Kapitola VIII.

ÚVAHY POMOCNÉ.

§ 1. Funkce cyklometrické a hyperbolické.

Definujme číslo e rovnicí

1) $$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots$$

Pomocí e možno vyjádřiti funkce trigonometrické bez ohledu na jejich geometrický význam

2) $$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \\ \sin x &= \frac{i}{2}(e^{-ix} - e^{ix}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \end{aligned} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Z těchto rovnic plyne

3) $$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Při tom platí

4) $$e^{i(x + 2\varkappa\pi)} = e^{ix}, \quad e^{x + 2\varkappa\pi i} = e^x \quad (\varkappa \text{ číslo celé} \gtreqless 0),$$

Z rovnice
$$y = \sin x, \text{ resp. } y = \cos x$$
můžeme vyjádřiti x jako funkci y rovnicí
$$x = \operatorname{arc\,sin} y, \text{ resp. } x = \operatorname{arc\,cos} y,$$

Pro **arcsinx** platí rozvoj

5) $$\operatorname{arc\,sin} x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \ldots$$

Podobně definujeme funkce hyperbolické *Sin* (sinus hyperbolicus), *Cos* (cosinus hyperbolicus) vzorci:

6) $$\begin{aligned} \operatorname{Cos} x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \\ \operatorname{Sin} x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \end{aligned}$$

Z těchto rovnic plynou vztahy

7) $e^x = \mathrm{Cos}\, x + \mathrm{Sin}\, x, \quad e^{-x} = \mathrm{Cos}\, x - \mathrm{Sin}\, x, \quad \mathrm{Cos}^2 x - \mathrm{Sin}^2 x = 1.$

Pro zvláštní hodnoty 0, ∞[1]) hyperbolické funkce vyhovují rovnicím

8) $$\begin{matrix} \mathrm{Sin}\, 0 = 0 & \mathrm{Cos}\, 0 = 1 \\ \mathrm{Sin}\, \infty = \infty & \mathrm{Cos}\, \infty = \infty \end{matrix}$$

Z rovnice

$$y = \mathrm{Sin}\, x, \text{ resp. } y = \mathrm{Cos}\, x$$

můžeme vyjádřiti x jako funkci y rovnicí

$$x = \mathrm{arc\, Sin}\, y, \text{ resp. } x = \mathrm{arc\, Cos}\, y.$$

Diferenciací rovnic 6) plyne

9) $$d\, \mathrm{Sin}\, x = \mathrm{Cos}\, x\, dx, \qquad d\, \mathrm{Cos}\, x = \mathrm{Sin}\, x\, dx.$$

Hyperbolické a goniometrické funkce jsou vázány rovnicemi, jež obdržíme srovnáním rovnic 2), 6)

10) $$i\, \mathrm{Sin}\, x = \sin i x, \qquad \mathrm{Cos}\, x = \cos i x.$$

Z této rovnice a rovnice 5) obdržíme pro arc Sin rozvoj

5') $$\mathrm{arc\, Sin}\, x = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} - \dots$$

§ 2. Přirozený logaritmus.

Uvažujme komplexní proměnnou $z = x + iy$, $(i = \sqrt{-1})$. Můžeme ji též vyjádřiti rovnicí $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, kde $r = \left|\sqrt{x^2 + y^2}\right|$.[1a])

Komplexní funkce w, která vyhovuje rovnici

$$e^w = z,$$

nazývá se **přirozený logaritmus** proměnné z. Značíme ji

$$w = \log z;$$

---

[1]) Symbol ∞ zavádíme definitoricky pro označení potenciálního nekonečna (t. j. nikoliv konstanty). Jeho vysvětlení je obsaženo ve větě: „Blíží-li se argument x funkce $f(x)$ neomezeně nějaké hodnotě x_0 a hodnota funkce $f(x)$ při tom roste nade všechny meze, zavádíme symbol ∞ rovnicí $f(x_0) = \infty$. — Tento symbol pro potenciální nekonečno liší se zásadně od symbolu ∞^n $(n \geqq 1)$, užívaného pro určité aktuální nekonečno (konstantu) k vyjádření pojmu, který za určitých předpokladů odpovídá „naivní" představě „dimense". Říkáme na příklad, že všech funkcí $ax + by + 1$, (a, b, const reálné) je ∞^2, nebo též že všech přímek reálných v rovině je ∞^2 atp.

[1a]) $\left|\sqrt{x^2 + y^2}\right|$ čti: absolutní hodnota odmocniny z $x^2 + y^2$.

w je dáno rovnicí

11) $$w = \log(x + iy) = \overline{\log} r + i\varphi + 2\varkappa\pi i,$$

kde $\varkappa$ je libovolné celé, reálné číslo a $\overline{\log}$ značí v tomto případě logaritmus v obvyklém smyslu aritmetickém. Známe-li jednu hodnotu funkce w, obdržíme ostatní přičtením celočíselného násobku čísla $2\pi i$. Proto říkáme, že funkce w je mnohoznačná. Pro $\varkappa = 0$ obdržíme t. zv. hlavní hodnotu w_h:

12) $$w_h = \overline{\log} r + i\varphi.$$

Je-li $y = 0$ a $x > 0$ reálné, rovnice 11) nám skýtá

13a) $$\log x = \overline{\log} x + 2\varkappa\pi i, \qquad (y = 0,\ x > 0 \text{ reálné})$$

Pro $y = 0$ a $x < 0$ reálné obdržíme z 11)

13b) $$\log x = \overline{\log} |x| + (2\varkappa + 1)\pi i, \qquad (y = 0,\ x < 0 \text{ reálné}).$$

Hlavní hodnoty těchto funkcí jsou

13′a) $$\log x = \overline{\log} x$$

resp.

13′b) $$\log x = \overline{\log} |x| + \pi i.$$

Mezi ∞^1 hodnotami pro přirozený logaritmus čísla kladného je jen jedna reálná. Přirozený logaritmus čísla záporného je vždy imaginárný. Je-li z tvaru

14) $$z = \frac{a + bi}{a - bi},$$

kde a, b jsou čísla reálná, je vždy $r = 1$ a tudíž

15) $$\log z = i(\varphi + 2\varkappa\pi).$$

§ 3. Systémy souřadné.

1. Souřadnice bimetrické. Uvažujme dva body o' a o'' na přímce P. Poměr vzdáleností (braných algebraicky) libovolného bodu x na P od bodů o' a o'' určuje tento bod jednoznačně. Označme tyto vzdálenosti b', resp. b''. Jsou-li c', resp. c'' dvě libovolné, od nuly různé konstanty, pak i poměr

$$\frac{b'}{c'} : \frac{b''}{c''} = x_1 : x_2$$

tento bod x jednoznačně stanoví. Čísla x_1, x_2 jmenujeme homogenními bimetrickými souřadnicemi bodu x na přímce. (Lépe v „přímé řadě bodové".) Je zřejmé, že čísla ϱx_1, ϱx_2 a σx_1, σx_2 stanoví svým poměrem týž bod, i když $\varrho \neq \sigma$, $\varrho, \sigma \neq 0$. Body o', resp. o'' (tak zvané body základní) mají souřadnice

$$\begin{array}{ll} o'' \ldots\ldots\ldots \varrho, 0 & \text{nebo } 1, 0 \\ o' \ldots\ldots\ldots 0, \varrho & \phantom{\text{nebo }} 0, 1 \end{array}$$

Na přímce existuje jediný bod (tak zvaný jednotkový), jehož souřadnice jsou 1, 1. Bod o souřadnicích 0, 0 na přímce neexistuje.

Zvolme bod mimo přímku P a promítněme z něho body o', o'', x paprsky O', O'', X. Čísla x_1, x_2 určují svým poměrem jednoznačně paprsek X spojující střed promítání s bodem x. Souřadnicím x_1 resp. x_2 říkáme v tomto případě homogenní bimetrické souřadnice paprsku ve svazku paprsků. (Svazek paprsků, přesněji „lineární svazek paprsků", je souhrn všech paprsků, procházejících jedním bodem.) Platí o nich věty odvozené pro bimetrické souřadnice na přímce. (Tyto souřadnice můžeme ovšem odvoditi též přímo z vlastností svazku, aniž bychom si pomáhali nějakou, ostatně zcela libovolnou přímkou, která svazku nepatří.)

2. Souřadnice trimetrické. Uvažujme trojúhelník o vrcholech o', o'', o''' a stranách $O' \equiv \overline{o''o'''}$, $O'' \equiv \overline{o'''o'}$, $O''' \equiv \overline{o'o''}$. Poměr vzdáleností libovolného bodu roviny trojúhelníka od stran O', O'', O''' určuje tento bod jednoznačně. Označme tyto vzdálenosti b', b'', b'''. Jsou-li c', c'', c''' tři libovolné, od nuly různé konstanty, pak i poměr

$$\frac{b'}{c'} : \frac{b''}{c''} : \frac{b'''}{c'''} = x_1 : x_2 : x_3$$

tento bod jednoznačně stanoví. Číslům x_1, x_2, x_3 říkáme homogenní trimetrické souřadnice bodové v rovině. Je zřejmé, že čísla ϱx_i a σx_i ($i = 1, 2, 3$) stanoví týž bod i při $\varrho \neq \sigma$, ϱ, $\sigma \neq 0$. Vrcholy o', o'', o''' (tak zvané body základní) mají souřadnice

$$\begin{array}{ll} o' \ldots\ldots\ldots \varrho, 0, 0 & \phantom{\text{nebo }} 1, 0, 0 \\ o'' \ldots\ldots\ldots 0, \varrho, 0 & \text{nebo } 0, 1, 0 \\ o''' \ldots\ldots\ldots 0, 0, \varrho & \phantom{\text{nebo }} 0, 0, 1 \end{array}$$

V rovině existuje jediný bod, jehož souřadnice jsou v poměru

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 1 : 1.$$

Říkáme mu bod jednotkový. Bod o souřadnicích 0, 0, 0 v rovině neexistuje.

Rovinná křivka m-tého stupně je v těchto souřadnicích určena rovnicí

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

kde f je homogenní funkcí stupně m-tého v proměnných. Podle toho je rovnice přímky lineární a homogenní. Pišme ji ve tvaru

$$X_1 x_1 + X_2 x_2 + X_3 x_3 = 0. \tag{16}$$

Prochází-li tato přímka dvěma body z, t (t. j. body, jichž souřadnice jsou z_1, z_2, z_3 a t_1, t_2, t_3), musí rovnice 16) souřadnicím těchto bodů vyhovovati. Je tedy rovnice 16) ekvivalentní s rovnicí

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = x_1 (z_2 t_3 - z_3 t_2) + x_2 (z_3 t_1 - z_1 t_3) + x_3 (z_1 t_2 - z_2 t_1) = 0. \tag{17}$$

Porovnáním 16) a 17) získáme

$$X_1 : X_2 : X_3 = z_2 t_3 - z_3 t_2 : z_3 t_1 - z_1 t_3 : z_1 t_2 - z_2 t_1. \tag{17'}$$

Označme obecně determinant $\begin{vmatrix} z_i & z_j \\ t_i & t_j \end{vmatrix} = z_i t_j - z_j t_i$, $(i, j = 1, 2, 3)$ symbolem $[z_i t_j]$.

Rovnice 17') jsou ekvivalentní s relacemi

$$\varrho X_1 = [z_2 t_3], \quad \varrho X_2 = [z_3 t_1], \quad \varrho X_3 = [z_1 t_2] \quad (\varrho \neq 0). \tag{18}$$

Čísla X_1, X_2, X_3 určují svým poměrem jednoznačně přímku, spojující body z a t. Říkáme jim přímkové homogenní souřadnice trimetrické v rovině. — Rovnice bodu, který je průsečíkem přímek Z (Z_1, Z_2, Z_3) a $T(T_1, T_2, T_3)$ jest obdobně se 17),

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{vmatrix} = X_1 [Z_2 T_3] + X_2 [Z_3 T_1] + X_3 [Z_1 T_2] = 0. \tag{19}$$

§ 4. **Projektivní příbuznost.**

Uvažujme v prostoru dvě libovolné roviny. Trimetrické souřadnice bodu v jedné rovině označme x_1, x_2, x_3, v druhé $'x_1, 'x_2, 'x_3$. Jsou-li body obou rovin si tak přiřazeny, že platí rovnice

$$\begin{aligned} \varrho\, 'x_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \varrho\, 'x_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \varrho\, 'x_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned} \qquad \begin{gathered} (a_{ij} = \text{reálná konst.}, i, j = 1, 2, 3, \\ \varrho \neq 0 \text{ koef. úměrnosti}), \end{gathered} \tag{20}$$

říkáme, že obě roviny jsou ve vztahu či příbuznosti projektivní. Při tom předpokládáme, že determinant soustavy

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{21}$$

je od nuly různý. Za tohoto předpokladu můžeme řešiti rovnice podle x. Získáme tak rovnice inversní

$$\begin{aligned} \sigma x_1 &= A_{11}{}'x_1 + A_{21}{}'x_2 + A_{31}{}'x_3 \\ \sigma x_2 &= A_{12}{}'x_1 + A_{22}{}'x_2 + A_{32}{}'x_3 \quad (\sigma \neq 0 \text{ koef. úměrnosti}). \\ \sigma x_3 &= A_{13}{}'x_1 + A_{23}{}'x_2 + A_{33}{}'x_3 \end{aligned} \tag{22}$$

Zde jest A_{ij} algebraický doplněk v determinantu D, příslušný k a_{ij}, dělený D. Tedy na příklad

$$D A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{atd.}$$

Rovnicím 20), 22) říkáme rovnice transformační, krátce transformace. Pomocí jich odvodíme i transformace přímkových souřadnic. Podle 20) jest až na konstantní faktor

$$['z_2't_3] = \sum_{i,j=1}^{3} a_{2i}\, a_{3j}\, [z_i t_j] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \begin{vmatrix} a_{2i} & a_{3i} \\ a_{2j} & a_{3j} \end{vmatrix} [z_i t_j].$$

Transformuje se tedy X_1 podle

$$\varkappa\, 'X_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 \quad (\varkappa \neq 0 \text{ koef. úměrnosti}). \tag{23}$$

Podobně odvodíme

$$\begin{aligned} \varkappa' X_2 &= A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 \\ \varkappa' X_3 &= A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3 . \end{aligned} \tag{23'}$$

Souřadnice bodové transformují se podle 20), přímkové podle 23).

Když jednu rovinu přemístíme tak, aby splynula s rovinou druhou, rovnice definují projektivní příbuznost dvou rovin soumístných. Místo toho říkáme, že rovnice 20) definují projektivní příbuznost dvou soustav soumístných.

V takových soustavách je nasnadě otázka, zda existují body, jež odpovídají samy sobě? Existuje-li takový bod $x \equiv 'x$, musí jeho souřadnice vyhovovati rovnicím 20), jež můžeme psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} (a_{11} - \varrho)\, x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \varrho)\, x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \varrho)\, x_3 &= 0 . \end{aligned} \tag{23''}$$

Tento systém rovnic má jen tenkráte řešení nenulové (t. j. alespoň jedna souřadnice jest od nuly různá), když

$$\text{24)} \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}-\varrho, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Rovnice 24) je třetího stupně v ϱ a jejím řešením obdržíme tudíž tři kořeny ϱ', ϱ'', ϱ''' obecně různé. Každému kořenu ϱ odpovídá obecně[7] jeden bod $x \equiv {}'x$. Těmto třem bodům říkáme samodružné body soumístných soustav projektivních. **Dvě soustavy soumístné projektivní mají obecně tři body samodružné.** Tyto body mohou ve zvláštním případě různě splývati. (Také jich může býti nekonečně mnoho.) Přímka, spojující dva body samodružné, má tu vlastnost, že kterýkoli její bod transformuje se do bodu téže přímky. Říkáme, že se tato přímka při transformaci 20) **reprodukuje**.

Aby projektivní příbuznost 20) byla stanovena, potřebujeme znáti koeficienty a_{ij}, to je zdánlivě devět údajů. Ježto však bod je určen poměrem svých souřadnic, stačí znáti poměr těchto devíti koeficientů, čili **osm** údajů. Říkáme, že je v rovině celkem ∞^8 projektivních příbuzností. Potřebných osm údajů získáme, když **čtyřem libovolným** bodům jedné soustavy přiřadíme **čtyři libovolné** body soustavy druhé. Získáme tak čtyři dvojice rovnic typu

$$\frac{'x_1}{'x_3} = \frac{b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3}{b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3}, \quad \frac{'x_2}{'x_3} = \frac{b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3}{b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3}; \left(b_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{33}}\right).$$

Z nich vypočteme hodnoty b_{ij}, jichž je jen osm neznámých, neboť $b_{33} = 1$.

Poznámka. Co jsme dokázali o soumístných soustavách **rovinných**, platí s malými obměnami i pro soumístné projektivní soustavy bodů na přímce, resp. pro dva projektivní lineární svazky paprskové. Projektivní vztah je v tomto případě stanoven rovnicemi

$$\begin{aligned} \varrho' x_1 &= d_{11}x_1 + d_{12}x_2 \qquad & (d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} \neq 0, \\ \varrho' x_2 &= d_{21}x_1 + d_{22}x_2 \qquad & d_{ij} = \text{reálná konst. } i, j = 1, 2). \end{aligned}$$

Je tedy ∞^3 těchto projektivností. Obecně dvě takové projektivnosti mají dva body (resp. dva paprsky) samodružné.

§ 5. Grupa transformací.

Rovnice 20) označujeme též **symbolicky** takto

$$\text{20')} \qquad 'x = T_a\, x.$$

Tuto rovnici čteme: Bodu x je přiřazen projektivní transformací o koeficientech a_{ij} bod $'x$. Je zřejmé, v čem spočívá výhoda tohoto označení. Můžeme totiž krátce vyznačiti různé projektivní transformace. Tak na příklad rovnice

$$'x = T_c\, x$$

znamená, že jsme bodu x přiřadili bod $'x$ nějakou projektivní transformací o koeficientech c_{ij} (které mohou býti různé, ale případně i stejné s koeficienty prve zmíněné transformace). — Rovnici 22) značíme symbolicky

$$x = T_a^{-1}\, 'x\,. \tag{22'}$$

Takovým způsobem označení jest ihned vystižena souvislost transformace původní 20') a jí inversní 22'). Mezi všemi transformacemi je jedna t. zv. transformace identická. Obdrželi bychom ji třeba z transformace 20) za předpokladu, že $a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0$ a ostatní koeficienty $= 0$. Taková transformace identická přiřazuje bodu x opět týž bod x. Symbolicky značíme tuto transformaci rovnicí

$$x = T_o\, x\,.$$

Přiřaďme bodu x bod $'x$ transformací 20') a bodu $'x$ bod $''x$ transformací $''x = T_f\, 'x$. Obdržíme tak bod $''x$ po dvou transformacích, což značíme symbolicky

$$''x = T_f\, T_a\, x\,.$$

Může se státi, že k bodu $''x$ bychom dospěli též jen jedinou transformací, třeba $''x = T_g\, x$. Můžeme v takovém případě psáti

$$''x = T_g\, x = T_f\, T_a\, x\,.$$

Symbol x je v posledních dvou členech zbytečný a proto jej příště již psáti nebudeme.

V minulém paragrafu jsme dokázali, že je celkem ∞^8 projektivních transformací. Splňují-li tyto transformace podmínky, jichž symbolický tvar je

$$a)\ T_e\, T_f = T_g\,, \qquad b)\ T_e (T_f\, T_g) = (T_e\, T_f)\, T_g\,, \qquad c)\ T_e\, T_o = T_o\, T_e = T_e\,,$$
$$d)\ T_e\, T_e^{-1} = T_e^{-1}\, T_e = T_o\,,$$

říkáme, že tvoří osmimocnou grupu projektivních transformací, krátce osmimocnou projektivní grupu.

Podmínky *a), b), c), d)* vyjádříme slovy takto:

a) Dvě transformace můžeme vždy nahraditi jedinou. (Tudíž i libovolný konečný počet transformací můžeme nahraditi jedinou.)

b) Výsledek tří transformací je nezávislý na tom, které dvě transformace po sobě jdoucí nahradíme jedinou. (Tak zv. zákon asociativní.)

c) Uvažované transformace obsahují též transformaci identickou.

d) Ke každé z uvažovaných transformací můžeme udati transformaci inversní.

Každá grupa, obsažená v grupě G_8, nazývá se její podgrupou. Taková podgrupa grupy G_8 může, ale nemusí býti méně než osmimocná. Obdržíme ji, když transformacím 20) grupy G_8 předepíšeme nějaké podmínky tak, že *a), b), c), d)* jsou i potom v platnosti. Na př. můžeme žádati, aby grupa G_8 reprodukovala nějakou kuželosečku, t. j. aby body této kuželosečky se transformovaly transformacemi 20) opět do bodů na téže kuželosečce. (Tato podgrupa projektivní grupy jest trojmocná G_3.)

Uvažujme o libovolném útvaru v rovině. Jest možno, že některé vlastnosti tohoto útvaru se transformacemi 20) nemění. Takovým vlastnostem říkáme invariantní vlastnosti útvaru vzhledem k transformaci 20). Matematickému vyjádření invariantní vlastnosti říkáme invariant transformace.[2]) Projektivním invariantem nazýváme invariant transformací 20), tvořících projektivní grupu. Projektivní invariant jest zároveň invariantem každé podgrupy z grupy projektivní. Obráceně to však platiti nemusí. Projektivní invariant podgrupy nemusí býti invariantem grupy. Tak jest na příklad výraz

$$\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2$$

invariantem podgrupy G_1

$$\begin{aligned} \varrho' x_1 &= x_1 a \cos \alpha + x_2 a \sin \alpha \\ \varrho' x_2 &= x_1 a \sin \alpha - x_2 a \cos \alpha \\ \varrho' x_3 &= a x_3 , \end{aligned}$$

nikoliv však projektivním invariantem.[3])

Pro nás je důležitý projektivní invariant, nazvaný dvojpoměr čtyř bodů (resp. čtyř přímek). Jsou-li na přímce

---

[2]) Tato věta není definicí invariantu, vystihuje však dostatečně pro náš účel, co rozumíme slovem invariant.

[3]) Invariant může obsahovati souřadnice bodové, přímkové, případně i nějaké konstanty. V teorii invariantů se rozeznávají jmény invarianty, které obsahují určité z právě vytčených veličin.

čtyři body a, b, c, d, nazýváme dvojpoměrem těchto čtyř bodů podíl poměrů vzdáleností

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} : \frac{\overline{ad}}{\overline{bd}}.$$

Dvojpoměr ten značíme $(abcd)$. Chceme-li jej vyjádřiti souřadnicemi, stačí předpokládati, že body a, b, c, d leží třeba na přímce $x_3 = 0$:

$$a(a_1, a_2, 0), \quad b(b_1, b_2, 0), \quad c(c_1, c_2, 0), \quad d(d_1, d_2, 0).$$

Snadným výpočtem získáme

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{[a_1\,c_2]\,[b_1\,d_2]}{[b_1\,c_2]\,[a_1\,d_2]} = (c\,d\,a\,b). \tag{25}$$

Podobně je dvojpoměr čtyř paprsků A, B, C, D

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{\sin(A\,C)}{\sin(B\,C)} : \frac{\sin(A\,D)}{\sin(B\,D)} = (C\,D\,A\,B). \tag{26}$$

Jsou-li souřadnice těchto paprsků, jdoucích bodem e rovnici $X_3 = 0$,

$$A(A_1, A_2, 0), \quad B(B_1, B_2, 0), \quad C(C_1, C_2, 0), \quad D(D_1, D_2, 0),$$

snadno vypočteme

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{[A_1\,C_2]\,[B_1\,D_2]}{[B_1\,C_2]\,[A_1\,D_2]}. \tag{26'}$$

Je-li $(a\,b\,c\,d) = -1$, říkáme, že tyto čtyři body jsou harmonické, nebo též, že body c, d oddělují harmonicky body a, b. Totéž říkáme o přímkách, je-li příslušný dvojpoměr roven -1.

Dvojpoměr čtyř paprsků nám poslouží ke stanovení trimetrických souřadnic bodových. Označme paprsky, spojující jednotkový bod j a obecný bod x s vrcholem o' základního trojúhelníka, P′, resp. I' (obr. 1 *a*).

Z definice dvojpoměru čtyř paprsků rovnicí 26) plyne, že

$$(O''\,O'''P'\,I') = \frac{\overline{xx''}}{\overline{xx'''}} : \frac{\overline{jj''}}{\overline{jj'''}}.$$

Ale pro souřadnice bodů x a j platí podle odst. 2, § 3

$$\varrho x_2 = \frac{\overline{xx''}}{c''}, \quad \varrho x_3 = \frac{\overline{xx'''}}{c'''}, \quad \varrho j_2 = \frac{\overline{jj''}}{c''}, \quad \varrho j_3 = \frac{\overline{jj'''}}{c'''}, \quad j_2 = j_3$$

a tudíž

$$(O''\,O'''\,P'\,I') = \frac{x_2 c''}{x_3 c'''} : \frac{j_2 c''}{j_3 c'''} = \frac{x_2}{x_3} : \frac{j_2}{j_3} = \frac{x_2}{x_3} : \frac{1}{1} = \frac{x_2}{x_3}.$$

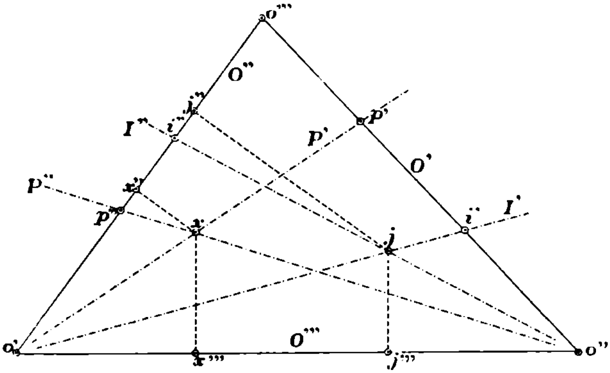
Podobně bychom dokázali

$$(O'\,O'''\,P''\,I'') = \frac{x_1}{x_3}\,.$$

Poměr souřadnic trimetrických

$$x_1 : x_2 : x_3 = (O'\,O'''\,P''\,I'') : (O''\,O'''\,P'\,I') : 1$$

se tedy nemění projektivní transformací. Proto těmto souřadnicím také říkáme **p r o j e k t i v n í s o u ř a d n i c e h o m o g e n n í.**



Obr. 1 *a*).

Obr. 1 *b*).

Čtenář snadno nahlédne, že poměry $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ jsou podle předcházejících výsledků též

$$\frac{x_1}{x_3} = (o'''\,o'\,p''\,i''),\quad \frac{x_2}{x_3} = (o'''\,o''\,p'\,i')\,.$$

Je-li O''' úběžnou přímkou zkoumané roviny, můžeme vhodnou volbou jednotkového bodu (t. j. volbou konstant $c' : c'' : c'''$) dosáhnouti, že $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ jsou tak zvané cartézské souřadnice (kosoúhlé). Jsou-li osy $O'' \perp O'$, získáme pravoúhlé souřadnice cartézské, které čtenář již zná v označení $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$.

P o z n á m k a. Podobným způsobem můžeme dokázati, že i bimetrické souřadnice x_1, x_2 bodu na přímce jsou projektivní (obr. 1 *b*). Pro tyto souřadnice platí

$$\varrho x_1 = \frac{\overline{x\,o'}}{c'},\quad \varrho x_2 = \frac{\overline{x\,o''}}{c''},\quad \varrho j_1 = \frac{\overline{j\,o'}}{c'},\quad \varrho j_2 = \frac{\overline{j\,o''}}{c''},\quad j_1 = j_2$$

a tudíž

$$(o'o''xj) = \frac{\overline{xo'}}{\overline{xo''}} : \frac{\overline{jo'}}{\overline{jo''}} = \frac{c'x_1}{c''x_2} : \frac{c'j_1}{c''j_2} = \frac{x_1}{x_2},$$

čímž důkaz proveden. Úplnou analogii pro souřadnice přímky ve svazku přenechávám čtenáři.

§ 6. Formy kvadratické.

1. Polární proces. Výraz druhého stupně v proměnných x_1, x_2, x_3

$$27)\qquad {}^3f \equiv g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2(g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{23}x_2x_3)$$

nazývá se ternární forma kvadratická. Při tom předpokládáme, že alespoň jeden z konstantních koeficientů $g_{ij} = g_{ji}\,(i, j = 1, 2, 3)$ jest od nuly různý. V dalším budeme se zabývati jen takovými formami, u nichž všechny koeficienty jsou reálné a determinant

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

od nuly různý.

Položme ${}^3f = 0$. Rovnice

$$28)\qquad g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0$$

představuje kuželosečku, třeba v souřadnicích projektivních. Body v rovině kuželosečky, z nichž lze vésti dvě reálné tečny, nazveme body vně kuželosečky. Z bodu uvnitř kuželosečky lze vésti jen dvě tečny imaginárné. Body, které jsou buď vně, nebo uvnitř kuželosečky, nazveme společně body mimo kuželosečku. Zvolme libovolný bod mimo kuželosečku o souřadnicích y_1, y_2, y_3. Operace

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,{}^3f}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial\,{}^3f}{\partial x_2}y_2 + \frac{\partial\,{}^3f}{\partial x_3}y_3\right)$$

nazývá se polární proces. Forma, která tímto polárním procesem vznikne

$${}^3f_1 \equiv (g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + g_{13}y_3)x_1 + (g_{21}y_1 + g_{22}y_2 + g_{23}y_3)x_2 + (g_{31}y_1 + g_{32}y_2 + g_{33}y_3)x_3,$$

nazývá se první polární formou formy ${}^3f$. Položíme-li ${}^3f_1 = 0$, rovnice

$$(g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + g_{13}y_3)x_1 + (g_{21}y_1 + g_{22}y_2 + g_{23}y_3)x_2 + (g_{31}y_1 + g_{32}y_2 + g_{33}y_3)x_3 = 0$$

představuje poláru bodu y vzhledem ke kuželosečce 28). (Polárou bodu y vzhledem ke kuželosečce nazýváme spojnici dotyčných bodů tečen z bodu y ke kuželosečce vedených.)

Rovnice 28) představuje kuželosečku v souřadnicích bodových. Táž kuželosečka v souřadnicích přímkových má rovnici

$$28') \quad {}^3F = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & X_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & X_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & 0 \end{vmatrix} \equiv G_{11}X_1^2 + G_{22}X_2^2 + G_{33}X_3^2 + 2G_{12}X_1X_2 + \\ + 2G_{13}X_1X_3 + 2G_{23}X_2X_3 = 0.$$

Této rovnici říkáme též někdy tečnová rovnice kuželosečky. Bodová rovnice kuželosečky představuje tuto jako geometrické místo bodů. Tečnová rovnice kuželosečky ji představuje jako obálku přímek (tečen). Je-li determinant d bodové rovnice rozdílný od nuly, pak je i determinant

$$D = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Zvolme libovolnou přímku Y, která není tečnou naší kuželosečky. Polární forma

$${}^3F_1 \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, {}^3F}{\partial X_1} Y_1 + \frac{\partial\, {}^3F}{\partial X_2} Y_2 + \frac{\partial\, {}^3F}{\partial X_3} Y_3\right) = (G_{11}Y_1 + G_{12}Y_2 + G_{13}Y_3)X_1 + \\ + (G_{21}Y_1 + G_{22}Y_2 + G_{23}Y_3)X_2 + (G_{31}Y_1 + G_{32}Y_2 + G_{33}Y_3)X_3$$

skýtá nám rovnici bodu ${}^3F_1 = 0$, který jest **pólem** poláry Y vzhledem ke kuželosečce.

Je-li v ${}^3f$ $x_3 = 0$, získáme formu **binární** kvadratickou

$${}^2f \equiv g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2.$$

Položíme-li ${}^2f = 0$, získáme rovnici dvou bodů na přímce $x_3 = 0$:

$$29) \quad g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2 = 0.$$

Polární proces provedený na tuto formu nám skýtá rovnici bodu, který s bodem y $(y_1, y_2, 0)$ je harmonicky oddělován body 29). Interpretaci duální (t. j. pro dva paprsky ve svazku) přenechávám čtenáři.

2. **Kanonický tvar formy binární.** Kanonickým tvarem rovnice 29) nazýváme ten její obecný tvar, při kterém je nejmenší počet koeficientů. Obdržíme jej z rovnice 29), když vhodně volíme systém souřadný. Levou stranu takové rovnice nazýváme kanonický tvar formy

binární. Dokážeme, že kanonický tvar binární formy jest možno psáti (až na faktor úměrnosti)

30) $$\text{buď} \quad x_1^2 - x_2^2, \qquad \text{nebo} \quad x_1^2 + x_2^2.$$

K důkazu zvolme za body základní na přímce takové body o' a o'', které jsou harmonicky oddělovány body danými (rovnicí 29). Polární forma k 29) jest

$$^2f_1 = (g_{11}x_1 + g_{12}x_2)y_1 + (g_{12}x_1 + g_{22}x_2)y_2.$$

Rovnici $^2f_1 = 0$ mají vyhovovati souřadnice bodů o' a o'', t. j. (1, 0) a (0, 1).

$$(g_{11}1 + g_{12}0)0 + (g_{12}1 + g_{22}0)1 = 0.$$

Musí tedy býti $g_{12} = 0$. Podle toho možno rovnici 29) vždy psáti

29′) $$\frac{g_{11}}{g_{22}} x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Při obecné poloze jednotkového bodu mají zkoumané body souřadnice

$$\frac{x_1}{x_2} = \pm i \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}.$$

Vhodnou volbou jednotkového bodu můžeme vždy dosáhnouti, že je $\frac{g_{22}}{g_{11}} = -1$, nebo $\frac{g_{22}}{g_{11}} = +1$ [3a]).

Tím je naše tvrzení dokázáno.

3. Kanonické tvary formy ternární. Kanonickým tvarem rovnice 28) nazýváme ten její tvar, při kterém vystupuje nejmenší počet koeficientů. Levou stranu tak upravené rovnice nazýváme kanonický tvar formy ternární. Rozeznáváme dva kanonické tvary formy ternární. Prvý je kanonický tvar polární, který možno psáti

31) $$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad \text{nebo} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

[3a]) Jsou-li body zkoumané reálné, stačí voliti konstantu $c' : c''$ určující jednotkový bod tak, aby $\left(\frac{c'}{c''}\right)^2 = -\frac{b_1' b_2'}{b_1'' b_2''}$, při čemž b_1', b_1'' resp. b_2' b_2'' jsou vzdálenosti bodů 29) od bodů o', o''.

Jsou-li však zkoumané body imaginárně sdružené, volíme příslušnou konstantu podle rovnice

$$\left(\frac{c'}{c''}\right)^2 = \frac{b_1' b_2'}{b_1'' b_2''}.$$

druhý, kanonický tvar tečnový možno psáti

32) $$x_1^2 - x_2 x_3.$$

Ukážeme nejprve, jak je možno získati vhodnou volbou souřadného systému kanonický tvar polární. Zvolíme souřadný trojúhelník tak, aby byl polárním trojúhelníkem dané kuželosečky (rovnicí 28).[4])

Aplikujeme-li úvahu předešlého odstavce, získáme rovnici kuželosečky ve tvaru

33) $$g_{11} x_1^2 + g_{22} x_2^2 + g_{33} x_3^2 = 0.$$

Nechť tato kuželosečka je reálná (při $g_{11} > 0$, $g_{22} > 0$, $g_{33} < 0$), nebo imaginární (g_{11}, g_{22}, $g_{33} > 0$), vždy jedna ze stran souřadného polárního trojúhelníka ji protíná v bodech imaginárně sdružených. Nechť je to třeba strana O'''. Podle poznámky [3]) předcházejícího odstavce můžeme vhodnou volbou konstanty $c' : c''$ dosáhnouti, že tyto průsečné body mají souřadnice

$$i : 1 : 0, \qquad i : -1 : 0,$$

t. j. $g_{11} : g_{22} = 1$. Podle toho je vždy možno rovnici kuželosečky psáti

33') buď $x_1^2 + x_2^2 - g_{33} x_3^2 = 0$, nebo $x_1^2 + x_2^2 + g_{33} x_3^2 = 0$.

Jednotkový bod určen je však poměrem tří konstant c', c'', c'''. Můžeme proto ještě vhodně voliti poměr $c' : c'''$. Ten zvolíme tak (opět podle poznámky citované), aby průsečíky přímky O'' měly souřadnice

$$1 : 0 : 1, \qquad 1 : 0 : -1$$

v případě kuželosečky reálné, nebo

$$i : 0 : 1, \qquad i : 0 : -1$$

v případě kuželosečky imaginární. Je tudíž při této volbě v obou případech $g_{33} = 1$. Rovnice kuželosečky v kanonickém tvaru polárném je pak skutečně

33'') buď $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, nebo $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

V prvém případě je kuželosečka reálná, v druhém imaginární. Rovnicí 33'') je prvá část našeho tvrzení dokázána.

Máme-li dokázati druhou část našeho tvrzení (o kanonickém tvaru tečnovém), volíme bod o' sice opět pólem

---

[4]) Polární trojúhelník dané kuželosečky je takový, jehož vrcholy jsou póly protějších stran vzhledem ke kuželosečce a obráceně.

přímky O', ale za body o'', o''' volíme průsečíky přímky O' s kuželosečkou. Ježto body základní jsou reálné, je zřejmo, že vylučujeme případ kuželosečky imaginárné a bod o' volíme vně kuželosečky, aby jeho polára O' protínala kuželosečku v bodech reálných. Rovnice 28) má vyhovovati souřadnicím $0:1:0$ a $0:0:1$ bodů o'', o'''. Musí tedy býti

$$g_{22} = g_{33} = 0 .$$

Koeficienty g_{12}, g_{13} získáme z úvahy, že přímka $x_1 = 0$ (t. j. O') je podle předpokladu polárou bodu o' $(1, 0, 0)$. Úvahami nám již známými odvodíme

$$g_{12} = g_{13} = 0 .$$

Zvolíme-li nyní jednotkový bod na kuželosečce, musí býti

$$g_{11} + 2 g_{23} = 0 .$$

Rovnice kuželosečky v tomto systému souřadném je tedy

34) $$x_1^2 - x_2 x_3 = 0 .$$

Tím jsme dokázali i druhou část našeho tvrzení. Z rovnice 34) plyne též

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_1} .$$

Položíme-li

35) $$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_1} = \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} ,$$

můžeme pro body kuželosečky psáti

35') $$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda_1 \lambda_2 : \lambda_2^2 : \lambda_1^2 .$$

Vyjádření takovému říkáme parametrické. Parametrem určujícím bod na kuželosečce je $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Tohoto vyjádření použijeme s výhodou v paragrafu následujícím.

4. Kuželosečky složené. Dříve však než k tomuto paragrafu přistoupíme, musíme ještě promluviti o případě, který jsme s počátku ze svých úvah vylučovali, kde determinant z koeficientů bodové rovnice kuželosečky je roven nule. Předpokládejme, že bodová rovnice kuželosečky je

$$g_{11} x_1^2 + g_{22} x_2^2 + g_{33} x_3^2 = 0 .$$

Determinant z jejích koeficientů má býti nyní podle předpokladu roven nule, t. j.

$$\begin{vmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{vmatrix} = g_{11} g_{22} g_{33} = 0 .$$

To není jinak možno, než když jest alespoň jeden z koeficientů, třeba g_{33}, roven 0.

Tu můžeme rovnici 33) psáti

36) $$g_{11} x_1^2 + g_{22} x_2^2 = 0 .$$

Tato rovnice představuje dvě přímky o rovnicích

$$x_1 \sqrt{g_{11}} + i x_2 \sqrt{g_{22}} = 0 , \qquad x_1 \sqrt{g_{11}} - i x_2 \sqrt{g_{22}} = 0 .$$

Obě přímky jsou reálné, je-li $\frac{g_{22}}{g_{11}} < 0$.

Tečnová rovnice kuželosečky 33) jest

$$X_1^2 g_{22} g_{33} + X_2^2 g_{11} g_{33} + X_3^2 g_{11} g_{22} = 0$$

a tudíž v případě, že $g_{33} = 0$, tato rovnice se zjednoduší na

36′) $$X_3^2 = 0 .$$

Poslední rovnice představuje průsečík svrchu zmíněných přímek. — Čtenář se snadno přesvědčí, že determinant z koeficientů rovnice 36′) je rovný nule. Je-li ještě $g_{11} = 0$ a $g_{22} \neq 0$, rovnice kuželosečky jest $x_2^2 = 0$, což představuje rovnici přímky, dvakráte počítané. — Uvažujme nyní kuželosečku jako obálku tečen. Její rovnice nechť je

37) $$G_{11} X_1^2 + G_{22} X_2^2 + G_{33} X_3^2 = 0 .$$

V případě, že determinant z koeficientů této rovnice je roven nule, musí jeden z těchto koeficientů, třeba $G_{33} = 0$. Pak rovnice

38) $$G_{11} X_1^2 + G_{22} X_2^2 = 0$$

představuje dvojici bodů o rovnicích

$$X_1 \sqrt{G_{11}} + i X_2 \sqrt{G_{22}} = 0 , \qquad X_1 \sqrt{G_{11}} - i X_2 \sqrt{G_{22}} = 0 .$$

Bodová rovnice kuželosečky 37) jest

$$x_1^2 G_{22} G_{33} + x_2^2 G_{11} G_{33} + x_3^2 G_{11} G_{22} = 0$$

a tudíž při $G_{33} = 0$

39) $$x_3^2 = 0 .$$

Tato rovnice představuje rovnici přímky (dvakráte počítané), na níž se svrchu zmíněné body nalézají. — Je-li ještě $G_{11} = 0$ a $G_{22} \neq 0$, získáme $X_2^2 = 0$, t. j. rovnici bodu, dvakráte počítaného.

Kuželosečky, jichž příslušný determinant je roven nule, nazveme kuželosečkami **složenými**, na rozdíl od kuželoseček dříve projednávaných, které se nazývají kuželosečky **jednoduché**.

§ 7. Podgrupa G_3.

V pátém paragrafu jsme dokázali, že projektivní grupa G_8 obsahuje ∞^6 transformací typu 20). Zmínili jsme se též, že z této grupy můžeme vybrati podgrupy, předepíšeme-li transformacím nějaké podmínky. Studujme blíže podgrupu, která reprodukuje nějakou kuželosečku (jednoduchou). Nechť tato kuželosečka je dána rovnicemi 35′) (nebo 34).

Má-li se tato kuželosečka reprodukovati transformacemi 20), musí býti identicky (t. j. pro každé $x_1 : x_2 : x_3$) splněna rovnice

$$x_1^2 - x_2 x_3 = \varrho^2 \left[\left(\sum_1^3{}^i a_{1i} x_i\right)^2 - \left(\sum_1^3{}^j a_{2j} x_j\right)\left(\sum_1^3{}^k a_{3k} x_k\right)\right]$$

($\varrho \neq 0$ koef. úměrnosti).

Z toho můžeme odvoditi podmínky pro koeficienty a_{jk}. Tak na příklad koeficient při $\varrho^2 x_3^2$ v pravém členu této rovnice musí býti roven nule, t. j.

$$a_{13}^2 - a_{23} a_{33} = 0, \tag{40}$$

neboť na levé straně se x_3^2 vůbec nevyskytuje. Ze všech obdobných podmínek mohli bychom vyjádřiti osm nezávislých koeficientů třemi. Hledaná podgrupa je tedy **trojmocná**, G_3. Rovnice 40) použijeme ke stanovení vztahu mezi parametrem $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ bodu $x_1 : x_2 : x_3$ na kuželosečce a parametrem $'\lambda = \frac{'\lambda_1}{'\lambda_2}$ bodu $'x_1 : 'x_2 : 'x_3$ na kuželosečce mu odpovídajícího. Pro bod transformovaný je též

$$'\lambda = \frac{'x_1}{'x_2} = \frac{'x_3}{'x_1}.$$

Jsou-li m, n dvě libovolná čísla (z nichž alespoň jedno jest od nuly různé), můžeme též psáti

$$'\lambda = \frac{m\,'x_3 + n\,'x_1}{m\,'x_1 + n\,'x_2}.$$

Dosadíme-li do této rovnice z transformačních rovnic 20), obdržíme po snadné úpravě

$$'\lambda = \frac{x_1(m a_{31} + n a_{11}) + x_2(m a_{32} + n a_{12}) + x_3(m a_{33} + n a_{13})}{x_1(m a_{11} + n a_{21}) + x_2(m a_{12} + n a_{22}) + x_3(m a_{13} + n a_{23})} \tag{41}$$

Poměr čísel $m : n$ můžeme voliti tak, aby byly splněny rovnice

$$m a_{33} + n a_{13} = 0, \qquad m a_{13} + n a_{23} = 0,$$

neboť determinant této soustavy dvou rovnic je roven nule (rovnice 40). V tom případě v rovnici 41) se anulují koeficienty při x_3 a tudíž z ní obdržíme podle 35)

$$'\lambda = \frac{\lambda(m a_{31} + n a_{11}) + (m a_{32} + n a_{12})}{\lambda(m a_{11} + n a_{21}) + (m a_{12} + n a_{22})} = \frac{\lambda c_{11} + c_{12}}{\lambda c_{21} + c_{22}}$$

$$\left\{\begin{matrix} c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} \text{ konst. reálné} \\ c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21} \neq 0 \end{matrix}\right\}$$

Tato rovnice jest ekvivalentní s rovnicemi

$$\varrho' \lambda_1 = c_{11} \lambda_1 + c_{12} \lambda_2, \qquad \varrho' \lambda_2 = c_{21} \lambda_1 + c_{22} \lambda_2,$$

které jsou transformačními rovnicemi pro body kuželosečky. Dvě řady bodů na kuželosečce jsou těmito rovnicemi uvedeny v projektivní příbuznost. Čtenář se snadno přesvědčí (postupem obdobným jako v § 4), že ony dvě řady mají obecně dva body samodružné. Ježto však v projektivní příbuznosti dvou soustav rovinných jsou obecně tři body samodružné, musí třetí samodružný bod, patřící grupě G_3, ležeti mimo kuželosečku. Musí to býti průsečík tečen kuželosečky v samodružných bodech, neboť jen tyto tečny se na kuželosečce reprodukují. Shrneme-li tyto výsledky, můžeme říci:

Podgrupa, která reprodukuje danou kuželosečku, je trojmocná. Dva ze samodružných bodů příslušných transformací jsou na kuželosečce, třetí je v průsečíku tečen v těchto bodech ke kuželosečce.

§ 8. Orthogonální kružnice.

Zvolme v rovině pravoúhlý systém cartézský za systém souřadný. Kružnice o poloměru r, mající střed v počátku systému, je dána rovnicí

42) $$x^2 + y^2 = r^2.$$

Budeme ji nazývati kružnicí L. Zvolme dva její libovolné poloměry a považujme je za tečny jiné kružnice, dotýkající se zvolených poloměrů v jejich koncových bodech. Najděme rovnici této kružnice! Rovnice kružnice o středu (a, b) a poloměru w je

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = w^2.$$

Má-li tato rovnice představovati onu kružnici, musí

$$a^2 + b^2 = w^2 + r^2.$$

Předposlední rovnici můžeme tedy v našem případě přepsati na

43) $$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + r^2 = 0.$$

Této kružnici budeme říkati kružnice L'. Kružnice L' a L protínají se pod pravým úhlem. Říkáme též, že L a L' jsou orthogonální kružnice. Kružnice L' určena je dvěma údaji, neboť v její rovnici jsou dvě libovolné veličiny a, b. Proto říkáme, že všechny kružnice L' tvoří dvojmocný svazek, nebo též, že je jich ∞^2. Do tohoto dvojmocného svazku jsou zahrnuty i průměry kružnice L jako mezný případ kružnic, jichž poloměry rostou nade všechny meze.[5]) Tyto „zvláštní" druhy kružnic označíme symbolem L_0.

Kružnice L' je určena dvěma obecně položenými body $p(x', y')$, $q(x'', y'')$, neboť dosazením souřadnic těchto bodů do 43) získáme rovnice

$$ax' + by' = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + r^2), \qquad ax'' + by'' = \frac{1}{2}(x''^2 + y''^2 + r^2),$$

které za předpokladu, že $x'y'' - x''y' \neq 0$ (t. j., že spojnice pq neprochází středem kružnice L) skýtají jediné, jednoznačné řešení pro a a b.

Prochází-li však spojnice pq středem kružnice L, můžeme vždy předpokládati, že ony body leží právě na ose X (neboť souřadný systém můžeme vždy kol počátku tak otočiti, že libovolná přímka tímto bodem procházející je právě novou osou X). Z rovnice 43) jest ihned zřejmo, že takové body p, q nemohou býti libovolné. Musí míti souřadnice

$$x' = a + \sqrt{a^2 - r^2}, \qquad x'' = a - \sqrt{a^2 - r^2},$$

které obdržíme řešením 43) a rovnice $y = 0$. Tyto body jsou imaginárně sdružené nebo reálné, je-li $a < r$ nebo $a > r$. V tomto případě však musí jeden býti uvnitř, druhý vně kružnice L, jak ihned plyne z rovnice $x'x'' = r^2$. Dokážeme, že každá kružnice, těmito (imaginárně sdruženými nebo reálnými) body procházející, jest orthogonální ke kružnici L a ke všem kružnicím (jež také označíme jako kružnice L), které procházejí průsečnými body kružnice L a symetrály S

---

[5]) V tom případě roste totiž a i b nade všechny meze, ale poměr $\frac{a}{b}$ může býti konečný. Obdržíme tudíž z rovnice 43) skutečně rovnici přímky

$$-\frac{a}{b}x - y = 0$$

procházející počátkem, t. j. středem kružnice L.

úsečky pq. Symetrálu S můžeme totiž považovati za chordálu dvou kružnic L.[6]) Z elementární geometrie je známá definice chordály dvou kružnic jako geometrického místa středů kružnic, které dané dvě orthogonálně protínají. Tím je také naše tvrzení dokázáno, neboť všechny kružnice L mají touž chordálu. — Kružnice L' tvoří zde svazek jednomocný. Určeny jsou dvěma body p, q, jichž spojnice prochází počátkem. Říkáme též, že je jich možno vésti ∞^1 (dvěma body p, q).

Jsou-li oba tyto body p, q uvnitř nebo oba vně, nebo konečně oba na kružnici L, pak vždy určují jedinou kružnici L_0.

K jednomocnému svazku kružnic L' můžeme vždy sestrojiti kružnici L, známe-li alespoň jeden její bod b, neboť tečna v b ke kružnici L', tímto bodem vedené, protne pq ve středu hledané kružnice L.

Shrneme-li tyto poznatky, můžeme říci:

Dvěma body uvnitř kružnice L je vždy určena jediná kružnice orthogonální (L' nebo L_0).

K jednomocnému svazku kružnic L' můžeme vždy sestrojiti kružnici orthogonální, známe-li alespoň jeden její bod.

---

[6]) Chordála dvou kružnic, které se reálně protínají, je spojnice jejich reálných průsečíků. Neprotínají-li se obě kružnice reálně, sestrojíme naznačeným způsobem chordály v každé z těchto kružnic a libovolné třetí, která je obě reálně protíná. Průsečík těchto chordál je bod hledané chordály daných kružnic. Tutéž konstrukci opakujeme ještě s jinou pomocnou kružnicí a získáme druhý bod hledané chordály.