Kapitola VII.

ROVINY PARABOLICKÉ. HISTORICKÉ POZNÁMKY.

§ 1. Všeobecné rozdělení.

Když jsme uvažovali o rovině hyperbolické a eliptické, přepokládali jsme, že absolutní kuželosečka není složená. Zbývá nám tudíž zmíniti se též o této možnosti. Tu je však nutno rozeznávati všechny druhy složených kuželoseček. Tyto druhy jsou — podle toho, běží-li o kuželosečku bodovou nebo tečnovou (VIII, 6, odst. 4):

1*a*) dvojice bodů reálných různých (na dvojné přímce),

1*b*) dvojice přímek reálných různých (dvojným bodem),

2*a*) dvojice bodů imaginárně sdružených (na dvojné reálné přímce),

2*b*) dvojice přímek imaginárně sdružených (dvojným reálným bodem),

3*a*) dvojný bod reálný,

3*b*) dvojná přímka reálná.

Celkem získáme tak šest druhů různých geometrií. Při tom však geometrie patřící kuželosečkám pod stejným číslem jsou duální. Proto budeme se zabývati jen geometriemi sub 1*a*), 2*a*), 3*a*). Duální úvahy přenecháme čtenáři.

Nejdůležitější pro nás je geometrie *Minkowskiho* (sub 1*a*), kterou se budeme zabývati v následujícím paragrafu. Jako v euklidovské rovině, tak i zde je absolutní kuželosečka složená ze dvou různých bodů. Proto můžeme všech pojmů, které v euklidovské geometrii jsou definovány vzhledem k absolutní kuželosečce (bez ohledu na její imaginárnost), používati též v rovině *Minkowskiho*. Na příklad pojem pohybu, podobnosti (resp. zrcadlení), rovnoběžnosti atd. Jak se tyto — formálně stejně definované — pojmy liší věcně v obou geometriích, poznáme z vývodů následujícího paragrafu.

§ 2. Rovina Minkowskiho (1a).

1. P o h y b a p o d o b n o s t. Budiž podkladem našich úvah projektivní grupa transformací, která reprodukuje dvojici bodů reálných o souřadnicích

$$\xi \dots \quad 1:1:0, \qquad \xi' \dots \quad 1:-1:0.$$

Reprodukuje se tedy i přímka o rovnici $x_3 = 0$. Proto v příslušných transformacích (IV, 1, 1) musí býti

1) $$a_{31} = a_{32} = 0.$$

Ježto uvažované transformace tvoří grupu, jest determinant jejich rozdílný od nuly a můžeme tedy vždy dosáhnouti toho, aby byl roven $\varepsilon\,(=\pm 1)$, t. j.

2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \varepsilon.$$

Reprodukce shora zmíněné dvojice bodů má za následek rovnice

$$\begin{matrix} a_{11} + a_{12} = a_{21} + a_{22} \\ a_{11} - a_{12} = -a_{21} + a_{22} \end{matrix}, \quad \text{nebo} \quad \begin{matrix} a_{11} - a_{12} = a_{21} - a_{22} \\ a_{11} + a_{12} = -a_{21} - a_{22} \end{matrix},$$

jichž řešení můžeme spojiti v jedno

$$\begin{aligned} a_{11} &= \varepsilon a_{22} \\ a_{12} &= \varepsilon a_{21}. \end{aligned}$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice 2) získáme

$$\varepsilon a_{33}\,(a_{11}^2 - a_{12}^2) = \varepsilon,$$

nebo po krácení ε

$$a_{33}\,(a_{11}^2 - a_{12}^2) = 1.$$

Proto můžeme položiti (při ε, ε', $\varepsilon'' = \pm 1$)

$$a_{11} = \varepsilon a_{22} = \frac{\varepsilon'}{c} \operatorname{Cos} \psi, \quad a_{12} = \varepsilon a_{21} = \frac{\varepsilon''}{c} \operatorname{Sin} \psi, \quad a_{33} = c^2 \quad (a_{33} > 0),$$

nebo

$$a_{11} = \varepsilon a_{22} = \frac{\varepsilon''}{c} \operatorname{Sin} \psi, \quad a_{12} = \varepsilon a_{21} = \frac{\varepsilon'}{c} \operatorname{Cos} \psi, \quad a_{33} = -c^2 \quad (a_{33} < 0).$$

Smluvíme-li se na tom, že ψ může nabýti též hodnot záporných, můžeme položiti $\varepsilon'' = +1$ a i tak obdržíme všechny kombinace znamének. Transformace hledané grupy mají pak tvar

$$
3)\quad a)\begin{cases}
\varrho' x_1 = \dfrac{1}{c}(\varepsilon' x_1 \operatorname{Cos}\psi + x_2 \operatorname{Sin}\psi) + a_{13}x_3 \\
\varrho' x_2 = \dfrac{\varepsilon}{c}(x_1 \operatorname{Sin}\psi + \varepsilon' x_2 \operatorname{Cos}\psi) + a_{23}x_3 \\
\varrho' x_3 = c^2 x_3,
\end{cases}
$$

$$
\text{nebo}\quad b)\begin{cases}
\varrho' x_1 = \dfrac{1}{c}(x_1 \operatorname{Sin}\psi + \varepsilon' x_2 \operatorname{Cos}\psi) + a_{13}x_3 \\
\varrho' x_2 = \dfrac{\varepsilon}{c}(\varepsilon' x_1 \operatorname{Cos}\psi + x_2 \operatorname{Sin}\psi) + a_{23}x_3 \\
\varrho' x_3 = -c^2 x_3.
\end{cases}
$$

V této grupě jest obsažena i grupa transformací, vedoucích k podobnosti ($\psi = 0$):

$$
4)\quad a)\quad \begin{aligned}
\varrho' x_1 &= \frac{\varepsilon'}{c} x_1 + a_{13}x_3 \\
\varrho' x_2 &= \frac{\varepsilon\varepsilon'}{c} x_2 + a_{23}x_3, \\
\varrho' x_3 &= c^2 x_3
\end{aligned}
\qquad \text{nebo} \qquad b)\quad \begin{aligned}
\varrho' x_1 &= \frac{\varepsilon'}{c} x_2 + a_{13}x_3 \\
\varrho' x_2 &= \frac{\varepsilon\varepsilon'}{c} x_1 + a_{23}x_3 \\
\varrho' x_3 &= -c^2 x_3.
\end{aligned}
$$

Je-li $c = 1$, obdržíme grupu vedoucí k pohybu

$$
5)\quad a)\quad \begin{aligned}
\varrho' x_1 &= \varepsilon' x_1 \operatorname{Cos}\psi + x_2 \operatorname{Sin}\psi + a_{13}x_3 \\
\varrho' x_2 &= \varepsilon(x_1 \operatorname{Sin}\psi + \varepsilon' x_2 \operatorname{Cos}\psi) + a_{23}x_3 \\
\varrho' x_3 &= x_3,
\end{aligned}
$$

$$
\text{nebo}\quad b)\quad \begin{aligned}
\varrho' x_1 &= x_1 \operatorname{Sin}\psi + \varepsilon' x_2 \operatorname{Cos}\psi + a_{13}x_3 \\
\varrho' x_2 &= \varepsilon(\varepsilon' x_1 \operatorname{Cos}\psi + x_2 \operatorname{Sin}\psi) + a_{23}x_3 \\
\varrho' x_3 &= -x_3.
\end{aligned}
$$

Význam obou druhů transformací poznáme snadno, když žádáme aby se reprodukoval též „bod“ s o souřadnicích 0, 0, 1. Pak jest $a_{13} = a_{23} = 0$ a rovnice 3*a*) přiřazují k sobě útvary v téže části roviny. To znamená, že útvar původní a transformovaný jsou v téže části roviny, vymezené nulovými přímkami bodu s (to jest přímkami $s\xi$, $s\xi'$, viz paragraf 2). Rovnicemi 3*b*) je však útvaru jedné části roviny přiřazen útvar v druhé části roviny, vymezené nulovými přímkami bodu s. Tyto útvary jsou tedy v různých částech roviny.[1]

Shrneme-li dosavadní poznatky, můžeme říci:

V této rovině, t. zv. rovině *Minkowskiho*, je možno sestrojiti obrazce podobné. Proto není

[1] Čtenář si tato tvrzení sám snadno dokáže úvahou o hodnotách $x_1^2 - x_2^2$ resp. $'x_1^2 - 'x_2^2$ pro bod původní x a transformovaný $'x$.

každá projektivní transformace, která reprodukuje dvojici bodů ξ, ξ', transformací pohybovou. Každý pohyb je však vyjádřen projektivní transformací, která tuto dvojici reprodukuje.

2. Vzdálenost dvou bodů. Vzdálenost dvou bodů x, y měříme užitím dvojpoměru čtyř bodů, z nichž dva jsou body x, y a druhé dva splývají v jednom bodě, který jest průsečíkem přímky xy a $\xi\xi'$. Tento případ jsme již projednávali v kapitole III, když jsme jednali o jednorozměrném útvaru parabolickém. Jsou tedy i zde, v rovině *Minkowskiho*, přímky vesměs (s výjimkou přímky $\xi\xi'$) parabolické. Nemůžeme ovšem vzorce, v kapitole třetí pro vzdálenost dvou bodů odvozené, beze změny aplikovati zde, neboť dříve šlo o jednorozměrný útvar, kdežto nyní jde o rovinu, t. j. útvar dvojrozměrný. Užijeme však stejného myšlenkového postupu. Rovinu *Minkowskiho* můžeme pokládati za limitní případ roviny hyperbolické, v níž absolutní kuželosečka se rozloží ve dva body. Je-li tudíž v hyperbolické rovině rovnice „absolutní kuželosečky“ v tvaru přímkovém

$$\Xi_1^2 - \Xi_2^2 + \Xi_3^2 \delta = 0 \qquad (\delta = \text{konst. reálná}), \tag{6}$$

pak pro $\delta \to 0$ obdržíme v prvém přiblížení rovnici kuželosečky složené ze dvou bodů, t. j.

$$\Xi_1^2 - \Xi_2^2 = 0.$$

Bodová rovnice kuželosečky 6) jest

$$(\xi_1^2 - \xi_2^2)\delta + \xi_3^2 = 0. \tag{6'}$$

Pro $\delta \to 0$ přejde v prvém přiblížení v rovnici dvojné přímky, spojující absolutní body, t. j.

$$\xi_3^2 = 0.$$

Odvodíme tedy nejprve vzorec pro vzdálenost dvou bodů v rovině hyperbolické, v níž je „absolutní kuželosečka“ dána rovnicemi 6) resp. 6′) a potom užijeme limitního přechodu. Vzdálenost dvou bodů x, y v rovině hyperbolické je dána vzorcem (IV, 2, 9 *b*)

$$m(xy) = i\,\mathrm{k} \arcsin \sqrt{\frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx} f_{yy}}}.$$

V našem případě jest

$$f_{xx} = (x_1^2 - x_2^2)\delta + x_3^2 \qquad f_{xy} = (x_1 y_1 - x_2 y_2)\delta + x_3 y_3$$

$$f_{yy} = (y_1^2 - y_2^2)\delta + y_3^2 \quad f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \delta\,\{[x_1 y_3]^2 - [x_2 y_3]^2 - [x_1 y_2]^2 \delta\}$$

a tudíž můžeme psáti místo uvedeného vzorce

$$m(xy) = i\,k \arcsin \sqrt{\delta} \sqrt{\frac{[x_1 y_3]^2 - [x_2 y_3]^2 - [x_1 y_2]^2 \delta}{[(x_1^2 - x_2^2)\delta + x_3^2][(y_1^2 - y_2^2)\delta + y_3^2]}}\,.$$

Označme pro stručnost odmocninu

$\sqrt{\dfrac{-([x_1 y_2]^2 \delta + [x_2 y_3]^2 - [x_1 y_3]^2)}{[(x_1^2 - x_2^2)\delta + x_3^2][(y_1^2 - y_2^2)\delta + y_3^2]}}$ pouze symbolem $\sqrt{\ }$

a rozviňme arc sin v řadu (VIII, 1, 5).[1b] Obdržíme

$$m(xy) = i\,k\left(\frac{\sqrt{\delta}\sqrt{\ }}{1} + \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^5}{5} + \ldots\right)$$

nebo vytkneme-li $\sqrt{\delta}\sqrt{\ }$

$$m(xy) = i\,k\sqrt{\delta}\sqrt{\ }\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^2}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^4}{5} + \ldots\right).$$

Zvolme nyní libovolnou, od nuly různou konstantu D a volme ke každému δ příslušné k tak, aby

$$k\sqrt{\delta} = D.$$

Je tedy

$$m(xy) = i\,D\sqrt{\ }\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^2}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^4}{5} + \ldots\right).$$

Čím je δ menší, tím méně liší se $1 + \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^2}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{(\sqrt{\delta}\sqrt{\ })^4}{5} + \ldots$ od jedné a tudíž tím méně liší se $m(xy)$ od $i\,D\sqrt{\ }$. Pro $\delta \to 0$ (vylučujeme-li ze svých úvah body, pro něž je $x_3 = 0$, $y_3 = 0$, t. j. body, pro které při $\delta \to 0$ je $\lim\limits_{\delta \to 0} f_{xx} = 0$, $\lim\limits_{\delta \to 0} f_{yy} = 0$) obdržíme

$$\lim_{\delta \to 0} m(xy) = i \lim_{\delta \to 0} D\sqrt{\ } = D\sqrt{\frac{[x_2 y_3]^2 - [x_1 y_3]^2}{x_3^2\, y_3^2}}\,.$$

Pro $\delta \to 0$ přechází rovina hyperbolická v prvém přiblížení v rovinu *Minkowskiho*, v níž absolutní kuželosečka je dvojicí bodů ξ, ξ'. Pro tuto rovinu zavedeme definitoricky hořejší výraz jako vzdálenost m dvou bodů.

[1b]) Předpokládáme ovšem body x, y tak voleny, že je to možné. Toto omezení obecnosti je jen přechodné, neboť pro $\delta \to 0$ tato možnost vždy nastane.

Pravou stranu rovnice můžeme psáti výhodněji, zavedeme-li zkrácené označení (abc) pro determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Pak snadno nahlédneme, že je vzdálenost dvou bodů v rovině *Minkowskiho* dána výrazem

$$m(xy) = 4D\varrho^3 \frac{\sqrt{(\xi x y)(\xi' x y)}}{(\xi \xi' x)(\xi \xi' y)},$$

kde ϱ je nějaký koeficient úměrnosti od nuly různý. Zavedeme-li ještě novou konstantu l rovnicí

$$l = 16 D^2 \varrho^6,$$

získáme konečně pro čtverec vzdálenosti

$$m^2(xy) = l \frac{(\xi x y)(\xi' x y)}{(\xi \xi' x)^2 (\xi \xi' y)^2}. \tag{7}$$

Že takto definovaná vzdálenost vyhovuje podmínkám, na vzdálenost kladeným, může se čtenář přesvědčiti z rovnice 7′) (na konci tohoto odstavce), která jest jen jiným tvarem rovnice 7).

Zlomek na pravé straně může míti tyto hodnoty:

$$\frac{(\xi x y)(\xi' x y)}{(\xi \xi' x)^2 (\xi \xi' y)^2} \gtreqless 0.$$

Předpokládáme-li, že body x, y jsou různé od ξ, ξ', musí v těchto třech případech býti resp.

$$(\xi x y)(\xi' x y) \gtreqless 0.$$

Je-li splněna podmínka prostřední, musí býti

$$(\xi x y) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad (\xi' x y) = 0.$$

Pak jest $m(xy) = 0$. Ale hořejší rovnice vyjadřují podmínku, aby body x, y, ξ, resp. x, y, ξ', ležely na jedné přímce.

Z toho plyne důležitý poznatek:

Přímky, spojující libovolný bod y s bodem ξ, nebo ξ', mají tu vlastnost, že vzdálenost libovolného bodu x na každé z nich od bodu y je rovna nule. Tyto přímky, t. zv. přímky nulové, jsou pro každý reálný bod y reálné.

Je-li bod y na přímce $\xi\xi'$, můžeme pro jeho souřadnice psáti

$$\varrho y_j = \lambda \xi_j + \mu \xi_j' \qquad (j = 1, 2, 3).$$

V tom případě je $\varrho(\xi\xi' y) = \varrho\lambda(\xi\xi'\xi) + \varrho\mu(\xi\xi'\xi') = 0$ a proto vzdálenost každého bodu x, který není na přímce $\xi\xi'$, od libovolného bodu y ($\neq \xi, \xi'$) roste nade všechny meze, blíží-li se bod y přímce $\xi\xi'$.

Má-li vzdálenost $m(xy)$ reálných bodů x, y býti reálná, od nuly různá, musí $(\xi xy)(\xi' xy) > 0$, t. j. determinanty (ξxy) a $(\xi' xy)$ musí současně býti buď kladné, nebo záporné. Je-li tomu tak, znamená to, že každý bod x', který leží v téže části roviny (vymezené přímkami $y\xi$, $y\xi'$) jako bod x, má od bodu y vzdálenost reálnou. Pro každý jiný bod x'', který leží v jednom z úhlů vedlejších (k úhlům vrcholovým, v nichž se nalézají body x, x'), jest $(\xi x'' y)(\xi' x'' y) < 0$ a tudíž vzdálenost $m(x'' y)$ jest imaginární. Z toho plyne:

Vzdálenost dvou reálných bodů není vždy reálná.

Nejsme oprávněni omeziti se jen na tu část roviny, kde je vzdálenost od bodu y reálná, neboť toto vymezení závisí na bodě y, který ovšem můžeme voliti libovolně. Přes to však není nezajímavo podotknouti, že pro bytost, schopnou takto měřiti jen vzdálenosti reálné, by v této rovině neexistovala volnost pohybu. To ostatně není nic divného. V našem čtyřrozměrném čas-prostoru můžeme se též s časem pohybovati jen směrem do budoucna, nikoli do minula.

Definujme kružnici jako geometrické místo bodů, které jsou od pevného bodu (středu) stejně vzdáleny. Z rovnice 7) odvodíme snadno, že obrazem kružnice je kuželosečka. Je-li s „střed kružnice", pak její rovnice je vskutku kvadratická v souřadnicích plynulého „bodu" x

$$m^2 (\xi\xi' x)^2 (\xi\xi' s)^2 = l(\xi x s)(\xi' x s).$$

Je-li „středem" „kružnice" „bod" $s\,(0, 0, 1)$, můžeme její rovnici uvésti na tvar

$$m^2 x_3^2 = D^2 (x_2 - x_1)(x_1 + x_2),$$

nebo

$$x_1^2 - x_2^2 + \left(\frac{m}{D}\right)^2 x_3^2 = 0.$$

„Kružnice" s touto koncentrická, jejíž poloměr jest mi, má rovnici

$$x_1^2 - x_2^2 - \left(\frac{m}{D}\right)^2 x_3^2 = 0.$$

Poslední dvě rovnice jsou skutečně rovnice „křivek", které se pohybem 5a) (při $a_{13} = a_{23} = 0$) reprodukují.

Limitním případem kružnice je právě dvojice přímek nulových [pro $m(xs) = 0$]. Jako již dříve, mohli bychom i nyní dokázati, že jednomocná grupa transformací, která reprodukuje body ξ, ξ', s a koncentrické kružnice, jest vyjádřením pohybu po tomto svazku koncentrických kružnic. Ježto existuje jen jeden druh kružnic s reálným poloměrem existuje též jen jeden druh pohybu po kružnicích. (Při tom ovšem o pohybu po nulových přímkách nemůžeme mluviti, neboť ty se sice reprodukují tímto pohybem po koncentrických kružnicích o středu s, ale pohyb na nich není definován.) Přes to však můžeme takovým pohybem čtverým způsobem k sobě přiřaditi útvary pohybované. Důvod spočívá v tom, že obecně neleží bod s na kružnici, a tudíž průměr ji protíná ve dvou bodech. Jsou-li tyto průsečné body se dvěma průměry $'x$ a $'x'$ resp. x a x', můžeme přiřaditi bodům ξ, x, ξ' body

$$\begin{aligned} &\xi, 'x, \xi', \text{ nebo} \\ &\xi, 'x', \xi', \text{ nebo} \\ &\xi', 'x, \xi, \text{ nebo} \\ &\xi', 'x', \xi. \end{aligned}$$

Jednomocná grupa transformací, která reprodukuje body s, ξ, ξ' a každou přímku bodem s, ale nikoliv každou kružnici, reprodukuje celý svazek koncentrických kružnic (to znamená, že nějaké kružnici v tomto svazku po transformaci odpovídá obecně jiná kružnice téhož svazku) a vede tedy k podobnosti, jejíž střed je právě s. Obdobným způsobem bychom mohli dokázati, že tato podobnost v jedné části roviny, vymezené nulovými přímkami, je možná jen dvojím způsobem, neboť jednomu průsečnému bodu x nějakého poloměru s kružnicí můžeme přiřaditi jeden ze dvou průsečíků téhož průměru s jinou kružnicí svazku. Tomu neodporují rovnice 4), které vedou ke čtyřem způsobům přiřazení, neboť v nich jest obsaženo i zrcadlení, spojené s podobností.

Předpokládejme, že „přímka" $\xi\xi'$ je nevlastní přímkou euklidovského modelu *Minkowskiho* roviny. V tom případě vhodnou volbou jednotkového bodu můžeme docíliti, že $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ jsou přímo cartézské souřadnice. Píšeme-li je x_1, x_2, můžeme rovnici 7) přetvořiti na

$$m^2(xy) = -D^2[(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2],$$

Dva nekonečně blízké body jsou tedy od sebe vzdáleny o délku *dm,* jejíž čtverec je dán výrazem

$$dm^2 = D^2 (dx_2^2 - dx_1^2).$$

Forma tato liší se v zásadě od euklidovské jen tím, že u dx_1^2 je jiné znamení. Proto se rovině, která má takovou formu, říká někdy kvasieuklidovská rovina.

Poznámka. Konstantu l, která vlastně určuje jednotkovou délku, nechali jsme dosud bez povšimnutí. Můžeme ji však snadno určiti, když dvěma bodům j a p, jichž vzdálenost předpokláoáme reálnou, předepíšeme vzdálenost rovnou jedné. Získáme tak ze vzorce 7)

$$1 = l \frac{(\xi j p)(\xi' j p)}{(\xi \xi' j)^2 (\xi \xi' p)^2}$$

a tudíž pro vzdálenost dvou libovolných bodů

$$m^2 (x y) = \frac{(\xi \xi' j)^2 (\xi \xi' p)^2 (\xi x y)(\xi' x y)}{(\xi \xi' x)^2 (\xi \xi' y)^2 (\xi j p)(\xi' j p)}. \tag{7'}$$

Pak příslušná fundamentální forma jest

$$dm^2 = \frac{dx_1^2 - dx_2^2}{(j_1 - p_1)^2 - (j_2 - p_2)^2}.$$

Ze vzdálenosti jp mohu dle hořeních pravidel usuzovati na reálnost, či imaginárnost vzdálenosti jx resp. px, kde x je obecný bod roviny *Minkowskiho.* Ze vzdálenosti jx resp. px mohu právě stejným způsobem usuzovati na reálnost, či imaginárnost vzdálenosti xy, kde y je další obecně položený bod roviny *Minkowskiho.* Body j, p stanoví tedy svou vzdáleností jednotku míry (jako v rovině euklidovské), ale zároveň dovolují rozhodnouti o každé vzdálenosti reálných bodů, zda je reálná, či imaginárná.

3. Úhel dvou přímek. Měření úhlů má v rovině *Minkowskiho* charakter hyperbolický. Úvahy, které jsme prováděli při studiu svazku hyperbolického, nemůžeme ovšem jen tak zhola zde aplikovati, neboť nyní jde o rovinu, kdežto dříve projednávali jsme jen jednorozměrný svazek hyperbolický. Můžeme však použíti obdobného postupu, jako v předcházejícím odstavci: Stanovíme úhel dvou „přímek“ X, Y pomocí „absolutní kuželosečky“, jejíž rovnice je 6). V kapitole IV získali jsme pro tento případ rovnici 8), vyjadřující úhel $M(XY)$

$$M(XY) = \frac{C}{2} \log \frac{F_{XY} + \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}{F_{XY} - \sqrt{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}}.$$

Musíme voliti $C = K =$ konst reálné, abychom získali při limitním přechodu úhel reálný. (Konstanta K není v žádné souvislosti s křivostí, označenou týmž písmenem v kapitole

V.) Za tohoto předpokladu jest úhel funkcí mnohoznačnou. Omezíme se však opět jen na hlavní její hodnoty. Z hořejšího vzorce odvodíme pro $C = K$

$$M(XY) = K \operatorname{arc\,Sin} \sqrt{\frac{F_{XY}^2 - F_{XX} F_{YY}}{F_{XX} F_{YY}}}\,.$$

(Pro odvození viz III, 3, 18′*b*.) Použitím rovnice 6) získáme

$$\frac{M(XY)}{K} = \operatorname{arc\,Sin} \sqrt{\frac{[X_1Y_2]^2 + \delta\,([X_2Y_3]^2 - [X_3Y_1]^2)}{(X_1^2 - X_2^2 + \delta X_3^2)(Y_1^2 - Y_2^2 + \delta Y_3^2)}}\,.$$

Pišme místo odmocniny

$$\sqrt{\frac{[X_1Y_2]^2 + \delta\,([X_2X_3]^2 - [X_3Y_1]^2)}{(X_1^2 - X_2^2 + \delta X_3^2)(Y_1^2 - Y_2^2 + \delta Y_3^2)}}$$ pouze symbol $\sqrt{}$

a rozveďme *arc Sin* v řadu (VIII, 1, 5′). Pro $\delta \to 0$ získáme podle citované rovnice (není-li $X_1 = X_2$, nebo $Y_1 = Y_2$, což vždy předpokládáme)

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{M}{K} = \lim_{\delta \to 0} \left(\frac{\sqrt{}}{1} - \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{})^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{(\sqrt{})^5}{5} - \dots \right) =$$

$$= \left(\frac{[X_1Y_2]}{\sqrt{(X_1^2 - X_2^2)(Y_1^2 - Y_2^2)}} - \frac{1}{2.3} \frac{[X_1Y_2]^3}{\sqrt{(X_1^2 - X_2^2)(Y_1^2 - Y_2^2)}^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1.3}{2.4.5} \frac{[X_1Y_2]^5}{\sqrt{(X_1^2 - X_2^2)(Y_1^2 - Y_2^2)}^5} - \dots \right) =$$

$$= \operatorname{arc\,Sin} \frac{[X_1Y_2]}{\sqrt{(X_1^2 - X_2^2)(Y_1^2 - Y_2^2)}}\,.$$

Výraz $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{M}{K}$ zavádíme d e f i n i t o r i c k y jako úhel dvou přímek roviny *Minkowskiho* a píšeme jej $\dfrac{M}{K}$. Je tedy úhel dvou přímek definován rovnicí

$$\boxed{\operatorname{Sin} \frac{M}{K} = \frac{[X_1Y_2]}{\sqrt{(X_1^2 - X_2^2)(Y_1^2 - Y_2^2)}}} \tag{8}$$

Abychom z tohoto vzorce odvodili některé důsledky, přepíšeme jej na jiný tvar. Předpokládejme, že průsečík přímek *X*, *Y* je bod *b*. Pak platí (VIII, 3, 19)

$$b_1 : b_2 : b_3 = [X_2Y_3] : [X_3Y_1] : [X_1Y_2]\,.$$

Zvolme na přímce X libovolný bod x, na přímce Y libovolný bod y. Pak přímkové souřadnice přímek X, Y můžeme vyjádřiti souřadnicemi bodů x, y (VIII, 3, 18)

$$X_1 : X_2 : X_3 = [b_2 x_3] : [b_3 x_1] : [b_1 x_2], \quad Y_1 : Y_2 : Y_3 = [b_2 y_3] : [b_3 y_1] : [b_1 y_2].$$

Je tedy rovnice 8) identická s rovnicí

$$8') \qquad \sin \frac{M}{K} = \frac{b_3 (b x y)}{\sqrt{([b_2 x_3]^2 - [b_3 x_1]^2)([b_2 y_3]^2 - [b_3 y_1]^2)}},$$

nebo

$$8'') \qquad \boxed{\sin \frac{M}{K} = \frac{1}{2} \frac{(\xi' \xi b)(b x y)}{\sqrt{(\xi b x)(\xi' b x)(\xi b y)(\xi' b y)}}}$$

Podle předpokladu neleží body b, x, y na jedné přímce a tudíž je $(b x y) \neq 0$.

Je-li $(\xi \xi' b) = 0$, leží bod b na spojnici bodů $\xi \xi'$. Pak je $Sin \frac{M}{K} = 0$, t. j. $M = 0$ a přímky jsou rovnoběžné. Z toho plyne, že

jedním bodem mimo přímku možno k této vésti jen jednu rovnoběžku.

Blíží-li se jeden z determinantů ve jmenovateli, třeba $(\xi b x)$, nule, roste M nade všechny meze. Ale $(\xi b x) = 0$ značí, že přímka bx je přímkou nulovou. Říkáme, že

úhel libovolné přímky a přímky nulové je nekonečně veliký.

Blíží-li se oba determinanty $(\xi b x)$ a $(\xi' b y)$ nule a je-li současně $(\xi \xi' b) \neq 0$, roste rovněž M nade všechny meze. Ale $(\xi b x) = 0$, $(\xi' b y) = 0$ jsou rovnice přímek nulových, které při $(\xi \xi' b) \neq 0$ protínají se ve vlastním bodě b:

Úhel nulových přímek je nekonečně veliký.

Aby byl úhel M reálný, je třeba, aby součiny

$$(\xi b x)(\xi' b x), \quad \text{a} \quad (\xi b y)(\xi' b y)$$

byly téhož znamení. To nastane jen tenkráte, jsou-li body x, y v jednom ze dvou úhlů, tvořených přímkami nulovými bodem b. Pak přímky X, Y nejsou oddělovány nulovými přímkami. V opačném případě, kdy totiž tyto přímky jsou oddělovány nulovými přímkami, jsou hořejší součiny různých znamének a tudíž M imaginární:

Úhel dvou přímek, které nejsou nulovými přímkami oddělovány, je reálný. V opačném případě jest úhel imaginární.

Obrátíme se k dalším případům složené kuželosečky absolutní.

§ 3. Rovina euklidovská a rovina semimetrická.

1. Rovina euklidovská (2*a*). Problém studovati invarianty projektivní grupy transformací, které reprodukují dvojici bodů imaginárně sdružených, jest vlastně problémem euklidovské geometrie v rovině. Ten jsme projednávali již na počátku této knihy (II) a není tedy potřebí znova se k němu vraceti. Ostatně bychom mohli pokračovati též metodou předcházejícího odstavce, která by názorně osvětlila vztah obecné roviny eliptické a mezného jejího případu, t. j. roviny euklidovské. To však přenechávám čtenáři.

2. Rovina semimetrická (3*a*). Je-li absolutní kuželosečka jediným bodem, počítaným dvakráte, pak nemůžeme v této rovině stanoviti vzdálenost dvou libovolných bodů známými prostředky. Jenom takové body, jichž spojnice oním bodem pevným prochází, mají vzdálenost definovanou. Tato má ovšem charakter parabolický. Rovněž úhel dvou libovolných přímek má charakter parabolický, neboť nulové přímky splývají v jedinou. — Ježto je definována vzdálenost jen pro zvláštní polohy bodů, říkáme této rovině rovina semimetrická.

Úvahy o této rovině vypadají již z rámce této práce a přimykají se spíše úvahám obecné projektivní geometrie, která neoperuje vztahy metrickými. Proto se touto rovinou zabývati nebudeme.

Takovým způsobem probrali jsme všechny základní případy klasické geometrie neeuklidovské v rovině. Čtenář, který se o tyto problémy blíže zajímá, snadno naše úvahy zobecní pro neeuklidovský prostor troj- nebo vícerozměrný.

Historické poznámky.

§ 4. Vývoj neeuklidovské geometrie.

Neeuklidovská geometrie vděčí za svůj vznik skepsi o V. postulátu *Euklidovu*. Marná snaha dokázati jej vedla konečně k přesvědčení, že je nedokazatelný. Logickým důsledkem toho byl pokus o systém geometrie, který by tohoto postulátu neobsahoval. Trvalo velice dlouho, než se matematikové tohoto pokusu odvážili. Zmínili jsme se již na příslušných místech o tom, jak mnozí z těch, kteří chtěli dokázati V. postulát, dospěli až ke geometrii hyperbolické, ale neodvážili se tvrditi, že je bezesporná.

Jedním z prvých zakladatelů neeuklidovské geometrie byl *Gauss.* Neuveřejnil však výsledky svých prací. Jsou obsaženy v dopisech, jež byly později publikovány. *Gauss* definoval také rovnoběžky takovým způsobem, že tato definice byla platná i pro geometrii hyperbolickou (IV, 5). Věděl již také, že je možno sestrojiti trojúhelník s libovolně malými úhly. Poznal, že v hyperbolické geometrii neexistují útvary podobné. Chtěje prakticky rozhodnouti, která ze dvou geometrií, euklidovská, či hyperbolická, je platná, měřil úhly trojúhelníka, jehož vrcholy byly Brocken, Inselsberg a Hoher-Hagen. Odchylka součtu úhlů od 180^0 byla však v mezích pozorovacích chyb. — Z jeho současníků zabývali se neeuklidovskou geometrií *Schweikart* (1780—1855) a *Taurinus* (1794—1887). Oba dva (jakož i *Gauss*) poznali, že ve vzorcích této geometrie vystupuje konstanta, blíže neurčená. *Taurinus* odvodil již v podstatě i vzorec pro úhel rovnoběžnosti, ale nevěřil v možnost neeuklidovské geometrie.[1c])

První soustavně propracoval neeuklidovskou geometrii (hyperbolickou) *Lobačevský* (1793—1856); nazval ji pangeometrií, nebo též imaginární geometrií. On vybudoval úplný logický systém této geometrie. V mnoha pojednáních propracoval celou stavbu neeuklidovské geometrie, zvláště pak formule trigonometrické. Východiskem jeho úvah byl předpoklad, že bodem lze vésti k přímce dvě rovnoběžky, které právě oddělují různoběžky od mimoběžek. Je s podivem, jak krásných výsledků se dopracoval, aniž měl tak snadnou pomoc v názoru, jehož jsme používali my, opírajíce se o různá zobrazení neeuklidovské geometrie. — V únoru 1926 bylo tomu právě sto let, kdy předložil svoji práci o neeuklidovské geometrii matematickému oddělení kazaňské university „Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles“. — Nezávisle od *Lobačevského* objevil a propracoval geometrii neeuklidovskou maďarský důstojník *J. Bolyai* (1802—1860). Od něho pochází řada

1c) Ke svým výsledkům dospěl cestou ryze analytickou, když dosadil do vzorců sférické trigonometrie imaginární poloměr.

konstrukcí (konstrukce rovnoběžek, úsečky příslušné úhlu, kvadratura kruhu, atd., nikoli však tím způsobem, který my jsme naznačili). Geometrie hyperbolická je často podle těchto matematiků zvána geometrií *Lobačevský-Bolyaiovou.*

V době před *Riemannem* šlo vždy jen o geometrii hyperbolickou. To bylo způsobeno předpokladem, který většinou byl mlčky činěn, že přímka je nekonečná. *Riemann* (1826—1866), místo aby vycházel z úvah o nekonečném prostoru, jak to činili jeho předchůdci, postavil se ve své habilatiční přednášce na stanovisko diferenciální. To znamená, že počal studovati geometrii v nekonečně malém okolí bodu. Jako prvý důsledek tohoto postupu objevila se možnost nahraditi pojem přímky nekonečné pojmem přímky neomezené. Analytickým východiskem jeho úvah je kvadratická fundamentální forma. Dokázal, že za určitých předpokladů, které jsou splněny i v euklidovském prostoru, je možno fundamentální formu n-rozměrného prostoru uvésti na tvar

$$\frac{\sum_{1}^{n}{}_j\, dx_j^2}{1 + a\sum_{1}^{n}{}_j\, x_j^2}.$$

Při tom byla a reálná konstanta. Nyní ovšem bylo nutno rozeznávati případy, kdy a je větší, menší, nebo rovno nule. Konstanta $\frac{1}{a}$ je co do významu ekvivalentní s konstantami k^2, k'^2, kterých jsme užívali v geometrii hyperbolické a eliptické. Podle toho, zda je $a < 0$, > 0, nebo $= 0$, obdržíme geometrii hyperbolickou, eliptickou nebo euklidovskou.[2]) — Eliptickému prostoru říká se někdy též prostor *Riemannův.*

Východisko *Riemannovo* hleděl zdůvodniti *Helmholtz* (1821—1894), když dokazoval, že metrická forma prostoru je za jistých předpokladů, které jsou splněny i v prostoru euklidovském, nutně kvadratická. V jeho pracích je obsažena již myšlenka, že pohyb je vyjádřen grupou transformací. S tohoto stanoviska zabýval se tímto problémem *Lie* (1842—1899), který geometrii hyperbolickou, eliptickou

[2]) Měl *Riemann* ve svých úvahách na mysli geometrii eliptickou, či sférickou? To dneska s jistotou nemůžeme říci, neboť obě mají stejnou diferenciální formu fundamentální, a *Riemann* vycházel z úvah diferenciálních!

a euklidovskou definoval jako studium grup, které mají (třeba i v omezeném prostoru) charakter pohybový. — Tím blížíme se již *Kleinově* definici geometrie jako studia invariantů vzhledem ke grupě transformací.

Na tomto místě sluší se zmíniti o *Cayleyově* projektivní metrice. Je to v zásadě studium vztahů polohy nějakého útvaru vzhledem k absolutnímu útvaru (kuželosečce v rovině, kvadrice v prostoru). *Cayley* (1821—1895) studoval projektivní metriku nezávisle na geometrii neeuklidovské.

Hyperbolická geometrie byla již vybudována, ale nebyla v té době ještě názorně prokázána její logická nespornost. Teprve *Beltrami* (1835—1900) při studiu geodetického zobrazení ploch na rovinu dospěl k názoru, že tato geometrie v rovině jest ekvivalentní s geometrií na plochách konstantní záporné míry křivosti. Při geodetickém zobrazení takových ploch dospěl nezávisle od *Cayleye* k projektivní metrice. Ve svých úvahách zabýval se též prostory eliptickými (vlastně sférickými). (VI, 6, odst. 2.)

Odtud byl již jen krok k projektivnímu vyjádření hyperbolické, eliptické a euklidovské geometrie, kterýžto krok učinil *Klein* (1849—1925). On použil projektivní metriky *Cayleyovy*, ale zavedl do ní konstanty k, resp. k', kterých jsme používali. Od něho pochází též pojmenování hyperbolická, eliptická a parabolická geometrie. On též prvý upozornil na rozdíl geometrie eliptické a sférické (VI, 6, odst. 2).

Tím byla stavba neeuklidovské geometrie (hyperbolické a eliptické) principielně ukončena a otevřelo se pole studiu speciálních otázek. To však již nepatří do historických poznámek o této disciplině, spíše do její systematiky. Odkazuji proto čtenáře na pojednání originální, resp. různé monografie *(Clifford, Study, Coolidge, Hjelmsljev, Bonola, Liebmann, Mc Leod* atd.), uvedené v poznámkách bibliografických.

V následujícím paragrafu ukážeme, jak základní myšlenky *Riemannovy, Kleinovy* a *Lieovy* vedly v současné době ke geometrickým systémům, které hyperbolickou a eliptickou geometrii obsahují jako velmi speciální případ.

§ 5. Diferenciální geometrie doby současné.

Východiskem úvah doby současné je jednak diferenciální stanovisko *Riemannovo*, jednak *Kleinova* definice geometrie. Tak podkladem diferenciální projektivní geometrie v n-rozměrném prostoru[2a]) je studium těch vlastností m-rozměrných ploch ($m < n$), které se nemění při projektivní grupě transformací

$$\varrho' x_i = \sum_1^{n+1} a_{ij} x_j \qquad (a_{ij} \text{ konst. reálné, } i, j = 1 \ldots n+1).$$

Při tom ony m-rozměrné plochy jsou dány $n + 1$ rovnicemi typu

$$x_j = x_j (u_1 \ldots . u_m).$$

Velmi krásných výsledků docílili v této geometrii hlavně *Fubini* a *Čech*.[3])[4]) Poněkud méně obecná je t. zv. diferenciální geometrie afinní, která studuje ty vlastnosti zprvu zmíněných ploch, které jsou invariantní vzhledem k afinní grupě transformací

$$x_k = a_{ko} + \sum_1^n {}_j\, a_{kj} x_j \qquad (a_{ko},\ a_{kj} = \text{konst. reálné, } j, k = 1 \ldots n)$$

n-rozměrného prostoru. Tato grupa reprodukuje nevlastní (n — 1)-rozměrnou rovinu prostoru. Celá řada německých i jiných geometrů se zabývala touto geometrií. Jsou to zejména *Pick*, *Blaschke*, *Berwald*, *Reidemeister*, *Winternitz*, *Tzitzeica*, *Čech* atd.

Geometrie shora jmenované obsaženy jsou jako speciální případy v té geometrii, která studuje invarianty vzhledem k obecné grupě transformací souřadnic n-rozměrného prostoru

$$'x_i = '\varphi_i (x_1 \ldots x_n) \text{ resp. } x_i = \varphi_i ('x_1 \ldots 'x_n) \quad (i = 1, \ldots n)$$

a ke grupě transformací, značících pohyb

$$y_i = \Phi_i (x_1 \ldots x_n, \underset{0}{y_1} \ldots \underset{0}{y_n})$$

($\underset{0}{y_i}$ značí hodnotu y_i právě v bodě zkoumaném).

[2a]) Prvý, kdo použil pojmu prostoru o více dimensích, byl asi *Lagrange* (v „Théorie des fonctions"). Existence t. zv. křivek *Peanových* (a *Hilbertových*) vynutila si přesnou definici pojmu dimense. Počet dimensí je invariantem vzhledem k jistým jednojednoznačným a spojitým transformacím. Bližší údaje najde čtenář téměř v každé učebnici o teorii množství.

[3]) Při té příležitosti upozorňuji na první českou knihu o diferenciální geometrii projektivní: „Projektivní diferenciální geometrie" (Jednota čs. matem. a fys. 1926), jejímž autorem je posledně jmenovaný prof. *Čech*.

[4]) Vedle těchto matematiků nutno jmenovati též *Wilczynskiho*, který činí východiskem svých úvah teorii rovnic diferenciálních.

Tato geometrie musí se nutně omeziti na diferenciální stanovisko *Riemannovo.* Pro zmíněné transformace souřadnic platí v okolí zkoumaného bodu

$$9)\qquad d'x_i = \sum_1^n {}^j \frac{\partial' \varphi_i}{\partial x_j} dx_j \qquad dx_j = \sum_1^n {}^j \frac{\partial \varphi_j}{\partial' x_i} d'x_i .$$

Z toho plyne, že tato geometrie musí uvažovati takové veličiny v_i resp. V_i, které při transformaci souřadnic se transformují podle rovnic

$$'V_i = \sum_1^n {}^j \frac{\partial' \varphi_i}{\partial x_j} V_j, \qquad 'v_j = \sum_1^n {}^i \frac{\partial \varphi_i}{\partial' x_j} v_i ;$$

pak je totiž výraz

$$\sum_1^n {}^i\, 'V_i\, 'v_i = \sum_1^n {}^{i,j,k} \frac{\partial' \varphi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_k}{\partial' x_i} V_j v_k = \sum_1^n {}^i V_i v_i$$

invariantní vzhledem k transformacím 9). Veličiny ty nazývají se složky **v e k t o r ů k o n t r a v a r i a n t n í c h** (V_i), resp. **k o v a r i a n t n í c h** (v_i). Grupa pohybová musí býti pak dána rovnicemi

$$V_i = \Phi_i (x_1 \ldots x_n ; \underset{o}{V_1} \ldots \underset{o}{V_n}), \qquad v_i = \Phi_i' (x_1 \ldots x_n ; \underset{o}{v_1} \ldots \underset{o}{v_n}),$$

nebo, vzhledem k tomu, že tato geometrie je diferenciální,

$$dV_i = \sum_1^n {}^j \Phi_{ij}\, dx_j , \qquad dv_i = \sum_1^n {}^j \Phi'_{ij}\, dx_j .$$

Dosud se tato geometrie zabývala většinou jen takovými rovnicemi pohybovými, v nichž Φ_{ij}, resp. Φ'_{ij} jest lineární funkcí složek V_i, resp. v_j, t. j.

$$\Phi_{ij} = \sum_1^n {}^k \Gamma_{ikj} V_k , \qquad \Phi'_{ij} = \sum_1^n {}^k \Gamma_{kij} v_k .$$

Různou volbou těchto koeficientů obdržíme různé geometrie. Tato metoda jest velmi obecná a v tom spočívá též jedna její nevýhoda, neboť pro problémy speciální není zrovna nejvhodnější. Proto je nutno dříve vytčené metody geometrie projektivní a afinní považovati za rovnocenné s touto metodou.[5]) Skutečným zakladatelem jejím je *Ricci-*

[5]) Tak na př. vhodnou volbou koeficientů Γ, resp. Γ' získáme geometrii afinní, po případě projektivní, jejichž výsledky se takto snadno zobecní. Speciální problémy těchto geometrií je nutno však řešiti metodami jim vlastními, nechceme-li zbytečně kalkul ztěžovati.

Curbastro. Ukázalo se, že je vhodnou pomůckou k matematickým úvahám teorie relativity. Její metody pod názvem absolutní počet diferenciální, nebo též počet *Ricciho* zdokonalili a propracovali zvláště *Levi-Civita, Weyl, Schouten, Struik, Eddington, Cartan* atd.

Kdybychom chtěli touto metodou studovati na př. rovinu hyperbolickou, bylo by nejvýhodnější fundamentální formu předpokládati ve tvaru

$$ds^2 = k^2 \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2}.$$

Za jistých předpokladů, které jsou splněny nejen v rovině hyperbolické, ale i v euklidovském prostoru na každé ploše v obecném bodě, obdržíme

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma'_{ijk} = 0,$$

$$\Gamma_{111} = \Gamma_{212} = \Gamma_{221} = \Gamma_{122} = 0, \quad \Gamma_{211} = -\Gamma_{112} = -\Gamma_{121} = -\Gamma_{222} = -\frac{1}{x_2}.$$

Tyto rovnice mohly býti východiskem našich úvah. Zvolili jsme však jinou cestu z toho důvodu, že je přístupnější.