující předpoklad pro výběr hodnot  $\varphi$  a  $\psi$  potřebujeme ještě, aby existovaly jejich limity pro  $\Delta z \rightarrow 0$ . Pak je  $\arg$  v rovnici (2) hlavní větve argumentu.

Vzorec (2) dokazuje, že

a) úhel, o který se pootočí tečna křivky  $C$  v bodě  $z$  při zobrazení  $w = f(z)$ , je nezávislý na směru a tvaru křivky.



Obr. 17.

Budeme zde, i dále, vždy předpokládat, že směry os  $x$  a  $u$ , resp.  $y$  a  $v$ , spolu souhlasí, a úhlem pootočení pak budeme rozumět úhel, který svírá původní tečna s odpovídajícím směrem v rovině všech obrazů. Pak

můžeme vlastnost rovnice (2) vyslovit geometricky takto:

úhel  $\alpha = \arg f'(z)$  je roven úhlu pootočení v bodě  $z$  při zobrazení  $w = f(z)$ .

Označme si  $\Delta s$ , resp.  $\Delta \sigma$ , délku oblouku křivky  $C$  mezi body  $z$  a  $\zeta$ , resp. křivky  $\gamma$  mezi body  $w$  a  $\omega$ . Jak je známo z analýsy, jsou obě nekonečně malé veličiny  $\Delta s$  a  $\Delta \sigma$  ekvivalentní vzhledem k  $\Delta r$  a  $\Delta \rho$  a můžeme tedy prvou rovnici v (1) přepsat na tvar\*)

$$|f'(z)| = A = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta \sigma} \quad (3)$$

Tuto limitu nazýváme modul zobrazení. Ze vzorce (3) plyne

b) při zobrazení  $w = f(z)$  nezávisí modul zobrazení v bodě  $z$  ani na tvaru ani na směru křivky  $C$ .

To můžeme geometricky vyslovit též takto:

Modul derivace  $A = |f'(z)|$  v bodě  $z$  je roven modulu zobrazení v tomto bodě  $w = f(z)$ .

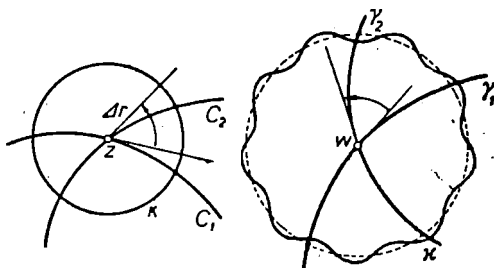
Vlastnostem a) a b) našeho zobrazení  $w = f(z)$  je možno dát ještě jiný geometrický tvar (obr. 18).

Budeme se nyní zajímat nejen o velikost, nýbrž i o orientaci úhlu  $\alpha$ , t. j. budeme hledat smysl otočení, kterým přejde první rameno úhlu do

\*) Viz Vojtěch: Základy vyšší matematiky, díl I, str. 240, vyd. VII, JČMF, Praha 1946. [Pozn. překl.]

polohy shodné s druhým ramenem. Pro orientaci si zavedeme úmluvu běžnou v analytické geometrii. Úhel, jehož prvé rameno splyne s druhým ramenem pohybem proti pohybu ručiček hodinových, budeme nazývat kladným. Všechny úhly, které nebudou kladné (a budou různé od nuly), budeme nazývat záporné.

Při zobrazení  $w = f(z)$  se podle vlastnosti a) tečny ke všem křivkám v bodě  $z$  potočí o stejný úhel (i co do smyslu). Můžeme tedy vyslovit tuto vlastnost jistého „konservatismu úhlů“ jako vlastnost charakteristickou pro naše zobrazení:



Obr. 18.

a') Úhel dvou libovolných křivek  $C_1$  a  $C_2$  protínajících se v bodě  $z$  je roven co do velikosti i smyslu úhlu mezi křivkami  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$ , které odpovídají křivkám  $C_1$  a  $C_2$  v zobrazení  $w = f(z)$ .

Při zobrazení  $w = f(z)$  se body  $z$  vzdálené od bodu  $z_0$  o  $\Delta r$ , kde  $\Delta r$  je veličina nekonečně malá, zobrazí na body  $w$ , vzdálené od bodu  $w_0$  (až na veličiny vyšších řádů) o  $A\Delta r$ . Můžeme tedy vlastnost b) geometricky vyslovit též jako invarianci nekonečně malých kružnic takto:

b') Kružnici o nekonečně malém poloměru  $\Delta r$  a středu v bodě  $z$  odpovídá v zobrazení  $w = f(z)$  křivka  $\kappa$  lišící se od kružnice se středem v bodě  $w$  a poloměrem  $A\Delta r$  o veličiny nekonečně malé vyššího řádu vzhledem k  $\Delta r$ .

**Definice.** Zobrazení  $w = f(z)$  mající v některém bodě  $z$  vlastnosti a'), b') se nazývá konformní v tomto bodě. Výsledky shrnuje

**Věta [1].** Budiž  $w = f(z)$  funkce diferencovatelná v bodě  $z$  a budiž  $f'(z) \neq 0$ , pak zobrazení zprostředkované funkcí  $w = f(z)$  je konformní v bodě  $z$  a  $\arg f'(z)$  udává velikost pootočení v bodě  $z$ ;  $|f'(z)|$  je modul zobrazení v bodě  $z$ .

Poznámka.  $\arg f'(z)$  nazýváme též někdy argument zobrazení v bodě  $z$ .

Jak jsme ukázali již výše, konformní zobrazení zachovává úhly mezi křivkami nejen co do velikosti, nýbrž i co do orientace. Tuto poslední vlastnost nemá na př. zobrazení  $w = \bar{z}$ , které geometricky značí zrcadlení roviny  $z$  podle reálné osy. Zobrazení  $w = \bar{z}$  zachovává sice velikost úhlů, ale obrací jejich smysl.

Zkoumejme superposici zobrazení  $w = f(\zeta)$  a  $\zeta = \bar{z}$  (kde  $\zeta$  je nová komplexní proměnná,  $f(\zeta)$  regulární funkce), t. j.  $w = f(\bar{z})$ . Obě zobrazení  $w = f(\zeta)$  i  $\zeta = \bar{z}$  zachovávají velikost úhlů a tedy i zobrazení  $w = f(\bar{z})$  bude zachovávat velikost úhlů. Zobrazení  $w = f(\zeta)$  zachovává i smysl úhlů, ale zobrazení  $\zeta = \bar{z}$  jej mění na opačný. Z toho plyne, že zobrazení  $w = f(\bar{z})$  bude měnit orientaci úhlů.

Někdy se nazývá zobrazení  $w = f(\bar{z})$  konformním II. typu (na rozdíl od výše zkoumaného konformního zobrazení, které pak nazýváme konformním I. typu). Závěrem ještě několik poznámek o vlastnostech konformních zobrazení.

Poznámka 1. Podmínka  $f'(z) \neq 0$  ve větě [1] je podstatná. Jako příklad vezmeme funkci  $w = z^2$  z př. 5 § 11. Funkce  $w = z^2$  je regulární v bodě  $z = 0$ , ale její derivace v tomto bodě

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=0} = 2z \Big|_{z=0} = 0.$$

V § 11 jsme si dokázali, že zobrazení  $w = z^2$  zdvojnásobuje úhly v počátku souřadnic, t. j. není konformní v bodě  $z = 0$ .

Poznámka 2. Z vlastnosti b) plyne, že plocha ohraničená křivkou  $\kappa$  je až na nekonečně malé veličiny vyšších řádů rovna  $A^2 \pi \Delta r^2$ . Z toho vidíme, že koeficient  $A^2$  s uvedenou přesností je poměr ploch ohraničených křivkami  $C$  a  $\kappa$ . Nazýváme jej *koeficientem plošné dilatace* konformního zobrazení v bodě  $z$ . Je tedy koeficient plošné dilatace konformního zobrazení v bodě  $z$  roven  $|f'(z)|^2$ . K témuž výsledku dojdeme i jinak: Uvažujme Jakobián zobrazení  $w = f(z)$ , t. j. Jakobián funkcí  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = |f'(z)|^2, \quad (4)$$

kde jsme použili Cauchy-Riemannových rovnic. Jak je známo z analýsy,\*) modul Jakobiánu je roven koeficientu plošné dilatace.

Odvodíme si ještě jednu geometrickou interpretaci  $|f'(z)|$ .

**Poznámka 3.** Jestliže je v některém bodě  $f'(z) \neq 0$ , pak podle (4) v tomto bodě  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$ . V analýze se dokazuje, že z této vlastnosti Jakobiánu a spojitosti prvních parciálních derivací funkcí  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$  plyne, že lze nalézt takové okolí bodu  $z$ , že v něm je zobrazení  $w = f(z)$  jedno-jednoznačné. Je možno dokázat i opak: Je-li  $w = f(z)$  regulární v bodě  $z$  a je-li  $f'(z) = 0$ , pak nelze najít žádné okolí bodu  $z$  tak, aby v něm bylo zobrazení  $w = f(z)$  jedno-jednoznačné.

**§ 16. Konformní zobrazení oblastí.** Definice. *Zobrazení  $w = f(z)$  se nazývá konformním v oblasti  $D$ , je-li konformní v každém bodě oblasti.*

Z věty [1] plyne, že k tomu, aby zobrazení  $w = f(z)$  bylo konformní v oblasti  $D$  stačí, aby  $w = f(z)$  byla v této oblasti regulární a  $f'(z) \neq 0$  všude v této oblasti. Zobrazení př. 1—4 § 11 jsou zřejmě konformní v celé otevřené rovině. V dalším najde čtenář další příklady konformního zobrazení.

Předpokládejme, že zobrazení  $w = f(z)$  je konformní a pro jednoduhost i jedno-jednoznačné v oblasti  $D$ . Budiž  $\Delta$  oblast, která odpovídá oblasti  $D$  v tomto zobrazení. V oblasti  $\Delta$  vezmeme dvě soustavy přímk  $u = c_1$ , resp.  $v = c_2$ , které jsou rovnoběžné s osami  $v$ , resp.  $u$ , v rovině  $w$ . V zobrazení  $w = f(z)$  odpovídají těmto přímkám dvě soustavy křivek v rovině  $z$ , jejichž rovnice jsou

$$u(x, y) = c_1, \quad v(x, y) = c_2. \quad (5)$$

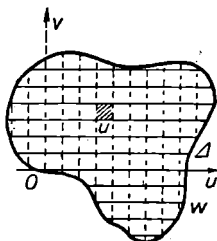
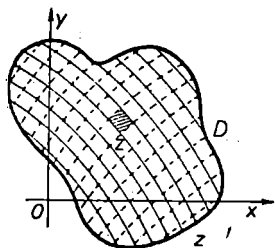
**Důkaz.** Jestliže se bod  $z$  pohybuje podél některé z křivek, na př. první soustavy, potom — jak ukazuje prvá z rovnic (5) — funkce  $u(x, y)$  je konstantní. To však znamená, že bod  $w$  se pohybuje po přímce  $u = \text{const}$  rovnoběžné s osou  $v$ .

Budeme předpokládat, že hodnoty konstant  $c_1$  a  $c_2$  v rovnici (5) rostou ve stejných intervalech. To znamená, že oblast  $\Delta$  je rozdělena

\*) Viz Bermant: Kurs matematického analýsa II., str. 181 a další, Gostechizdat, Moskva 1950.

na čtverečky o straně  $\Delta c$ . Budeme pak říkat, že v oblasti  $\Delta$  je sestavena *kartézská souřadnicová síť*. Této síti odpovídá v oblasti  $D$  síť křivek (5). Síť (5) nazýváme *sít konformně ekvivalentní ke kartézské souřadnicové síti*.

Jestliže  $\Delta c \rightarrow 0$  (t. j.  $\Delta c$  je veličina nekonečně malá), pak podle



Obr. 19.

vlastností a') a b') konformního zobrazení síť v oblasti  $D$  se skládá z křivočarých nekonečně malých čtverečků\*) (obr. 19).

Příklad. Funkce

$$w = z^2 \quad (6)$$

poskytuje zobrazení horní poloroviny  $\text{Im } z > 0$  na rovinu  $w$  s vyloučením kladné reálné poloosy  $u$  (§11). Toto zobrazení bude v celé horní polovině konformní, neboť je tam všude  $\frac{dw}{dz} = 2z \neq 0$ .

V bodě  $z = 0$  zobrazení dvojnásobuje úhly (viz § 11). Je

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy; \quad (7)$$

je ihned vidět, že konformně ekvivalentní síť je tvořena větvemi hyperbol

$$x^2 - y^2 = c_1, \quad 2xy = c_2, \quad (8)$$

ležícími v horní polovině (obr. 20). Kromě právě zkoumané sítě můžeme ještě vyšetřovat *sít konformně ekvivalentní síti polárních souřadnic*. V našem případě je tvořena síť křivek v  $\text{Im } z > 0$ , které se zobrazí na kružnice  $|w| = c_1$  (s vyloučením bodu  $w = c_1$  na kladné reálné poloose) a na polopaprsky  $\arg w = c_2$ . Je ihned vidět, že to jsou půlkružnice  $|z| = \sqrt{c_1}$ ,  $\text{Im } z > 0$  a polopaprsky  $\arg z = \frac{1}{2}c_2$ ,  $0 < c_2 < 2\pi$  (viz obr. 16).

\*) S přesností do nekonečně malých veličin vyšších řádů; čtyřúhelník čarovaný na obr. 19 je podle a') pravoúhelník a podle b') jsou si jeho strany rovny.

## § 17. Diferenciál a jeho geometrická interpretace.

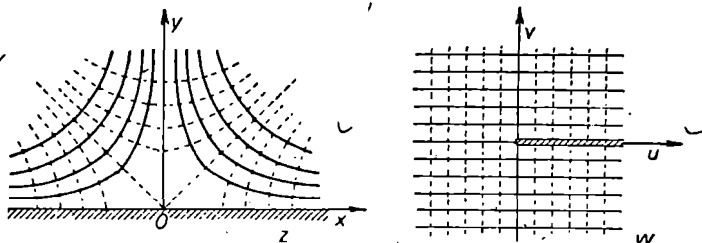
Z definice derivace plyne

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z) = \eta, \quad \eta \rightarrow 0 \text{ pro } \Delta z \rightarrow 0,$$

z toho

$$\Delta w = f'(z) \Delta z + \eta \Delta z.$$

Veličina  $f'(z) \Delta z$  se liší od přírůstku  $\Delta w$  o veličinu  $\eta \Delta z$ , nekonečně malou vyššího řádu\*) vzhledem k  $f'(z) \Delta z$  (pro  $f'(z) \neq 0, \neq \infty$ ). Na-



Obr. 20.

zýváme ji podobně jako v analýze funkcí reálné proměnné — *hlavní částí*  $\Delta w$ . Kromě toho při pevném  $z$  závisí tato veličina *lineárně* na  $\Delta z$ . Je tedy zcela přirozená

**Definice.** Veličina

$$dw = f'(z) \Delta z,$$

která je hlavní částí přírůstku  $\Delta w$ , se nazývá *diferenciál* funkce  $f(z)$  v bodě  $z$ .

Budeme-li aplikovat naši formuli na funkci  $f(z) = z$ , pro níž  $f'(z) = 1$ , dostaneme  $dz = \Delta z$  a vzorec pro diferenciál pak nabude konečného tvaru

$$dw = f'(z) dz. \quad (10)$$

\*) To znamená podobně jako v analýze reálné proměnné, že

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w - f'(z) \Delta z}{f'(z) \Delta z} = 0.$$



Abychom našli geometrický smysl diferenciálu, budeme fixovat body  $z$  a  $w$  a budeme studovat vztah mezi body  $Z = z + \Delta z$  a  $W = w + \Delta w$ :

$$W = f(Z).$$

Vztah mezi body  $Z$  a  $W$  se při pevném  $z$  a  $w$  zřejmě redukuje na vztah mezi  $\Delta z = Z - z$  a  $\Delta w = W - w$ , pro které platí pro diferencovatelné funkce

$$\Delta w = f'(z) \Delta z + \eta \Delta z. \quad (9)$$

Budeme studovat vztah mezi  $\Delta z$  a  $\Delta w$  v dostatečně malém okolí bodu  $z$  a předpokládáme ještě, že  $f'(z) \neq 0$ . Zanedbáme-li na pravé straně rovnice (9) člen  $\eta \Delta z$  jako veličinu nekonečně malou vyššího řádu, můžeme přibližně psát

$$\Delta w \approx f'(z) \Delta z = dw. \quad (11)$$

Rovnice (11) nám udává jednoduchou lineární závislost mezi  $\Delta z$  a  $dw$ .

Používající geometrické terminologie můžeme tedy říci: je-li funkce  $w = f(z)$  diferencovatelná v bodě  $z$  a je-li  $f'(z) \neq 0$ , pak se zobrazení v okolí tohoto bodu (až na veličiny nekonečně malé vyšších řádů) redukuje na lineární zobrazení

$$W - w = f'(z) (Z - z). \quad (10_1)$$

Toto zobrazení se nazývá *hlavní lineární část zobrazení  $w = f(z)$* . Takže, v bodech, kde  $f'(z) \neq 0$ , definuje diferenciál  $dw$  hlavní lineární část zobrazení  $w = f(z)$ .

Můžeme opět provést analogii s analysou funkce reálné proměnné, kde záměna funkce  $f(x)$  jejím diferenciálem v okolí bodu  $x$  geometricky znamená záměnu části oblouku křivky  $y = f(x)$  úsekem tečny v bodě  $x$  s rovnicí

$$(Y - y) = f'(x) (X - x).$$

Z (11) plyne

$$W - w \approx f'(z) (Z - z)$$

čili

$$W \approx f'(z) Z + w - zf'(z) = aZ + b,$$

kde  $a = f'(z)$ ,  $b = w - zf'(z)$  jsou konstanty při pevném  $z$ .

Je to lineární zobrazení vyšetřované v př. 4 § 11. Použijeme-li výsledku tam odvozeného, dostaneme

**Věta [2].** *Budiž  $w = f(z)$  diferencovatelná v bodě  $z$  a necht  $f'(z) \neq 0$ , pak se zobrazení zprostředkované funkcí  $w = f(z)$  v dostatečně malém okolí bodu  $z$  redukuje na lineární zobrazení (až na veličiny nekonečně malé vyšších řádů), t. j. na*

1. *rovnoběžné posunutí z bodu  $z$  do bodu  $w$ ,*
2. *dilataci s modulem  $|f'(z)|$ ,*
3. *pootočení o úhel  $\arg f'(z)$ .*

Jinak řečeno, *konformní zobrazení se jeví jako lokální (t. j. v okolí bodu  $z$ ) podobnost.* Odtud je též jeho název — *konformní* — t. j. zachovávající tvar (formu).

**§ 18. Lineární lomené zobrazení** je definováno na úplné kouli komplexní proměnné  $z$  lineární lomenou funkcí

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (12)$$

pro  $z \neq -\frac{d}{c}, \neq \infty$  pro  $z = -\frac{d}{c}, w = \infty$  a pro  $z = \infty, w = \frac{a}{c}$ .

Předpokládejme ještě, že

$$ad - bc \neq 0, \quad (13)$$

neboť jinak by bylo  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  a funkce (12) by degenerovala na konstantu.

Lineární lomená funkce zprostředkuje jedno-jednoznačné zobrazení úplné koule  $z$  na úplnou kouli  $w$ . Inversní zobrazení k zobrazení (12) je definováno a je jednoznačné na úplné kouli  $w$  a má tvar:

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

pro  $w \neq \frac{a}{c}, \neq \infty$  a pro  $w = \frac{a}{c}, z = \infty$  a pro  $w = \infty, z = -\frac{d}{c}$ .

Pro  $c = 0$  (12) přejde na lineární (celistvé) zobrazení  $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ,

které jsme podrobněji vyšetřovali již v § 11 př. 4. Pro  $c \neq 0$  můžeme psát

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}$$

a můžeme pokládat zobrazení  $w = f(z)$  za superposici těchto prostších zobrazení

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= cz + d, \\ \omega &= \frac{1}{c\zeta}, \\ w &= \frac{a}{c} + (bc - ad)\omega, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

při čemž pro druhé zobrazení z (14)  $\omega = 0$  pro  $\zeta = \infty$  a  $\omega = \infty$  pro  $\zeta = 0$ ; první a poslední zobrazení z (14) zobrazí nekonečně vzdálený bod na nekonečně vzdálený bod.

První a poslední zobrazení (14) jsou lineární a redukují se na dilataci v širším slova smyslu, otočení a rovnoběžný posun, jak jsme viděli již výše. Zbývá vyšetřit geometrický smysl druhého zobrazení (14). Pozměníme označení a píšeme

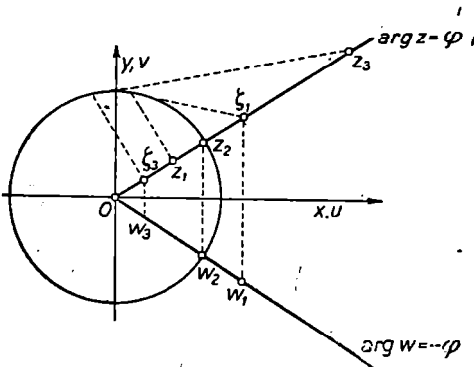
$$w = \frac{1}{z}. \quad (15)$$

Pro ujasnění si představme obě roviny soumísné, t. j. položeny na sebe tak, že se jejich souřadnicové osy kryjí. Zobrazení (15) pak značí přechod od čísla  $z$  k číslu  $\frac{1}{z}$ . Příslušnou konstrukci jsme vyložili v § 3 (obr. 5). Je to superposice dvou zobrazení: 1. inverse vzhledem k jednotkové kružnici (přechod od bodu  $z$  k bodu  $\zeta = \frac{1}{\bar{z}}$ , při kterém se nemění argument a modul přechází ve svou reciprokní hodnotu) a 2. zrcadlení podle reálné osy (přechod od bodu  $\zeta$  k bodu  $w = \bar{\zeta} = \frac{1}{z}$ , při němž se nemění modul a argument mění znaménko).

Je ihned vidět, že při takovém zobrazení se kruh  $|z| < 1$  zobrazí na kruh  $|w| > 1$  se středem v bodě  $w = \infty$  a kruh  $|z| > 1$  na kruh  $|w| < 1$ .

Kružnice  $|z| = 1$  v kružnici  $|w| = 1$ , polopaprsek  $\arg z = \varphi$  v polopaprsek  $\arg w = -\varphi$  (obr. 21).

Derivace funkce  $w = \frac{1}{z}$  existuje ve všech bodech kromě bodu



Obr. 21.

$z = 0$  a  $z = \infty$  a je

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2} \neq 0.$$

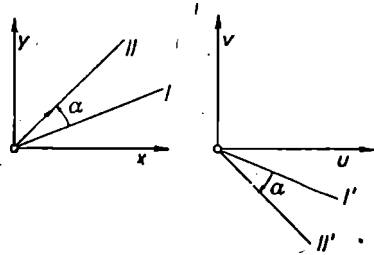
Podle věty [1] je tedy zobrazení (15) konformní v celé rovině kromě uvedených dvou bodů.

Abychom si mohli ujasnit vlastnosti zobrazení v těchto bodech, musíme si nejprve zavést pojem úhlu mezi dvěma křivkami v bodě

$z = \infty$ . Tentó úhel se měří jak známo úhlem, který svírají příslušné tečny (pokud existují) a stačí se tedy zabývat úhlem dvou přímek protínajících se v bodě  $z = \infty$ .

Pod úhlem mezi dvěma přímkami v bodě  $z = \infty$  budeme rozumět úhel mezi těmito přímkami v jejich druhém (konečném) průsečíku, vzatý se znaménkem minus:

Po tomto doplnění bude zobrazení (15) zachovávat úhly i v dříve vyloučených bodech. Nechť se dvě přímky I a II protínají v bodě  $z = 0$  pod úhlem  $\alpha$ . V zobrazení (15) jim odpovídají přímky I' a II' protínající se v bodě  $w = 0$  pod úhlem  $-\alpha$ \*). Tím je dokázáno, že zobrazení (15) zachovává úhly v bodě  $z = \infty$ . Podobně se dokáže, že zobrazení (15) zachovává úhly i v bodě  $z = 0$ .



Obr. 22.

\*) Neboť při zobrazení (15) odpovídá polopaprsku  $\arg z = \varphi$  polopaprsek  $\arg w = -\varphi$  (viz obr. 22).

Zobrazení (15) má tedy obě vlastnosti konformního zobrazení i v bodech  $z = 0$  a  $z = \infty$  (viz § 15).

Ostatní dvě zobrazení (14) jsou konformní v celé rovině  $z$ . A jelikož superposice konformních zobrazení je opět konformní zobrazení, je i (12) konformní v úplné rovině  $z$ .

Základní výsledky shrneme do

**Věta [3].** *Libovolná lomená lineární funkce*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (12)$$

(pro  $z = -\frac{d}{c}$ ,  $w = \infty$ , pro  $z = \infty$ ,  $w = \frac{a}{c}$ ) zprostředkuje jednoznačné konformní zobrazení úplné komplexní roviny  $z$  na úplnou komplexní rovinu  $w$ .

**§ 19. Zobrazení kružnic.** Rovnici libovolné kružnice v rovině  $z$

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (16)$$

je možno pomocí substituce

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

psát ve tvaru

$$Az\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + D = 0, \quad (17)$$

kde  $\alpha = \frac{1}{2}(B - Ci)$ . Pro  $A = 0$  přejde rovnice (16) v rovnici přímky. Budeme-li při svých úvahách používat koule komplexních čísel, nebudeme tuto vlastnost zvláště vylučovat (viz § 5).

Zobrazením (15) přejde rovnice (17) na tvar

$$A + \alpha\bar{w} + \bar{\alpha}w + Dw\bar{w} = 0, \quad (18)$$

který je zřejmě opět rovnicí kružnice na kouli  $w$ . Zobrazení (15) zobrazí tedy libovolnou kružnici koule  $z$  na kružnici koule  $w$ . Kružnice procházející bodem  $z = 0$  (t. j. pro které v rovnici (17) je  $D = 0$ ) se zobrazí v přímky (neboť pak  $D = 0$  v rovnici (18)) a přímky roviny  $z$  se zobrazí na kružnice v rovině  $w$  procházející bodem  $w = 0$  (neboť  $A = 0$  v rovnici (18)). Přímky roviny  $z$  procházející bodem  $z = 0$  (pro

něž  $A = D = 0$  v rovnici (17) se zobrazí opět na přímky roviny  $w$  procházející bodem  $w = 0$  ( $A = D = 0$  v rovnici (18)).

Protože druhá dvě zobrazení (14) zobrazí též kružnice na kružnice (to plyne okamžitě z jejich geometrického smyslu), je jasné, že tuto vlastnost bude mít i superposice (12). Dokázali jsme tím

**Věta [4].** *Libovolné lineární lomené zobrazení*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 0$$

(pro  $z = -\frac{d}{c}$ ,  $w = \infty$ , pro  $z = \infty$ ,  $w = \frac{a}{c}$ ) převádí kružnice koule komplexní proměnné  $z$  opět v kružnice koule komplexní proměnné  $w$ .

**Poznámka.** Libovolné konformní zobrazení zachovává (až na nekonečně malé veličiny vyšších řádů) nekonečně malé kružnice. Lineární lomené zobrazení zachovává všechny kružnice.

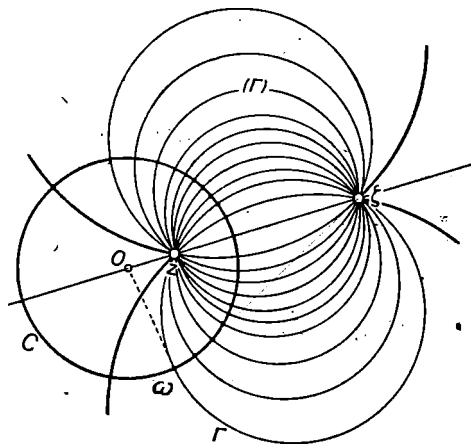
**§ 20. Invariance sdružených bodů.** Definice. Body  $z$  a  $\zeta$ , jež leží na též (prodlouženém) průměru kružnice  $C$  a pro něž platí

$$Oz \cdot O\zeta = R^2, \quad (19)$$

kde  $O$  je střed a  $R$  poloměr kružnice  $C$ , se nazývají *sdružené* (nebo též *symetrické*) vzhledem ke kružnici  $C$ . Střed  $O$  je sdružen s nekonečně vzdáleným bodem.

Se speciálním případem, kdy  $C$  byla jednotková kružnice se středem v počátku, jsme se již setkali v §§ 3 a 18. Konstrukce sdružených bodů, tak jak byla znázorněna na obr. 5, zůstává v platnosti i pro obecný případ.

Sestrojíme svazek kružnic  $(\Gamma)$  procházejících body  $z$  a  $\zeta$  sdruženými



Obr. 23.

podle  $C$  (obr. 23). Každá kružnice ze svazku  $(\Gamma)$  protíná kružnici  $C$  pod pravým úhlem. Podle známé věty z elementární geometrie se čtverec délky tečny rovná součinu z délky sečny a její vnější části. Podle (19) je však tento součin roven  $R^2$  a tedy tečna ke  $\Gamma$  je poloměrem v  $C$  a kružnice jsou ortogonální.

Naopak, jsou-li body  $z$  a  $\zeta$  základními body svazku  $(\Gamma)$  kružnic ortogonálních ke kružnici  $C$ , pak jsou sdruženy vzhledem ke kružnici  $C$ . Neboť přímka  $z\zeta$  patřící do svazku  $(\Gamma)$  je kolmá k  $C$  a prochází zřejmě středem  $O$  kružnice  $C$ . Kromě toho, protože je  $\Gamma$  ortogonální k  $C$ , je  $Oz = O\zeta = O\omega^2$  a podle výše uvedené věty  $O\omega^2 = R^2$ . Tím je dokázána.

**Věta [5].** *Nutná a postačující podmínka k tomu, aby body  $z$  a  $\zeta$  byly sdružené vzhledem ke kružnici  $C$ , je, aby kružnice svazku  $(\Gamma)$  s body  $z$  a  $\zeta$  jako základními byly ortogonální ke kružnici  $C$ .*

Z věty [5] plyne nová

**Definice.** Body  $z$  a  $\zeta$  se nazývají *sdružené podle přímky  $p$* , jsou-li základními body svazku kružnic  $(\Gamma)$  ortogonálních k přímce  $p$ .

V tomto případě sdružení přechází zřejmě v obyčejnou symetrii.

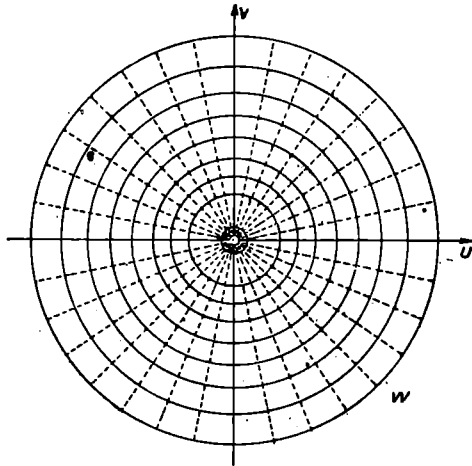
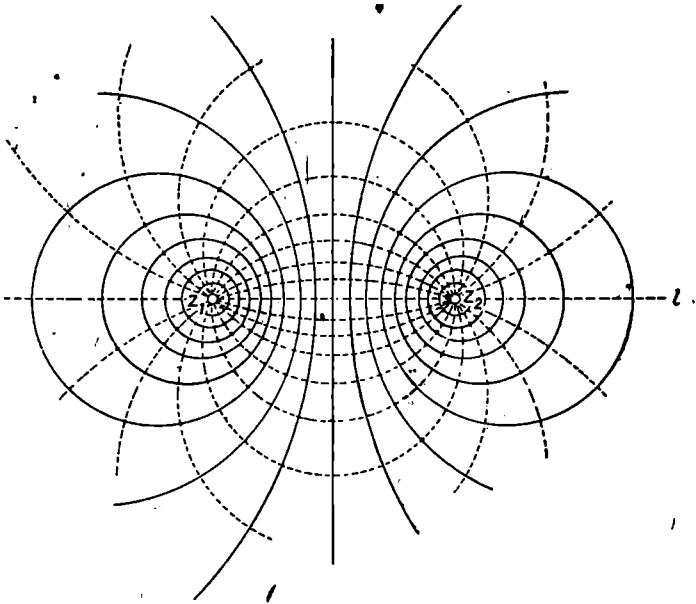
**Věta [6].** *Zobrazení  $w = f(z)$  zprostředkované libovolnou lineární lomenou funkcí zobrazuje dvojici bodů  $z$  a  $\zeta$  sdružených podle kružnice  $C$  ve dvojici bodů  $w$  a  $\omega$  sdružených podle kružnice  $C'$ , která je obrazem kružnice  $C$ .*

**Důkaz.** Sestrojíme svazek kružnic  $(\Gamma)$  procházejících body  $z$  a  $\zeta$ . Ty jsou podle věty [5] ortogonální ke kružnici  $C$ . Podle věty [4] se zobrazí  $C$  na kružnici (případně přímku)  $C'$ , svazek  $(\Gamma)$  na svazek  $(\Gamma')$ , kružnic kolmých ke kružnici  $C'$  a podle věty [5] jsou tedy body  $w$  a  $\omega$  sdruženy podle  $C'$ .

**Příklad.** Hledejme síť konformně ekvivalentní síti polárních souřadnic při zobrazení

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad (20)$$

kde  $z_1$  a  $z_2$  jsou libovolné body roviny. V zobrazení (20) odpovídá bodu  $z_1$ , resp.  $z_2$ , bod  $w = 0$ , resp.  $w = \infty$ . Odpovídají tedy podle věty [4] polopřímek  $\arg w = c$  (t. j. „polokružnicím“ procházejícím



Obr. 24.



body  $w = 0$  a  $w = \infty$ “) oblouky kružnic procházejících body  $z_1$  a  $z_2$  (čárkované na obr. 24).

Dále: body  $w = 0$  a  $w = \infty$  jsou sdruženy podle všech kružnic  $|w| = c_2$ , tedy podle vět [4] a [6] odpovídají těmto kružnicím kružnice, podle nichž musí být sdruženy body  $z_1$  a  $z_2$  (vytažené plně na obr. 24). Oba svazky jsou navzájem ortogonální.

Poznámka. Dokázali jsme jako speciální případ, že geometrické místo bodů, jejichž poměr vzdáleností od dvou daných pevných bodů  $z_1$  a  $z_2$  je stálý

$$|w| = \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \text{const}$$

je kružnice. Toto tvrzení je obsahem věty Apolloniovy, a proto se kružnice  $\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \text{const}$  nazývají Apolloniovy kružnice.

### § 21. Určení zobrazení zprostředkovaného lineární lomenou funkcí.

Obecný tvar zobrazení (12) lineární lomené funkce závisí na třech nehomogenních (4 homogenních) parametrech, neboť můžeme libovolným nenulovým koeficientem  $z$  koeficientů  $a, b, c, d$  dělit čitatele a jmenovatele zlomku napravo v (12), t. j. můžeme tento koeficient položit roven 1.

Jednoduchý případ konstrukce lineárního lomeného zobrazení je tento: Budtež dány na kouli z tři různé body  $z_1, z_2, z_3$  a na kouli  $w$  tři různé body  $w_1, w_2, w_3$ . Jest třeba najít zobrazení tvaru (12), které převádí  $z_k$  v  $w_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Pro konečná  $z_k, w_k$  má toto zobrazení tvar

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \quad (21)$$

Důkaz. Pro pevná  $z_k, w_k$  je (21) zřejmě lineární lomená funkce a převádí  $z_k$  v  $w_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Jestliže některé z čísel  $z_k$  nebo  $w_k$  je nekonečné, pak v čitateli a jmenovateli ve výrazu (21), kde se ono číslo vyskytuje, nahradíme příslušný rozdíl číslem 1. Tak na př. pro  $z_3 = \infty$   $w_1 = \infty$  vzorec (21) bude mít tvar

$$\frac{1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{1}{1}$$

čili

$$w = w_2 + (w_3 - w_2) \frac{z - z_2}{z - z_1} \quad (22)$$

Zřejmě bodu  $z = z_1$  odpovídá bod  $w = \infty$  a bodu  $z = z_2$  bod  $w = 0$  a bodu  $z = \infty$  bod  $w = w_3$ .

Dokážeme nyní, že řešení dané vzorcem (21), resp. vzorci analogickými (22), v případě, že nejsou všechna  $z_k$ ,  $w_k$  konečná, je jednoznačné. Nechť tedy existují dvě zobrazení zprostředkovaná lineárními lomenými funkcemi  $w = l_1(z)$  a  $w = l_2(z)$ , která převádějí  $z_k$  ve  $w_k$ . Sestrojíme ještě zobrazení  $\omega = l(w)$  převádějící  $w_k$  v body  $0, 1, \infty$  a budeme zkoumat superposice

$$\omega' = l[l_1(z)] = L_1(z), \quad \omega'' = l[l_2(z)] = L_2(z).$$

To jsou lineární lomené funkce převádějící body  $z_k$  v body  $0, 1, \infty$ . Sestrojíme zobrazení

$$\omega'' = L_2[L_1^{-1}(\omega')],$$

kde  $L_1^{-1}$  je inverzní zobrazení k  $L_1$ . Pak  $\omega''$  je lineární lomená funkce

$\omega'' = \frac{c\omega' + b}{c\omega'' + d}$  a převádí body  $0, 1, \infty$  v sebe sama. Pak je to ale

identita. Důkaz: pro  $\omega' = \infty$ ,  $\omega'' = \frac{a}{c} = \infty$  a tedy  $c = 0$ ,  $a \neq 0$ ;

podobně pro  $\omega' = 0$ ,  $\omega'' = \frac{b}{d} = 0$  a tedy  $b = 0$ ,  $d \neq 0$ ; takže  $\omega'' =$

$= \frac{a}{d} \omega'$ . Ale pro  $\omega' = 1$ ,  $\omega'' = \frac{a}{d} = 1$ , t. j.  $\omega'' = \omega'$ . A dále: je tedy

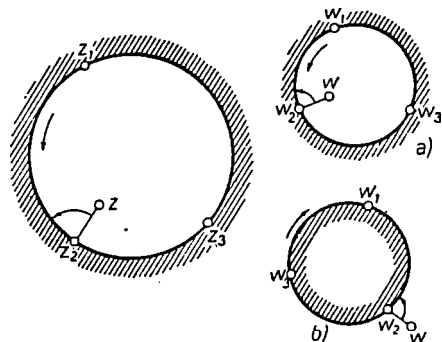
$L_1^{-1}$  inverzní k  $L_2$ , odtud  $L_1 = L_2$  a konečně  $l_1 = l_2$ .

Výsledky vyslovíme ve větě.

**Věta [7].** *Existuje jedno a jen jedno zobrazení zprostředkované lineární lomenou funkcí, které převádí tři různé libovolné dané body  $z_k$  koule  $z$  ve tři různé libovolné dané body  $w_k$  koule  $w$  ( $k = 1, 2, 3$ ).*

Podle věty [7] lze najít lineární lomenou funkci převádějící danou kružnici  $C$  koule  $z$  v danou kružnici  $C'$  koule  $w$ . K tomu stačí podle věty [4] najít zobrazení převádějící tři libovolné body první kružnice ve tři libovolné body druhé kružnice.

Poznamenejme ještě, že toto zobrazení zobrazí kruh ohraničený kružnicí  $C$  buď celý dovnitř kružnice  $C'$  nebo celý vně kružnice  $C'$ . Důkaz: Necht' obrazy  $w'$  a  $w''$  bodů  $z'$  a  $z''$  z vnitřku kružnice  $C$  leží na různých stranách kružnice  $C'$ . Pak úsečka  $z'z''$  neprotíná kružnici  $C$ , ale oblouk  $w'w''$  jí odpovídající protíná kružnici  $C'$ , což není možné.



Obr. 25.

Abychom zjistili, který případ nastane, stačí najít obraz jediného bodu  $z$  vnitřku kružnice  $C$ ; leží-li tento obraz uvnitř  $C'$ , nastane první případ, leží-li vně, nastane druhý případ. Můžeme též postupovat jinak. Zvolíme na kružnici  $C$  tři různé body:  $z_1, z_2, z_3$ ; jejich pořádek definuje jistý smysl oblouku na  $C$  (viz šipka na obr. 25). Když odpovídající body  $w_1, w_2, w_3$  definují tentýž

smysl na  $C'$ , pak se vnitřek kružnice  $C$  zobrazí na vnitřek kružnice  $C'$  (obr. 25a), v opačném případě vně kružnice  $C'$  (obr. 25b). Důkaz: vezmeme bod  $z$  na poloměru procházejícím bodem  $z_2$ ; úsečka  $zz_2$  odpovídá oblouku  $ww_2$  kolmý k  $C'$ . Úhel mezi obloukem  $\widehat{z_1z_2}$  a poloměrem  $zz_2$  (rovný  $+\frac{1}{2}\pi$ ) musí v důsledku konformnosti zobrazení odpovídat i co do smyslu úhlu mezi oblouky  $\widehat{w_1w_2}$  a  $\widehat{ww_2}$ . Odtud ihned plyne, jak je vidět z obr. 25, naše tvrzení.

Pro daný smysl oběhu na kružnici  $C$  leží vnitřek  $C$  nalevo od  $C$ . Při zobrazení zůstává v obou případech obraz tohoto vnitřku nalevo od  $C'$ . Můžeme tedy říci, že zobrazení (12) zachovává smysl oběhu na hranici kruhů.

**§ 22. Speciální případy.** Hledejme zobrazení horní poloroviny na jednotkový kruh převádějící daný bod  $z_0$  poloroviny do středu jednotkové kružnice  $w = 0$ . Podle věty [6] je bod  $\bar{z}_0$  sdružený s bodem  $z_0$  podle reálné osy a  $\bar{z}_0$  tedy přechází v bod  $w = \infty$  (sdružený s  $w = 0$  podle  $|w| = 1$ ).

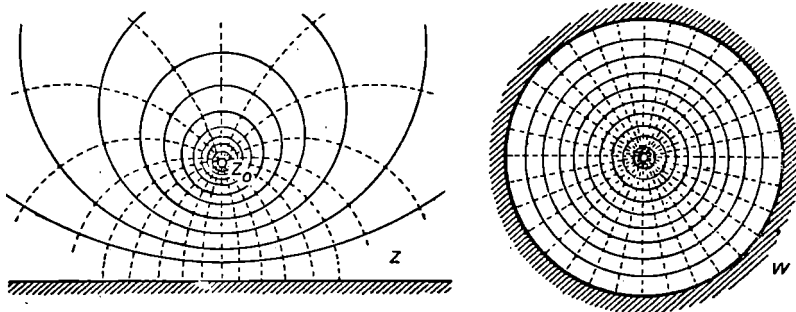
Bude tedy mít hledané zobrazení tvar

$$w = k \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Zbývá určit  $k$ . Body reálné osy mají přejít v body jednotkové kružnice  $|w| = 1$ . Pro  $z = x$  ( $x$  reálné číslo) je však  $\bar{z} = z$  a čítecitel a jmenovatel zlomku jsou komplexně sdruzeny a jejich modul je roven 1. Máme tedy konečně  $|k| = 1$ , t. j.  $k = e^{i\varphi}$  a naše zobrazení má tvar

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}. \quad (23)$$

Funkce (23) pro libovolné  $\varphi$  řeší naši úlohu, protože podle své konstrukce zobrazí „kružnici“  $y = 0$  na kružnici  $|w| = 1$  a bod



Obr. 26.

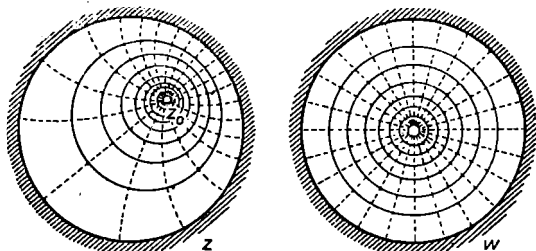
$z_0$  horní poloroviny dovnitř kruhu  $|w| < 1$ . Změna  $\varphi$  v rovnici (23) značí pootočení kruhu  $|w| < 1$  okolo počátku, což není v rozporu s naší úlohou. Na obr. 26 je nakreslena příslušná síť sdružených funkcí konformně ekvivalentních sítí polárních souřadnic kruhu  $|w| < 1$ . Je zřejmě částí sítě z obr. 24.

Hledejme ještě zobrazení jednotkového kruhu  $|z| < 1$  na jednotkový kruh  $|w| < 1$  zobrazící bod  $z_0$  z vnitřku kruhu  $|z| < 1$  na střed kruhu  $|w| < 1$ ,  $w = 0$ . Bod  $\frac{1}{z_0}$  sdružený s bodem  $z_0$  podle  $|z| = 1$  musí při tom přejít v bod  $w = \infty$ , takže hledané zobrazení má tvar

$$w = k_1 \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{z_0}} = k \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0},$$

kde  $k = -k_1 \bar{z}_0$  je jistá konstanta. Ke stanovení  $k$  použijeme toho, že body  $z = e^{i\psi}$  kružnice  $|z| = 1$  přejdou v body kružnice  $|w| = 1$ :

$$|k| \left| \frac{e^{i\psi} - z_0}{1 - z_0 e^{i\psi}} \right| = |k| |e^{i\psi}| \left| \frac{1 - z_0 e^{-i\psi}}{1 - z_0 e^{i\psi}} \right| = 1.$$



Obr. 27.

Je  $|e^{i\psi}| = 1$  a čitatel zlomku je komplexně sdružen s jmenovatelem; modul zlomku je tedy roven 1. A tedy  $|k| = 1$ ,  $k = e^{i\psi}$  a naše zobrazení má tvar

$$w = e^{i\psi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}. \quad (24)$$

Vzorec (24) dává řešení naší úlohy pro libovolné  $\psi$  až na případné otočení kruhu  $|w| < 1$  kolem počátku.

Derivace funkce (24) v bodě  $z = z_0$  je rovna

$$w'_0 = e^{i\psi} \frac{1 - z_0 \bar{z}_0}{(1 - \bar{z}_0 z)^2} \Big|_{z=z_0} = e^{i\psi} \frac{1}{1 - r_0^2},$$

kde  $r_0 = |z_0| < 1$ . Z toho je zřejmé, že  $\psi = \arg w'_0$  geometricky značí úhel pootočení zobrazení (24) v bodě  $z_0$ . Můžeme tedy vhodnou volbou  $z_0$  a  $\psi$  dosáhnout toho, aby bod  $z_0$  a směr  $-\psi$  přešly v bod  $w = 0$  a směr osy  $u^*$ .

Na obr. 27 je nakreslena síť sdružených funkcí, konformně ekvivalentních sítí polárních souřadnic kruhu  $|w| < 1$  (je částí sítě obr. 24). Zobrazení (24) tedy deformuje vnitřek a hranici kruhu  $|z| < 1$ , ponechávaje ho celkově beze změny.

Odvodíme ještě zobrazení kruhu  $|z| < R$  na kruh  $|w| < 1$ , které převádí bod  $z_0$  v počátek  $w = 0$ . Toto zobrazení má tvar

$$w = e^{i\psi} \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}, \quad (25)$$

jak si snadno odvodíme, nahradíme-li ve (24)  $z$ , resp.  $z_0$ ,  $\frac{z}{R}$ , resp.  $\frac{z_0}{R}$ .

\*) To znamená, že křivky dotýkající se v bodě  $z_0$  polopaprsku  $\arg z = -\psi$  se zobrazí na křivky, dotýkající se v bodě  $w = 0$  osy  $u$ .

**§ 23. Obecné principy theorie konformního zobrazení.** Lineární lomená funkce zobrazuje jedno-jednoznačně a konformně úplnou rovinu komplexní proměnné  $z$  na úplnou rovinu komplexní proměnné  $w$ . Je možno dokázat, že je to jediná taková funkce. Funkce jiného typu než je lineární lomená funkce mohou jedno-jednoznačně zobrazit pouze část roviny  $z$  na část roviny  $w$ .

V předešlých paragrafech jsme viděli, že jedno-jednoznačné konformní zobrazení libovolného kruhu roviny  $z$  na libovolný kruh roviny  $w$  (ve zvláštním případě jeden nebo oba z těchto kruhů se mohou „rozšířit“ v celou rovinu) lze vždy provést prostřednictvím lineární lomené funkce. Vzniká otázka, je-li možno sestrojít jedno-jednoznačné zobrazení libovolné oblasti  $D$  na libovolnou oblast  $\Delta$ .

V takovéto obecné formulaci je odpověď záporná. Tak není na př. možné zobrazit vícenásobně souvislou oblast na jednoduše souvislou oblast. Neprovedeme úplný důkaz a poukážeme jen na hlavní principy nemožnosti konstrukce takového zobrazení.

Předpokládejme, že takové zobrazení vícenásobně souvislé oblasti  $D$  na jednoduše souvislou oblast  $\Delta$  existuje. Vezmeme v oblasti  $D$  uzavřenou křivku  $C$ , skládající se z bodů oblasti  $D$ , a to takovou, že v ní leží body nepatřící do  $D$  (taková křivka podle předpokladu vždy zřejmě existuje). Při našem zobrazení přejde křivka  $C$  v křivku  $C'$ , která se skládá z bodů oblasti  $\Delta$ . Protože je  $\Delta$  jednoduše souvislá, je možno ji spojitou deformací stáhnout v jediný bod aniž přitom  $C'$  vystoupí z  $\Delta$ . Ze spojitosti zobrazení plyne, že se odpovídající křivka  $C$  v  $D$  musí také stáhnout v jeden bod, aniž vystoupí z  $D$ , což je zřejmě nemožné.

Pro jednoduše souvislé oblasti platí

**Věta o existenci a unicítě.** *Necheť  $D$  a  $\Delta$  jsou dvě libovolné, jednoduše souvislé oblasti různé od úplné koule, resp. koule s vyňatým bodem,\*<sup>)</sup> a necheť  $z_0$  a  $w_0$  jsou libovolné dva vnitřní body oblastí  $D$  a  $\Delta$  a necheť  $\varphi_0$  je libovolné reálné číslo. Pak existuje jediné jedno-jednoznačné konformní zobrazení  $w = f(z)$  oblastí  $D$  a  $\Delta$  vyhovující podmínkám*

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z) = \varphi_0. \quad (26)$$

Důkaz této věty se vymyká rámci této knihy, a proto jej neuvádíme.

<sup>\*)</sup> Nutnost vyloučení těchto oblastí se ukáže v dalším (§ 53).

Poznámka 1. Možnost zobrazení libovolné jednoduše souvislé oblasti na jistou libovolnou jednoduše souvislou oblast bude dokázána, dokážeme-li možnost zobrazení každé z nich na horní polorovinu nebo na jednotkový kruh. Nechť funkce  $\zeta = f(z)$  a  $\zeta = g(w)$  zobrazí oblasti  $D$  a  $\Delta$  jedno-jednoznačně a konformně, na př. na jednotkový kruh  $|\zeta| < 1$ , a budiž  $w = \varphi(\zeta)$  inverzní zobrazení k zobrazení  $\zeta = g(w)$ . Pak superposice

$$w = \varphi[f(z)] = F(z)$$

zprostředkuje jedno-jednoznačné a konformní zobrazení oblasti  $D$  na  $\Delta$ .

Známe-li jedno zobrazení  $\zeta = f(z)$  oblasti  $D$  na jednotkový kruh, můžeme jich sestavit nekonečně mnoho pomocí pomocného zobrazení jednotkového kruhu  $|\zeta| < 1$  na jednotkový kruh  $|w| < 1$ . Toto pomocné zobrazení je dáno vztahem (24), kde místo  $z$  píšeme  $\zeta$  a libovolný bod  $\zeta_0$  se zobrazí na počátek  $w = 0$  a argument tečny v bodě  $\zeta_0$  má danou předem zvolenou hodnotu.

Poznámka 2. Jak ukazují rovnice (26), závisí konformní zobrazení dané oblasti na druhou na třech reálných parametrech (prvá z rovnic (26), jako rovnice mezi komplexními čísly, je ekvivalentní dvěma rovnicím mezi reálnými čísly). Místo (26) se často používá pro stanovení jedno-jednoznačného konformního zobrazení jiných podmínek, obsahujících rovněž tři reálné parametry. Na př. jsou dány obrazy jednoho vnitřního bodu a jednoho bodu hraničního:

$$f(z_0) = w_0, f(z_1) = w_1$$

( $z_0, w_0$  vnitřní,  $z_1, w_1$  hraniční body oblasti  $D$ , resp.  $\Delta$ ) nebo jsou dány obrazy tří hraničních bodů oblasti  $D$ :\*)

$$f(z_k) = w_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

( $z_k, w_k$  hraniční body oblasti  $D$  resp.  $\Delta$ ).

O podobných podmínkách říkáme, že *normují* hledané konformní zobrazení. Někdy jim též říkáme *okrajové podmínky*.

---

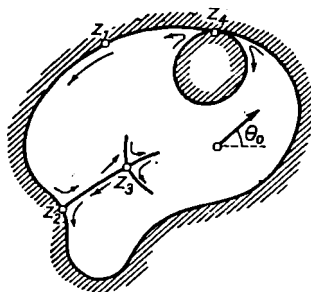
\*) Poloha hraničního bodu je určena jediným reálným parametrem, na př. délkou oblouku měřeného od zvoleného pevného bodu na oblouku.

Podtrhneme ještě to, že v existenční větě se mluví jen o zobrazení vnitřku oblasti  $D$  na vnitřek oblasti  $\Delta$ . Jak se při tom zachová hranice? Na tuto otázku nám dává odpověď

**Prvá věta o přiřazení hranic.** Při jedno-jednoznačném konformním zobrazení oblasti  $D$  na oblast  $\Delta$

a) existuje jedno-jednoznačné a spojitě zobrazení hranic těchto oblastí, jestliže hranice oblasti  $\Delta$  se skládá z konečných bodů a počítáme-li každý hraniční bod tolikrát, kolikrát jej projdeme při úplném oběhnutí hranice.\*)

b) funkce zprostředkující zobrazení má na hranici oblasti  $D$  spojitou derivaci,\*\*) jestliže hranice oblasti  $D$ , resp.  $\Delta$ , obsahují pouze konečné body a mají ve všech bodech spojitou křivost. V těch bodech, kde neexistuje tečna k hranici, derivace neexistuje nebo má hodnotu 0, resp.  $\infty$ .



Obr. 28.

Poznamenejme ještě, že vlastnost odvozená v § 21 pro zobrazení (12) má obecný charakter:

Při jedno-jednoznačném a konformním zobrazení oblastí  $D$  a  $\Delta$  se zachovává smysl oběhu jejich hranic.\*\*\*)

Jinak řečeno, jestliže při oběhu hranice oblasti  $D$  oblast zůstane vlevo, pak při odpovídajícím oběhu hranice oblasti  $\Delta$  zůstane i oblast  $\Delta$  vlevo.

Větší význam pro praxi konformního zobrazení má

**Druhá věta o přiřazení hranic.** Necht  $D$ , resp.  $\Delta$ , jsou jednoduše souvislé oblasti ohraničené křivkami  $C$ , resp.  $C'$ , necht funkce  $w = f(z)$  je regu-

\*) Na př. na obr. 28: bod  $z_1$  projdeme jednou, body  $z_2$  a  $z_4$  dvakrát a konečně bod  $z_3$  čtyřikrát. Jestliže hranice oblasti  $D$  i hranice oblasti  $\Delta$  neobsahuje násobné body, pak je zobrazení jednoznačné a spojitě v běžném slova smyslu.

\*\*) Derivací funkce  $f(z)$  v hraničním bodě  $z$  rozumíme limitu  $\lim_{z' \rightarrow z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$ , kde  $\{z'\}$  je posloupnost hraničních bodů.

\*\*\*) V kursech analýsy se dokazuje, že tuto vlastnost má libovolné spojitě jedno-jednoznačné zobrazení s kladným Jakobíánem. Podle (4) § 15 mají konformní zobrazení vždy tuto vlastnost.



lární v  $D$  a spojitá v  $\bar{D}$  a necht  $w = f(z)$  zprostředkuje vzájemné zobrazení křivek  $C$  a  $C'$ . Pak funkce  $w = f(z)$  zprostředkuje jedno-jednoznačné a konformní zobrazení oblastí  $D$  a  $\Delta$ .

V závěru uvedme ještě důležitý

**Princip zachování oblastí.** Je-li funkce  $w = f(z)$  regulární v oblasti  $D$  a různá od konstanty, pak bodová množina  $\Delta$ , na kterou funkce  $w = f(z)$  zobrazí oblast  $D$ , je též oblastí.

Poznamenejme ještě, že tento princip má obecný charakter. Jak již bylo řečeno v poznámce 3 k větě [1] této kapitoly, je-li  $f'(z_0) \neq 0$ , pak funkce  $w = f(z)$  zobrazí okolí bodu  $z_0$  oblasti  $\gamma$  na okolí bodu  $w_0 = f(z_0)$  roviny  $w$ . V celku nebude obecně zobrazení oblasti  $D$  na oblast  $\Delta$  jedno-jednoznačné, v obecném případě bude  $\Delta$  oblastí na Riemannově ploše funkce  $w = f(z)$ . Takové plochy budeme blíže zkoumat v příští kapitole. Bodům, pro něž  $f'(z) = 0$ , odpovídají body rozvětvení Riemannovy plochy (o nich bude řeč též v příští kapitole), v jejich okolí se narušuje jedno-jednoznačnost zobrazení. Princip zachování oblastí se ovšem nenarušuje a obrazy takových bodů jsou vnitřními body oblasti  $\Delta$ .

## ÚLOHY

1. Budiž  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Dokažte: Nutná a postačující podmínka proto, aby  $f(z)$  byla v bodě  $z$  diferencovatelná, je, aby  $du + i dv$  (kde  $du$  a  $dv$  jsou diferenciály reálných funkcí  $u$  a  $v$ ) bylo úměrné  $dx + i dy$  (kde koeficient úměrnosti závisí jen od  $z$ ).

2. Jak se najde délka obrazu křivky  $C$  a plocha obrazu oblasti  $D$  při jedno-jednoznačném konformním zobrazení?

3. Stanovte modul a argument zobrazení  $w = \frac{z-i}{z+i}$  v bodech  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = i$ .

4. Stanovte plochu obrazu čtverce  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$  při zobrazení  $w = z^2$  a délku jeho obvodu.

5. Stanovte délku obrazu kružnice  $|z| = 1$  při zobrazení  $w = \sqrt{z+1}$  (viz př. 11 d, kap. I).

6. Dokažte, že podmínky konformní ekvivalence sítě sdružených funkcí  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  se sítí kartézských souřadnic lze psát také takto:

$$|\text{grad } u| = |\text{grad } v|.$$

7. Najděte hlavní lineární část zobrazení  $w = z^2$  v bodě  $z = i$ . Odhadněte chybu pro hlavní část tohoto zobrazení v kruhu  $|z - i| < 0,1$ .
8. Na jakou oblast se zobrazí funkcí  $w = \frac{1}{z}$  oblast, uzavřená mezi tři kružnice navzájem se dotýkající (vně), je-li jeden z těchto bodů dotyku v počátku?
9. Na jakou oblast zobrazí funkce  $w = \frac{1}{z}$  oblast polopásmu  $0 < x < 1, y > 0$ ?
10. Stanovte jedno-jednoznačné konformní zobrazení prstence omezeného kružnicemi  $|z| = 1$  a  $|z - 1| = \frac{5}{2}$  na mezikružl  $1 < |w| < R$ . Stanovte hodnotu  $R$ .
11. Najděte všechna zobrazení zprostředkovaná lineárními lomenými funkcemi, která ponechávají body  $\pm 1$  na svém místě.
12. Stanovte konformní zobrazení kruhu  $|z| < 1$  na horní polorovinu, převádějící body  $-1, +1, i$  v body  $\infty, 0, 1$ .
13. Stanovte zobrazení horní poloroviny na sebe samu tak, že bodům  $\infty, 0, 1$  odpovídají  $0, 1, \infty$ .
14. Stanovte zobrazení  $w = f(z)$  horní poloroviny  $\text{Im } z > 0$  na kruh  $|w| < R$  tak, že  $f(i) = 0, f'(i) = 1$ . Jak velké je  $R$ ?
15. Jaký je geometrický smysl úhlu  $\varphi$  v rovnici (23)? V jakou soustavu převádí zobrazení (23) kartézskou souřadnicovou síť v rovině  $z$ ?
16. Stanovte konformní zobrazení horní poloroviny na sebe samu tak, aby tři dané (různé) body  $a_1, a_2, a_3$  ( $a_1 < a_2 < a_3$ ) na reálné osě přešly na body  $0, 1, \infty$ .
17. Jaké jsou podmínky pro to, aby funkce  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  zobrazila horní polorovinu na sebe samu (roviny  $z$  a  $w$  předpokládáme soumísné)?

## ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

§ 24. Funkce  $w = z^n$  a její Riemannova plocha. Funkce

$$w = z^2 \quad (1)$$

byla již diskutována v §§ 11 a 16.

V polárních souřadnicích  $z = re^{i\varphi}$ ,  $w = \rho e^{i\psi}$  lze psát (1) pomocí dvou rovnic mezi reálnými veličinami

$$\rho = r^2, \quad \psi = 2\varphi, \quad (2)$$

z kterých ihned plyne geometrický smysl našeho zobrazení.

Z rovnice  $z_1^2 = z_2^2$  plyne

$$z_2 = \pm z_1. \quad (3)$$

Zřejmě jsou tedy při zobrazení stejné obrazy jen těch bodů, pro něž platí (3), t. j. splývají pouze obrazy bodů souměrných podle počátku souřadnic. Aby bylo zobrazení (1) jedno-jednoznačné, zřejmě stačí a je nutné, aby oblast  $D$  neobsahovala žádné takové body.

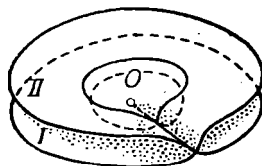
Těmto podmínkám vyhovuje horní polorovina  $0 < r < \infty$ ,  $0 < \varphi < \pi$ , jak ostatně ukazuje rovnice (2). Funkce  $w = z^2$  zobrazí horní polorovinu na celou rovinu ( $w$ ) s výřezem podél kladné reálné poloosy. Odpovídající si soustavy křivek při tomto zobrazení jsou zakresleny na obr. 16 a 20; zobrazení je konformní všude kromě bodů  $z = 0$  a  $z = \infty$  \*) (viz § 16).

Dolní polorovina  $0 < r < \infty$ ,  $\pi < \varphi < 2\pi$  se zobrazí též na celou rovinu ( $w$ ) vyjma kladné reálné poloosy. Je tedy zobrazení (1) jednoznačné, ale nikoli už jedno-jednoznačné: každému bodu  $w$  kromě bodů  $w = 0$  a  $w = \infty$  odpovídají dva různé body  $z$ . Z této vlastnosti plynou některé důsledky, které nebyly možné pro jedno-jednoznačné zobrazení. Tak na př. neuzavřená křivka  $|z| = 1$ ,  $0 \leq \varphi < \pi$  (půlkružnice) se zobrazí při zobrazení (1) na uzavřenou křivku  $|w| = 1$ .

\*) Přesně řečeno, funkce  $w = z^2$  není v bodě  $z = \infty$  definována. Budeme definovat její hodnotu v tomto bodě jako  $\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 = \infty$ .

Je však možno udat několik způsobů geometrického zobrazení bodů  $w$ , které vyhovují našemu zobrazení (1) tak, aby bylo možno interpretovat zobrazení (1) opět jako jedno-jednoznačné.

Vezmeme dvě roviny ( $w$ ) (dva „listy“) s vyňatými reálnými kladnými poloosami a budeme říkat, že prvý list ( $I$ ) nese obrazy všech bodů horní poloroviny a list ( $II$ ) obrazy všech bodů dolní poloroviny. Představíme si oba listy uloženy nad sebou tak, že body se stejnými souřadnicemi budou ležet právě nad sebou. Aby byla zachována spojitost funkce  $w = z^2$  podél reálné záporné poloosy, „sklížíme“ mezi sebou dolní okraj vyňaté poloosy v rovině ( $I$ ) (t. j. obraz této poloosy při zobrazení horní poloroviny) a horní okraj této poloosy v rovině ( $II$ ) (t. j. obraz této poloosy při zobrazení dolní poloroviny) tím, že přidáme (jeden) polopaprsek ležící nad kladnou poloosou  $u$  (obr. 29).



Obr. 29.

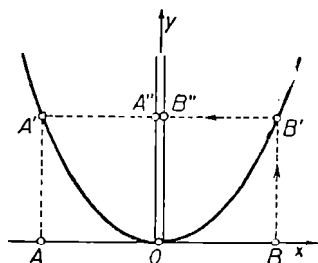
Zbývá zajistit spojitost zobrazení v bodech kladné poloosy  $x$ . K tomu stačí „sklížit“ navzájem oba zbývající volné okraje vyňatých kladných reálných poloos rovin ( $I$ ) a ( $II$ ) pomocí polopaprsku ležícího nad osou  $u$ . Abychom zachovali jednoznačnost našeho zobrazení oběma směry, musíme ovšem tento polopaprsek odlišit od polopaprsku již dříve použitého ke sklížení okrajů obou vyňatých poloos, třebaže geometricky v důsledku své polohy v prostoru oba paprsky nutně spolu souhlasí (viz obr. 29). Pro naše úvahy budeme předpokládat, že jen oba konce obou paprsků ležící nad body  $w = 0$  a  $w = \infty$  se spolu ztotožňují.

Takto sestrojená dvoulistá plocha se nazývá Riemannovou plochou funkce  $w = z^2$ . Je rozprostřena nad celou rovinou ( $w$ ) tak, že nad každým bodem  $w$  kromě bodu  $w = 0$ , resp.  $w = \infty$ , leží dva rozličné body Riemannovy plochy  $R$  patřící dvěma různým listům plochy.\*) Jen nad body  $w = 0$ , resp.  $w = \infty$ , leží jen po jednom bodě plochy  $R$ . Jestliže nějaký bod oběhne kolem bodu  $z = 0$  *jedenkrát* po kružnici  $|z| = r$ , pak zřejmě podle rovnice (2) jemu odpovídající bod  $w$  oběhne bod  $w = 0$  po kružnici  $|w| = \rho$  právě dvakrát. Totéž platí pro bod

\*) Body osy  $u$  netvoří výjimku, neboť jsme se umluvili, že body plochy  $R$ , které vzniknou při průniku plochy samé se sebou, budeme počítat jako různé.

$w = \infty$ . To nás opravňuje k tomu, abychom body plochy  $R$  ležícími nad těmito dvěma body nazývali *body rozvětvení druhého řádu*. V těchto bodech, jak jsme již uvedli, jsou „sešity“ oba listy Riemannovy plochy, t. j. oba tyto body patří současně oběma listům.

Podle naší konstrukce tedy funkce  $w = z^2$  zobrazuje *spojitě a jedno-jednoznačně úplnou rovinu na příslušnou Riemannovu plochu*. Abychom vyjasnili naši konstrukci, budeme ještě studovat přiřazení bodů jednotkové kružnice  $K$  a jí odpovídající křivky  $K'$  na Riemannově ploše při našem zobrazení. Horní půlkružnice  $K$  (pro  $0 < \varphi < \pi$ ) se zobrazí na kružnici  $|w| = 1$  s vynětím bodu  $w = 1$  ležícího na listě (I). Dolní půlkružnice  $K$  (pro  $\pi < \varphi < 2\pi$ ) se zobrazí na podobnou kružnici na listě (II). Pak sklízíme křížem všechny čtyři volné konce našich kružnic, při čemž budeme opět pokládat oba body, kterými jsme doplnili naše kružnice, za různé, třebaže spolu zřejmě geometricky souhlasí. Výsledná křivka bez dvojných bodů  $K'$  bude ležet na obou listech Riemannovy plochy nad kružnicí  $|w| = 1$  a bude spojitým a jedno-jednoznačným obrazem kružnice  $K$  (viz obr. 29).



Obr. 30.

Pro lepší porozumění pojmu Riemannovy plochy uvedme si ještě některé analogie. Reálný analogon funkce (1) je funkce  $y = x^2$ , která zobrazuje osu  $x$  na kladnou poloosu  $y$ . Toto zobrazení je jednoznačné, ale ne jedno-jednoznačné, neboť každá dvojice bodů  $A$  a  $B$ , jejichž  $x$ -ové souřadnice se liší pouze znaménkem, se zobrazí na jeden a tentýž bod, totiž bod  $A'' = B''$  (obr. 30).

Můžeme tedy vzít dvě kladné poloosy  $y$ , slepit je navzájem v bodech,  $y = 0$  a  $y = \infty$  a považovat bod  $A''$  za ležící na jedné z nich a bod  $A'$  na druhé z nich. Tím jsme sestrojili analogon Riemannovy plochy funkce  $w = z^2$  a naše funkce  $y = x^2$  nám teď zobrazuje vzájemně jedno-jednoznačně osu  $x$  na kladnou (dvakrát počítanou) poloosu  $y$ .

Geometrický význam zobrazení  $y = x^2$  se stane ihned názornější, sestrojíme-li v rovině  $(x, y)$  parabolu  $y = x^2$  a budeme-li konstruovat bod  $A''$  jako postupnou dvojnásobnou projekci nejprve  $A$  v  $A'$ , pak  $A'$  v  $A''$  (obr. 30). Dvojnásobnou poloosu  $y$  můžeme nyní považovat

za projekci naší paraboly nebo, chceme-li, za její jednorozměrný model. Analogickou úvahu můžeme provést i pro funkci komplexní proměnné  $w = z^2$ . Rovnice  $w = z^2$  je ekvivalentní dvěma reálným rovnicím

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy, \quad (4)$$

které ve čtyřrozměrném prostoru\*) ( $x, y, u, v$ ) definují jistou dvourozměrnou plochu. Tato dvourozměrná plocha nemůže být vnořena (přenesena) do trojrozměrného prostoru, podobně jako parabola  $y = x^2$  nemohla být vnořena (přenesena) na osu  $y$ . Proto se při jejím studiu omezíme na její projekci na rovinu  $(u, v)$  čtyřrozměrného prostoru, která je shodná s rovinou  $w = u + iv$ . Výsledkem této projekce je pak Riemannova plocha funkce  $w = z^2$ , která se skládá z rovin (podobně jako projekce paraboly z přímek, t. j. os  $y$ ).

Naše analogie objasňuje i to, proč nebereme v úvahu násobné body Riemannovy plochy, t. j. body, v nichž se protíná sama se sebou. Takové body se mohou vyskytnout při studiu promítaných geometrických obrazů. Pokládáme-li na př. křivku mající podobu osmičky v rovině (na př. lemniskatu) za průmět prostorové smyčky, tak jak je to znázorněno v obr. 31, nebudeme jistě brát v úvahu její násobné body (t. j. oně rovinné křivky).

Úplně obdobnými vlastnostmi se vyznačuje i funkce

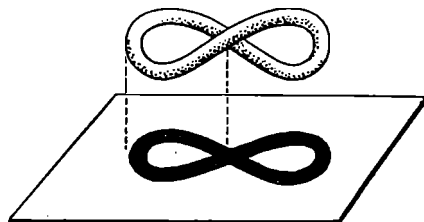
$$w = z^n \quad (5)$$

pro libovolné celistvé a kladné  $n$  (pro  $z = \infty$  definujeme  $w = \infty$ ). Vztah (5) přechází v polárních souřadnicích ve dvě rovnice mezi reálnými proměnnými  $r, \varrho$ , resp.  $\varphi, \psi$ :

$$\varrho = r^n, \quad \psi = n\varphi. \quad (6)$$

Jejich geometrický význam je zřejmý.

\*) V tomto prostoru jsou čtyři osy  $x, y, u, v$ . Každý pár těchto os určuje jednu souřadnou rovinu. Existuje tedy šest souřadných rovin. Jsou to roviny:  $(x, y)$ ,  $(x, u)$ ,  $(x, v)$ ,  $(y, u)$ ,  $(y, v)$ ,  $(u, v)$ .



Obr. 31.

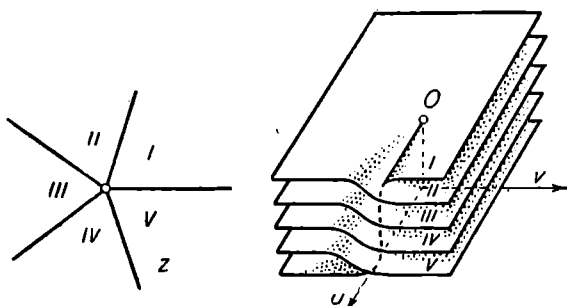
Aby zobrazení (5) bylo jedno-jednoznačné v oblasti  $D$ , je nutné a stačí, aby oblast  $D$  neobsahovala body, které mají tentýž modul a argumenty lišící se o násobek  $\frac{2\pi}{n}$ , neboť jen takové body mají při zobrazení (5) tentýž obraz. Speciálně je (5) jedno-jednoznačné v každém z  $n$  sektorů

$$\frac{2\pi}{n} k < \varphi < \frac{2\pi}{n} (k + 1), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1,$$

kteří se zobrazením (5) zobrazí na celou rovinu  $w$  s vyňatou kladnou reálnou poloosou. Vezmeme tedy  $n$  takových rovin, navrstvíme je na sebe a sklízíme pomocí polopaprsků ležících nad kladnou reálnou osou  $u$  jako na obr. 32 pro  $n = 5$ . Tyto paprsky budeme pokládat za různé a spojené pouze ve svých koncích ležících nad body  $w = 0$  a  $w = \infty$ . Takto sestrojená  $n$ -listá plocha se nazývá *Riemannova plocha funkce  $w = z^n$* .

Jak je vidět z rovnic (6), oběhne-li bod  $z$  po kružnici  $|z| = r$  bod

$z = 0$  jedenkrát, oběhne jemu odpovídající bod  $w$  bod  $w = 0$  po kružnici  $|w| = \rho$   $n$ -krát. Totéž platí i o bodu  $w = \infty$ . Proto nazveme body ležící nad bodem  $w = 0$  a  $w = \infty$  *body rozvětvení  $n$ -tého řádu*.



Obr. 32.

Funkce  $w = z^n$  pak zprostředkuje jedno-

jednoznačné spojitě zobrazení úplné roviny ( $z$ ) na Riemannovu plochu  $R$ . Jako zobrazení (1) je i zobrazení (5) konformní všude kromě bodů  $z = 0$  a  $z = \infty$ , kde násobí úhly právě  $n$ -krát.

**§ 25. Pojem regulární větve funkce.** Funkce  $w = \sqrt[n]{z}$ . Definice. Regulární funkce  $f(z)$  se nazývá v oblasti  $\Gamma$  *regulární větví* mnohoznačné funkce  $F(z)$  v této oblasti, jestliže v každém bodě  $z$  této oblasti jsou

hodnoty funkce  $f(z)$  shodny s některou z hodnot funkce  $F(z)$  v tomto bodě. Vezměme si na příklad funkci

$$w = \sqrt{z}, \quad (7)$$

která je inverzní k funkci  $z = w^2$ . Zprostředkuje jednoznačné zobrazení dvoulisté Riemannovy plochy  $R$  nad rovinou ( $z$ ) s body rozvětvení nad body  $z = 0$  a  $z = \infty$  na úplnou rovinu ( $w$ ). To si snadno ověříme takto: ze dvou hodnot  $\sqrt{z}$  jednu z nich (na př. pro  $y \neq 0$  tu z nich, která leží v horní polorovině ( $w$ )) budeme považovat za odpovídající bodu z listu (I) Riemannovy plochy  $R$  a druhou z nich (t. j. tu, která leží v dolní polorovině ( $w$ )) budeme považovat za odpovídající bodu z listu (II) Riemannovy plochy  $R$ . Při tom samozřejmě oba tyto body z listu (I) i (II) leží nad bodem  $z$  roviny ( $z$ ). Bodům  $z = 0$  a  $z = \infty$ , nad kterými leží jen po jednom bodě Riemannovy plochy, bude podle (7) odpovídat též jen po jednom bodu  $w$ . K těmto hodnotám se blíží obě hodnoty funkce  $\sqrt{z}$ , když se  $z$  blíží k 0 resp.  $\infty$ . Bod  $z = 0$  resp.  $z = \infty$  se nazývá *bodem rozvětvení*.

Jakým podmínkám musí vyhovovat oblast  $D$  roviny  $z$ , aby v ní existovala regulární větev naší funkce  $\sqrt{z}$ ? Dokážeme si, že geometricky tyto podmínky znamenají možnost rozprostření oblasti  $D$  bez jakýchkoliv výřezů (t. j. bez vyloučení kteréhokoliv bodu) na Riemannovu plochu  $R$  tak, aniž by se dotýkala bodů rozvětvení plochy  $R$ . Oblast se může přitom rozprostírat celá na jednom či druhém listě Riemannovy plochy nebo může přecházet z jednoho listu na druhý (asi tak jako koberec po schodech). Tak ku příkladu mezikružím  $1 < |z| < 2$  zřejmě není možno rozprostřít bez výřezů na naši plochu, ale lze již tak učiniti s tímtež mezikružím s výřezem podél poloměru.

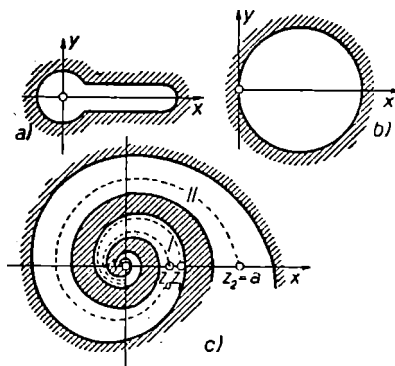
Zřejmě, je-li oblast  $D$  rozprostřena uvedeným způsobem po naší ploše, pak lze definovat  $\sqrt{z}$  pro hodnoty  $z$  oblasti  $D$  jako spojitou a jednoznačnou funkci. Hodnota této funkce v libovolném bodě oblasti je pak jednoznačně definována poukazem na to, v kterém listě Riemannovy plochy  $R$  tento bod leží. Podle věty o derivaci inverzní funkce existuje pak v každém bodě  $z$  plně definovaná derivace naší funkce

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2w} = \frac{1}{2\sqrt{z}},$$



kde  $\sqrt{z}$  je ta hodnota z rovnice (7), která je přiřazena bodu  $z$ . Je tedy takto sestrojená funkce regulární v oblasti  $D$  a je zřejmě regulární větví funkce  $\sqrt{z}$ .

Ku př. v mezikruží  $1 < |z| < 2$  s výřezem podél poloměru je možné sestrojit regulární větev  $\sqrt{z}$ . Na různých krajích výřezu bude tato



Obr. 33.

větev nabývat různých hodnot (lišících se co do znaménka). V úplném mezikruží  $1 < |z| < 2$  nemá funkce  $\sqrt{z}$  regulárních větví. V oblasti narysované na obr. 33a nebude mít  $\sqrt{z}$  též regulární větve, neboť tato oblast obsahuje bod rozvětvení naší funkce. V oblastech b) a c) téhož obr. budou regulární větve existovat, neboť body rozvětvení leží na hranici a nikoli uvnitř uvažované oblasti.

Jestliže oblast dovoluje spojitě rozprostření po Riemannově ploše

$R$ , je toto rozprostření možné dvěma způsoby. Tak na př. kruh z obr. 33b je možno rozprostřít buď tak, že nejprve umístíme vrchní půlkruh na list (I) a dolní na list (II) anebo naopak: horní půlkruh umístíme na list (II) a dolní na list (I). Těmito dvěma způsobům rozprostření odpovídají dvě různé regulární větve funkce  $\sqrt{z}$  v této oblasti, lišící se navzájem pouze znaménkem.

Poznamenejme k tomu, že zařazení bodu  $z$  do toho či onoho listu je určeno tím, jaká hodnota argumentu mu patří, neboť hodnota argumentu  $z$  definuje hodnotu  $\sqrt{z}$ . Je tedy možnost sestrojení regulární větve funkce  $\sqrt{z}$  v oblasti nerozlučně spojena s regularitou a jednoznačností funkce  $\text{Arg } z$  v této oblasti.

Objasňeme si tuto úlohu na příkladě oblasti z obr. 33c. Nejprve budeme v daném bodě, na příklad  $z_0 = 1$ , fixovati libovolnou hodnotu argumentu, budiž  $\varphi_0 = 0$ . Pak hodnota kořene  $(\sqrt{z_0})_0 = +\sqrt{1} = 1$ . Budeme nyní spojitě měnit  $z$  po cestě (I) zobrazené v obr. 33c. Pak bude hodnota  $\arg z$  vzrůstat od 0 do hodnot větších než  $\pi$  a potom opět klesat k nule. Zřejmě i hodnoty  $\sqrt{z}$  se budou spojitě měnit, přičemž v každém bodě budeme mít plně definovanou hodnotu kořene.

Protože pak v bodě  $z_1$  bude hodnota  $\arg z$  rovna nule, bude hodnota kořene  $\sqrt[n]{z_1}$  opět kladná. Naproti tomu půjdeme-li cestou (II), hodnoty  $\arg z^*$ ) budou ubývat od hodnoty 0 do  $-2\pi$ , a proto z výchozího bodu, kde bylo  $\sqrt[n]{z_0} = 1$ , přijdeme do bodu, kde bude hodnota odmocniny záporná

$$\sqrt[n]{ae^{-2\pi i}} = e^{-\pi i} \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{a}.$$

Uvažujme ještě rovinu  $z$  s výřezem podél kladné reálné poloosy. Tuto oblast je možno dvojím způsobem rozprostřít na Riemannovu plochu  $w = \sqrt{z}$  a každému z těchto rozprostření odpovídá jedna regulární větev funkce. Vezměme větev  $\sqrt{z}$  regulární v této oblasti a zobrazující ji na horní polorovinu (k tomu stačí počítat argumenty  $z$  od 0 do  $2\pi$ ). Jak vypadá obraz tohoto zobrazení? Ze  $z = w^2$  máme

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv.$$

Položíme v těchto rovnicích  $u = \alpha$  a vyloučíme  $v$ ; potom položíme  $v = \beta$  a vyloučíme  $u$  a dostaneme síť konformně ekvivalentní sítí kartézských souřadnic v rovině  $w$ :

$$x = \alpha^2 - \frac{y^2}{4\alpha^2}, \quad x = \frac{y^2}{4\beta^2} - \beta^2. \quad -x = \beta^2 - \frac{y^2}{4\beta^2}$$

Skládá se z parabol, jejichž osy jsou totožné s osou  $x$  (viz obr. 76).

Pro celá kladná  $n$  má funkce  $\sqrt[n]{z}$  vlastnosti zcela obdobné vlastnostem funkce  $\sqrt{z}$ . Je jednoznačná na odpovídající  $n$ -lísté Riemannově ploše nad rovinou ( $z$ ) a zobrazí ji na úplnou rovinu ( $w$ ). Představuje příklad t. zv. mnohoznačné analytické funkce (viz dále § 63). Dovoluje konstrukci jednoznačných regulárních větví v libovolné oblasti  $D$ , v níž je možno konstruovat jednoznačně větev funkce  $\text{Arg } z$ .

Jako další příklad mnohoznačné funkce uveďme funkci

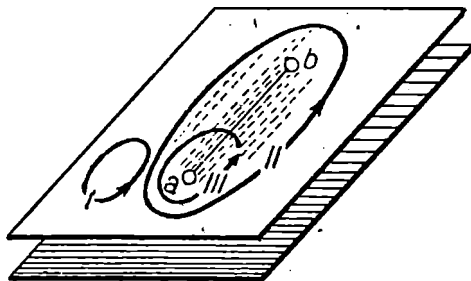
$$w = \sqrt{(z-a)(z-b)}. \quad (8)$$

Položíme  $z-a = r_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $z-b = r_2 e^{i\varphi_2}$  a dostaneme

$$w = \sqrt{r_1 r_2} e^{\frac{1}{2}i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

\*) Zde se uchýlíme od dohody § 2 —  $\arg z$  označuje hodnotu větve argumentu odlišné od hlavní hodnoty.

Vezmeme dvě roviny ( $z$ ) s výřezy podél úsečky  $\langle a, b \rangle$ . V každé z těchto rovin je možná konstrukce regulární větve funkce (8). Důkaz. Při proběhnutí cesty (I), uvnitř které nelží žádný z bodů  $a, b$ , vrací se argumenty  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  k původní hodnotě. Při proběhnutí cesty (II), uvnitř které leží oba body  $a, b$ , se každý z argumentů zvětší o  $2\pi$  a tedy i  $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$  se zvětší o  $2\pi$  a  $w$  nabude opět původní hodnoty. Cesta typu (III), která by jediná umožňovala změnu hodnoty  $w$ , není možná pro existenci výřezu  $\langle a, b \rangle$ .



Obr. 34.

Slepíme nyní obě roviny pomocí dvou úseček  $\langle a, b \rangle$ , které budeme kromě okrajových bodů považovat za různé, třebaže jsou zřejmě geometricky totožné. Takto vzniklou plochu nazveme opět Riemannovou plochou funkce  $w = \sqrt{(z - a)(z - b)}$ . Je zřejmě dvoulistá s dvěma body rozvětvení druhého řádu nad body  $z = a$  a  $z = b$ .\*) Funkce (8) je jednoznačná a spojitá na této ploše a zobrazí ji na úplnou rovinu ( $w$ ). Toto zobrazení není jedno-jednoznačné, protože funkce

$z = \frac{1}{2}(a + b) + \sqrt{\left(\frac{a - b}{2}\right)^2 + w^2}$  která je inverzní k (8), je dvouznačná na rovině  $w$ .

**§ 26. Funkce  $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$  a její Riemannova plůcha.** Stanovme podmínky jedno-jednoznačnosti zobrazení

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \quad (9)$$

\*) Nad bodem  $z = \infty$  nejsou listy Riemannovy plochy spojeny, třebaže obě hodnoty funkce (8) jsou v tomto bodě sobě rovny a rovnají se  $\infty$ . To si objasníme snadno sledováním chování funkce (8) v okolí bodu  $z = \infty$ . Jednomu oběhu kol dokola bodu  $z = \infty$  po kontuře (II) odpovídá jediný oběh bodu  $w = \infty$  a naopak. Doporučujeme čtenáři, aby se sám o tom přesvědčil.

Rovnici

$$(3) \rightarrow z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}$$

přepíšme do tvaru

$$(z_1 - z_2) \left( 1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0.$$

Z toho plyne, že pro  $z_1 \neq z_2$ ,  $z_1 z_2 = 1$ , t. j. zobrazení (9), zobrazí do jediného bodu ty a jen ty body  $z_1, z_2$ , pro které platí

$$z_1 z_2 = 1. \quad (10)$$

Pro jedno-jednoznačnost našeho zobrazení (9) tedy stačí a je nutné, aby oblast  $D$  neobsahovala žádné body vyhovující rovnici (10). Takové oblasti jsou na př. vnitřek nebo vnějšek jednotkové kružnice.

Pro objasnění geometrického obrazu našeho zobrazení položíme  $z = re^{i\varphi}$ ,  $w = u + iv$  a (9) přejde ve dvojici rovnic mezi reálnými proměnnými

$$u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \quad (11)$$

Z (11) plyne, že kružnice  $|z| = r < 1$  přejdou při zobrazení (9) v elipsy s poloosami

$$a_r = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right); \quad b_r = -\frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right),$$

jejichž ohniska jsou v bodech  $(\pm 1, 0)$ . Protože pro  $r < 1$  je  $r - \frac{1}{r}$  záporné, plyne z (11), že se zobrazením mění smysl oběhu. Pro  $r \rightarrow 0$  poloosy  $a_r \rightarrow \infty$ ,  $b_r \rightarrow \infty$ , při čemž  $a_r - b_r = r \rightarrow 0$ ; vidíme, že naše elipsy se zvětšují a postupně se zaokrouhlují. Pro  $r \rightarrow 1$  — poloosy  $a_r \rightarrow 1$ ,  $b_r \rightarrow 1$  a naše elipsy se tedy postupně smršťují v úsečku  $\langle -1, 1 \rangle$  osy  $u$ . Zobrazení (9) zobrazuje vzájemně jednoznačně kruh  $|z| < 1$  na vnějšek úsečky  $\langle -1, 1 \rangle$  reálné osy  $u$ .

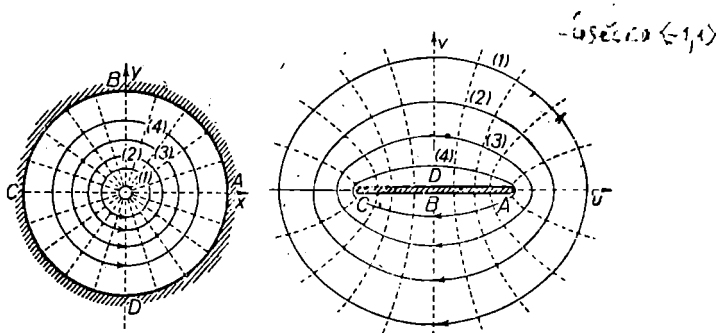
Kružnici  $|z| = 1$  odpovídá dvojnásob počítaná úsečka  $\langle -1, 1 \rangle$ , při čemž body  $-1$  a  $+1$  jsou samodružné (to plyne z (9)), a to tak, že vrchní půlkružnice se zobrazí na dolní část úsečky (plyne z (11) pro  $r \rightarrow 1$  — a  $\varphi \rightarrow \frac{1}{2}\pi$ ) a dolní půlkružnice se zobrazí na svrchní část

úsečky (plyne stejným způsobem z (11)). Vzájemné přiřazení bodů kružnice a roviny je zakresleno v obr. 35.

Svazek přímek  $\arg z = \varphi$  ortogonálních ke kružnicím  $|z| = r$  přejde, jak je vidět z rovnic (11) vyloučíme-li  $r$ :

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1,$$

ve svazek hyperbol orthogonálních k našim elipsám a majících tatáž ohniska  $(\pm 1, 0)$  (čárkované na obr. 35).



Obr. 35.

Z rovnic (11) plyne ještě, že kružnice  $|z| = r > 1$  se zobrazí zobrazením (9) na elipsy s poloosami

$$a_r = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right), \quad b_r = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right),$$

t. j. v tytéž elipsy jako výše, jenomže tentokrát se smysl oběhu nemění. Pro  $r \rightarrow 1$  je  $a_r \rightarrow 0$ ,  $b_r \rightarrow 0$  a elipsy se tedy smršťují v úsečku

$\langle -1, 1 \rangle$ . Pro  $r \rightarrow \infty$  je  $a_r \rightarrow \infty$ ,  $b_r \rightarrow \infty$ , při čemž  $a_r - b_r = \frac{1}{r} \rightarrow 0$

a elipsy se postupně zvětšují a zaokrouhlují. Zobrazí se tedy zobrazením (9) vnějšek kruhu jedno-jednoznačně na vnějšek úsečky  $\langle -1, 1 \rangle$ . Kružnice  $|z| = 1$  se zobrazí opět na úsečku  $\langle -1, 1 \rangle$  dvakrát počítanou, ale horní půlkružnice se nyní zobrazí na horní okraj úsečky a dolní půlkružnice na dolní okraj.

Z výše uvedeného plyne, že obrazem úplné roviny ( $z$ ) jsou dva listy

roviny ( $w$ ) s výřezem podél úsečky  $\langle -1, 1 \rangle$ , slepené podél této úsečky křížem. Takto sestavená plocha s body rozvětvení nad body  $w = \pm 1$  je Riemannovou plochou funkce  $w = \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right)$ . Geometricky se ničím neliší od Riemannovy plochy z obr. 34.

Inversní funkce k funkci (9)

$$z = w + \sqrt{w^2 + 1} \quad (12)$$

je jednoznačná na zkonstruované Riemannově ploše; různé hodnoty, jichž nabývá v bodě  $w$ , vztahujeme k dvěma rozličným bodům Riemannovy plochy, ležícím nad bodem  $w$  roviny ( $w$ ). Způsob konstrukce regulární funkce je zcela obdobný konstrukcím v předešlých případech.

Funkce (12) má dvě regulární větve (navzájem různé) vně úsečky  $\langle -1, 1 \rangle$  reálné osy  $u$ . Jedna z nich zobrazí vnějšek této úsečky na vnějšek, druhá tutéž oblast na vnitřek jednotkového kruhu roviny ( $z$ ).

Poznamenejme jěn, že tyto větve nelze tentokrát charakterizovat znaménkem kořene. Tak na př. ona regulární větev, která zobrazí vnějšek úsečky na vnějšek kruhu, má pro  $w = 2$  hodnotu  $2 + \sqrt{3}$  a pro  $w = -2$  hodnotu  $-(2 + \sqrt{3})$ .

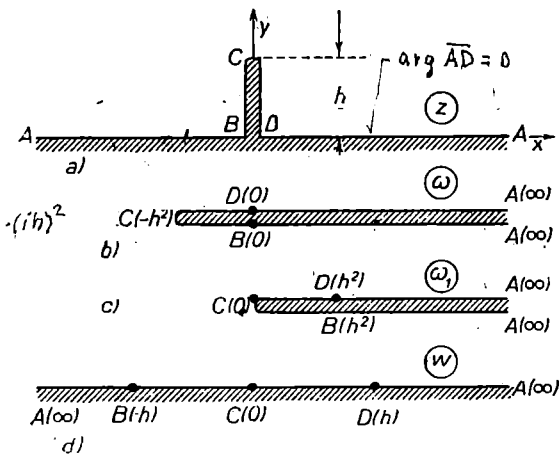
Obě zobrazení jsou jedno-jednoznačná a konformní všude vně úsečky  $\langle -1, 1 \rangle$ . Síť konformně ekvivalentních sdružených funkcí jsou nakresleny v obr. 35, kde vidíme, že síť konformně ekvivalentní síti polárních souřadnic je tvořena svazkem konfokálních elips a hyperbol.

**§ 27. Příklady.** Vlastností elementárních funkcí odvozených výše můžeme použít k řešení úloh o konformním zobrazení. Cílem takových úloh je konstrukce jedno-jednoznačného zobrazení zobrazujícího danou jednoduše souvislou oblast na kanonickou oblast (t. j. jednotkový kruh nebo půlrovinu). Jak uvidíme v další kapitole, mají úlohy tohoto druhu velký praktický význam.

Podle základní věty v § 23 má každá taková úloha v případě jednoduše souvislé oblasti nekonečně mnoho řešení (závisících na třech reálných parametrech). Její obecné řešení ovšem nelze vyjádřit elementárními funkcemi. Ukážeme si nyní řadu příkladů oblastí, kde je hledané konformní zobrazení řešitelné pomocí elementárních funkcí.

Příklad 1. V Hledejme jednoznačné konformní zobrazení horní poloroviny s výřezem velikosti  $h$  podél imaginární osy od počátku směrem do horní poloroviny (obr. 36a). Úloha spočívá v tom, abychom tak říkajíc „ubrali“ výřez a narovnali jej v část reálné osy. Abychom likvidovali úhly v bodech  $B$  a  $D$  hranice, je přirozené použít zobrazení

$$\omega = z^2, \quad (1)$$



Obr. 36.

poloose od  $O$  do  $-h^2$  (pro  $z = ih$ ,  $\omega = -h^2$ ); úsečka  $CB$  přejde ve spodní okraj úsečky na záporné poloose, paprsek  $BA$  (pro jehož body je  $\arg z = \pi$ ) ve spodní okraj reálné kladné poloosy. Oblast roviny  $z$  ležela při oběhu kontury  $ABCD$  stále vlevo a bude tedy ležet vlevo i odpovídající oblast v rovině  $(\omega)$  při oběhu kontury odpovídající kontuře  $ABCD$ . Vidíme tedy, že odpovídající oblastí je rovina  $(\omega)$  s výřezem podél reálné osy:  $\text{Im } \omega = 0$ ,  $\text{Re } \omega \geq -h^2$  (obr. 36b).  
 Po suneme si nyní počátek výřezu do počátku souřadnic transformací

$$\omega_1 = \omega + h^2, \quad (2)$$

Body  $B$  a  $D$  přejdou v body  $B$  a  $D$  reálné kladné poloosy roviny  $(\omega_1)$  s úsečkami  $+h^2$  (obr. 36c). V naší oblasti je možno konstruovat jednoznačnou větev funkce

$$w = \sqrt{\omega_1}. \quad (3)$$

při tom mají právě úhly  $\angle DCB$ , resp.  $\angle ABC$ , přejít v úhly velikosti  $\pi$ , t. j. vyrovnat se. Zobrazení  $\omega = z^2$  je v naší oblasti jednoznačné a tato operace je tedy možná. Při zobrazení přejde paprsek  $AD$  (pro jehož body je argument rovný nule) sám v sebe; úsečka  $DC$  (pro jejíž body je argument roven  $\frac{1}{2}\pi$ ) přejde v úsečku na záporné reálné

Při konstrukci budeme počítat argumenty bodů oblasti v intervalu od 0 do  $2\pi$ . Funkce  $w = \sqrt{\omega_1}$  zmenšuje úhly dvakrát a oblasti roviny ( $\omega_1$ ) odpovídá zřejmě horní polorovina (obr. 63d) a bodům  $A, B, C, D$  body  $\infty, +h, 0, -h$  v témže pořádku. <sup>25</sup>

Funkce  <sup>$\omega$</sup>  zprostředkující konformní zobrazení dané oblasti na polorovinu má tedy tvar

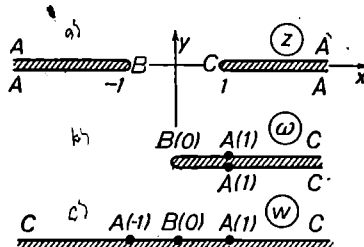
$$(\frac{1}{2}) \rightarrow w = \sqrt{\omega_1} \stackrel{(2)}{=} \sqrt{\omega + h^2} \stackrel{(1)}{=} \sqrt{z^2 + h^2}. \quad (13)$$

Příklad 2. Hledejme konformní zobrazení roviny ( $z$ ) s dvěma výřezy  $-\infty \leq x \leq -1$  a  $1 \leq x \leq \infty$  podél reálné osy na vrchní polorovinu. (Na kouli komplexních čísel se oba výřezy zřejmě stýkají v bodě  $\infty$  a oblast je tedy jednoduše souvislá). Lineární lomenou funkcí zobrazíme bod  $B$  do bodu  $O$  a bod  $C$  do bodu  $\infty$ :

$$\omega = \frac{z + 1}{z - 1}. \quad (14)$$

Naším dvěma výřezům odpovídá nyní jediný polopaprsek spojující  $O$  s  $\infty$  (viz obr. 37a,b). Protože (14) má pouze reálné koeficienty, odpovídají dosažení reálných  $z$  reálná  $\omega$  a výše zmíněný polopaprsek může být buď kladná nebo záporná reálná poloosa. Bod  $z = \infty$  přechází v bod  $\omega = 1$ , musí tedy ležet bod  $\omega = 1$  na výřezu a výřez je tedy tvořen kladnou poloosou. Nyní stačí jen odmocnit dvěma a máme hledané zobrazení

$$w = \sqrt{\omega} = \sqrt{\frac{z + 1}{z - 1}}. \quad (15)$$



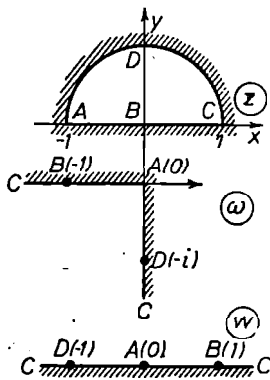
Obr. 37.

Příklad 3. Hledejme konformní zobrazení <sup>výřezaného</sup> půlkruhu  $|z| < 1, \text{Im } z > 0$  na horní polorovinu (obr. 38). Pomocí lineární lomené funkce můžeme zobrazit půlkružnici na polopřímku tak, že průměr zůstává



ležet na jisté přímce. K tomu stačí zobrazit jeden z konců průměru na bod  $\infty$  \*). To zprostředkuje na př. funkce

$$\omega = \frac{z + 1}{z - 1}.$$



Obr. 38.

Průměr  $AC$  se při tom zobrazí na tu reálnou poloosu, která obsahuje obraz bodu  $z = 0$ , t. j. bod  $\omega = -1$ , tedy na zápornou poloosu (viz předcházející př.). Půlkružnice se zobrazí též na poloosu  $O\infty$ , a to na tu, která je kolmá na obraz průměru (zobrazení je konformní!) a obsahuje obraz bodu  $z = i$ , t. j. bod  $\omega = \frac{i + 1}{i - 1} = -i$ , tedy na zápornou imaginární poloosu. Oblast v rovině  $\omega$  musí ležet vlevo od kontury  $ABC$  a je to tedy zřejmě celý třetí kvadrant  $\pi < \arg \omega < \frac{3}{2}\pi$ .

Zbývá jen aplikovat ještě zobrazení  $w = \omega^2$ , při němž se argument mění v intervalu od  $2\pi$  do  $3\pi$ ; obrazem našeho kvadrantu bude zřejmě horní polorovina. Máme tedy výsledek

$$w = \omega^2 = \left( \frac{z + 1}{z - 1} \right)^2. \quad (16)$$

Mohli bychom též zjistit přímo a najednou, že zobrazení

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

zobrazuje náš půlkruh na dolní polorovinu a zobrazení

$$w = -\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad (17)$$

je tedy také řešením naší úlohy. Odpovídající dvojice bodů budou ovšem pro oba případy různé. Tak pro zobrazení (17) máme:  $A \leftrightarrow 1$ ,  $B \leftrightarrow \infty$ ,  $C \leftrightarrow -1$ ,  $D \leftrightarrow 0$  a pro případ (16):  $A \leftrightarrow i$ ,  $B \leftrightarrow 1$ ,

\*) Jestliže zobrazíme na nekonečně vzdálený bod některý z bodů půlkružnice, který neleží na reálné ose, nebude obraz reálné osy obsahovat nekonečně vzdálený bod, t. j. bude kružnicí a nikoli přímkou.

$C \leftrightarrow \infty, D \leftrightarrow -1$ . Konstruujeme ještě doplňující zobrazení poloroviny  $\text{Im } w > 0$  na polorovinu  $\text{Im } W > 0$  převádějící body  $w = 0, 1, \infty$  v body  $W = 1, \infty, -1$  v tomtož pořádku. (Vzorec odvodíme podle (21) kap. II):

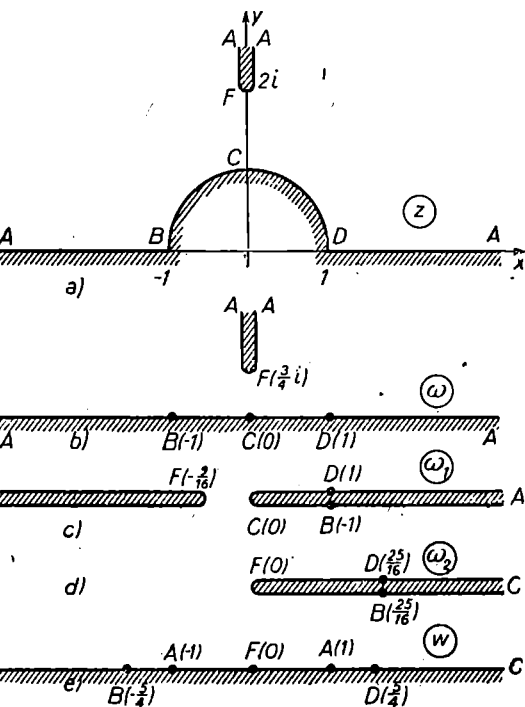
$$W = \frac{1+w}{1-w}$$

Dosadíme (16) a máme

$$\begin{aligned} W &= \frac{1 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2}{1 - \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Vidíme, že ve shodě s větou § 23 zobrazení (16) a (17) se dají navzájem převést pomocí lineární lomené funkce.

**Příklad 4.** Z horní poloroviny vyjmeleme vnitřek jednotkové kružnice a výřez podél imaginární osy  $y > 2$ ,  $x = 0$ . Hledejme zobrazení této oblasti na horní půlrovinu. Použijeme-li zobrazení



Obr. 39.

$$\omega = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)$$

(které je jedno-jednoznačné v naší oblasti), zobrazíme půlkružnici na úsečku do reálné osy, aniž tím principiálně změním ostatní části hranice oblasti (viz obr. 39a,b). Funkce

$$\omega_1 = \omega^2$$

zobrazí tuto oblast na rovinu s dvěma výřezy (obr. 39c). Zobrazením

$$\omega_2 = \frac{1}{\omega_1} \left( \omega_1 + \frac{9}{16} \right) = 1 + \frac{9}{16\omega_1}$$

převedeme naši oblast v rovinu s výřezem podél kladné reálné poloosy. Zbývá jen provést zobrazení

$$w = \sqrt{w_2}.$$

Hledané zobrazení je pak superposicí všech dílčích zobrazení a má tvar

$$w = \frac{\sqrt{4z^2 + 17z^2 + 4}}{2(z^2 + 1)}, \quad (18)$$

čímž je naše úloha vyřešena.

**§ 28. Profil Žukovského.** Příklad, který zde uvádíme, má velkou důležitost v theorii křídla letadla. Hledejme konformní zobrazení vnějšíku oblouku  $\widehat{AB}$  jisté kružnice na vnějšík oblouku kružnice  $C$  (obr. 40). Pomocí lineární lomené funkce

$$\zeta = \frac{z - 2}{z + 2} \quad (19)$$

zobrazíme vnějšík oblouku  $\widehat{AB}$  roviny ( $z$ ) na vnějšík polopřímky  $AB$  v rovině ( $\zeta$ ). Je

$$\left( \frac{d\zeta}{dz} \right)_{z=2} > 0$$

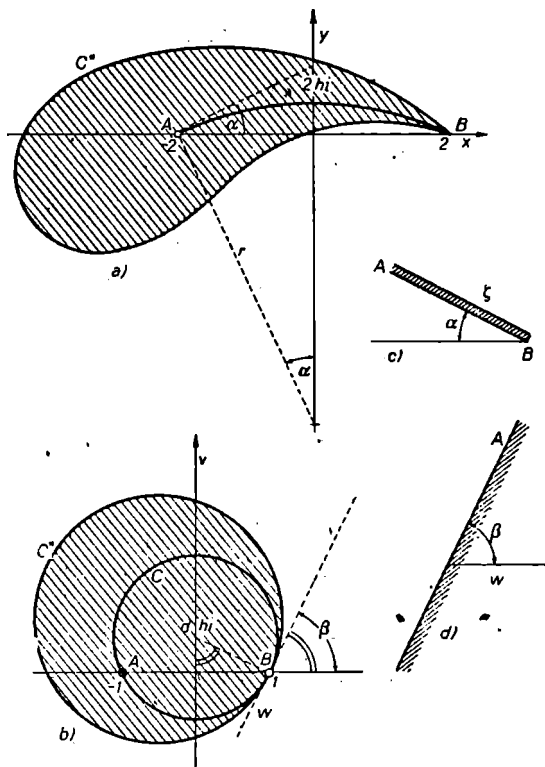
a sklon polopřímky, měřeno od záporné poloosy, je

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} h.$$

Z obr. 40a plyne:  $\sin \alpha = \frac{2}{r}$ ;  $\cos \alpha = \frac{r - 2h}{r} = 1 - h \sin \alpha$ , kde  $r$  je poloměr oblouku  $\widehat{AB}$  a tedy  $h = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$ . Dále místo toho, abychom hledali zobrazení naší nové oblasti na vnějšík oblouku

kruhu  $C$ , budeme se snažit najít inverzní zobrazení vnějšku kruhu na naši oblast. K tomu účelu opět použijeme lineární lomené funkce

$$\omega = \frac{w - 1}{w + 1}.$$



Obr. 40.

Přitom  $C$  přejde v přímku, která — protože  $\left(\frac{d\omega}{dw}\right)_{\omega=1} = > 0$  — bude s kladnou poloosou svírat úhel  $\beta = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} h$  (obr. 40b, odtud  $\cotg\beta = h$ ) a vnějšek kruhu přejde v polovinu ohraničenou touto přímkou. Zobrazení

$$\zeta = \omega^2 = \left( \frac{w-1}{w+1} \right)^2 \quad (20)$$

zobrazí tuto polovinu na vnějšík polopřímky svírající s kladnou poloosou úhel  $2\beta = \pi - 2 \arctg h = \pi - \alpha$ . Tímto způsobem dosáhneme toho, že obě polopřímky jsou shodné (obr. 40c). Vyloučením  $\zeta$  z rovnic (19) a (20) dostáváme hledané zobrazení

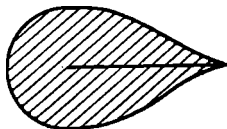
$$\left( \frac{w-1}{w+1} \right)^2 = \frac{z-2}{z+2}$$

a z poslední rovnice

$$z = w + \frac{1}{w}, \quad w = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - 4}). \quad (21)$$

Sestrojíme nejprve v rovině ( $w$ ) kružnici  $C^*$  dotýkající se kružnice  $C$  v bodě  $w = 1$ , Zobrazení (21) ji převede v jistou uzavřenou křivku  $*C$  roviny ( $z$ ), v jejímž vnitřku bude ležet oblouk  $\widehat{AB}$ . Křivka se dotýká oblouku v bodě  $z = 2$  a má tam tedy bod zvratu (obr. 40a). Křivka  $*C$  připomíná svým tvarem profil křídla.

Právě popsaná metoda zkoumání profilu křídel pochází od znamenitého ruského vědce N. J. Žukovského. Profil získaný tímto způsobem se nazývá *profil Žukovského* a jeho výpočet je velmi prostý.



Obr. 41.

Nikolaj Jegorovič Žukovskij (1847—1921) první použil v širokém měřítku metody konformního zobrazení v hydro- a aeromechanice. Jeho práce byly základem theorie vzduchoplavby.

Tvar uvedených profilů Žukovského závisí na dvou parametrech:  $h$  — který charakterisuje *prohnutí* křídla a  $d$  — který je vzdáleností středů kružnice  $C$  a  $C^*$  a charakterisuje *tloušťku* křídla.

V speciálním případě pro  $h = 0$  je profil symetrický podle osy (obr. 41).

**§ 29. Exponenciální funkce a její Riemannova plocha.** Exponenciální funkci komplexní proměnné budeme definovat vztahem

$$w = e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (22)$$

Ve speciálním případě dostaneme pro  $x = 0$  známý Eulerův vzorec

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

který můžeme považovat za definici ryze imaginární mocniny čísla  $e$  (viz § 2). Pro reálná  $z = x$  funkce (22) je totožná s obyčejnou exponenciální funkcí reálné proměnné. Pro komplexní hodnoty  $z$  má všechny vlastnosti této reálné exponenciální funkce. Tak na př.

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2} \end{aligned} \quad (23)$$

nebo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z \quad (24)$$

(viz př. 3a ke kap. I.). To ověřuje naši definici (22).

Zbývá ukázat, že funkce  $e^z$  má ještě některé nové vlastnosti. Tak na př. že je *periodická s imaginární periodou  $2\pi i$ , neboť zřejmě pro libovolné  $k$  celé plyne ze vzorce (23)*

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z.$$

Funkce  $e^z$  je též *regulární v celé otevřené rovině*, neboť  $z$  (22) máme ihned

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y,$$

t. j. podmínky Cauchy-Riemannovy jsou splněny pro všechna komplexní  $z$ . Diferencovatelnost obou funkcí  $u$  a  $v$  je zřejmá (viz § 14).

Podobně jako v analýze reálné proměnné platí o derivaci

$$\frac{de^z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z. \quad (26)$$

Abychom si objasnili vlastnosti zobrazení  $w = e^z$ , položíme  $z = x + iy$ ,  $w = \varrho e^{i\varphi}$  a z rovnice (22) dostaneme

$$\varrho = e^x, \quad \varphi = y.$$

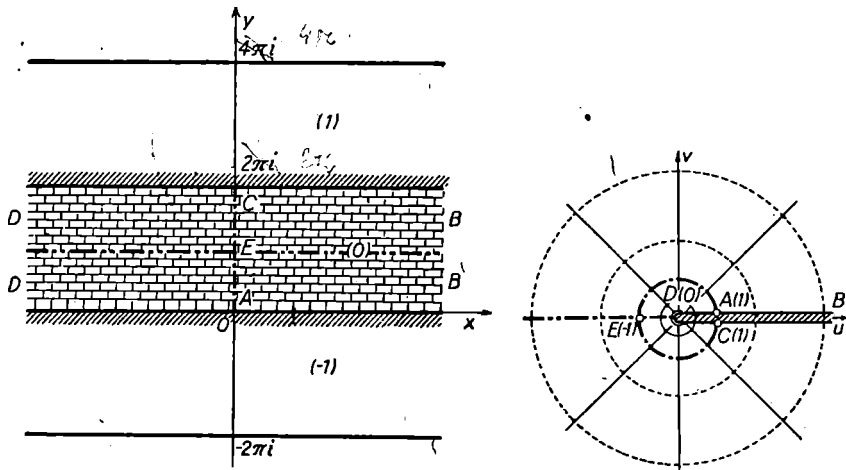
Zkoumejme podmínky pro jedno-jednoznačnost zobrazení. Z rovnice  $w_1 = w_2$  čili  $\varrho_1 = \varrho_2$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$  vyplývá  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2 + 2k\pi$  čili

$$z_1 - z_2 = 2k\pi i, \quad (28)$$

kde  $k$  je libovolné celé číslo. Aby zobrazení  $w = e^z$  bylo jedno-jednoznačné v oblasti  $D$ , je nutné a stačí, aby oblast  $D$  neobsahovala žádné dva body vyhovující rovnicím (28).

Těmto podmínkám vyhovují pásy rovnoběžné s osou  $x$  o šířce  $2\pi$ , na př. pásy

$$\left. \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ 2k\pi < y < 2(k+1)\pi \end{array} \right\} k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Obr. 42.

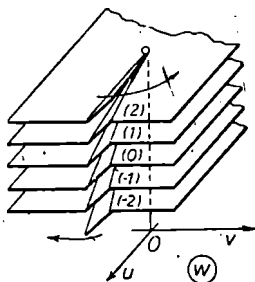
Každému takovému pásu odpovídá oblast bodů  $w$ , pro které platí

$$0 < \rho < \infty, \quad 2k\pi < \varphi < 2(k+1)\pi,$$

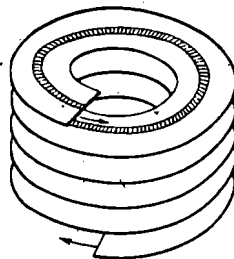
t. j. rovina ( $w$ ) s výřezem podél kladné reálné poloosy. Při tom přímky  $y = \text{const}$  přecházejí v polopaprsky  $\varphi = \text{const}$  a úsečky na přímkách  $x = \text{const}$  (pokud leží v pásu) v kružnice. Funkce  $w = e^z$  zobrazí konformně a jedno-jednoznačně pás  $-\infty < x < \infty, 0 < y < \pi$  šířky  $\pi$  na horní polorovinu, zápornou část tohoto pásu na jednotkový kruh atd. (viz obr. 42).

Hranicím každého pásu odpovídají okraje výřezu, a to spodním hranicím horního okraje a horním spodní okraje. Abychom zkonstruovali jedno-jednoznačný a spojitý obraz roviny ( $z$ ), nutno vzít

nekonečně mnoho rovin ( $w$ ) s výřezy podél reálné poloosy  $u$ ; každému číslu  $k$  přiřadit jeden list ( $k$ ) a slepit je v tom pořádku, jak jsou na sebe přilepeny odpovídající pásy v rovině ( $z$ ). Začneme s rovinou (0) a ke spodnímu okraji jejího výřezu přilepíme horní okraj výřezu roviny (1). K volnému (spodnímu) okraji výřezu roviny (1) připojíme horní okraj výřezu roviny (2) atd., aniž tuto operaci ukončíme. V rovině (0) zůstal ještě volným horní okraj výřezu a ten nyní spojíme s dolním okrajem výřezu roviny ( $-1$ ). Volný horní okraj výřezu roviny ( $-1$ ) spojíme s dolním okrajem výřezu roviny ( $-2$ ) a tak opět bez ustání pokračujeme do nekonečna. Viz obr. 43.



Obr. 43.



Obr. 44.

Konstruovaná plocha o nekonečně mnoha listech tvoří *Riemannovu plochu funkce  $e^z$* . Funkce  $e^z$  zobrazí jedno-jednoznačně a konformně plochu na otevřenou rovinu  $z$ .\*)

Pro ujasnění uvažujeme zobrazení vertikálního pásu  $0 < x < a$ . Tento pás se zřejmě zobrazí na nekonečný závit nad mezikružím  $1 < |w| < e^a$ , podobný šroubové ploše (konoidu). Viz obr. 44.

Dodejme ještě, že naše funkce nikde nenabývá hodnot  $w = 0$  a  $w = \infty$  a že se tedy nad těmito body nerozprostírá plocha  $R$ . Budeme-li obházet bod  $w = 0$  nebo bod  $w = \infty$  po ploše  $R$  po křivce ležící nad kružnicí  $|w| = r$  v jednom směru, obejdeme tyto body, jak ukazuje

\*) Nemůžeme spojitě pokračovat naše zobrazení do bodu  $z = \infty$ , neboť  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$  neexistuje (pro  $z \rightarrow \infty$  po kladné reálné poloose  $e^z \rightarrow 0$ , jestliže  $z \rightarrow \infty$  po záporné reálné poloose  $e^z \rightarrow 0$ ).



obr. 44, nekonečně mnohokrát. Z tohoto důvodu nazýváme body  $w = 0$  a  $w = \infty$  body rozvětvení nekonečně velkého řádu. Tyto body nepatří ploše  $R$ .

**§ 30. Logaritmická funkce.** Logaritmickou funkci budeme definovat jako funkci inverzní k funkci exponenciální, t. j.

$$w = \text{Ln}z, \quad (29)$$

jestliže platí

$$e^w = z. \quad (30)$$

Položíme  $z = re^{i(\varphi + 2k\pi)}$ ,  $w = u + iv$  a z (30) dostaneme

$$e^u = r, \quad v = \varphi + 2k\pi.$$

Z toho  $u = \ln r = \ln|z|$ ,  $v = \varphi + 2k\pi = \text{Arg}z$  a

$$w = \text{Ln}z = \ln|z| + i \text{Arg}z. \quad (31)$$

Logaritmická funkce je nekonečně mnohoznačná a zobrazí Riemannovu plochu funkce  $z = e^w$  na rovinu ( $w$ ). Je definována pro všechna konečná  $z \neq 0$ , neboť funkce  $e^w$  nenabývá hodnoty nula pro žádné  $w$  (to je patrné z (31) nebo z toho, že  $\text{Arg}z$  není definován pro  $z = 0$ ).

Nad body  $z = 0$  a  $z = \infty$ , jak jsme již viděli v předešlém paragrafu (t. j. nad body  $w = 0$  a  $w = \infty$  v označení předešlého §), leží body rozvětvení naší funkce. Nazývají se logaritmické body rozvětvení a jsou zřejmě nekonečně velkého řádu.

Ze vztahu (31) plyne ještě

$$e^{\text{Ln}z} = z; \quad \text{Ln}e^z = z + 2k\pi i. \quad (32)$$

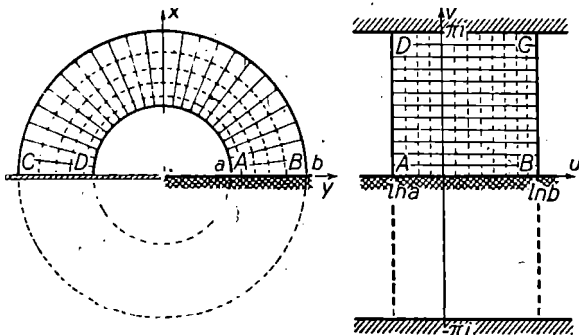
Funkce  $w = \text{Ln}z$  je další příklad mnohoznačné analytické funkce (viz § 63). Podle své definice dovoluje funkce  $w = \text{Ln}z$  konstrukci regulárních větví v těch a jen v těch oblastech, kde je možno konstruovat jednoznačné větve funkce  $\text{Arg}z$ . Budiž na př. oblastí  $D$  rovina ( $z$ ) s výřezem podél záporné reálné poloosy. Tuto oblast možno zřejmě nekonečně mnoha způsoby rozprostřít na Riemannovu plochu funkce  $e^w$ . Učiníme to tak, že vrchní polorovina leží na listu (0) a dolní polorovina na listu (— 1). Pak  $v = \text{Arg}z$  se mění v intervalu od  $-\pi$  do  $\pi$  a je totožná s hlavní hodnotou argumentu, kterou jsme v § 2

označili symbolem  $\arg z$ . Získanou jednoznačnou větev funkce  $\operatorname{Ln}z$  budeme analogicky nazývat *hlavní hodnotou logaritmu* a označíme ji symbolem

$$w = \operatorname{Ln}z = \ln|z| + i \arg z. \quad (33)$$

Tato funkce je *regulární* v uvažované oblasti, protože podle věty o derivaci inverzní funkce existuje

$$\frac{d\operatorname{Ln}z}{dz} = \frac{1}{de^w} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}. \quad (34)$$



Obr. 45.

Funkce (33) zobrazí jedno-jednoznačně a konformně (protože podle (34)  $\frac{d\operatorname{Ln}z}{dz} \neq 0$ ) rovinu s výřezem podél záporné reálné poloosy\*) na pás  $-\pi < v < \pi$ . Na různých okrajích výřezu nabývá různých hodnot.

Horní polorovina se přitom zobrazí na pás  $0 < v < \pi$ , polomezikruží  $y > 0$ ,  $a < |z| < b$  na čtyřúhelník atd. (obr. 45).

Pro reálné hodnoty  $z$   $\arg z = 0$  a  $\operatorname{Ln}z = \ln|z|$  přechází v obyčejný logaritmus reálné proměnné. Můžeme tedy považovat funkci (33) za „prodloužení“ logaritmu do komplexní roviny. Čtenář si snadno dokáže, že funkce (33) má i vlastnost obyčejného logaritmu

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln}z_1 + \operatorname{Ln}z_2. \quad (35)$$

ovšem jen pro taková  $z_1, z_2$ , jejichž argumenty i součet jejich argumentů leží v intervalu  $(-\pi, \pi)$ . Hodnoty funkce  $\operatorname{Ln} z$  dostaneme z hodnot funkce  $\operatorname{Ln} z$  připočtením příslušného celistvého násobku  $2\pi i$ .

**§ 31. Goniometrické a hyperbolické funkce.** Budeme si definovat *goniometrické funkce* komplexní proměnné vztahy

$$\left. \begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), & \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\ \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z}, & \operatorname{cotg} z &= \frac{1}{\operatorname{tg} z}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Pomocí Eulerova vzorce si čtenář snadno dokáže, že pro reálná  $z$  jsou tyto funkce totožné s obyčejnými goniometrickými funkcemi reálné proměnné. Zachovávají mnohé jejich vlastnosti. Tak na př. z periodicity funkce  $e^z$  plyne i periodičita funkcí (36); funkce  $\sin z$  a  $\cos z$  mají periodu  $2\pi$  a funkce  $\operatorname{tg} z$  a  $\operatorname{cotg} z$  mají periodu  $\pi$ . Ověříme si ještě platnost adičního teoremu pro  $\sin z$ :

$$\begin{aligned} \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 &= \frac{1}{2i}(e^{iz_1} - e^{-iz_1}) \frac{1}{2}(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + \\ &+ \frac{1}{2}(e^{iz_1} + e^{-iz_1}) \frac{1}{2i}(e^{iz_2} - e^{-iz_2}) = \frac{1}{2i}[e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}] = \\ &= \sin(z_1 + z_2). \end{aligned} \quad (37)$$

Stejně bychom si ověřili i platnost ostatních vztahů mezi goniometrickými funkcemi.

Ze vztahů (36) a vzorce pro derivaci exponenciální funkce plynou rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d \sin z}{dz} &= \cos z, & \frac{d \cos z}{dz} &= -\sin z, & \frac{d \operatorname{tg} z}{dz} &= \frac{1}{\cos^2 z}, \\ & & \frac{d \operatorname{cotg} z}{dz} &= -\frac{1}{\sin^2 z}. \end{aligned} \quad (38)$$

Z nich bezprostředně plyne regularita goniometrických funkcí  $\sin z$  a  $\cos z$  v celé otevřené rovině ( $z$ ) a funkcí  $\operatorname{tg} z$  pro body  $z \neq (2k+1)\frac{1}{2}\pi$  a funkce  $\operatorname{cotg} z$  pro body  $z \neq k\pi$ . Ne ovšem všechny vlastnosti goniometrických funkcí reálné proměnné zůstanou zachovány při jejich

prodloužení do komplexní roviny. Tak na př. nemůžeme tvrdit, že by funkce  $\sin z$ , resp.  $\cos z$ , měly vždy modul menší než 1. Je na př.

$$\cos i = \frac{1}{2}(e + e^{-1}) \doteq 1,54, \quad \sin i = \frac{1}{2i}(e^{-1} - e) \doteq -1,17i.$$

Prozkoumejme blíže jako příklad zobrazení zprostředkované funkcí

$$w = \cos z. \quad (39)$$

Jak plyne z rovnice (36), můžeme je pokládat za superposici tří zobrazení

$$(I) \zeta = iz, \quad (II) \omega = e^{\zeta}, \quad (III) w = \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right), \quad (40)$$

z nichž každé jsme už vyšetřili dříve. Nejprve pokud se týká jedno-jednoznačnosti zobrazení (39). Nechť oblast  $D$  se zobrazí zobrazením (I) na  $D_1$ , při (II) přejde  $D_1$  v  $\Delta_1$  a při (III) přejde  $\Delta_1$  v  $\Delta$ . Zobrazení (I) je jedno-jednoznačné všude, k jedno-jednoznačnosti (II) je nutné a stačí, aby  $D_1$  neobsahovala body, pro něž  $\zeta_1 - \zeta_2 = 2k\pi i$  (viz (28)), t. j. aby  $D$  neobsahovala body, pro něž

$$z_1 - z_2 = 2k\pi. \quad (41)$$

Pro jedno-jednoznačnost (III) je nutné a stačí, aby  $\Delta_1$  neobsahovala body, pro něž  $\omega_1\omega_2 = 1$  [viz (10)], t. j. aby v  $D$  neležely body, pro něž  $e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} = e^{i(z_1 + z_2)} = 1$ , to jest body, pro které platí

$$z_1 + z_2 = 2k\pi. \quad (42)$$

Pro jedno-jednoznačnost zobrazení (39) tedy je nutné a stačí, aby oblast  $D$  neobsahovala body vyhovující některé z rovnic (41), (42). Této podmínce vyhovují na př. polopásky

$$0 < x < 2\pi, \quad y > 0.$$

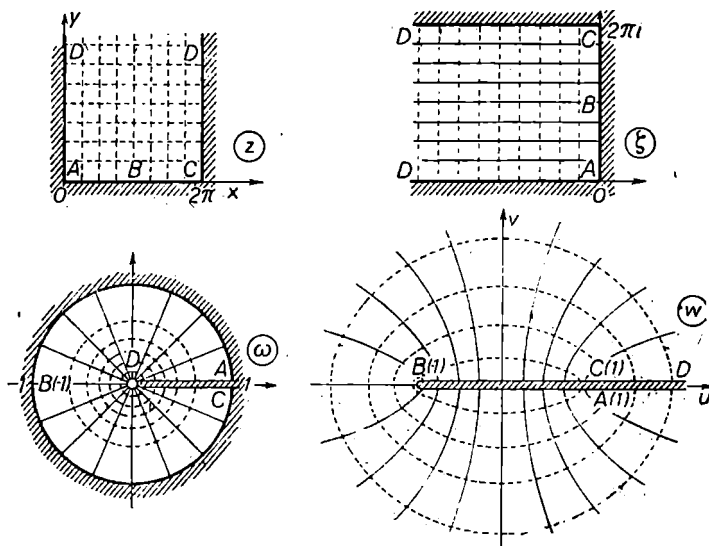
Na obr. 46 jsou vyznačeny postupné etapy našeho zobrazení. Výše zmíněný polopás se zobrazí na rovinu ( $w$ ) s výřezem  $-1 \leq u \leq \infty, v = 0$  podél reálné osy.\*) Riemannova plocha funkce  $w = \cos z$  bude mít složitější strukturu než předešlé. Bude zřejmě nekonečně

\* Pro vyjasnění etapy (III) si vzpomeňme (§ 26), že jednotkový kruh se zobrazil vně úsečky  $\langle -1, 1 \rangle$  a výřezu podél poloměru přitom odpovídá úsečka  $(1, \infty)$  reálné osy.

mnoholistá a podrobnější zkoumání ukazuje, že bude mít nekonečně mnoho bodů rozvětvení druhého řádu ležících nad body  $w = \pm 1$  a logaritmický bod rozvětvení nad bodem  $w = \infty$ . Ležce si ověříme, že na př. obrazem reálné osy roviny ( $z$ ) na této ploše je nekonečná klikatá čára složená z nekonečně mnoha úseček  $(-1, 1)$ .

Funkce

$$\operatorname{sin} z = \cos\left(z - \frac{1}{2}\pi\right)$$



Obr. 46.

a s ní i zobrazení jí zprostředkované se liší od předešlé jen posunutím roviny ( $z$ ). Zobrazení zprostředkovaná funkcemi  $\operatorname{tg} z$  a  $\operatorname{cotg} z$  se zkoumají zcela obdobným způsobem.

Funkce inverzní k funkcím (36) se nazývají *cyklometrické funkce* komplexní proměnné. Protože jsou všechny Riemannovy plochy funkcí (36) nekonečně mnoholisté, jsou cyklometrické funkce nekonečně mnohoznačné. Jsou to opět další mnohoznačné analytické funkce (viz § 63): Funkce (36) jsme vyjádřili pomocí exponenciální funkce a je tedy nasnadě se domnívat, že funkce cyklometrické

budou mít vyjádření pomocí funkce logaritmické. Najdeme si takové vyjádření aspoň pro jednu z nich, na př. pro  $w = \text{Arccos } z$ . Z definice  $w = \text{Arccos } z$  máme

$$z = \cos w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw}),$$

z toho

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

a

$$w = \text{Arccos } z = -i \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

V důsledku vztahu

$$\frac{1}{z - \sqrt{z^2 - 1}} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

znamená změna znaménka před odmocninou změnu znaménka před logaritmem a protože v posledním vzorci jak logaritmus tak odmocnina jsou víceznačné funkce, můžeme znaménko potlačit:

$$w = \text{Arccos } z = i \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}). \quad (43)$$

Právě odvozený vztah zřejmě značí, že je možno pro  $\text{Arccos } z$  konstruovat jednoznačnou regulární větev na př. v rovině ( $z$ ) s výřezem  $-1 \leq x < \infty$ ,  $y = 0$  podél reálné osy. Tuto větev budeme značit  $\text{arccos } z$  a nazývat *hlavní hodnota arkuskosinu*.

Podobné vzorce můžeme odvodit i pro ostatní cyklometrické funkce:

$$\left. \begin{aligned} \text{Arcsin } z &= \frac{1}{2}\pi - \text{Arccos } z = \frac{1}{2}\pi - i \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}); \\ \text{Arctg } z &= \frac{1}{2}\pi - \text{Arccotg } z = \frac{1}{2i} \text{Ln} \frac{i - z}{i + z}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Hyperbolické funkce komplexní proměnné

$$\begin{aligned} \sinh z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), & \cosh z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \\ \text{tgh } z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}, & \text{cotgh } z &= \frac{1}{\text{tgh } z} \end{aligned} \quad (45)$$

se dají vyjádřit velmi jednoduše pomocí goniometrických funkcí:

$$\begin{aligned} \sinh z &= -i \sin iz, & \cosh z &= \cos iz, & \text{tgh } z &= -i \text{tg } iz, \\ \text{cotgh } z &= i \text{cotg } iz \end{aligned} \quad (46)$$

a nijak podstatně se od nich neliší. *Hyperbolometrické funkce* komplexní proměnné jsou definovány jako inverzní funkce k funkcím (45). Dají se jednoduše vyjádřit pomocí logaritmu:

$$\begin{aligned} \operatorname{Argsin} z &= \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}), & \operatorname{Argcos} z &= \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \operatorname{Argtg} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, & \operatorname{Argcotg} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}. \end{aligned} \quad (47)$$

**§ 32. Obecná exponenciální funkce.**  $w = z^a$ , kde  $a = \alpha + i\beta$  je libovolné komplexní číslo, je definována rovnicí

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}. \quad (48)$$

Položíme-li  $z = re^{i\varphi}$ , dostaneme  $\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$  a tedy

$$z^a = e^{(\alpha+i\beta) \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{i[\alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta \ln r]}. \quad (49)$$

Z (49) je vidět, že funkce  $z^a$  je pro  $\beta \neq 0$  nekonečně mnohoznačná a její hodnoty pro pevná  $z$  a  $a$  leží na soustavě kružnic

$$|w| = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

jejichž poloměry

$$\varrho_k = e^{\alpha \ln r - \beta\varphi} \cdot e^{-2k\pi\beta} = \varrho_0 e^{-2k\pi\beta} \quad (50)$$

tvoří dvě geometrické posloupnosti s kvocientem  $e^{-2\pi\beta}$  pro kladná  $k$  a kvocientem  $e^{2\pi\beta}$  pro záporná  $k$ . Přitom argumenty hodnot funkce  $z^a$  tvoří aritmetické posloupnosti

$$\varphi_k = \alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta \ln r = \varphi_0 + 2k\pi\alpha \quad (51)$$

s diferencemi  $\pm 2\pi\alpha$ . Pro  $\beta = 0$ , t. j. pro reálná  $a$ , leží všechny hodnoty, jak je ihned vidět z (50), na kružnici

$$|w| = e^{a \ln r} = r^a. \quad (52)$$

Z (51) plyne, že argumenty těchto hodnot jsou

$$\varphi_k = a\varphi + 2k\pi\alpha. \quad (53)$$

Budiž  $a$  racionální číslo, pak je můžeme psát ve tvaru  $a = \frac{p}{q}$ , kde  $p, q$  jsou dvě nesoudělná celá čísla, a mezi hodnotami (53) je jen  $q$  různých hodnot argumentu  $\varphi_k$  definujících různé hodnoty funkce  $z^a$ .

Důkaz: položíme-li v (53)  $k = 0, 1, 2, \dots, q-1$ , pak mezi hodnotami  $\varphi_k$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= a\varphi, \quad \varphi_1 = a\varphi + 2\pi \frac{p}{q}, \quad \varphi_2 = a\varphi + \frac{p}{q} 4\pi, \dots, \\ \varphi_{q-1} &= a\varphi + \frac{p}{q} (q-1) 2\pi \end{aligned} \quad (54)$$

se žádné dvě nebudou lišit o celistvý násobek  $2\pi$ , neboť jestliže pro některé celé  $k < q$   $k \frac{p}{q}$  bude rovno celému číslu  $n$ , pak  $\frac{p}{q} = \frac{n}{k}$  představuje zlomek s jmenovatelem menším než  $q$ , což je proti předpokladu o nesoudělnosti čísel  $p$  a  $q$ . Naopak všechna ostatní  $k$  dají pouze hodnoty  $\varphi_k$  lišící se od (54) o násobek  $2\pi$ .

Vidíme tedy, že pro racionální  $a = \frac{p}{q}$  se funkce  $z^a$  shoduje s funkcí  $\sqrt[q]{z^p}$ :

$$z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p},$$

(viz §§ 4 a 25) a je tedy *konečně víceznačná*.

Pro *irracionální* (reálná)  $a$  mezi hodnotami (53) se žádné dvě neliší navzájem o násobek  $2\pi$ , neboť kdyby pro dvě celá čísla  $k_1, k_2, k_1 \neq k_2$  bylo  $2k_1\pi a - 2k_2\pi a = 2\pi n$ , kde  $n$  je celé, bylo by  $a = \frac{n}{k_1 - k_2}$  racionální, což není možné. Je tedy v tomto případě funkce

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$$

*nekonečně mnohoznačná* a dává nám tak příklad další mnohoznačné analytické funkce.

#### Příklad 1. Funkce

$$w = z^i = e^{-(\varphi + 2k\pi)} e^{i \ln r}$$

je definována pro  $z \neq 0, \pm \infty$  a je nekonečně mnohoznačná. Pro pevné  $z$  se její hodnoty rozprostírají na polopaprsku  $\arg w = \ln r$  tak, že jejich moduly tvoří dvě geometrické posloupnosti s kvocienty  $e^{\pm 2\pi}$ . Hodnoty odpovídající kladným  $k$  konvergují k bodu  $w = 0$



a body odpovídající záporným  $k$  k bodu  $w = \infty$ . V případě  $r = 1$  jsou všechny tyto hodnoty reálné.

**Příklad 2. Funkce**

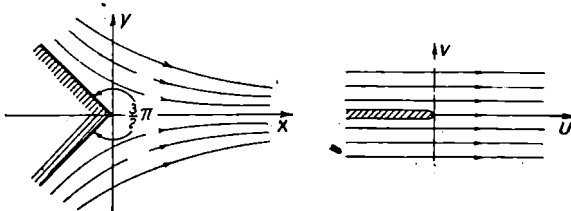
$$w = z^i = e^{i \ln r} \cdot e^{i(\varphi + i3k\pi)} = \sqrt[r^3]{r^3} e^{i(\varphi + 2k\pi)}$$

je čtyřznačná. Abychom získali všechny její hodnoty, nutno postupně dosazovat za  $k$  čísla 0, 1, 2, 3 ( $k = 4$  nedává nic nového, dostaneme tytéž hodnoty jako pro  $k = 0$ ).

**Příklad 3. Funkce**

$$w = z^\pi = r^\pi e^{i(\pi\varphi + 2k\pi^2)}$$

je nekonečně mnohoznačná. Její hodnoty leží pro pevné  $z$  na kružnici  $|w| = r^\pi$ , při čemž je možno dokázat, že jsou po ní rozprostřeny všude stejně hustě.



Obr. 47.

Regulární větve obecné exponenciální funkce, jak je vidět ihned z její definice, možno konstruovat všude tam, kde je možno konstruovat jednoznačnou větev funkce  $\text{Arg } z$ . Tak na př. je tato konstrukce možná v rovině s výřezem podél záporné reálné poloosy (*hlavní hodnota*). Tato větev je regulární, neboť podle věty o derivaci složené funkce a vztahu (34) existuje derivace

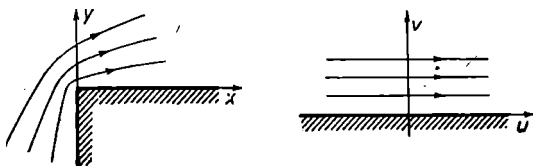
$$\frac{dz^a}{dz} = \frac{de^{a \ln z}}{dz} = e^{a \ln z} \frac{a}{z} = az^{a-1}. \quad (55)$$

Omezme se na případ kladných reálných  $a$ . Pro  $a > 1$  zprostředkuje hlavní hodnota  $z^a$  jedno-jednoznačné a konformní zobrazení výseče

$-\frac{\pi}{a} < \arg z < \frac{\pi}{a}$  na rovinu ( $w$ ) s výřezem podél záporné poloosy

(viz obr. 47 pro  $a = \frac{4}{3}$ ). Výseč  $0 < \arg z < \frac{\pi}{a}$  se při tom zobrazí na horní polorovinu.

Pro  $a < 1$  není možné jedno-jednoznačné zobrazení na rovinu s výřezem. Pro hodnoty  $\frac{1}{2} < a < 1$  je však možné jedno-jednoznačné zobrazení sektoru  $0 < \arg z < \frac{\pi}{a}$  na horní polorovinu (viz obr. 48 pro  $a = \frac{2}{3}$ ).



Obr. 48.

**§ 33. Příklady.** Uvedeme ještě řadu příkladů řešení úlohy o konformním zobrazení pomocí elementárních funkcí.

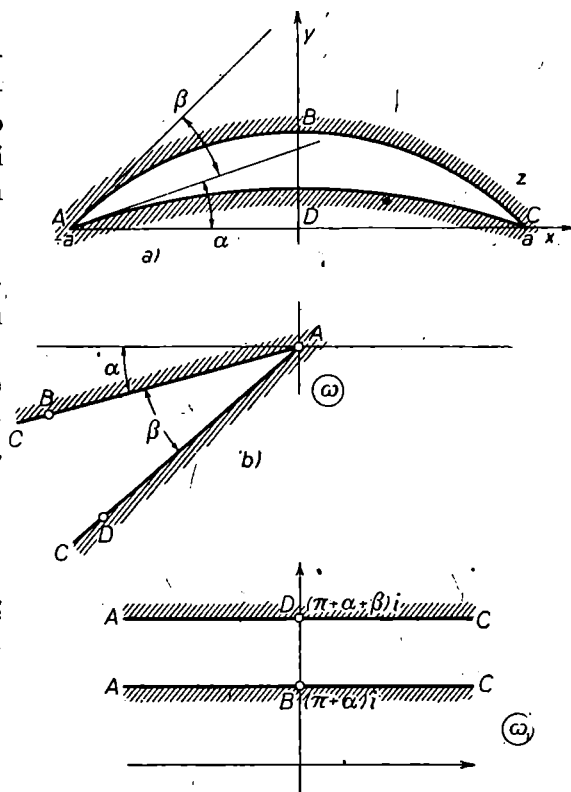
**Příklad 1.** Hledíme zobrazení srpku z obr. 49a na pás  $0 < \operatorname{Im} w < h$ . Nejprve lineární lomenou funkcí zobrazíme srpek na sektor

$$\omega = \frac{z + a}{z - a}$$

(obr. 49b) a tuto výseč pomocí větve logaritmu

$$\omega_1 = \ln \omega = \ln |\omega| + i \arg \omega,$$

$$0 \leq \arg \omega < 2\pi$$

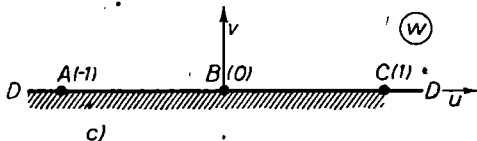
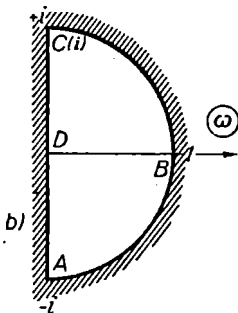
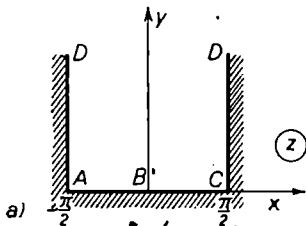


Obr. 49.

na pás šířky  $\beta$ :  $\pi + \alpha < \text{Im } \omega_1 < \pi + \alpha + \beta$ . Při prvním zobrazení bod  $B = i \cot \frac{1}{2} \alpha$  přejde v bod  $-(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  a při druhém kroku v bod  $(\pi + \alpha)i$ . Body  $A$  a  $C$  se při tom zobrazí na konce pásu. A zbývá jen převést získaný pás vhodným lineárním zobrazením v daný a výsledné zobrazení má tvar:

$$w = \frac{h}{\beta} \omega_1 - \frac{(\pi + \alpha)h}{\beta} i = \frac{h}{\beta} \left[ \ln \frac{z+a}{z-a} - (\pi + \alpha) i \right] \quad (56)$$

**Příklad 2.** Hledejme zobrazení  $w = f(z)$  polopásmu  $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ ,  $y > 0$  na polorovinu tak, aby bylo:  $f(\pm \frac{1}{2}\pi) = \pm 1$ ,  $f(0) = 0$ .



Obr. 50.

Pootočíme polopás o pravý úhel proti směru hodinových ručiček a zobrazením (22) jej znázorníme na jednotkový půlkruh:

$$\omega = e^{iz}$$

Pravý jednotkový polokruh, který jsme takto získali (obr. 50b), pootočíme o pravý úhel ve směru hodinových ručiček a zobrazíme pomocí funkce (9). Po úpravě dostáváme hledané zobrazení

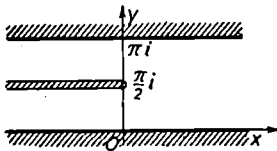
$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left( -i\omega + \frac{1}{-i\omega} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right) = \\ &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z. \quad (57) \end{aligned}$$

Je ihned vidět, že výsledná oblast je horní polorovina a že zobrazení

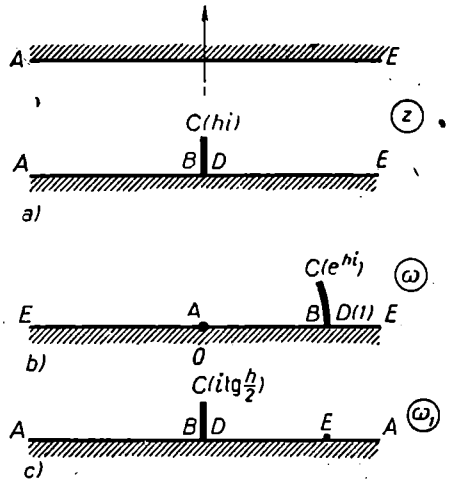
má předepsanou vlastnost, pokud se týká zobrazení bodů  $\pm \frac{1}{2}\pi$ , resp. 0. Ještě jednodušeji bychom dostali výsledek pomocí § 31.

**Příklad 3.** Pás s výřezem (obr. 51) zobrazíme pomocí funkce  $w = e^z$  na horní polorovinu s výřezem  $0 \leq \text{Im } \omega \leq 1$  podél imaginární osy. Její zobrazení na polorovinu bylo diskutováno v § 27, vzorec (13). Máme tedy konečné zobrazení

$$w = \sqrt{\omega^2 + 1} = \sqrt{e^{2z} + 1}. \quad (58)$$



Obr. 51.



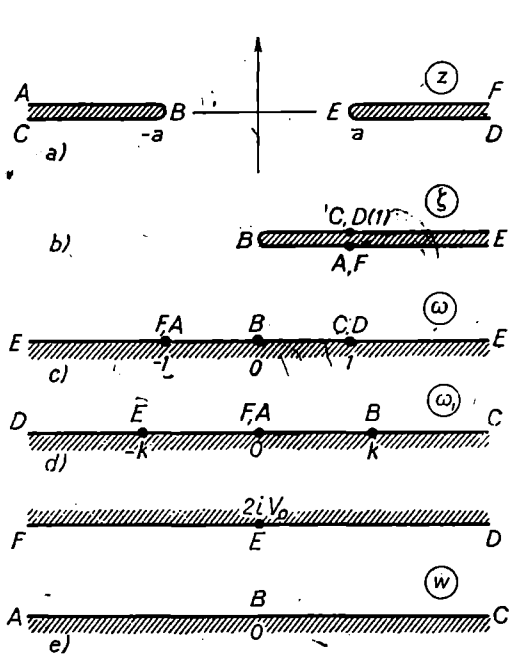
Obr. 52.

**Příklad 4.** Tentýž pás s vertikálním výřezem (obr. 52a) se zobrazí pomocí funkce  $\omega = e^z$  na polorovinu s výřezem podél oblouku jednotkové kružnice (obr. 52b). Zobrazení  $\omega_1 = \frac{\omega - 1}{\omega + 1}$  zobrazí tento oblouk na úsečku, jejíž koncový bod bude ležet v bodě  $\frac{e^{ih} - 1}{e^{ih} + 1} = i \operatorname{tg} \frac{1}{2}h$  (obr. 52c). V závěru použijeme znovu zmíněné formule (13) § 27 a výsledná superposice zobrazení má tvar:

$$w = \sqrt{\omega_1^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}h} = \sqrt{\left(\frac{e^z - 1}{e^z + 1}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}h} = \sqrt{\operatorname{tgh}^2 \frac{1}{2}z + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}h}. \quad (59)$$

**Příklad 5.** Hledejme konformní zobrazení roviny ( $z$ ) s dvěma výřezy  $-\infty \leq x \leq -a$  a  $a \leq x \leq \infty$  podél reálné poloosy na pás

$0 < \text{Im } w < 2V_0$ . Kromě toho budem klást podmínku, aby levý výřez přešel v dolní okraj pásu a pravý výřez v horní okraj pásu. To určuje pouze dva parametry zobrazení a třetí tedy zůstane libovolný. Nejprve převedeme náš výřez ve výřez  $(0, \infty)$  zobrazením



Obr. 53.

$$\zeta = \frac{z+a}{z-a}$$

(obr. 53b) a pak v reálnou osu zobrazením

$$\omega = \sqrt{\zeta} = \sqrt{\frac{z+a}{z-a}}$$

Uvažovaná oblast se při tom zobrazí na horní polovinu (obr. 53c). Posléze ji pomocí logaritmické funkce zobrazíme na pás. Abychom však splnili podmínky kladené na zobrazení výřezů, musíme předem zobrazit polovinu na sebe samu tak, aby body  $A, F$ , resp.  $C, D$  přešly v  $0$ , resp.  $\infty$ . Toto zobrazení zprostředkuje lineární lomená funkce

$$\omega_1 = k \frac{1 + \omega}{1 - \omega} = k \frac{\sqrt{z-a} + \sqrt{z+a}}{\sqrt{z-a} - \sqrt{z+a}} = -\frac{k}{a} (z + \sqrt{z^2 - a^2}),$$

kde  $k$  je libovolná kladná konstanta. Nyní už zbývá jen provést zobrazení pomocí logaritmické funkce a máme hledaný výsledek

$$w = \frac{2V_0}{\pi} \ln \omega_1 = \frac{2V_0}{\pi} \ln(z + \sqrt{z^2 - a^2}) + 2iV_0 + C, \quad (50)$$

kde  $C = \ln \frac{k}{a}$  je libovolná reálná konstanta.

## ÚLOHY.

1. Najděte reálnou a imaginární část funkcí  $w = \sin z$ ,  $w = \cos z$ ,  $w = \operatorname{tg} z$ .
2. Odvoďte vzorce (46) a (47).
3. Dokažte platnost vztahů:  $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ ,  $\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$ ,  $\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z$ .
4. Dokažte, že je možno konstruovat regulární větev funkce  $\sqrt[3]{(1+z)z^2}$  vně úsečky  $0 \leq x \leq 1$  osy  $x$ . Stanovte hodnotu v bodě  $z = i$  té větve, která má v bodě  $z = 2$  zápornou hodnotu. Jak veliké jsou ostatní hodnoty v tomto bodě?
5. Dokažte, že je možno konstruovat regulární větve funkce  $\operatorname{Ln}(1-z^2)$  v rovině s výřezem podél úseček  $(-1, i)$ ,  $(1, i)$  a polopřímky  $x = 0$ ,  $y \geq 1$  na ose  $y$ . Jaká je v bodě  $z = 2$  hodnota té větve, která má v bodě  $z = 0$  hodnotu 0?
6. Dokažte, že je možno konstruovat regulární větev funkce  $w = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$  v rovině s výřezy  $-\infty \leq x \leq -1$ ,  $1 \leq x \leq \infty$  podél reálné osy.
7. Pod funkcí  $z^s = e^{s \operatorname{Ln} z}$  budeme rozumět funkci, kde  $\operatorname{Ln}$  je hlavní hodnota logaritmu. Jaká je hodnota této funkce v bodě  $z = -e$  na horním i dolním okraji výřezu?

8. Najděte rovnice křivek jednotkového modulu a jednotkového argumentu zobrazení pro zobrazení  $w = z^2$ .

9. Dokažte, že funkce  $w = z^3 + 2z + 3$  zprostředkuje jedno-jednoznačné zobrazení vnitřku jednotkového kruhu na sebe sama.

10. Dokažte, že zobrazení  $\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  je jedno-jednoznačné v horní polorovině a stanovte oblast, v kterou zobrazí horní polorovinu!

11. V jakou oblast zobrazí:

a)  $w = \cos z$  pás  $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ ;

b)  $w = \operatorname{tg} z$  pás  $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ ;

Jak vypadá síť konformně ekvivalentní s kartézskou souřadnicovou sítí roviny ( $z$ )?

c)  $w = z + e^z$  pás  $-\pi < y < \pi$ ;

d) regulární větev funkce  $w = \sqrt{z}$ , která má v bodech kladné reálné poloosy kladné hodnoty, oblast ohraničenou kardioidou

$$x = 2(1 - \cos \varphi) \cos \varphi, \quad y = 2(1 - \cos \varphi) \sin \varphi;$$

(e\*) funkce  $w = z - \frac{1}{2}z^3$  oblast ohraničenou levou polovinou Bernouillioho lemniskaty  $(x^2 + y^2)[(x-4)^2 + y^2] = 16$ ; co v tomto zobrazení odpovídá síti polárních souřadnic v rovině ( $w$ )?

12. Dokažte, že je možno v horní polorovině konstruovat regulární větve funkcí a)  $w = \operatorname{Ln} \cos z$ ; b)  $w = \operatorname{Arccos} \cosh(k \cos z)$ ; ( $k$  reálná konstanta). V jakou oblast je zobrazena horní polorovina

a) libovolnou větví funkce  $w = \operatorname{Ln} \cos z$ ;

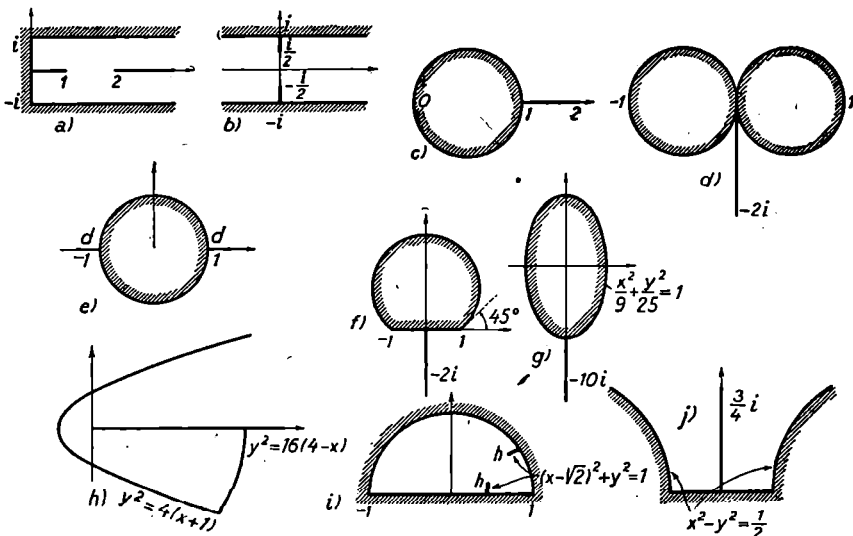
b) tou větví funkce  $\operatorname{Arccos} \cosh(k \cos z)$ , která má v bodě  $\frac{1}{2}\pi$  hodnotu  $\frac{1}{2}\pi$ !

13. Najděte konformní zobrazení:

a) výseče jednotkového kruhu  $0 < \arg z < \alpha$ ,  $|z| < 1$  na kruh  $|w| < 1$ ;

b) jednotkového kruhu  $|z| < 1$  na pás  $0 < v < 1$  s podmínkami  $f(-1) = -\infty$ ,  $f(1) = \infty$ ,  $f(i) = i$ ;

c) vnějšku elipsy  $\frac{x^2}{2v} + \frac{y^2}{16} = 1$  na vnějšek jednotkové kružnice;



Obr. 54.

d) vnějšku paraboly (t. j. oblasti, v níž neleží ohnisko)  $y^2 = 2pz$  na horní polorovinu;

e) vnějšku hyperboly (t. j. oblasti, v níž neleží ohnisko)  $\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1$  na horní polorovinu;

f) oblasti omezené dvěma podobnými logaritmickými spirálami  $r = \alpha e^{k\varphi}$ ,  $r = \beta e^{k\varphi}$  ( $\alpha < \beta$  a  $k$  reálné konstanty) na pás  $0 < v < 1$ .

14. Najděte konformní zobrazení oblastí vyznačených v obr. 54 na horní polorovinu, resp. na jednotkový kruh.