Úvod do neeukleidovské geometrie

Pohyb. Trigonometrie. Úvahy diferenciální

In: Václav Hlavatý (author): Úvod do neeukleidovské geometrie. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1926. pp. 100–[145].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402726

Kapitola V.

POHYB, TRIGONOMETRIE, ÚVAHY DIFERENCIÁLNÍ.

§ 1. Kružnice.

1. Definice kružnice. Velmi vděčným oborem studia v geometrii hyperbolické je kružnice. Definujeme ji prozatím takto:

Kružnice je geometrické místo bodů, které mají od pevného bodu s konstantní vzdálenost.

Definice tato jest úplně stejná jako v geometrii euklidovské. Je tedy nasnadě zavésti i další pojmy, kružnice se týkající, analogicky s geometrií euklidovskou. Tak bod s budeme také nazývati středem kružnice. Kružnice, které mají společný střed, jsou soustředné (koncentrické). Souhrn soustředných kružnic budeme nazývati svazkem kružnic. Úsečku, spojující střed kružnice s libovolným bodem jejího obvodu, budeme nazývati poloměr. S těmito pojmy v dalších odstavcích úplně vystačíme. Nesmíme však očekávati, že veličiny, stejně pojmenované v obou geometriích, budou míti všechny vlastnosti stejné. Že tomu tak není, ukážeme v následujících řádcích.

Odvoďme si nejdříve rovnici „kružnice"! K tomu použijeme vzorce (IV, 2, 9) pro vzdálenost dvou bodů. Tento vzorec, upravený pro naši potřebu, zní

$$m\,(xs) = k \operatorname{arc\,Cos} \frac{f_{xs}}{\sqrt{f_{xx} f_{ss}}}\,.$$

Ježto body x „kružnice" mají býti od středu vzdáleny o stejnou délku, musí výraz na levé straně této rovnice býti konstantní. Nazveme-li jej třeba r, obdržíme řešením

$$f_{xs} = \sqrt{f_{xx} f_{ss}}\, \operatorname{Cos} \frac{r}{k}$$

a odstraněním odmocniny

$$\boxed{f_{xs}^2 = f_{xx} f_{ss} \operatorname{Cos}^2 \frac{r}{k}} \tag{1}$$

Tato rovnice jest rovnicí „kružnice“ o poloměru r. Měníme-li r, obdržíme kružnice o stejném středu, t. j. kružnice soustředné, ale různých poloměrů r, tedy svazek kružnic. V euklidovské rovině soustředné kružnice protínají nevlastní přímku v bodech isotropických.[1]) V těchto bodech se všechny soustředné kružnice dotýkají a mají společné tečny. Tyto společné tečny jsou isotropické přímky, protínající se ve společném středu všech soustředných kružnic. Jak je tomu v rovině hyperbolické? Zde nevlastní body kružnice jsou její průsečíky s absolutní kuželosečkou. Je-li ξ jeden z nich, musí rovnice 1) vyhovovati jeho souřadnicím, t. j. musí býti

$$f_{\xi s}^2 = f_{\xi\xi} f_{ss} \operatorname{Cos}^2 \frac{r}{k}. \tag{1'}$$

Jeden z faktorů na pravé straně této rovnice jest $f_{\xi\xi}$. Tento faktor je roven nule, $f_{\xi\xi} = 0$, neboť bod ξ leží podle předpokladu na absolutní kuželosečce. Rovnice 1′) se tedy zjednoduší na

$$f_{\xi s}^2 \equiv f_{\xi s} \cdot f_{\xi s} = 0.$$

To je však rovnice „poláry“ „bodu“ s (dvojnásob počítané). Na této „přímce“ a jen na ní leží společné body „kružnice“ a „absolutní kuželosečky“. „Kružnice“ je však kuželosečkou, jak je zřejmo z rovnice 1). Může míti s „absolutní kuželosečkou“ jen čtyři „body“ společné. Tyto „body“ po dvou splývají v průsečících „poláry“ s „kuželosečkou absolutní“. Z toho plyne, že „kružnice“ a „absolutní kuželosečka“ se v těchto bodech dotýkají. Celkem můžeme dosavadní poznatky shrnouti ve věty (obr. 1*a*):

Obrazem kružnice je kuželosečka K, která se dvojnásob dotýká „absolutní kuželosečky“.

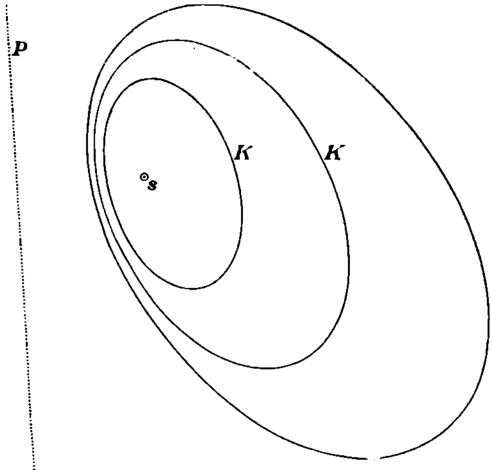
„Střed“ „kružnice“ je „pólem přímky“ P, která tyto dotyčné „body“ spojuje. (Na obr. 1*a* jsou dotyčné „body“ imaginárné.)

„Polára“ je nezávislá na poloměru r, neboť se v její rovnici vůbec r nevyskytuje. Tato „polára“ je tedy pevná

[1]) V euklidovské rovině všechny kružnice mají tuto vlastnost Omezujeme se na kružnice soustředné jen z důvodů didaktických.

pro všechny koncetrické „kružnice". Tento poznatek vyslovíme takto:

S o u s t ř e d n é „k r u ž n i c e" d o t ý k a j í s e d v o j n á s o b „a b s o l u t n í k u ž e l o s e č k y" v p r ů s e č n ý c h „b o d e c h" „p o l á r y" „s t ř e d u" *s* v z h l e d e m k „a b s o l u t n í k u ž e l o s e č c e".



Obr. 1*a*).

Z hořejších vět snadno určíme počet údajů, nutných pro určení kružnice. Bodem *s* jsou určeny všechny kružnice svazku. Je jich právě ∞^1. Neboť kuželosečky je zobrazující musí procházeti čtyřmi (po dvou splývajícími) body („průsečíky" „poláry" „bodu" *s* s „absolutní kuželosečkou"). Kuželosečka je však určena pěti body. Je tedy nutno znáti ještě jeden „bod" k určení jedné z „kružnic" svazku. — Ale středů kružnic je v rovině celkem ∞^2 (neboť je ∞^2 bodů v rovině hyperbolické a každý z nich může býti středem kružnice). Celkem je tedy v hyperbolické rovině ∞^3 kružnic, jinými slovy: k r u ž n i c e v h y p e r b o l i c k é r o v i n ě j e s t u r č e n a o b e c n ě t ř e m i ú d a j i.[2])

[2]) Kdybychom chtěli býti zcela přesnými, musili bychom říci, že kružnice jest určena p ě t i údaji, z nichž d v a jsou pro k a ž d o u kružnici splněny. Tyto dva údaje dají se vyjádřiti požadavkem, že „kružnice" se dvojnásob dotýká „absolutní kuželosečky". Něco podobného jest ostatně i v rovině euklidovské. Tam je každá kružnice určena také p ě t i údaji, z nichž d v a jsou pro k a ž d o u kružnici splněny. (Každá kružnice prochází isotropickými body své roviny.)

2. J i n á d e f i n i c e k r u ž n i c e. Kružnici můžeme ještě jinak definovati:

K r u ž n i c e j e s t o r t h o g o n á l n í t r a j e k t o r i e s v a z k u p ř í m e k b o d e m s.[3])

Shledáme, že bod s je střed kružnice, jak byl definován v odst. 1.

K důkazu této věty potřebujeme následující poučky z projektivní geometrie: „Dotýkají-li se dvě kuželosečky dvojnásob, pak průsečík společných tečen s, libovolný bod y jedné kuželosečky a pól tečny v y k této kuželosečce vzbledem ke kuželosečce druhé leží na jedné přímce.“ Tuto pomocnou větu snadno dokážeme:

Budiž $f_{xx} = 0$ nějaká (jednoduchá) kuželosečka, bod s libovolný bod mimo ni. Druhá kuželosečka se dotýká prvé v průsečných bodech poláry $f_{xs} = 0$ s kuželosečkou $f_{xx} = 0$. Všechny takové kuželosečky jsou určeny rovnicí

$$f_{xx} + \varrho f_{xs}^2 = 0. \tag{2}$$

Každé hodnotě parametru ϱ odpovídá jedna z těchto (druhých) kuželoseček. Tečna k ní v bodě y má rovnici

$$f_{xy} + \varrho f_{ys} f_{xs} = 0. \tag{3}$$

Každý bod z na přímce ys vyhovuje rovnicím

$$z_1 = a_1 y_1 + a_2 s_1, \quad z_2 = a_1 y_2 + a_2 s_2, \quad z_3 = a_1 y_3 + a_2 s_3,$$

kde poměru $\frac{a_1}{a_2}$ odpovídá vždy jeden bod z. Polára bodu z vzhledem ke kuželosečce prvé má rovnici

$$f_{xz} \equiv f_{x\, a_1 y + a_2 s} \equiv a_1 f_{xy} + a_2 f_{xs} = 0.$$

Zvolíme-li tedy $\frac{a_1}{a_2}$ tak, že

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{\varrho f_{ys}},$$

je tato polára právě tečnou 3). Tím je věta dokázána a z ní můžeme odvoditi větu, uvedenou na počátku tohoto odstavce. Je-li totiž $f_{xx} = 0$ „absolutní kuželosečka“, pak rovnice 2) je rovnicí „kružnice“ o „středu“ s. Rovnice 3) je rovnicí „tečny“ v „bodě“ y ke „kružnici“ 2). „Kolmice“

---

[3]) To znamená, že tečna kružnice je kolmá na příslušný poloměr, dotyčným bodem procházející.

na tuto „tečnu“ „bodem“ y musí procházeti jejím „pólem“ vzhledem k „absolutní kuželosečce“. Podle věty právě dokázané je na této kolmici i „bod“ s a tudíž tato „kolmice“ jde „středem“ „kružnice“. — Naše nová definice kružnice je tím zdůvodněna. Z rovnice „kružnice“ 2) plyne zároveň důležitý poznatek. Pro $\varrho = 0$ obdržíme totiž „absolutní kuželosečku“ a pro $\frac{1}{\varrho} = 0$ „poláru“ bodu s:

V e s v a z k u k o n c e n t r i c k ý c h k r u ž n i c n a l é z á s e v ž d y a b s o l u t n í k u ž e l o s e č k a a s p o j n i c e n e v l a s t n í c h b o d ů t o h o t o s v a z k u.

3. T ř i d r u h y k r u ž n i c. Věty, které jsme odvodili v předcházejícím odstavci, platí pro každou kružnici. Nesmíme z toho však usuzovati, že všechny kružnice v hyperbolické rovině jsou si co do vlastností rovny. Ukážeme, jak velice se kružnice od sebe liší podle p o l o h y „s t ř e d u“. Může totiž

a) „střed“ s býti u v n i t ř „absolutní kuželosečky“, nebo může

b) „střed“ s býti n a „absolutní kuželosečce“, nebo konečně může

c) „střed“ s býti v n ě „absolutní kuželosečky“.

Definice kružnice, podaná v odst. 2, zahrnuje všechny tyto případy. Neboť svazek „přímek“ „bodem“ s existuje vždy, nechť je s kdekoliv položen. (Viz dále.) Existuje vždy též svazek orthogonálních trajektorií tohoto svazku. Naproti tomu definice odst. 1 zahrnuje vlastně jen případ sub *a)*, neboť v případě sub *b)* vzrostl poloměr nade všechny meze a tudíž nemůžeme o vzdálenosti bodu kružnice od jejího středu mluviti a v případě sub *c)* je dokonce stanovení poloměru z našich úvah vyloučeno (IV, 2, odst. 1, konec).

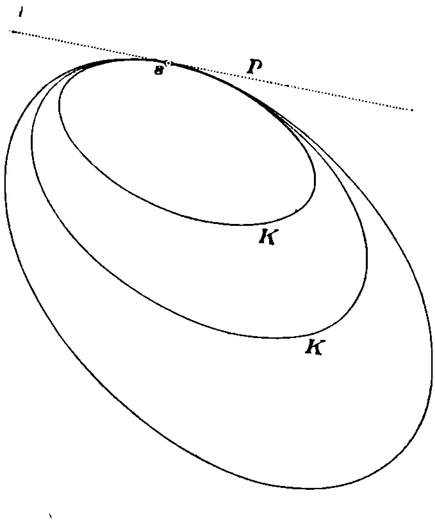
V následujících řádcích probereme důkladněji tyto jednotlivé případy. V případě *a)* (obr. 1*a*) je „polára“ P obrazem ideální přímky, neboť neprotíná „absolutní kuželosečku“ v reálných „bodech“. Tyto kružnice mají nevlastní body i m a g i n á r n í. Nemají tedy r e á l n ý c h bodů nevlastních. Charakteristické pro ně je, že bod v konečnu na jejich obvodu se může vrátiti po oběhnutí celé kružnice do původní polohy. Podle definice v druhém odstavci tohoto paragrafu můžeme říci, že tyto kružnice, jsou-li koncentrické, jsou orthogonální trajektorie svazku r ů z n o b ě ž e k. Budeme je vždy označovati jménem c y k l y.

Již z definice kružnice v odst. prvém plyne důležitá věta pro cykly:

D v a s o u s t ř e d n é c y k l y v y t í n a j í n a p o l o m ě r e c h s t e j n é ú s e č k y k o n s t a n t n í d é l k y.

Důkaz této věty přenechávám čtenáři.

V případě *b)* (obraz 1*b*), kdy střed *s* je nevlastní, musí „polára" *P* „bodu" *s* býti tečnou „absolutní kuželosečky" právě v „bodě" *s*. Takové kružnice mají tedy dva



Obr. 1*b)*.

splývající reálné body nevlastní, právě v bodě *s*. Libovolný bod v konečnu nikdy po téže kružnici se nevrátí do polohy původní. Soustředné kružnice tohoto druhu jsou orth. trajektoriemi svazku r o v n o b ě ž e k. Budeme jim říkati h o r o c y k l y.[4])

Je důležité stanoviti délku, vyťatou dvěma soustřednými horocykly na poloměru. K tomu cíli použijeme rovnice „horocyklu" ve tvaru 2). Pak dva soustředné horocykly mají rovnice

2') $\quad a)\ f_{xx} + \varrho_1 f_{xs}^2 = 0, \quad b)\ f_{xx} + \varrho_2 f_{xs}^2 = 0 \quad (f_{ss} = 0).$

---

[4]) V odborné literatuře jsou známy pod jmény: Grenzlinie, Grenzkreis, Oricicli, Linea L.

Na prvém horocyklu (ϱ_1) zvolím bod y. Každý jiný bod přímky ys vyhovuje rovnicím

$$4)\qquad z_1 = a_1 y_1 + a_2 s_1\,,\qquad z_2 = a_1 y_2 + a_2 s_2\,,\qquad z_3 = a_1 y_3 + a_2 s_3\,.$$

Má-li tento bod z býti na druhém horocyklu (ϱ_2), musí jeho souřadnice splňovati rovnici 2'*b)*, t. j.

$$a_1 f_{ys}\,[a_1 f_{ys}(-\varrho_1 + \varrho_2) + 2a_2] = 0.$$

Jedno řešení $\dfrac{a_1}{a_2} = 0$ odpovídá bodu s, druhé

$$4')\qquad 2\,\frac{a_2}{a_1} = f_{ys}\,(\varrho_1 - \varrho_2)$$

bodu z.

Vzdálenost bodů z a y stanovíme pomocí (IV, 2, 7'). Ježto podle 4) jest

$$\frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}} = \frac{-a_1 \varrho_1 f_{ys} + 2a_2}{-a_1 \varrho_1 f_{ys}} = 1 - 2\,\frac{a_2}{a_1}\,\frac{1}{\varrho_1 f_{ys}}\,,$$

získáme dosazením z rovnice 4')

$$\frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}} = 1 - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

a tudíž

$$m\,(zy) = \frac{k}{2} \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\,.$$

Je tedy vzdálenost bodů z a y na témž poloměru závislá jen na horocyklech a nikoli na poloze poloměru:

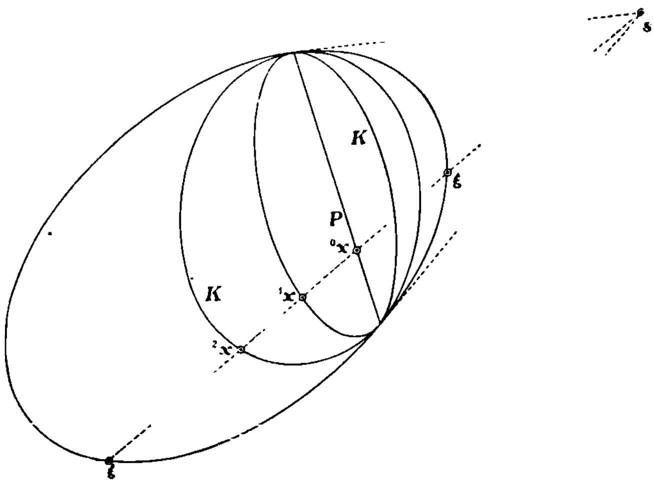
Soustředné horocykly vytínají na poloměrech úsečky konstantní délky.

Poznámka: Horocyklů je právě ∞^2. Každý horocykl je totiž určen středem s a libovolným bodem. Ale bod s musí býti na absolutní kuželosečce. Proto jen ∞^1 bodů s může býti zvoleno za střed horocyklu.

V případě *c)* (obr. 1*c*) je „střed“ s vně „kuželosečky absolutní“. Tyto kružnice nemají středu. (Chceme-li, můžeme říci, že mají střed ideální.) „Polára“ P „bodu“ s protíná reálně „absolutní kuželosečku“. Tyto kružnice mají tedy dva různé reálné body nevlastní. Bod v konečnu se nikdy nedostane po nich do původní polohy. Takové kružnice, pokud mají společné body nevlastní, jsou orthogonalné trajektorie svazku mimoběžek (o ideálním průsečíku). Ježto i přímka P jest orthogonální trajektorií tohoto svazku, je nutno ji počítati mezi tyto koncentrické kružnice. Tím máme znovu potvrzenu poslední větu druhého odstavce, pokud tato mluví o přímce P.

Stanovme délku úsečky, vyťaté na jednom z poloměrů dvěma koncentrickými kružnicemi (obr. 1c). Dvojpoměr čtyř „bodů“ ξ, ξ', ${}^1x$, s

$$\lambda_1 = (\xi\, \xi'\, {}^1x\, s)$$



Obr. 1c).

je vždy záporný, nechť se bod ${}^1x$ nalézá na kterékoli kružnici zkoumaného svazku. Hlavní hodnota logaritmu tohoto dvojpoměru je vždy imaginární (VIII, 2, 13), tvaru

$$\log |\lambda_1| + \pi i.$$

Pro hyperbolického (dvojrozměrného) pozorovatele neexistuje pojem vzdálenosti bodů ${}^1x$ a s, neboť pro něj neexistuje ani bod s (IV, 2, odst. 1). Může však definitoricky zavésti výraz

$$,m'\,({}^1x\, s) = \frac{k}{2} (\log |\lambda_1| + \pi i)$$

jako ‚vzdálenost‘ bodů ${}^1x$, s. Při tom ovšem rozumí pod tímto slovem jen určitou funkci polohy bodu ${}^1x$, která je dána hoření rovnicí a která je stejná pro všechny body téže kružnice, na níž se bod ^1x nalézá.[4a]) (Srovnej definici kružnice v odstavci 1 této kapitoly.) Jiného geometrického významu toto slovo pro něj nemůže míti.

Pro jiný bod ^2x na stejném poloměru, ale jiné kružnici je ‚vzdálenost' bodů $^2x\,s$ podobně

$$‚m'\,(^2x\,s) = \frac{k}{2}\,(\log|\lambda_2| + \pi i).$$

Je tedy rozdíl ‚vzdáleností'

$$‚m'\,(^1x\,s) - ‚m'\,(^2x\,s) = \frac{k}{2}\log\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|} = \frac{k}{2}\log\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = m\,(^1x\,^2x)$$

skutečnou vzdáleností bodů ^1x a ^2x, která je vždy reálná a nezávislá na poloze poloměru, na kterém se body ^1x a ^2x nalézají.

Speciálně pro každý bod ^0x přímky P je $\lambda_0 = -1$ a tudíž

$$m\,(^1x\,^0x) = \frac{k}{2}\log|\lambda_1| = \frac{k}{2}\log(-\lambda_1), \quad (\lambda_1 < 0).$$

Úseky, které vymezuje na poloměrech libovolná kružnice tohoto druhu a přímka P, jsou tedy reálné a pro touž kružnici konstantní.[5])

Z toho důvodu jmenujeme tyto kružnice aequidistantami[6]) (při čemž si domyslíme: k přímce). Poloměry, na nichž jsme právě uvedené úsečky měřili, jsou kolmé i k aequidistantě i k přímce P. Tyto úsečky měří tedy vzdálenost bodů aequidistanty a přímky P. Proto můžeme říci:

Geometrickým místem bodů, které jsou od přímky stejně vzdáleny, jest aequidistanta. (Viz IV, 5, *Posidonius.*)

[4a]) Přesněji řečeno: Absolutní hodnota reálné části výrazu ‚m' je pro všechny body téže zkoumané kružnice stejná. — Užitím poslední rovnice v tomto paragrafu a právě vyslovené věty může si snadno sám čtenář dokázati, že přímka P je zároveň osou symetrie svazku zkoumaných kružnic.

[5]) V případě *a)* jsou úseky podobným způsobem získané taktéž konstantní, ale imaginární a pro hyperbolického pozorovatele bez přímé geometrické interpretace.

[6]) V literatuře německé a italské bývá užito názvů: Abstandslinie, Überkreis, Iperciclo.

§ 2. Pohyb v hyperbolické geometrii.

1. *Definice pohybu.* Pohybem nějakého útvaru $\mathfrak{U}$ do útvaru $'\mathfrak{U}$ nazýváme takový jejich vztah, který splňuje následující podmínky:

I. *Každému bodu x útvaru $\mathfrak{U}$ odpovídá jeden a jen jeden bod $'x$ útvaru $'\mathfrak{U}$ a obráceně.*

II. *Každé přímce X útvaru $\mathfrak{U}$ odpovídá jedna a jen jedna přímka $'X$ útvaru $'\mathfrak{U}$ a obráceně.*

III. *Metrické vztahy elementů útvaru $\mathfrak{U}$ a odpovídajících elementů útvaru $'\mathfrak{U}$ jsou stejné.*

Tím je definován pohyb útvaru v rovině. Pohyb celé roviny hyperbolické je definován podmínkou IV. *Prvé tři podmínky platí pro každé dva sobě přiřazené útvary $\mathfrak{U}$ a $'\mathfrak{U}$ v rovině.*

(Při tom v souhlasu s názorem na geometrii, který jsme dosud uplatňovali, mlčky předpokládáme, že vztah popsaný těmito podmínkami je vyjádřen transformacemi, tvořícími *grupu* a to nějakou speciální grupu projektivní.)

První dvě podmínky splňuje projektivní osmimocná grupa transformací. Třetí a čtvrtou podmínku můžeme nahraditi požadavkem: pohybem se reprodukuje absolutní kuželosečka. Neboť metrické vztahy ustanovujeme *vždy* pomocí téže kuželosečky (absolutní) a ta tudíž nesmí pohybem přejíti v jinou.

Tím jsme z projektivní grupy vybrali podgrupu, uvedenou v kap. IV, § 1. Proto můžeme říci:

Obecný pohyb v hyperbolické rovině je vyjádřen trojmocnou grupou projektivních transformací (IV, 1, 1), které reprodukují absolutní kuželosečku.

Ovšem také každá podgrupa této grupy vede k pohybu, takže taková transformace nemusí nutně býti trojmocná. Stačí nějakým dovoleným způsobem omeziti podmínky pohybu a dostaneme transformaci méně než trojmocnou. Proto jsme v hořejší definici užili slova „obecný“. Z uvedené definice plyne, že *každý* pohyb je vyjádřen projektivní transformací. Tím však není ještě řečeno, že *každá* projektivní transformace naznačeného druhu musí býti nutně pohybem. (Takový případ jsme již měli při pohybu v euklidovské rovině. Tam každý pohyb byl vyjádřen určitou projektivní transformací, ale každá projektivní transformace grupy G_4 nevyjadřovala pohyb. V těchto transformacích byly totiž i transformace vedoucí k podobnosti. To bylo způsobeno tím, že příslušná grupa transformací byla čtyřmocná, kdežto grupa transformací, vedoucích k pohybu, byla jen trojmocná.) Je snadné ukázati, že v hyperbolické rovině vskutku každá z uvedených projektivních transformací vyjadřuje pohyb. Neboť každá projektivní transformace nechá dvojpoměr invariantním. Metrické vztahy v hyperbolické geometrii měří se však logaritmem dvojpoměru a tudíž každá projektivní transformace (která vždy vyhovuje prvým dvěma podmínkám) nechá metrické vztahy neměněné. Když nad to měříme tyto vztahy pomocí pevné kuželosečky, pak příslušné transformace vyhovují i podmínce o reprodukci absolutní kuželosečky a patří tedy do grupy, která vyjadřuje pohyb. Důležité je však upozornění, že žádná z takových transformací nevede k podobnosti. Neboť naše lineární transformace ponechává dvojpoměr a tedy i metrické vztahy hyperbolické roviny konstantní, kdežto při transformacích, vedoucích k podobnosti, metrické veličiny jsou úměrné (s koeficientem úměrnosti rozdílným od ± 1). Souhrnem můžeme říci:

Každá projektivní transformace, která reprodukuje absolutní kuželosečku, představuje pohyb v hyperbolické rovině. Transformace, vedoucí k podobnosti, neexistují.

V rovině hyperbolické není tedy možno sestrojiti obrazce podobné. V rovině euklidovské ovšem takové obrazce existují. Často se stávalo, že pokusy o důkaz V. postulátu vycházely z předpokladu možnosti podobných obrazců (*Wallis* [1616—1703], ostatně viz i poznámku o *Gaussově* dopise, § 5, pozn. [12])). Dneska víme, že tento předpoklad, spojený s předpokladem nekonečné přímky, vede k euklidovské geometrii.

2. Pohyb a kružnice. Uvažujme o dvou soumístných svazcích „přímek" se „středem" s.[7]) Tyto dva svazky můžeme projektivně k sobě přiřaditi. Je-li toto přiřazení takového druhu, že reprodukuje absolutní kuželosečku, je příslušná projektivní transformace jednou ze zmíněných v předcházejícím odstavci. Podle poslední věty onoho odstavce je tedy

---

[7]) Svazek přímek je tvořen všemi přímkami, které procházejí jedním bodem (VIII, 3). Dva soumístné svazky tvořeny jsou rovněž přímkami, které procházejí jedním bodem.

toto přiřazení pohybem, a to pohybem takovým, který kromě kuželosečky absolutní reprodukuje i bod *s*. Transformace, vedoucí k tomuto pohybu, je méně než trojmocná. Z požadavku reprodukce bodu *s* získáme totiž dvě nezávislé rovnice pro tři nezávislé koeficienty. Je tedy tato transformace jednomocná.

Na „kružnici" o středu *s* můžeme sestrojiti dvě křivé řady bodové, projektivně příbuzné, když přiřadíme k sobě „průsečíky" příbuzných „přímek" svazků s touto „kružnicí".[8]) Tato projektivní příbuznost reprodukuje absolutní kuželosečku a je tedy pohybem. Podobným způsobem můžeme sestrojiti projektivní řady na všech „kružnicích" o „středu" *s*. Získáme tak pohyb celé roviny po kružnicích soustředných. Tento pohyb je podle předcházejícího vyznačen projektivními transformacemi o jednom nezávislém koeficientu. Podle konstrukce je zřejmo, že tyto transformace, tvořící jednomocnou grupu, reprodukují všechny koncentrické „kružnice" a tedy i „absolutní kuželosečku":

Jednomocná projektivní grupa, která reprodukuje svazek koncentrických kružnic (a tudíž i absolutní kuželosečku), představuje pohyb hyperbolické roviny po těchto kružnicích.

Při tomto pohybu reprodukuje se též „bod" *s*. Z toho plyne, že různou volbou „bodu" *s* získáme různé pohyby. Bodů v rovině je však ∞^2 a tedy příslušných pohybů ∞^3.

3. Tři druhy pohybu. Věty odvozené v předcházejícím odstavci platily pro každou kružnici. Jsou však tři druhy kružnic a je tedy nasnadě očekávati, že budou i tři druhy pohybu. Je tomu skutečně tak. V dalších řádcích si všimneme každého z těchto tří druhů pohybů zvláště.

Jsou-li koncentrické kružnice cykly, pak pohyb po nich je pohybem periodickým. To znamená, že každý bod v konečnu po uběhnutí určité dráhy po kružnici vrátí se do polohy původní. Při tom je stále stejně vzdálen od pevného bodu *s*. Takový pohyb jevil by se bytosti, nadané schopností vnímati jen hyperbolickou metriku, jako otáčení. Toto pojmenování zachováme i my.

Jsou-li příslušné koncentrické kružnice horocykly, pohyb po nich není periodický. Neboť bod v konečnu se

---

[8]) Na horocyklech je možno jen jedním způsobem takto sobě přiřaditi body. Na aequidistantách je to možno čtverým způsobem, neboť poloměr protíná kružnici ve dvou bodech, z nichž žádný není bodem *s*.

nikdy nemůže vrátiti do původní polohy (samozřejmě při zachování téhož směru pohybu). Podle toho, co jsme dokázali o horocyklech, zůstává však bod při pohybu po jednom horocyklu stále stejně vzdálen od horocyklů ostatních. Tento druh pohybu budeme nazývati pohybem horocyklickým.

Jsou-li koncentrické kružnice aequidistantami, pak pohyb po nich opět není periodický. Vyznačuje se však tím, že pohybovaný bod je stále stejně vzdálen od dané přímky. Zmíněné bytosti se tento pohyb bude jeviti jako posuv. Ježto každá přímka může býti považována za aequidistantu, je do pojmu posuvu zahrnut i pohyb po přímce, ale obráceně pojem posuvu není vyčerpán jen pojmem pohybu po přímce.

Právě poslední věta byla příčinou mnohých nedopatření při důkazech V. postulátu. Mnozí z těch, kteří se o důkaz pokoušeli, předpokládali, že posuv je možný jen po přímce. Toto své stanovisko často různě formulovali. Zmínili jsme se již o *Posidoniovi*, který definoval rovnoběžky jako přímky stejné vzdálenosti. V této definici je skryta myšlenka posuvu. Zřejmě této myšlenky užil *Borelli*, který definoval takto rovnoběžky: „Je-li úsečka po přímce P tak posunována v rovině, že jedním koncem je stále na P a během celého pohybu na ni kolmá, pak popíše její druhý koncový bod přímku.“ *D'Alembert* (1717—1783), který se tak nelichotivě vyjádřil o geometrii, navrhuje sám definici rovnoběžek, která podle našich poznatků nemusí býti vždy účelná: „Rovnoběžka s přímkou P spojuje dva body na téže straně přímky P od P stejně vzdálené.“

Tato definice předpokládá, že geometrickým místem bodů stejně od P vzdálených je přímka, jak vysvitne z této úvahy: Mysleme si na přímce P řadu bodů $a, b, c, d\ldots$ Vztyčme v nich kolmice $A, B, C, D\ldots$ na přímku P. Stanovme na těchto kolmicích — na téže straně přímky P — body $a', b', c', d'\ldots$ tak, aby $aa' = bb' = cc' = dd' = \ldots$

Podle definice *d'Alembertovy* jsou přímky $a'b', a'c', a'd'\ldots$ rovnoběžny s přímkou P. Všechny tyto přímky splývají v jedinou, je-li geometrické místo bodů $a', b', c', d'\ldots$, od přímky P stejně vzdálených, přímka. V opačném případě bylo by lze vésti nekonečně mnoho rovnoběžek $a'b' \parallel P$, $a'c' \parallel P$, $a'd' \parallel P\ldots$ ku přímce P. To *d'Alembert* jistě nemyslel. V hyperbolické rovině je geometrickým místem bodů od P stejně vzdálených aequidistanta a tudíž *d'Alembertova* definice pro tuto není platná. Je však platná pro euklidovskou rovinu, kde platí V. postulát. *D'Alembertovou* definicí tedy nebylo geometrii pomoženo v tom smyslu, jak to asi mínil její autor.

Otec jednoho z objevitelů hyperbolické geometrie, *W. Bolyai* (1775—1856) dokonce dokazuje, že geometrickým místem bodů od přímky stejně vzdálených je přímka. Prozíravý *Gauss* však popřel správnost jeho důkazu.

V následujícím paragrafu odvodíme rovnice všech druhů pohybů.

§ 3. Rovnice pohybu.

1. Všeobecné poznámky. V tomto paragrafu odvodíme rovnice pohybu v rovině po koncentrických kružnicích. Podle výsledků předcházejícího paragrafu je pohyb vyjádřen trojmocnou projektivní grupou transformací (IV, 1, 1). Tyto transformace určeny jsou koeficienty a_{ij}, z nichž jenom tři jsou nezávislé. Určiti rovnice pohybu znamená tedy určiti tyto tři nezávislé koeficienty. Učiníme tak nejdříve zcela obecně a pak teprve budeme specialisovati pohyb po kružnici a pro určité druhy kružnic, po nichž se má pohyb vykonávati. V prvé řadě musíme tedy stanoviti podmínky pro koeficienty rovnic (IV, 1, 1). Tyto transformace mají reprodukovati absolutní kuželosečku, jejíž rovnici předpokládáme dánu ve tvaru kanonickém polárním (VIII, 6, odst. 3) $\xi_3^2 - \xi_2^2 - \xi_1^2 = 0$.

To znamená, že musí býti splněna rovnice

$$\varrho^{-2}(x_3^2 - x_2^2 - x_1^2) = \left(\sum_1^3 {}^j a_{3j} x_j\right)^2 - \left(\sum_1^3 {}^j a_{2j} x_j\right)^2 - \left(\sum_1^3 {}^j a_{1j} x_j\right)^2.$$

Musí tedy koeficienty a_{ij} splňovati rovnice

$$5)\quad \begin{aligned} &a) \quad a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2 = a_{33}^2 - a_{23}^2 - a_{13}^2 \\ &b) \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32} = 0 \\ &c) \quad a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33} = 0 \\ &d) \quad a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} = 0 . \end{aligned}$$

Tento systém představuje pět nezávislých rovnic pro osm nezávislých koeficientů. Můžeme tedy 5 z nich vyjádřiti ostatními 3 a získáme tak nejobecnější rovnice pohybu. Jedná-li se však jen o pohyb po koncentrických kružnicích o „středu" s, musí se i tento „bod" reprodukovati, čili musí býti splněny rovnice

$$6)\quad s_1 : s_2 : s_3 = a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}s_3 : a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23}s_3 : a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}s_3 .$$

To jsou dvě nezávislé rovnice pro tři koeficienty a můžeme z nich vyjádřiti dva zbývajícím jedním. Skutečně pak grupa vyjadřující pohyb je jednomocná. — Rovnice 5), 6) budeme specialisovati pro všechny tři druhy kružnic.

2. Otáčení. Je-li pohyb otáčením, musí střed otáčení s býti skutečný. Zvolme tento střed právě v tom „vrcholu" souřadného trojúhelníka polárného, jehož souřadnice jsou

$$s_1 : s_2 : s_3 = 0 : 0 : 1 .$$

Rovnice 6) se tedy zjednoduší na

$$0 : 0 : 1 = a_{13} : a_{23} : a_{33} .$$

Z nich plyne

6′) $$a_{13} = a_{23} = 0.$$

Determinant transformace D je vždy rozdílný od nuly. Vhodnou volbou faktoru úměrnosti můžeme vždy dosáhnouti toho, že je právě $D = 1$.

Dosazením hodnot 6′) do této rovnice obdržíme

7) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1 .$$

Z rovnice 5*c*) plyne vzhledem k 6′) a 7)

5′*c*) $$a_{31} = 0$$

a obdobně z rovnice 5*d*)

5′*d*) $$a_{32} = 0 .$$

Zbývající rovnice 5*b*) se zjednoduší na

5′*b*) $$a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0 .$$

Je tedy obecně

8) $$a_{11} = \sigma a_{22} , \quad a_{12} = -\frac{1}{\sigma} a_{21} \quad (\sigma \neq 0 \text{ koef. úměrnosti}).$$

Dosazením těchto hodnot do 5*a*) získáme

5′*a*) $$(a_{11}^2 + a_{21}^2) = \frac{1}{\sigma^2} (a_{21}^2 + a_{11}^2) = a_{33}^2 ,$$

z čehož

9) $$\frac{1}{\sigma^2} = 1 , \qquad \frac{1}{\sigma} = \pm 1 = \varepsilon .$$

Dosazením této hodnoty a hodnot z 8) do 7) obdržíme

$$a_{33} (a_{11}^2 + a_{12}^2) = \varepsilon$$

nebo vzhledem k 9) a 5′*a*)

$$a_{33} = \varepsilon .$$

Je tedy

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$$

a proto můžeme položiti

$$\begin{aligned} a_{11} &= \varepsilon a_{22} = \varepsilon' \cos\varphi \\ a_{12} &= -\varepsilon a_{21} = \varepsilon'' \sin\varphi \end{aligned} \qquad (\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' = \pm 1).$$

Připustíme-li, aby úhel φ probíhal hodnotami od 0 do 2π, můžeme položiti $\varepsilon' = \varepsilon'' = +1$ a získáme i tak všechny možné kombinace znamének. — Dosazením těchto hodnot do rovnic transformačních získáme rovnice otáčení po soustředných cyklech o středu s (0, 0, 1)

$$\boxed{\begin{aligned} \varrho' x_1 &= \cos\varphi\, x_1 + \sin\varphi\, x_2 \\ \varrho' x_2 &= \varepsilon(-\sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2) \\ \varrho' x_3 &= \varepsilon x_3 \end{aligned}} \tag{10}$$

Je-li $x_3 = 0$ rovnice úběžné přímky znázorňující roviny, můžeme při vhodné volbě jednotkového bodu dosáhnouti, že poměry $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ jsou cartézské souřadnice $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$. Smluvíme-li se na tom, že „absolutní kuželosečka" je kružnicí, jsou tyto souřadnice x, y pravoúhlé. Hořejší rovnice v těchto souřadnicích se zjednoduší na tvar

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \varepsilon(\cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y) \\ y &= -\sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y \end{aligned}} \tag{11}$$

Tyto rovnice představují otáčení a zrcadlení v eukli-dovské znázorňující rovině. (Pro $\varepsilon = +1$ otáčení, pro $\varepsilon = -1$ otáčení, spojené se zrcadlením.)

3. Posuv. Je-li pohyb posuvem po soustředných aequidistantách, musí jejich „střed" býti vně „absolutní kuželosečky". Zvolíme opět speciální případ, kdy střed s je vrcholem základního trojúhelníku souřadného o souřadnicích (1, 0, 0). Za tohoto předpokladu rovnice 6) nám skýtá

$$1 : 0 : 0 = a_{11} : a_{21} : a_{31},$$

z čehož plyne

$$a_{21} = a_{31} = 0. \tag{6''}$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice pro determinant soustavy obdržíme

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1. \tag{7'}$$

Z rovnic 5*b*), 5*c*) obdržíme

$$5''b)c) \qquad a_{12} = a_{13} = 0$$

a rovnice 5*d*) se zjednoduší na

$$5''d) \qquad a_{22}\, a_{23} - a_{32}\, a_{33} = 0\,.$$

Právě tak, jako v odstavci minulém, dokážeme i nyní použitím rovnic 5*a*) a 5″*d*), že jest

$$a_{22} = \varepsilon\, a_{33}\,, \qquad a_{23} = \varepsilon\, a_{32}$$

a podobně

$$a_{11} = \varepsilon\,,$$

takže z rovnice 7′) obdržíme

$$a^2_{22} - a^2_{23} = 1\,.$$

Můžeme tedy (vzhledem k VIII, 1, 7) položiti

$$\begin{aligned} a_{22} &= \varepsilon\, a_{33} = \varepsilon' \operatorname{Cos} \psi \\ a_{23} &= \varepsilon\, a_{32} = \varepsilon'' \operatorname{Sin} \psi\,. \end{aligned}$$

Připustíme-li, že ψ může probíhati i hodnotami zápornými, můžeme položiti $\varepsilon'' = +1$ a získáme i tak všechny možné kombinace znamének. — Dosazením vypočtených koeficientů do rovnic transformačních získáme rovnice posuvu po koncentrických aequidistantách s „přímkou“ $x_1 = 0$

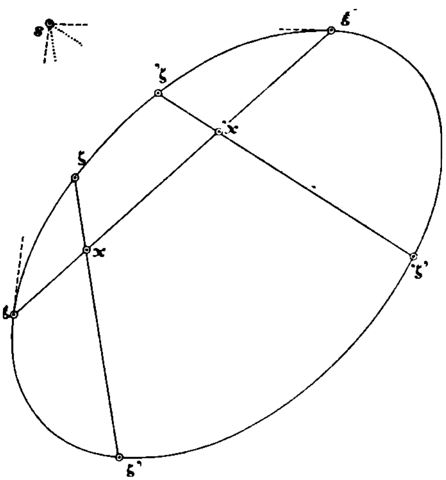
$$12) \qquad \boxed{\begin{aligned} \varrho\, 'x_1 &= \varepsilon\, x_1 \\ \varrho\, 'x_2 &= \varepsilon' \operatorname{Cos}\psi\, x_2 + \operatorname{Sin}\psi\, x_3 \\ \varrho\, 'x_3 &= \varepsilon (\operatorname{Sin}\psi\, x_2 + \varepsilon' \operatorname{Cos}\psi\, x_3) \end{aligned}}$$

Zde můžeme opět dosáhnouti toho, že $x = \dfrac{x_2}{x_1}$, $y = \dfrac{x_3}{x_1}$ jsou souřadnice cartézské. Je-li „absolutní kuželosečka“ rovnoosou hyperbolou, jsou tyto souřadnice pravoúhlé. Hořejší rovnice se zjednoduší na tvar

$$13) \qquad \boxed{\begin{aligned} 'x &= \varepsilon\, (\varepsilon' \operatorname{Cos}\psi\, x + \operatorname{Sin}\psi\, y) \\ 'y &= \operatorname{Sin}\psi\, x + \varepsilon' \operatorname{Cos}\psi\, y \end{aligned}}$$

Posuv je tedy v rovině euklidovské znázorněn pohybem po hyperbolách rovnoosých, které mají s „absolutní kuželosečkou“ stejné asymptoty. Rovnice rovnoosé hyperboly je totiž v pravoúhlých cartézských souřadnicích $x^2 - y^2 =$ konst. Ale právě výraz $x^2 - y^2$ je invariantem vzhledem k 13) a tudíž skutečně „body“ posouvají se po hyperbolách, které mají stejné asymptoty s hyperbolou o rovnici $x^2 - y^2 = 1$ („abs. kuž.“). Z hořejších rovnic vidíme, že jsou celkem možné čtyři druhy posuvu, podle toho, jak zvolíme ε, ε'.

Geometrické odůvodnění těchto čtyř možností posuvu je velmi snadné. — Na obr. 2 je znázorněn posuv bodu x pro jednoduchost pouze po přímce. Předpokládejme však,



Obr. 2.

že současně s tímto bodem pohybuje se celá rovina po příslušných aequidistantách. Tyto se reprodukují a poněvadž k nim patří i absolutní kuželosečka, reprodukuje se i tato. Při reprodukci absolutní kuželosečky jsou si její body tak projektivně navzájem přiřazeny, že body ξ, ξ' buď jsou samodružné, nebo vymění vzájemně svá místa. Projektivní přiřazení dvou křivých řad bodových je dáno, určíme-li k libovolné trojici bodů jedné řady libovolnou trojici bodů druhé řady. (Při tom ty trojice volíme tak, aby v každé z nich žádné dva body nesplývaly.) Toto přiřazení je možno právě čtverým způsobem, určíme-li totiž, že bodům

$$\xi,\ \zeta,\ \xi'$$

jedné řady na kuželosečce odpovídají body

ξ, $'\zeta$, ξ', nebo
ξ, $'\zeta'$, ξ', nebo
ξ', $'\zeta$, ξ, nebo
ξ', $'\zeta'$, ξ

druhé řady na téže kuželosečce. Každé takové přiřazení znázorňuje pohyb po absolutní kuželosečce a s ním i spojený posuv po aequidistantách. Je tedy skutečně možno vykonati posuv čtverým způsobem.

4. P o h y b h o r o c y k l i c k ý. Postupem, kterým jsme došli k rovnicím posuvu a otáčení, mohli bychom odvoditi i rovnice pohybu horocyklického. Takový postup však není v tomto případě nejkratší. Zvolíme způsob, který nás kratší cestou povede k cíli. Předpokládejme rovnici „absolutní kuželosečky“ v tvaru kanonickém tečnovém

$$\xi_1^2 - \xi_2 \xi_3 = 0.$$

(VIII, 6, odst. 3). V tomto případě jsou vrcholy (0, 1, 0), (0, 0, 1) souřadného trojúhelníka na kuželosečce a strany trojúhelníka, které tyto body spojují s třetím bodem základním (1, 0, 0), jsou tečnami kuželosečky právě v oněch bodech. V celé rovině, v níž znázorňujeme hyperbolickou rovinu, jsou obecně tři „body“, které při pohybu (jakémkoliv ze tří možných) buď jsou samodružné, nebo zamění svá místa. Jedním z nich (vždy pevným) je „bod“ *s*, druhé dva jsou dotyčné „body“ „tečen“, z bodu *s* k „absolutní kuželosečce“ vedených.[8a]) Při znázornění pohybu horocyklického je „bod“ *s* na „absolutní kuželosečce“, ony tři samodružné body splývají v jediný a reprodukuje se tedy j e d e n a j e n j e d e n „bod“, totiž *s*, a j e n j e d n a „t e č n a“, totiž „tečna“ v bodě *s*. Vrchol (0, 0, 1) souřadného trojúhelníka zvolíme za „bod“ *s*. Pak rovnice 6) se zjednoduší na

$$0 : 0 : 1 = a_{13} : a_{23} : a_{33}$$

nebo

$$a_{13} = a_{33} = 0.$$

Další koeficient získáme z podmínky, že se reprodukuje „tečna“ v „bodě“ *s*, t. j. přímka o rovnici $x_2 = 0$.

Musí tedy býti

$$a_{21} = 0.$$

Rovnice vedoucí k samodružným bodům (VIII, 4, 24) je v tomto případě jednoduchá

8a) Kromě toho ve třetím z uvedených případů posuvu reprodukuje se každý bod určité (skutečné) přímky, jejíž obraz prochází „bodem“ *s* a jeden bod ideální. („Pól“ právě zmíněné „přímky“.) Ve čtvrtém případě reprodukuje se jeden (skutečný) bod a každý bod jeho (ideální) poláry (vzhledem k absolutní kuželosečce), která prochází ideálním bodem *s*. V obou případech je ∞^1 dvojic bodových na absolutní kuželosečce, které se reprodukují stejným způsobem jako dvojice $\xi\ \xi'$.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22}-\varrho & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}-\rho)(a_{22}-\varrho)(a_{33}-\varrho) = 0.$$

Mají-li všechny tři body se ztotožňovati, musí kořeny této rovnice býti stejné a tudíž musí

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}.$$

Při tom determinant transformace $D = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$ jest opět od nuly různý. Můžeme tedy opět dosáhnouti, že D je roven $+1$.[9]) Z této podmínky vzhledem k předcházejícím rovnicím získáme

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1.$$

Nyní teprve upotřebíme podmínky, že se reprodukuje „absolutní kuželosečka". Dosadíme-li do rovnice

$$14)\qquad \sigma(x_1^2 - x_2 x_3) = \left(\sum_1^3{}_j\, a_{1j} x_j\right)^2 - \sum_1^3{}_{j,k}\, a_{2j} a_{3k}\, x_j x_k \qquad \begin{matrix}(\sigma \text{ koef.}\\ \text{úměrnosti})\end{matrix}$$

hodnoty vypočtených koeficientů, získáme

$$a_{32} = a^2_{12}, \qquad a_{31} = 2\, a_{12}.$$

Rovnice pohybu horocyklického jsou tedy v našem případě

$$15)\qquad \boxed{\begin{aligned} \varrho\,'x_1 &= x_1 + a_{12}\, x_2 \\ \varrho\,'x_2 &= +x_2 \\ \varrho\,'x_3 &= 2a_{12}\, x_1 + a^2_{12}\, x_2 + x_3 \end{aligned}}$$

Je-li „přímka" $x_2 = 0$ nevlastní přímkou znázorňující roviny, pak při vhodné volbě jednotkového bodu můžeme $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}$ pokládati za souřadnice cartézské. V těchto souřadnicích x, y je pohyb po horocyklech znázorněn rovnicemi

$$16)\qquad \boxed{\begin{aligned} 'x &= x + a_{12} \\ 'y &= 2\, a_{12}\, x + y + a^2_{12} \end{aligned}}$$

„Absolutní kuželosečka" je parabolou a „horocykly" jsou rovněž parabolami. Jsou-li souřadnice x, y pravoúhlé

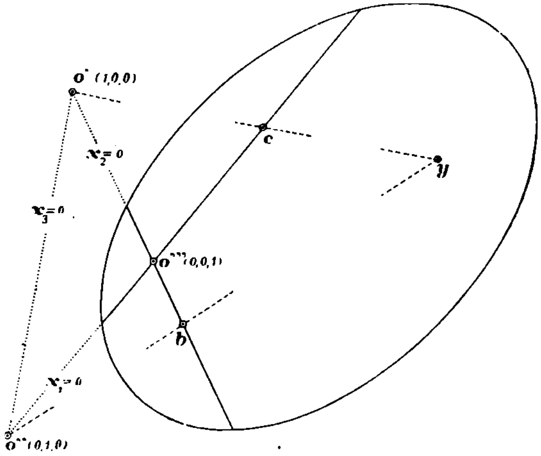
[9]) Při horocyklickém pohybu můžeme jen jedním způsobem přiřaditi k sobě body kuželosečky absolutní. Proto můžeme očekávati, že v rovnicích horocyklického pohybu nebudou se vyskytovati ε, ε'.

cartézské, pak tyto paraboly mají s „absolutní kuželosečkou" společnou osu a týž parametr. Ani rovnice 15), ani rovnice 16) neobsahují $\varepsilon, \varepsilon'$, jak jsme upozornili v poznámce[9]).

§ 4. Weierstrassovy souřadnice.

1. Souřadnice bodové. Nechť jest „absolutní kuželosečka" dána rovnicí

$$\xi_3^2 - \xi_2^2 - \xi_1^2 = 0 .$$



Obr. 3.

Pak „bod" základní o''' jest uvnitř kuželosečky (obr. 3). Tak jako pro tento, tak i pro každý jiný „bod" uvnitř „absolutní kuželosečky" jest

$$\alpha) \qquad x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 > 0 ,$$

kdežto pro „body" vně „absolutní kuželosečky" je

$$\beta) \qquad x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 < 0 .$$

Můžeme tedy vždy vhodnou volbou koeficientu úměrnosti docíliti, že pro souřadnice „bodů" uvnitř „absolutní kuželosečky" je

$$x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 = 1 .$$

Souřadnicím, které splňují tuto podmínku, říkáme **bodové souřadnice Weierstrassovy.** Použití těchto souřadnic značně zjednoduší některé výsledné vzorce a možno jich též s výhodou použíti při problémech analytické geometrie v rovině hyperbolické. Tak na příklad vzorec pro vzdálenost dvou bodů (IV, 2, 9)

$$m(xy) = k \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}}$$

se zjednoduší na

$$m(xy) = k \operatorname{arc} \operatorname{Cos} (x_3 y_3 - x_2 y_2 - x_1 y_1)$$

nebo

17) $$\boxed{\operatorname{Cos} \frac{m}{k} = x_3 y_3 - x_2 y_2 - x_1 y_1},$$

ježto

$$f_{xx} = x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 = 1 = y_3^2 - y_2^2 - y_1^2 = f_{yy}.$$

V rovnici 17) je na levé straně pohybový invariant a tudíž musí býti i výraz na pravé straně pohybovým invariantem. Toho použijeme, abychom stanovili geometrický význam *Weierstrassových* souřadnic, neboť místo obecného bodu x můžeme vzíti bod ve zvláštní poloze, který se pohybem po kružnici o středu y dá převésti do bodu x. Budiž bod b tímto bodem ve zvláštní poloze. Tento bod je průsečíkem kolmice z bodu y na přímku $(o'o''')$ základního trojúhelníka s touto přímkou. Přímka yb prochází „bodem" o'' a tudíž má rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_3 y_1 - x_1 y_3 = 0.$$

Souřadnice bodu b jsou podle toho

$$b_2 = 0, \qquad b_1 = \varrho y_1, \qquad b_3 = \varrho y_3,$$

kde ϱ určíme z rovnice

$$b_3^2 - b_1^2 - b_2^2 = \varrho^2 (y_3^2 - y_1^2) = \varrho^2 (1 + y_2^2) = 1.$$

Je tedy (omezíme-li se na kladnou odmocninu)

$$b_2 = 0, \qquad b_1 = \frac{y_1}{\sqrt{1 + y_2^2}}, \qquad b_3 = \frac{y_3}{\sqrt{1 + y_2^2}}$$

a vzdálenost yb je dána vzorcem

$$\operatorname{Cos} \frac{m(yb)}{k} = \frac{y_3^2 - y_1^2}{\sqrt{1 + y_2^2}} = \frac{1 + y_2^2}{\sqrt{1 + y_2^2}} = \sqrt{1 + y_2^2},$$

který možno psáti (vzhledem k VIII, 1, 7)

$$\operatorname{Sin} \frac{m\,(yb)}{k} = y_2.$$

Tím jsme získali geometrický význam souřadnice y_2 obecného bodu. Právě týmž způsobem odvodíme

$$\operatorname{Sin} \frac{m\,(yc)}{k} = y_1.$$

Geometrický význam souřadnice y_3 je z rovnice 17), pro $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$ dán vzorcem

$$\operatorname{Cos} \frac{m\,(yo''')}{k} = y_3.$$

Ježto y_1, y_2, y_3 jsou souřadnice *Weierstrassovy*, platí pro ně relace

$$y_3^2 - y_2^2 - y_1^2 = \operatorname{Cos}^2 \frac{m\,(yo''')}{k} - \operatorname{Sin}^2 \frac{m\,(yb)}{k} - \operatorname{Sin}^2 \frac{m\,(yc)}{k} = 1,$$

kterouž také můžeme psáti

$$\operatorname{Sin}^2 \frac{m\,(yo''')}{k} = \operatorname{Sin}^2 \frac{m\,(yb)}{k} + \operatorname{Sin}^2 \frac{m\,(yc)}{k}.$$

Rozvineme-li *Sin* v řadu (podle VIII, 1, 6), obdržíme

$$\left(\frac{m^2 (yo''')}{k^2} + \frac{m^4 (yo''')^4}{3\,k^4} + \ldots\right) = \left(\frac{m^2 (yb)}{k^2} + \frac{m^4 (yb)}{3\,k^4} + \ldots\right) + \\ + \left(\frac{m^2 (yc)}{k^2} + \frac{m^4 (yc)}{3\,k^4} + \ldots\right).$$

V případě, že $\frac{m\,(yo''')}{k} \to 0$, $\frac{m\,(yc)}{k} \to 0$, $\frac{m\,(yb)}{k} \to 0$,

můžeme v prvém přiblížení psáti

$$m^2 (yo''') = m^2 (yb) + m^2 (yc).$$

Tento výsledek můžeme vyjádřiti takto:

Jsou-li vzdálenosti bodů yb, yc, yo''' dostatečně malé vzhledem ke konstantě k, pak pro ně platí v prvním přiblížení věta Pythagorova.

Tím je znovu potvrzen výrok, že „geometrie euklidovská je diferenciální geometrií hyperbolické geometrie“.

2. Souřadnice přímkové. Za souřadnice přímkové nějaké „přímky“ budeme považovati bodové souřadnice jejího „pólu“ vzhledem k „absolutní kuželosečce“. (Viz IV,

1, konec.) Jsou-li přímky tečnami absolutní kuželosečky, příslušné póly jsou body absolutní kuželosečky, a tudíž přímková rovnice „absolutní kuželosečky“ je táž jako její bodová rovnice. Ježto však pro „body“ vně „absolutní kuželosečky“ platí relace β), je výhodné přímkovou rovnici „absolutní kuželosečky“ uvésti na tvar

$$\Xi_1^2 + \Xi_2^2 - \Xi_3^2 = 0 .$$

Jsou-li totiž X_1, X_2, X_3 souřadnice „přímky“, pak pro ně platí podle právě uvedeného jich významu

β) $$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 > 0$$

a můžeme tudíž vhodnou volbou koeficientu úměrnosti vždy dosáhnouti toho, že je pro ně splněna rovnice

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 1 .$$

Tyto souřadnice jsou **přímkové souřadnice** *Weierstrassovy.* Důležité je, že vzorce, získané pro obyčejné souřadnice přímkové, zachovají svoji formu i pro tyto souřadnice. Neboť oba druhy souřadnic liší se jen znaménkem u souřadnice s indexem 3, ale ve všech vzorcích se tyto souřadnice vyskytují vždy dvojmo, takže rozdíl znaménkový se neuplatní.

Můžeme tedy z rovnice (IV, 2, 10*a*) odvoditi vzorec pro úhel dvou různoběžných přímek X, Y ve tvaru

$$M(XY) = \arccos (X_1Y_1 + X_2Y_2 - X_3Y_3) \cdot$$

nebo

18) $$\boxed{\cos M(XY) = X_1Y_1 + X_2Y_2 - X_3Y_3}$$ [10])

Geometrický význam souřadnic přímkových není třeba zvláště uváděti vzhledem k tomu, že jsou to vlastně souřadnice „bodů“.

3. **Některé aplikace.** Okolnost posléze uvedená poslouží nám jako pomůcka ke stanovení některých pohybových invariantů. Ježto

$$x_3y_3 - x_2y_2 - x_1y_1$$

je pohybovým invariantem, musí podle uvedené definice těchto souřadnic i

$$Y_3y_3 - Y_2y_2 - Y_1y_1$$

[10]) Doporučuji čtenáři, by si z této rovnice odvodil podmínku kolmosti dvou přímek a podmínku rovnoběžnosti.

býti pohybovým invariantem. Jeho geometrický význam stanovíme snadno, zvolíme-li „přímku“ Y ve zvláštní poloze (obr. 3). Je-li na příklad $Y \equiv o''' o'$, pak její přímkové souřadnice jsou bodovými souřadnicemi „pólu“ o'', t. j.

$$Y_1 = 0, \quad Y_2 = 1, \quad Y_3 = 0.$$

Je tedy v tomto případě

$$Y_3 y_3 - Y_2 y_2 - Y_1 y_1 \equiv - y_2 = - \operatorname{Sin} \frac{m\,(yb)}{k}$$

a proto obecně vzdálenost m bodu y od přímky Y je dána vzorcem

$$\operatorname{Sin} \frac{m}{k} = Y_1 y_1 + Y_2 y_2 - Y_3 y_3.$$

Pohybový invariant $X_3 Y_3 - X_2 Y_2 - X_1 Y_1$ má také svoji důležitost při studiu přímek mimoběžných. Zvolme za takové mimoběžky přímky co''' a yb. Souřadnice prvé jsou

$$X_3 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_1 = 1,$$

druhá má rovnici $x_3 y_1 - x_1 y_3 = 0$ a tudíž její přímkové souřadnice jsou

$$Y_1 = - \varrho y_3, \quad Y_2 = 0, \quad Y_3 = - \varrho y_1,$$

kde ϱ vypočítáme z rovnice

$$Y_1^2 + Y_2^2 - Y_3^2 = \varrho^2 (y_3^2 - y_1^2) = \varrho^2 (1 + y_2^2) = 1.$$

Opět se omezíme na odmocninu kladnou, takže vzhledem k výpočtům předcházejícího odstavce obdržíme

$$X_3 Y_3 - X_2 Y_2 - X_1 Y_1 = - Y_1 = + \frac{y_3}{\sqrt{1 + y_2^2}} = + b_3 = + \operatorname{Cos} \frac{m\,(bo''')}{k}.$$

Podle toho je délka m osy dvou mimoběžek Y, Z určena vzorcem

$$\operatorname{Cos} \frac{m}{k} = Y_3 Z_3 - Y_2 Z_2 - Y_1 Z_1.$$

Všechny tyto vzorce jeví, jak uvidíme, nápadnou podobnost se vzorci geometrie na kouli. V dalším odstavci najdeme důvody této podobnosti.

4. Diferenciální aplikace. Nechť jsou dány dva body nekonečně blízké x, y. Souřadnice bodu y můžeme vyjádřiti souřadnicemi bodu x

$$y_j = x_j + dx_j + \frac{1}{2} d^2 x_j + \ldots \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Přírůstky dx_j, d^2x_j... nemohou býti libovolné, neboť souřadnice bodu y musí splňovati podmínku pro *Weierstrassovy* souřadnice. Jejím diferencováním obdržíme

$$x_3dx_3 - x_2dx_2 - x_1dx_1 = 0$$
$$dx_3^2 - dx_2^2 - dx_1^2 = x_1d^2x_1 + x_2d^2x_2 - x_3d^2x_3.$$

Vzdálenost m obou bodů je dána vzorcem 17). Cos na levé straně můžeme rozvinouti v řadu (VIII, 1, 6). Tak získáme

$$1 + \frac{(m:k)^2}{2!} + \frac{(m:k)^4}{4!} + \dots = x_3y_3 - x_2y_2 - x_1y_1 =$$
$$= x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 + (x_3dx_3 - x_2dx_2 - x_1dx_1) + \frac{1}{2}(x_3d^2x_3 - x_2d^2x_2 - x_1d^2x_1) + \dots$$

neboli

$$\frac{(m:k)^2}{2!} + \frac{(m:k)^4}{4!} + \dots = \frac{1}{2}(dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2) + \dots$$

Píšeme-li opět dm místo m, obdržíme z předchozí rovnice v prvém přiblížení

$$dm^2 = k^2(dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2)$$

jako vzorec pro čtverec vzdálenosti dvou nekonečně blízkých bodů. Tento vzorec je možno aplikovati zajímavým způsobem. Zaveďme souřadnice $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ vztahy

$$\bar{x}_1 = kx_1, \quad \bar{x}_2 = kx_2, \quad \bar{x}_3 = ikx_3.$$

Z podmínky pro *Weierstrassovy* souřadnice získáme

19) $$-\bar{x}_3^2 - \bar{x}_2^2 - \bar{x}_1^2 = k^2$$

a rovnice pro dm^2 se změní na

20) $$dm^2 = d\bar{x}_1^2 + d\bar{x}_2^2 + d\bar{x}_3^2.$$

Rovnice 19) je rovnicí koule o poloměru ki a rovnice 20) představuje čtverec euklidovské vzdálenosti dvou nekonečně blízkých bodů v prostoru. Jsou-li obě rovnice současně platné, jako v našem případě, je 20) čtvercem euklidovského diferenciálu oblouku na kouli o poloměru ki. Vzdálenosti na této kouli můžeme interpretovati jako vzdálenosti v hyperbolické rovině, a rovněž tak úhly.

Geometrii v hyperbolické rovině možno interpretovati jako geometrii na imaginární kouli o poloměru ki v euklidovském prostoru.

Tohoto poznatku užijeme v následujícím paragrafu, abychom snadnou cestou dospěli k některým pončkám z trigonometrie hyperbolické roviny. Nejdříve však zodpovíme otázku, co odpovídá v této interpretaci přímkám a kružnicím hyperbolické roviny? To rozhodneme snadno: Přímkové souřadnice X_1, X_2, X_3 jsou vlastně souřadnicemi bodů a tudíž příslušné souřadnice $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$ jsou s nimi vázány relacemi

$$\overline{X}_1 = kX_1, \qquad \overline{X}_2 = kX_2, \qquad \overline{X}_3 = ikX_3.$$

Podle toho je rovnice přímky v hyperbolické rovině

21) $$\overline{x}_3\overline{X}_3 + \overline{x}_2\overline{X}_2 + \overline{x}_1\overline{X}_1 = 0.$$

V prostorové interpretaci představuje 21) rovinu procházející počátkem, t. j. středem koule. Rovnice 19) a 21) představují tedy průsek této roviny s koulí, t. j. hlavní kružnici:

Přímky hyperbolické roviny jeví se v této interpretaci jako hlavní kružnice koule.

Z kružnic na prvém místě stojí absolutní kuželosečka, která patří každému svazku kružnic. Její rovnice jest

$$\overline{\xi}_3^2 + \overline{\xi}_2^2 + \overline{\xi}_1^2 = 0.$$

V prostorové interpretaci je to však rovnice *kulové kružnice* v nevlastní rovině euklidovského prostoru. Říká se jí také *absolutní kružnice* a vznikne průsekem libovolné (reálné, či imaginárné) koule s nevlastní rovinou (viz též [VI, 7]):

Absolutní kuželosečka jeví se jako absolutní kružnice, neboli kružnice kulová.

Nyní snadno rozhodneme o tom, jak se jeví kružnice hyperbolické roviny. Tak na příklad rovnice cyklu o středu s je podle rovnice 17)

$$\operatorname{Cos}\frac{r}{k} = x_3s_3 - x_2s_2 - x_1s_1.$$

V nových souřadnicích ji můžeme psáti

$$\operatorname{Cos}\frac{r}{k} = -\frac{1}{k^2}(\overline{x}_3\overline{s}_3 + \overline{x}_2\overline{s}_2 + \overline{x}_1\overline{s}_1).$$

To je rovnice roviny, neprocházející počátkem. Tato rovina protíná kouli 19) v kružnici, která není hlavní:

Cykly hyperbolické roviny jeví se na kouli jako kružnice, které nejsou hlavní.

Podobně možno dokázati, že i aequidistanty resp. horocykly jeví se na kouli jako kružnice, které nejsou hlavní.

Tak na příklad, je-li bod s na absolutní kuželosečce v hyperbolické rovině, jest odpovídající mu bod v prostorové interpretaci na absolutní kružnici. Horocykly jsou proto znázorněny kružnicemi, které leží v průsečných rovinách, dotýkajících se absolutní kuželosečky. Jejich rovnice jsou

$$k^2 \operatorname{const} = \overline{x}_3 \overline{s}_3 + \overline{x}_2 \overline{s}_2 + \overline{x}_1 \overline{s}_1 .$$

Rovnice aequidistanty ku přímce Y je

$$k^2 \operatorname{Sin} \frac{m}{k} = (\overline{x}_3 \overline{Y}_3 + \overline{x}_2 \overline{Y}_2 + \overline{x}_1 \overline{Y}_1),$$

kde m značí vzdálenost bodu aequidistanty od Y.

§ 5. Trigonometrie.

1. Pomocné vzorce. V následujících odstavcích budeme se zabývati hyperbolickou rovinou se stanoviska posledního odstavce předcházejícího paragrafu. Podaří se nám odvoditi mnoho důležitých vět a vzorců, když do formulí sférické trigonometrie dosadíme za poloměr veličinu ryze imaginární. Nejdříve uvedeme pomocné vzorce sférické trigonometrie a pak je naznačeným způsobem budeme interpretovati. Uvažujme tedy na kouli o poloměru r sférický trojúhelník o stranách a, b, c a protějších úhlech α, β, γ. Jeho obsah budiž P a sférický nadbytek ν (t. j. rozdíl $\nu = \alpha + \beta + \gamma - \pi$). Pak platí vzorce:

$$22)\quad \begin{cases} a) & \sin\frac{a}{r} : \sin\frac{b}{r} : \sin\frac{c}{r} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma, \\ b) & \cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha, \\ c) & \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{r}, \\ d) & P = r^2 \operatorname{arc}\nu \quad (\nu = \alpha + \beta + \gamma - \pi). \end{cases}$$

Pro pravoúhlý trojúhelník sférický ($\gamma = 90^0$) platí tak zvané *Neperovo* pravidlo, které je vyjádřeno vzorci:

$$23)\quad \begin{cases} a) & \cos\frac{c}{r} = \cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}, \\ b) & \sin\frac{b}{r} = \sin\beta\sin\frac{c}{r}, \\ b') & \sin\frac{a}{r} = \sin\alpha\sin\frac{c}{r}, \\ c) & \cos\beta = \sin\alpha\cos\frac{b}{r}, \\ c') & \cos\alpha = \sin\beta\cos\frac{a}{r}. \end{cases}$$

Kružnice na kouli, jejíž poloměr jest r, má sférický poloměr $\frac{\delta}{2}$

24) $$\frac{\delta}{2} = r\alpha,$$ [11])

při čemž α je příslušným úhlem středovým.

Oblouk s kružnice, příslušný úhlu ω, je dán vzorcem

25) $$s = \omega r \sin \frac{\delta}{2r}.$$

Sférická plocha kružnice (t. j. plocha vrchlíku, kružnicí na kouli vymezeného) je

26) $$V_\delta = 2\pi r^2 \left(1 - \cos \frac{\delta}{2r}\right) = 4\pi r^2 \sin^2 \frac{\delta}{4r}.$$

2. Vzorce geometrie hyperbolické. V minulém paragrafu jsme dokázali, že hyperbolickou geometrii můžeme interpretovati jako geometrii na kouli o poloměru ki v prostoru euklidovském. Při tom přímkám hyperbolické roviny odpovídají hlavní kružnice. Sférický trojúhelník na kouli je právě tvořen hlavními kružnicemi. Odpovídá tedy trojúhelníku v rovině hyperbolické sférický trojúhelník na kouli o poloměru ki. Dosazením $r = ki$ do vzorců 22), 23) minulého odstavce získáme vzorce pro trojúhelník roviny hyperbolické. Při tom musíme používati známého vztahu mezi funkcemi goniometrickými a hyperbolickými (VIII, 1, 10). Takovým způsobem obdržíme ze vzorců 22) *a) b) c)*:

22′) $$\boxed{\begin{aligned} &a)\ \operatorname{Sin}\frac{a}{k} : \operatorname{Sin}\frac{b}{k} : \operatorname{Sin}\frac{c}{k} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \\ &b)\ \operatorname{Cos}\frac{a}{k} = \operatorname{Cos}\frac{b}{k}\operatorname{Cos}\frac{c}{k} - \operatorname{Sin}\frac{b}{k}\operatorname{Sin}\frac{c}{k}\cos\alpha \\ &c)\ \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\operatorname{Cos}\frac{a}{k} \end{aligned}}$$

a ze vzorců pro pravoúhlý sférický trojúhelník vzorce pro pravoúhlý trojúhelník v rovině hyperbolické

[11]) Sférickým poloměrem kružnice na kouli nazýváme obloukovou vzdálenost jejího sférického středu (pólu) od bodů obvodu. Ježto kružnice má dva sférické středy (póly), má i dva sférické poloměry, které dohromady dávají poloviční obvod hlavní kružnice na kouli.

$$
23') \qquad \boxed{\begin{aligned}
&a)\ \operatorname{Cos}\frac{c}{k} = \operatorname{Cos}\frac{a}{k}\operatorname{Cos}\frac{b}{k}\\
&b)\ \operatorname{Sin}\frac{b}{k} = \sin\beta\operatorname{Sin}\frac{c}{k}\\
&b')\ \operatorname{Sin}\frac{a}{k} = \sin\alpha\operatorname{Sin}\frac{c}{k}\\
&c)\ \cos\beta = \sin\alpha\operatorname{Cos}\frac{b}{k}\\
&c')\ \cos\alpha = \sin\beta\operatorname{Cos}\frac{a}{k}
\end{aligned}}
$$

Z rovnice 23'*c')* získáme pro $\alpha = 0$

$$
23'c'') \qquad \sin\beta = \frac{1}{\operatorname{Cos}\frac{a}{k}}.
$$

Tento vzorec není nám neznámý, neboť vyjadřuje t. zv. úhel rovnoběžnosti (IV, 7, 11). Touto rovnicí jest každé délce a přiřazen úhel $\Pi(a) = \beta$. V tomto označení jest hoření vzorec ekvivalentní se vzorci

$$
23'') \qquad \begin{aligned}
&a)\ \operatorname{Tg}\frac{a}{k} = \cos\Pi(a), \qquad &&c)\ \operatorname{Sin}\frac{a}{k} = \operatorname{cotg}\Pi(a),\\
&b)\ \operatorname{Cos}\frac{a}{k} = \frac{1}{\sin\Pi(a)}, \qquad &&d)\ \operatorname{Cotg}\frac{a}{k} = \frac{1}{\cos\Pi(a)}.
\end{aligned}
$$

Použitím jich získáme z 22'*b)*

$$
\frac{1}{\sin\Pi(a)} = \frac{1}{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)} - \frac{\cos\alpha}{tg\,\Pi(b)\,tg\,\Pi(c)}
$$

nebo

$$
\boxed{\cos\alpha\cos\Pi(b)\cos\Pi(c) + \frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)} = 1}
$$

Toto jest základní rovnice, kterou odvodil *Lobačevský* ve své „Géometrie imaginaire".

Rozveďme v rovnicích 23' *a) b') Cos* a *Sin* v řadu. Získáme tak

$$
1 + \frac{(c:k)^2}{2!} + \frac{(c:k)^4}{4!} + \ldots = \left(1 + \frac{(a:k)^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{(b:k)^2}{2!} + \ldots\right) =
$$

$$
= 1 + \frac{(a:k)^2}{2!} + \frac{(b:k)^2}{2!} + \ldots
$$

$$
\frac{(a:k)}{1} + \frac{(a:k)^3}{3!} + \ldots = \left(\frac{(c:k)}{1} + \frac{(c:k)^3}{3!} + \ldots\right)\sin\alpha
$$

Když $\frac{a}{k} \to 0$, $\frac{b}{k} \to 0$, $\frac{c}{k} \to 0$, obdržíme v prvém přiblížení při zanedbání veličin nekonečně malých vyšších řádů

$$c^2 = a^2 + b^2,$$
$$a = c \sin \alpha.$$

To jsou však základní vzorce rovinné trigonometrie euklidovské. Podobně bychom odvodili další formule ze vzorců ostatních. Můžeme tedy říci:

V rozměrech dostatečně malých vzhledem ke k platí v prvém přiblížení na rovině hyperbolické geometrie euklidovská.

(Srovnej III, 5; IV, 6; V, 4.)

Z rovnice 22*d)* odvodíme dosazením $r = ki$ obsah trojúhelníka

$$P = -k^2 \nu.$$

Snadno dokážeme, že obsah trojúhelníka jest kladný tímto postupem: 1. ν je spojitou funkcí souřadnic stran trojúhelníka a pro třikráte asymptotický trojúhelník jest $\nu < 0$. 2. V hyperbolické rovině nemůže nikdy býti $\nu = 0$, neboť tato rovnice je (za předpokladů zde splněných) rovnocenná s pátým postulátem *Euklidovým*, který v hyperbolické rovině nikdy splněn není. (Srov. výklad tohoto postulátu v (I, 1) a větu o rovnoběžkách v (IV, 4).) 3. Z obou vět plyne, že nemůže $\nu > 0$ a tudíž musí

27) $$\boxed{-\nu = \pi - \alpha - \beta - \gamma > 0}.$$

Tedy skutečně

28) $$\boxed{P = k^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)}$$

je veličinou kladnou.

Tím jsme získali ihned dvě věty:

Součet úhlů v trojúhelníku jest menší než dva pravé.

Obsah trojúhelníka jest přímo úměrný sférickému defektu $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ a tudíž maximální obsah trojúhelníka jest πk^2.

(Takový trojúhelník musí býti trojnásob asymptotický, t. j. $\alpha = \beta = \gamma = 0$.)[12])

Ježto podle vzorce 28) jest obsah trojúhelníka nezávislý na stranách, nemůžeme sestrojiti trojúhelníky o stejných úhlech a různých obsazích. To znamená, že není možno sestrojiti k danému trojúhelníku trojúhelník podobný. Tento výsledek jsme již odvodili obecně pro libovolný útvar z teorie kružnice a pohybu (V, 2, odst. 1). *Wallis*, chtěje dokázati V. postulát *Euklidův*, předpokládal existenci podobných trojúhelníků.

3. Kružnice. Oblouk kružnice můžeme odvoditi ze vzorce 25) dosazením $r = ki$. Smíme tak učiniti proto, ježto jsme dokázali, že kružnicím hyperbolické roviny odpovídají na kouli o poloměru $r = ki$ opět kružnice. Tímto způsobem získáme pro oblouk příslušný úhlu ω

25′) $$\boxed{S_\delta = \omega k \operatorname{Sin} \frac{\delta}{D}} \quad (D = 2k).$$

Z této rovnice můžeme odvoditi vzorec pro obvod cyklu. U cyklu je totiž po oběhnutí obvodu $\omega = 2\pi$ a proto obvod O_δ cyklu jest

29) $$\boxed{O_\delta = 2\pi k \operatorname{Sin} \frac{\delta}{D}}$$

Je-li kružnice aequidistantou k přímce, k níž patří (imaginární, viz V, 1, odst. 3, sub *c*) ‚poloměr' $\frac{{}^0\delta}{2}$, můžeme vzorec 25′) snadno přetvořiti. Nechť je $S_{{}^0\delta}$ délka na této přímce. Pak podle 25′) pro ni platí

$$S_{{}^0\delta} = \omega k \operatorname{Sin} \frac{{}^0\delta}{D}.$$

[12]) *Gauss* psal roku 1799 svému spolužáku *W. Bolyaiovi*: „Mann könne sich eine Geometrie konstruiren, für die das Parallelenaxiom nicht gültig sei. Wenn man jedoch annehme, dass es für den Dreiecksinhalt eine obere Grenze nicht gebe, so könne man die euklidische Geometrie beweisen. Anderenfalls käme man zu einer anderen Geometrie.“ („Bylo by možno sestrojiti geometrii, pro níž by neplatil axiom o rovnoběžkách. Ale za předpokladu, že neexistuje horní hranice pro obsah trojúhelníka, bylo by lze dokázati euklidovskou geometrii. Jinak dospělo by se k jiné geometrii.“ V, 2, odst. 1.)

Pro $\operatorname{Sin}\frac{{}^0\delta}{D}$ obdržíme však vzorce (IV, 2, 9 b) $\operatorname{Sin}\frac{{}^0\delta}{D} = i$ $\left(\operatorname{Cos}\frac{{}^0\delta}{D} = 0\right)$,[13]) z čehož

$${}^0S_{{}^0\delta} = \omega k i.$$

Označme $\frac{l}{2} = \frac{{}^0\delta}{2} - \frac{\delta}{2}$ rozdíl ‚poloměrů' obecné aequidistanty a příslušné přímky. Pak pro oblouk aequidistanty platí podle 25')

$$S_\delta = \omega k \operatorname{Sin}\frac{{}^0\delta - l}{D} = \omega k\left[\operatorname{Sin}\frac{{}^0\delta}{D}\operatorname{Cos}\frac{l}{D} - \operatorname{Cos}\frac{{}^0\delta}{D}\operatorname{Sin}\frac{l}{D}\right] = \frac{S_{{}^0\delta}}{i}\, i \operatorname{Cos}\frac{l}{D}$$

a tudíž

30) $$\boxed{S_\delta = S_{{}^0\delta}\operatorname{Cos}\frac{l}{D}}$$

Pro $S_{{}^0\delta} \to \infty$ obdržíme oblouk, jehož délka roste nade všechny meze, jak je ve shodě s dřívějšími údaji o aequidistantě.

Abychom mohli vyjádřiti oblouk horocyklu, přetvoříme vzorec 25') zavedením délky tětivy T, příslušné oblouku S. T je třetí stranou trojúhelníka rovnoramenného, jehož druhé dvě strany $\frac{\delta}{2}$ svírají úhel ω. Obdržíme tudíž podle 22'b)

$$\operatorname{Cos}\frac{T}{k} = \operatorname{Cos}^2\frac{\delta}{D} - \operatorname{Sin}^2\frac{\delta}{D}\cos\omega = 1 + \operatorname{Sin}^2\frac{\delta}{D}(1 - \cos\omega).$$

Použitím vzorců

$$\operatorname{Cos}\frac{T}{k} - 1 = 2\operatorname{Sin}^2\frac{T}{2k} = 2\operatorname{Sin}^2\frac{T}{D}, \qquad 1 - \cos\omega = 2\sin^2\frac{\omega}{2}$$

získáme

$$\operatorname{Sin}\frac{T}{D} = \operatorname{Sin}\frac{\delta}{D}\sin\frac{\omega}{2}$$

nebo vzhledem k 25'),

$$S_\delta = \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\, 2k \operatorname{Sin}\frac{T}{D}.$$

[13]) „Pól" této „přímky" je totiž právě od jejího libovolného „bodu" x ‚vzdálen' $\frac{{}^0\delta}{2}$, při čemž $f_{xs} = 0$, neboť „body" s a x jsou polárně sdruženy.

Zvolíme-li pevné T, pak se vzrůstajícím δ klesá ω. V limitním případě, jedná-li se o horocykl, pak $\delta \to \infty$, $\omega \to 0$ a

$$S_T = \lim_{\substack{\delta\to\infty\\ \omega\to 0}} S_\delta = \lim_{\omega\to 0} \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} 2k \operatorname{Sin}\frac{T}{D} = 2k \operatorname{Sin}\frac{T}{D} \lim_{\omega\to 0} \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}.$$

Ježto však

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} = 1,$$

je pro horocyklický oblouk S_T příslušný tětivě T,

$$\boxed{S_T = D \operatorname{Sin}\frac{T}{D}}. \tag{31}$$

Z tohoto vzorce je zřejmo, že oblouk každého horocyklu, příslušný téže délce tětivy, je konstantní, nezávislý na horocyklu.

Ze vzorce 29) odvodíme tak zvanou větu *Bolyaiovu:*

Obvody cyklů, jichž poloměry jsou rovny stranám trojúhelníka, jsou v poměru sinů protějších úhlů.

Důkaz této věty je snadný. Ze vzorce $22'a$) plyne

$$\operatorname{Sin}\frac{2a}{D} : \operatorname{Sin}\frac{2b}{D} : \operatorname{Sin}\frac{2c}{D} = \pi D \operatorname{Sin}\frac{2a}{D} : \pi D \operatorname{Sin}\frac{2b}{D} : \pi D \operatorname{Sin}\frac{2c}{D} =$$
$$= O_{2a} : O_{2b} : O_{2c} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

čímž je důkaz proveden.

Obsah kružnice obdržíme ze vzorce 26), kam opět dosadíme $r = ki$. Získáme tak

$$\boxed{V_\delta = D^2\pi \operatorname{Sin}^2 \frac{\delta}{2D}}, \tag{26'}$$

což je vzorec pro obsah cyklu. Zavedeme-li označení $\Pi\left(\frac{\delta}{4}\right)$ pro úhel, příslušný délce $\frac{\delta}{4}$, pak můžeme psáti vzhledem k $23''c$) vzorec v této formě:

$$V_\delta = D^2\pi \operatorname{cotg}^2 \Pi\left(\frac{\delta}{4}\right),$$

a specielně pro $\Pi\left(\frac{\delta}{4}\right) = 45^0$

$$V_\delta = D^2\pi = 4\pi k^2.$$

Mají-li dva trojnásob asymptotické trojúhelníky společnou jednu stranu, jest obsah čtyřnásob asymptotického čtyřúhelníka tak vzniklého právě $2\pi k^2$. Ježto dovedeme k danému úhlu rovnoběžnosti vždy sestrojiti příslušnou délku, umíme tedy nalézti kružnici, která má obsah rovný dvojnásobku obsahu čtyřnásob asymptotického čtyřúhelníka. Je tím v určitém smyslu rozřešena úloha kvadratury kruhu. *J. Bolyai* našel konstrukci, vedoucí ke kvadratuře kruhu o obecném poloměru v hyperbolické rovině. — Více se trigonometrií nebudeme zabývati a obrátíme se k úvahám diferenciálním.

Poznámka. Není bez zajímavosti vypočítati hodnoty uvedené ve vzorcích tohoto posledního odstavce pro případ, že rozměry měřených veličin jsou dostatečně malé vzhledem ke k. Obdržíme tak opět vzorce euklidovské geometrie pro kružnici v rovině, což přenechávám čtenáři.

§ 6. Úvahy diferenciální.[14])

1. Pomocné vzorce. V tomto paragrafu budeme se zabývati úvahami většinou diferenciálními a užijeme k tomu teorie ploch, známé z diferenciální geometrie. Proto nejdříve uvedeme některé potřebné vzorce z této teorie.

Čtverec diferenciálu vzdálenosti je v euklidovské rovině vyjádřen v pravoúhlých souřadnicích x, y výrazem $ds^2 = dx^2 + dy^2$. V křivočarých souřadnicích x_1, x_2 jest obecně

32) $$ds^2 = E dx_1^2 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2^2, \quad EG - F^2 \neq 0,$$

kde E, F, G jsou funkcemi souřadnic x_1, x_2. V případě, že běží o rovinu euklidovskou, možno vždy jeden vzorec převésti ve druhý, při čemž dx, dy jsou exaktní diferenciály. Čtverec diferenciálu vzdálenosti dvou bodů na ploše, jejíž souřadnice (parametry) jsou x_1, x_2, je dán rovněž výrazem 32). Při tom však obecně není možno tuto formu převésti na součet čtverců (totálních) diferenciálů. O funkcích E, F, G předpokládáme, že splňují podmínky $EG - F^2 > 0$, $E \geqq 0$, $G \geqq 0$, kterým je ve všech případech, o nichž zde budeme

---

[14]) Tento paragraf není nezbytný pro pochopení celkové souvislosti.

jednati, vyhověno.[14a]) Výrazu $Edx_1^2 + 2\,F dx_1\,dx_2 + G dx_2^2$ říkáme někdy také „fundamentální“ nebo „metrická“ forma. Je-li tato forma dána, je dán i výraz pro úhel φ dvou směrů $\frac{dx_1}{dx_2}$, $\frac{\delta x_1}{\delta x_2}$ na ploše:

$$\cos\varphi = \frac{E dx_1 \delta x_1 + F(dx_1 \delta x_2 + \delta x_1 dx_2) + G dx_2 \delta x_2}{\sqrt{(E dx_1^2 + 2\,F dx_1 dx_2 + G dx_2^2)(E\delta x_1^2 + 2\,F\delta x_1 \delta x_2 + G\delta x_2^2)}}.$$

Z toho vidíme, že dvě plochy, vztažené k týmž souřadnicím a mající koeficienty fundamentálních forem vázány relacemi

$$33)\qquad 'E = E\sigma(x_1, x_2),\qquad 'F = F\sigma(x_1, x_2),\qquad 'G = G\sigma(x_1, x_2),$$

jsou takovým způsobem na sebe zobrazitelné, že odpovídající směry na obou plochách svírají stejné úhly. Takovému zobrazení říkáme konformní.

Jiný způsob zobrazení, při němž nejen úhly odpovídajících směrů, ale i vzdálenosti odpovídajících bodů jsou stejné, nazývá se rozvinutí jedné plochy na druhou. Dvě plochy jsou na sebe rozvinutelné, když jejich fundamentální formy, vyjádřené týmiž souřadnicemi, jsou v odpovídajících bodech stejné. To je postačující a nutná podmínka rozvinutelnosti dvou ploch. Není tím však řečeno, že při stejné fundamentální formě můžeme rozvinutím jedné plochy na druhou tuto dokonale přikrýti. (Na příklad válec a rovina jsou na sebe rozvinutelné, ale pláštěm válce nikdy nemůžeme celou rovinu přikrýti.) Z ekvivalence fundamentálních forem nesmíme usuzovati na stejné vlastnosti na obou plochách v celém jejich oboru.

Podmínku rozvinutelnosti dvou ploch můžeme vyjádřiti ještě jinak. Na ploše existuje totiž funkce K, nazvaná *Gaussovou* mírou křivosti (též mírou křivosti, nebo jen křivostí), která se rozvinutím jedné plochy na druhou nemění. Tato funkce je dána vzorcem

$$34)\qquad K = \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{F}{E\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial G}{\partial x_1}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{2}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{F}{E\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial x_1}\right]\right\}.$$

[14a]) Mlčky předpokládáme, že E, F, G, jejich prvé a druhé parciální derivace dle parametrů jsou pro zkoumaný obor hodnot x_1, x_2 konečné a spojité.

Dá se dokázati věta: „Jsou-li dvě plochy na sebe rozvinutelné, pak v odpovídajících bodech mají stejnou *Gaussovu* míru křivosti.“

Zvláštní zmínky zasluhuje případ, kdy tato funkce K je konstantní. Plochy, u nichž $K =$ konst. není funkcí místa, nazývají se plochy konstantní míry křivosti. Dvě plochy stejné konstantní míry křivosti jsou vždy na sebe rozvinutelné.

Geometrie na obou plochách na sebe rozvinutelných je (alespoň v určitém oboru) stejná.

2. Různé formy diferenciálu vzdálenosti v rovině hyperbolické. Nyní stanovíme diferenciál vzdálenosti dvou nekonečně blízkých bodů roviny hyperbolické. K tomu použijeme vzorce (IV, 2, 9). Ačkoli tyto vzorce jsou odvozeny užitím souřadnic trimetrických homogenních, můžeme je vždy upotřebit i pro souřadnice nehomogenní $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$. Budoucně budeme psáti v tomto paragrafu vždy x_1 místo $\frac{x_1}{x_3}$ a x_2 místo $\frac{x_2}{x_3}$, kde x_1 a x_2 nám budou značiti souřadnice nehomogenní. Nechť tedy absolutní kuželosečka v těchto souřadnicích je dána rovnicí

35) $$c^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0\,, \qquad c = \text{konst.}^{14b)}$$

a vzdálenost dvou bodů $m\,(x, y)$ vzorcem (IV, 2, 9b)

$$m\,(x\,y) = k\,i \text{ arc sin} \sqrt{\frac{(c^2 - x_1^2 - x_2^2)\,(c^2 - y_1^2 - y_2^2) - (c^2 - x_1 y_1 - x_2 y_2)^2}{(c^2 - x_1^2 - x_2^2)\,(c^2 - y_1^2 - y_2^2)}}\,.$$

Jsou-li body x a y nekonečně blízké, můžeme psáti pro jejich souřadnice

$$y_j = x_j + dx_j + \frac{1}{2}\,d^2x_j + \dots \qquad (j = 1, 2).$$

Tyto souřadnice dosadíme do předcházejícího vzorce. Při tom arcsin rozvineme v řadu (VIII, I, 5). Omezíme-li se na veličiny nekonečně malé prvého řádu, získáme po delším počtu

$$dm = k \sqrt{\frac{c^2 (dx_1^2 + dx_2^2) - (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)^2}{(c^2 - x_1^2 - x_2^2)^2}}\,.$$

[14b]) Tato konstanta není v žádné souvislosti se stejně označenou konstantou v (IV, 2, 7).

Je-li $c = k$, vzorec se zjednoduší na

36) $$dm^2 = \boxed{\frac{(dx_1^2 + dx_2^2) - \frac{1}{k^2}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)^2}{\left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{k^2}\right)^2}}$$

a pro $c = 1$

36′) $$dm^2 = k^2 \frac{dx_1^2(1 - x_2^2) + 2x_1 x_2 dx_1 dx_2 + dx_2^2(1 - x_1^2)}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2} .$$

Poslední tvar fundamentální formy je historicky zajímavý. Koncem šedesátých let minulého století zabýval se *Beltrami* (1835—1900) problémem zobraziti plochu na rovinu tak, aby geodetickým čarám na ploše odpovídaly přímky v rovině. Dospěl k výsledku, že plochy, které takovým způsobem je možno na rovinu zobraziti, mají fundamentální formu ve tvaru 36′). Podle toho, co jsme uvedli o rozvinutelnosti dvou ploch, znamená *Beltramiho* výsledek, že geometrie na oněch plochách je (alespoň v omezeném oboru) stejná s geometrií hyperbolické roviny. Znázornění plochy na rovinu podařilo se mu tak, že interpretoval x_1, x_2 jako pravoúhlé souřadnice v rovině, a tak zkoumaná plocha zobrazila se u v n i t ř určité kružnice ($x_1^2 + x_2^2 = 1$). Body na obvodu této kružnice zobrazovaly nevlastní body zkoumané plochy a přímky protínající se na obvodu této kružnice zobrazovaly (ovšem jen jejich část uvnitř kružnice) „rovnoběžné“ čáry geodetické na zkoumané ploše. Touto interpretací dospěl *Beltrami* k pojmu hyberbolické roviny. Je důležito upozorniti, že *Beltrami* neznal pojmu hyperbolické roviny tak, jak jsme jej odvodili, ale dospěl k němu řešením uvedeného problému. Tím však byla dokázána logická nespornost hyperbolické geometrie v rovině (která v našem podání je samozřejmá), neboť bylo možno ji nyní interpretovati jako geometrii na plochách, které mají fundamentální formu 36′). Zásluha *Beltramiho* spočívá v tom, že na tento fakt upozornil.

Interpretujme x_1, x_2 jako pravoúhlé souřadnice v rovině a položme $c = k$.

„Absolutní kuželosečka“ je tedy kružnice o rovnici

37) $$k^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0 .$$

Můžeme ji považovati za rovník koule, jejíž rovnice v nehomogenních, prostorových pravoúhlých souřadnicích ξ_1, ξ_2, ξ_3 je
$$k^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 .$$

Orthogonální projekcí této koule na rovinu rovníku získáme vztahy

$$\xi_1 = x_1, \qquad \xi_2 = x_2, \qquad \xi_3 = \pm\sqrt{k^2 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Fundamentální forma koule je

$$38)\qquad ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2)^2}{k^2 - x_1^2 - x_2^2} =$$

$$= \frac{dx_1^2 + dx_2^2 - \dfrac{1}{k^2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)^2}{1 - \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{k^2}}.$$

Porovnáním 38) a 36) obdržíme

$$ds^2 = dm^2\left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{k^2}\right) = dm^2\,\frac{\xi_3^2}{k^2}.$$

Uvažujeme-li jen dolení polovinu koule, můžeme psáti

$$dm = -\frac{k}{\xi_3}\,ds.$$

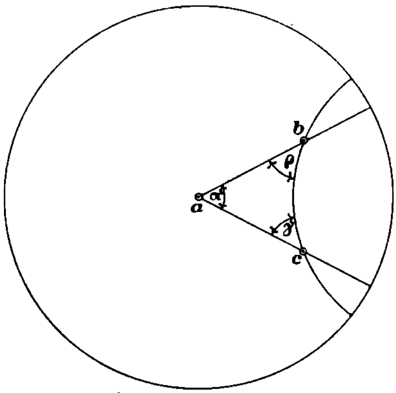
Proto můžeme říci:

Promítneme-li polokouli orthogonálně na rovinu rovníku, pak geometrie v hyperbolické rovině tak vzniklé je konformní s geometrií na oné polokouli.

Toto zobrazení je z toho důvodu pohodlné, ježto všechny věty, týkající se úhlů, jsou snadno názoru přístupné. Na příklad trojnásob asymptotický trojúhelník roviny hyperbolické jeví se jako trojúhelník na kouli, omezený třemi kružnicemi, jichž roviny, kolmé na rovník, protínají se v tečnách koule. Tento trojúhelník na kouli má skutečně všechny tři úhly rovny 0.

3. O postulátech Euklidových. Promítneme-li kouli z pólu na rovinu rovníku, pak zobrazení toto jest opět konformní. Dá se snadno dokázati, že všechny kružnice na kouli se touto projekcí zobrazí v rovině zase jako kružnice. Uvažujeme-li speciálně kouli, o níž byla svrchu řeč, vidíme, že můžeme přímky hyperbolické roviny znázorniti jako oblouky kružnic orthogonálních na obraz absolutní kružnice (rovníku). Neboť přímkám v prvém druhu projekce odpovídaly na kouli kružnice, které kolmo protínaly rovník. Druhou projekcí koule na rovinu se tyto kružnice promítají opět jako kružnice kolmé na rovník. Toto zobrazení hyper-

bolické roviny je často velice výhodné. Tak je na příklad možno velmi snadno dokázati, že součet úhlů v trojúhelníku je menší než 180°. Na obr. 4 zvolen takový „trojúhelník“, že jeden jeho vrchol se zobrazuje do středu „absolutní kružnice“. Tento trojúhelník je zcela obecný, ale jeho zobrazení má tu výhodu, že „strany“ *ab*, *ac* se jeví jako přímky. Třetí „strana“ jest ovšem obloukem kružnice orthogonální k „abs. kružnici“. Tato „strana“ *bc* musí vždy býti obrácena konvexně k *a* a tedy součet $\alpha + \beta + \gamma$ je jistě menší než 180°.



Obr. 4.

Tento způsob zobrazení je i s jiné stránky velice zajímavý. Jeho užitím lze totiž k o n s t r u k t i v n ě zbudovati geometrii, která vyhovuje čtyřem prvým postulátům *Euklidovým*.

Abychom alespoň *zhruba* naznačili tuto cestu, shodněme se na této terminologii:

‚Nevlastní bod‘ = reálný bod nějaké kružnice *L*. ‚Nevlastní bod‘ nechť je nedostupný.

‚Bod‘ = reálný bod uvnitř kružnice *L*.

‚Přímka‘ = oblouk orthogonální kružniee k *L*, a to jen oblouk u v n i t ř *L*, resp. průměr kružnice *L* (uvnitř *L*).

‚Úhel‘ = úhel euklidovský.

‚Kružnice‘ = orthogonální trajektorie lineárního svazku ‚přímek‘, a to jen její část uvnitř *L*.

Ježto jsou tři druhy svazku ‚přímek', jsou i tři druhy ‚kružnic'.

Za těchto předpokladů lze dokázati, že v této geometrii platí prvé čtyři postuláty *Euklidovy*. Tak prvý postulát

„Dva ‚body' lze vždy spojiti (jedinou) ‚přímkou'" je ekvivalentní s předposlední větou v (VIII, 8). Druhý postulát

„Přímou čáru lze vždy (v ‚bodě' vlastním) prodloužiti" je postulátem konstruktivním a jako takový splněn i zde, což plyne z elementární konstrukce kružnice. Třetí postulát

„Z libovolného středu a poloměru lze vždy sestrojiti ‚kružnici'" je ekvivalentní s poslední větou v (VIII, 8). („Středem kružnice' je zde jeden ze společných bodů svazku L'. Je-li střed ‚bodem', získáme svazek ‚různoběžek', je-li ‚bodem nevlastním', získáme svazek ‚rovnoběžek' — které ostatně budeme ihned přesně definovati — a konečně jsou-li ony průsečíky imaginárné, pak získáme svazek ‚mimoběžek', které nemají společného ‚bodu', ani ‚bodu nevlastního'. Podle toho rozeznáváme i tři druhy ‚kružnic'.) Čtvrtý postulát

„Všechny pravé ‚úhly' jsou ekvivalentní" je splněn vždy, je-li splněn originální postulát *Euklidův*, neboť v obou geometriích je úhel stejně definován. Pátý postulát však splněn není. To je zřejmo již z toho, že vždy mohu k ‚přímce' *ab* (obr. 4) sestrojiti takovou, která s ní svírá ‚úhel' $= 0$ a neprotíná ji v ‚bodě', ale součet ‚úhlů' tvořených touto ‚přímkou', ‚přímkou' *ab* a ‚příčkou' *ac* je menší než 180^0.

Tento postulát můžeme nahraditi jiným. K tomu cíli zavedeme pojem ‚rovnoběžek' větou: „Dvě ‚rovnoběžky' jsou ‚přímky' v rovině, které (prodlouženy) protínají se jen v ‚bodě nevlastním'. (Definice 23 u *Euklida*!)

Podle této definice

lze ‚bodem' mimo ‚přímku' vésti k ní dvě ‚rovnoběžky'.

Jejich konstrukce je zřejmá, a proto se o ní nezmiňujeme. Právě uvedenou větu můžeme považovati za pátý postulát naší geometrie, kterým jsme nahradili pátý postulát *Euklidův*. Z názoru je zřejmo, že ‚rovnoběžky' svírají ‚úhel' $= 0$.

Doporučuji čtenáři, aby si provedl některé základní konstrukce v této geometrii, čímž se mu naše úvahy o hyperbolické geometrii značně ozřejmí.

Poznámka: Těchto pět postulátů ovšem nestačí k vybudování hyperbolické geometrie. Neuváděl jsem ostatních z toho důvodu, že jsem v tomto odstavci chtěl pouze naznačiti, jak možno *Euklidovy* postuláty aplikovati a nesledoval jsem účel vybudovati geometrii axiomaticky.

4. Jiné tvary fundamentální formy.

Fundamentální forma 36) je příliš složitá. Proto se pokusíme vhodnou volbou jiných souřadnic u_1, u_2 ji převésti na jednodušší tvar. Jako souřadnici u_1 pohyblivého bodu na ploše zvolíme hyperbolickou vzdálenost od bodu $\underset{\circ}{u}$ ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) a za souřadnici u_2 zvolíme hyperbolický úhel přímky $u\underset{\circ}{u}$ s přímkou $x_1 = 0$. Tyto souřadnice jsou tedy v určitém vztahu k cyklům hyperbolické roviny. Po delším počtu, který zde opomíjím, obdržíme

$$dm^2 = du_1^2 + k^2 \operatorname{Sin}^2 \left(\frac{u_1}{k}\right) du_2^2. \tag{39a}$$

Kdybychom při zavedení nových souřadnic brali místo cyklů v úvahu aequidistanty, resp. horocykly, obdrželi bychom podobně v prvém případě

$$dm^2 = du_1^2 + \operatorname{Cos}^2 \left(\frac{u_1}{k}\right) du_2^2 \tag{39b}$$

a v druhém případě

$$dm^2 = du_1^2 + e^{\frac{2u_1}{k}} du_2^2. \tag{39c}$$

V prvém případě jest u_1 délkou na poloměru aequidistanty, vyťatou aequidistantou a příslušnou přímkou $x_1 = 0$ (jež patří do svazku aequidistant) a u_2 jest vzdáleností průsečíku onoho poloměru s přímkou od bodu $\underset{\circ}{u}$ ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$). V druhém případě jest $u_2 =$ konst. rovnicí přímky kolmé na horocykl $u_1 =$ konst. Těmto třem formám se také někdy říká eliptická, hyperbolická a parabolická forma.

Vypočítejme míru křivosti jedné z těchto forem! (Všechny tři formy musí vésti k stejné hodnotě míry křivosti ve stejných bodech, neboť představují touž hyperbolickou rovinu.)

Zvolme třeba formu 39c). Tu jest

$$E = 1,\ F = 0,\ G = e^{\frac{2u_1}{k}},\ \sqrt{EG - F^2} = e^{\frac{u_1}{k}}$$

a tudíž podle 34)

$$K = \frac{e^{-\frac{u_1}{k}}}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left[-e^{-\frac{u_1}{k}} \frac{2}{k} e^{\frac{2u_1}{k}} \right] \right\} = -\frac{e^{-\frac{u_1}{k}}}{k} \frac{\partial}{\partial u_1} e^{\frac{u_1}{k}} = -\frac{1}{k^2}.$$

Ježto k je číslo reálné, je $-k^2$ vždy záporné. Podle toho, co jsme uvedli v prvém odstavci tohoto paragrafu, můžeme říci:

Hyperbolická rovina jest rozvinutelná na plochy konstantní záporné míry křivosti.

Říkáme též, že hyperbolická rovina má zápornou konstantní míru křivosti $-\frac{1}{k^2}$.[15])

Jest tedy geometrie hyperbolické roviny v omezeném oboru identická s geometrií na plochách konstantní záporné míry křivosti. Tento výsledek, na nějž upozornil *Beltrami*, mohli jsme již odvoditi ze vzorce 36).

5. *Möbiusova* kruhová afinita. Zaveďme nové souřadnice x, y rovnicemi

$$40) \qquad a)\ x = u_2, \qquad b)\ y = ke^{-\frac{u_1}{k}}$$

a stanovme, jak se změní forma 39*c*)! Snadným počtem obdržíme

$$41) \qquad dm^2 = \frac{k^2}{y^2}(dx^2 + dy^2).$$

Nyní interpretujme x, y jako pravoúhlé souřadnice cartézské v rovině! Souřadné ose X, t. j. $y = 0$, odpovídá čára, jejíž všechny body jsou od určitého horocyklu ($u_1 = 0$) nekonečně vzdáleny. Osa X představuje tedy absolutní kuželosečku. V rovnici 40*b*) nemůže býti pro žádné u_1 souřadnice y záporná. Rovina hyperbolická se tedy zobrazuje jen na jednu polovinu euklidovské roviny (nad osou X). Ježto pro euklidovský diferenciál vzdálenosti platí věta Pythagorova

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

je toto zobrazení hyperbolické roviny konformní s geometrií na jejím euklidovském modelu.

O tomto zobrazení možno dokázati další zajímavé vlastnosti. Tak na příklad hyperbolické přímky zobrazují se jako půlkružnice, jejichž středy jsou na ose X (a tudíž i jako přímky k ní kolmé).[16]) Kružnice hyperbolické roviny jeví se

[15]) *Hilbert* dokázal, že neexistuje regulární plocha záporné konstantní míry křivosti, na níž by v plném rozsahu (v celém jejím oboru) platila geometrie hyperbolická.

[16]) Snadno se to dokáže, uvažujeme-li integrál

$$\int_{y_0}^{y_1} dm = \int_{y_0}^{y_1} \frac{k}{y}\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

který pro přímku musí býti extremní hodnoty.

na modelu zase jako kružnice a to: cykly jako kružnice, které osu X neprotínají, aequidistanty jako kružnice ji protínající a horocykly jako kružnice jí se dotýkající, případně jako přímky s ní rovnoběžné.[17])

Pohyb v tomto zobrazení je dán rovnicí

$$'z = \frac{a_1 z + a_3}{a_2 z + a_4}, \quad a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1,$$

kde z, $'z$ jsou komplexní proměnné tvaru $z = x + iy$, $'z = 'x + i'y$ a koeficienty a reálné. Tento případ je speciálním případem t. zv. kruhové afinity *Möbiusovy*, která je vyjádřena touž rovnicí, jenom že koeficienty a jsou komplexní. Je tedy každý pohyb *Möbiusovou* kruhovou afinitou, ale každá taková afinita není ještě pohybem.

Tímto způsobem zobrazení se nebudeme zabývati, ježto bychom neobdrželi již poznatků podstatně nových. Mohli jsme však toto zobrazení voliti zcela dobře jako východisko úvah. Neučinili jsme tak jen proto, že cesta, kterou jsme se brali, byť byla i delší, nevyžadovala zvláštních odborných znalostí.

Jako jediný příklad aplikace tohoto zobrazení stůjž zde výpočet obsahu obecného trojúhelníka abc. Zvolíme jeho obraz tak, že alespoň jedna jeho strana (ac) se zobrazuje jako přímka (obr. 5). Strany ab, bc zobrazují se jako oblouky kružnic, které mají střed na ose X. Vypočteme nejdříve obsah trojúhelníka $ab'c'$, dvojnásob asymptotického. Obsah nějaké plochy, omezené jistou křivkou C, je dán integrálem

$$P = \iint\limits_C \sqrt{EG - F^2}\, dx_1\, dx_2.$$

Aplikací tohoto vzorce na obsah trojúhelníka $ab'c'$ obdržíme vzhledem ke 41)

$$P_{ab'c'} = k^2 \int\limits_{x_{c'}}^{r} dx \int\limits_{y}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = k^2 \int\limits_{x_{c'}}^{r} \frac{dx}{y}.$$

Zavedeme-li polární souřadnice ψ, r rovnicemi

$$x = r \cos \psi, \qquad y = r \sin \psi,$$

[17]) Poslední věta plyne přímo z transformační rovnice 40b). Pro kružnici vůbec se to dá dokázati tak, že hledáme orthogonální trajektorie „přímek“, procházejících jedním „bodem“ (to jest kružnic, jichž středy jsou na ose X a které procházejí jedním bodem).

můžeme poslední integrál přepsati

$$P_{ab'c'} = -k^2 \int_{\varphi}^{0} d\psi = k^2\varphi = k^2 (\pi - a).$$

Podobně obdržíme pro trojúhelník dvojnásob asymptotický $bb'c'$ obsah

$$P_{bb'c'} = k^2 (\pi - \beta').$$

Obsah trojúhelníka jednou asymptotického abc' je roven rozdílu obsahů obou trojúhelníků

$$P_{abc'} = P_{ab'c'} - P_{bb'c'} = k^2 (\beta' - a).$$

Stejným způsobem obdržíme obsah trojúhelníka jednou asymptotického cbc'

$$P_{cbc'} = k^2 (\beta'' - \gamma').$$

Obsah trojúhelníka abc je roven rozdílu obsahů trojúhelníků abc', cbc'

$$P_{abc} = P_{abc'} - P_{cbc'} = k^2 (\beta' - \beta'' + \gamma' - a).$$

Ježto však

$$\beta' - \beta'' = -\beta, \qquad \gamma' = \pi - \gamma,$$

můžeme pro obsah trojúhelníka abc psáti

$$P_{abc} = k^2 (\pi - a - \beta - \gamma).$$

Obdrželi jsme tak již známou formuli. (Viz rovnici 28.) V třetím odstavci tohoto paragrafu jsme dokázali, že součet úhlů v trojúhelníku je menší než dva pravé. Je tedy $\pi - a - \beta - \gamma > 0$ a tedy i $P_{abc} > 0$, jak jsme též dokázali při odvození rovnice 28).

Podobným způsobem stanovíme obsah n-úhelníka. Rozdělíme jej na n trojúhelníků o společném vrcholu uvnitř n-úhelníka. Obsah takového trojúhelníka budiž $k^2 (\pi - a_j - \beta_j - \gamma_j)$ $(j = 1, \ldots n)$. Obsah zkoumaného n-úhelníka je roven součtu obsahů těchto n trojúhelníků. Označíme-li jej $P_{(n)}$, získáme

$$P_{(n)} = k^2 \sum_1^n{}^j (\pi - a_j - \beta_j - \gamma_j) = k^2 [n\pi - \sum_1^n{}^j (\beta_j + \gamma_j + a_j)].$$

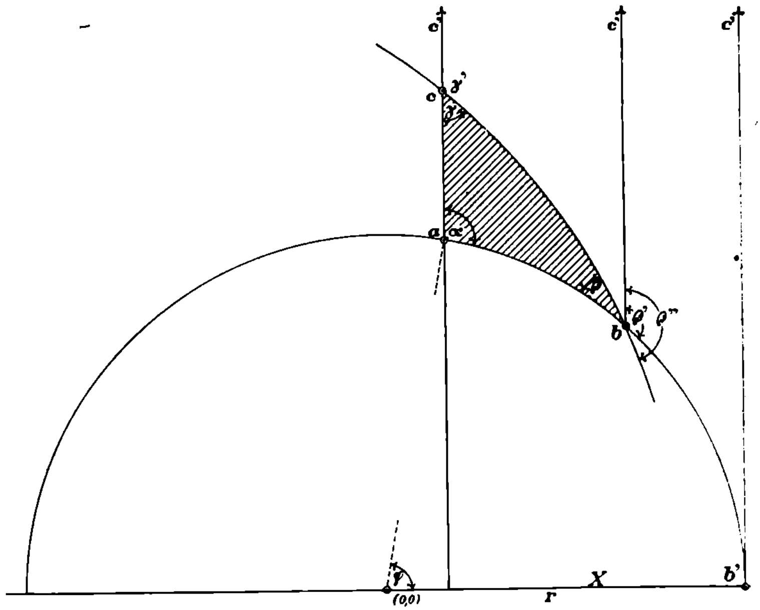
Jsou-li a_j úhly středové u společného vrcholu, je $\sum_1^n{}^j a_j = 2\pi$ a tudíž

$$P_{(n)} = k^2 [n\pi - 2\pi - \sum_1^n{}^j (\beta_j + \gamma_j)] = k^2 [\pi (n-2) - \sum_1^n{}^j (\beta_j + \gamma_j)].$$

Speciálně pro n-úhelník n-násob asymptotický jest obsah $P_{(n)}$

$$P_{(n)} = \pi k^2 (n-2).$$

Z tohoto vzorce však nenásleduje, že vždy možno dva takové n-úhelníky převésti pohybem do sebe (jako je tomu u trojúhelníků trojnásob asymptotických), neboť grupa transformací pohybových je trojmocná. Můžeme tedy nejvýše převésti tři vrcholy jednoho do tří vrcholů druhého n-úhelníka. Tím svoje úvahy skončíme a obrátíme se ke studiu geometrie eliptické.



Obr. 5.

Poznámka. *Poincaré* uvažoval hyperbolickou rovinu, která je vně „absolutní kuželosečky". Takové geometrie mohou býti různé, podle toho, jak zvolíme konstanty k (pro vzdálenost bodů) a k' (pro úhel přímek). Zajímavé je, že v nich obecně není volnost pohybu. Nebudeme se jimi zabývati, ježto jsou příliš speciální, byť i některé skýtaly praktický užitek při studiu speciální teorie relativity.