Kapitola III.

JEDNOROZMĚRNÝ ÚTVAR NEEUKLIDOVSKÝ.

§ 1. Vzorec Laguerreův a jeho interpretace.

V této kapitole budeme se zabývati geometrií neeuklidovskou na přímce, resp. ve svazku paprsků bodem. Bude jistě lepšímu porozumění na prospěch začíti s úvahami, které sice nejsou zcela obecné, ale mají tu výhodu, že je můžeme aplikovati jak na geometrii euklidovskou, tak na geometrii neeuklidovskou. Nejvíce příležitostí k takovým oboustranným úvahám skýtá vzorec *Laguerreův*, vyjadřující úhel dvou přímek.

Uvažujme svazek přímek P, procházejících nějakým pevným bodem p. Jednotlivé přímky v tomto svazku označíme ${}^1P$, ${}^2P$, ${}^3P\ldots$, obecně ${}^iP$, ${}^jP$. Libovolná přímka ${}^jP$ tohoto svazku budiž určena úhlem, který svírá s přímkou ${}^0P$, „přímkou základní“. Úhel ten označíme φ_j. Můžeme tedy za souřadnice přímky P ve svazku vzíti poměr veličin

$$x_1 = \sigma \sin \varphi_j \qquad x_2 = \sigma \cos \varphi_j ,$$

kde σ jest libovolná, od nuly různá konstanta. Pak skutečně $\dfrac{x_1}{x_2}$ určuje přímku jednoznačně. V tomto svazku přímek můžeme každé přímce ${}^jP$ přiřaditi přímku ${}'{}^jP$, která z této vznikne otočením o nějaký — pro všechny přímky ${}^jP$ stejný — úhel. Již v předcházející kapitole jsme dovodili, že každý euklidovský pohyb je vyjádřen projektivní transformací, která reprodukuje dvojici bodů isotropických. Výsledky tam odvozené platily pro obor ternární (t. j. pro obor tří homogenních souřadnic x_1, x_2, x_3 (VIII, 3)). Jsou však při vhodné interpretaci platny i pro obor binární (t. j. pro obor dvou homogenních souřadnic x_1, x_2). Ježto v našem případě se jedná jen o otáčení přímek kol pevného bodu, je zřejmo, že při tomto pohybu reprodukují se přímky isotropické, které spojují pevný bod s body isotropickými. Je tedy otáčení projektivní transformací

1) $\begin{array}{l}\varrho' x_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \varrho' x_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2\end{array}$ $(D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1, \quad \varrho \neq 0$ koef. úměrn.),

která reprodukuje přímky isotropické o rovnici

2) $$x^2_1 + x^2_2 = 0$$

(O transformacích, vedoucích k podobnosti, se v našem případě nemůže jednati.) Řešením rovnice 2) obdržíme přímky isotropické Z, T o souřadnicích

$$Z \ldots \varrho z_1 = 1, \; \varrho z_2 = i \qquad T \ldots \varrho t_1 = 1, \; \varrho t_2 = -i$$

Zvolme nyní dvě libovolné přímky ${}^1P$, ${}^2P$ ve svazku o souřadnicích

$${}^1P(x_1, x_2) \qquad {}^2P(y_1, y_2)$$

a stanovme dvojpoměr $({}^1P\,{}^2P\,Z\,T)$ (VIII, 5, 26). Víme, že jest dán rovnicí

$$({}^1P\,{}^2P\,Z\,T) = \frac{[x_1 z_2]\,[y_1 t_2]}{[y_1 z_2]\,[x_1 t_2]} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix}}$$

Dosazením souřadnic přímek ${}^1P$, ${}^2P$, Z, T do této rovnice získáme

3) $$({}^1P\,{}^2P\,Z\,T) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 - i(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{x_1 y_1 + x_2 y_2 + i(x_1 y_2 - x_2 y_1)}$$

Označme ω_{12} úhel přímek ${}^1P$, ${}^2P$. Ježto můžeme položiti

$$\begin{array}{l} x_1 = \sigma \sin \varphi_1 \\ x_2 = \sigma \cos \varphi_1 \end{array}, \quad \begin{array}{l} y_1 = \sigma' \sin \varphi_2 \\ y_2 = \sigma' \cos \varphi_2 \end{array}, \quad \omega_{12} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

obdržíme dosazením do 3)

$$({}^1P\,{}^2P\,Z\,T) = \frac{\cos \omega_{12} - i \sin \omega_{12}}{\cos \omega_{12} + i \sin \omega_{12}} \;[1]$$

Tato rovnice se zjednoduší na

$$({}^1P\,{}^2P\,Z\,T) = \frac{e^{-i\omega_{12}}}{e^{i\omega_{12}}} = e^{-2i\omega_{12}}$$

(vzhledem k VIII, 1, 3).

---

[1]) Pro pohodlí čtenářovo uvádím vzorce, jichž při tomto dosazení nutno použíti:

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \omega_{12} = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$
$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin \omega_{12} = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

Jejím logaritmováním obdržíme

$$\log ({}^1P\,{}^2P\,Z\,T) = -2i\omega_{12},$$

neboli

4) $$\boxed{\omega_{12} = \frac{i}{2}\log ({}^1P\,{}^2P\,Z\,T)}$$

To jest vzorec *Laguerreův*, vyjadřující úhel dvou přímek užitím dvojpoměru, který tvoří tyto dvě přímky a přímky isotropické. Dvojpoměr jest projektivním invariantem (VIII, 5) a tím spíše tedy invariantem vzhledem k otáčení, které jest speciální projektivní transformací.[2]) Z elementární geometrie jest známo, že horní mez hodnoty úhlu ve svazku přímek jest

5) $$\omega_{max} = \pi$$

Dále víme, že platí mezi úhly ω_{12}, ω_{23}, ω_{13} přímek ${}^1P, {}^2P, {}^3P$ vztahy

6) $$\omega_{12} + \omega_{23} = \omega_{13}; \qquad \omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0; \qquad \omega_{ij} = -\omega_{ji}$$

Rovnice 4), 5), 6) poskytnou nám zajímavý výsledek při jiné interpretaci vzorce *Laguerreova,* kterou ihned provedeme.

Až dosud souřadnice x_1, x_2 znamenaly nám údaje pro přímky ve svazku. Není však příčiny, pro kterou bychom je nemohli interpretovati jako souřadnice bodu na přímce! V počtu se tím nic nezmění, jen interpretace rovnic bude jiná. Tak v prvé řadě transformace 1) znamenají projektivní přiřazení bodů na téže přímce. Mohli bychom říci, že znamenají jakýsi „pohyb“ bodu na přímce. Jako „pohyb“ však budeme definovati transformace 1) jen tenkráte, když reprodukují body, vyhovující rovnici 2). (Tyto body ovšem nemají obecně naprosto ničeho společného s isotropickými body roviny euklidovské.) Pak ale takto definovaný pohyb na přímce zcela jistě není euklidovský, neboť euklidovský pohyb na přímce jest jen posunutí, které reprodukuje jediný bod na přímce a to t. zv. bod nevlastní (v. dále § 4). Můžeme si jej však snadno znázorniti takto: Svazek přímek protneme nějakou libovolnou přímkou, neprocházející vrcholem p svazku. Tak obdržíme na přímce řadu bodovou.

---

[2]) To znamená: Svírají-li dvě přímky úhel ω_{12} a otočím-li je současně, svírají po otočení opět úhel ω_{12}. — Vzorec 4) jest invariantem vzhledem k obecné transformaci 1). Přes to však přímky ${}'^1P$, ${}'^2P$, přímkám ${}^1P$, ${}^2P$ takovou transformací 1) přiřazené nesvírají úhel ω_{12}, vždyť o úhlu v našem smyslu slova nelze mluviti, nejsou-li paprsky Z, T pevné!

Otáčí-li se přímka svazku, pohybuje se její průsečík s onou přímkou „pohybem“ právě definovaným. Funkci ω_{12} prohlásíme za „vzdálenost“ dvou bodů. Můžeme tak učiniti, neboť tato funkce splňuje podmínky na vzdálenost kladené: Jest invariantní vzhledem k „pohybu“, vyhovuje základním rovnicím 6), které, jak víme, jsou splněny také pro „obyčejnou“ vzdálenost a není identicky rovna nule pro dva body. Zajímavé jest, že horní mez pro funkci „vzdálenosti“, t. j. pro funkci ω na zkoumané přímce je podle 5) rovna π a nemůže tudíž libovolně vzrůstati pro reálné body, jak jsme zvyklí u přímky „obyčejné“ (euklidovské).

Tyto interpretace vzorce 4) posloužily nám jako speciální ukázky postupu, kterým možno dospěti ke geometrii neeuklidovské. V dalších paragrafech tento postup zevšeobecníme.

§ 2. Tři druhy neeuklidovské geometrie.

1. Definice. V tomto paragrafu podáme přesnou formulaci problému neeuklidovské geometrie na přímce, resp. ve svazku přímek. Jest výhodné zavésti společné pojmenování pro oba útvary, abychom je mohli zkoumati společně. Bodům na přímce, resp. přímkám svazku, budeme říkati společným jménem elementy. Pro přímku, na níž se body nalézají, resp. pro svazek, v němž se přímky nalézají, zachováme společný název útvar lineární (nebo jen stručně „útvar“).

Chceme nyní obecně formulovati problém neeuklidovské geometrie jednorozměrného útvaru zevšeobecněním postupu předcházejícího paragrafu. Zrekapitulujme krátce tento postup! Nejdříve jsme stanovili pohyb elementů v útvaru jako projektivní transformaci, která reprodukuje určité elementy o souřadnicích $(i, 1)$ $(-i, 1)$, načež jsme našli invariant takové projektivní transformace. Zevšeobecnění této metody může spočívati v tom, že zvolíme zcela obecně ony elementy, které se mají transformací reprodukovati. Pak budeme hledati invarianty vzhledem k takové projektivní transformaci. — Buďtež, jako v paragrafech předcházejících, x_1, x_2 projektivní souřadnice elementu (VIII, 5, konec).

V tom případě kvadratická rovnice

$$g_{11} x_1^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 + g_{22} x_2^2 = 0 \qquad (g_{ik} \text{ reálné}) \tag{7}$$

určuje dva elementy o souřadnicích

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{-g_{12} + \sqrt{g^2_{12} - g_{11} g_{22}}}{g_{11}} \qquad \frac{x'_1}{x'_2} = \frac{-g_{12} - \sqrt{g^2_{12} - g_{11} g_{22}}}{g_{11}}$$

Nechť právě dvojice těchto elementů se při transformaci 1) reprodukuje. Takovým elementům budeme říkati elementy absolutní. Mezi všemi elementy daného útvaru mají zvláštní postavení.[3])

Souřadnice absolutních elementů budeme vždy psáti typy řeckými $\xi\,(\xi_1, \xi_2)$ a $\xi'\,(\xi'_1, \xi'_2)$. Rovnici 7) přepíšeme na tvar

$$g_{11}\,\xi^2_1 + 2\,g_{12}\,\xi_1\,\xi_2 + g_{22}\,\xi^2_2 = 0$$

Předpokládáme, že jejím řešením obdržíme právě hodnoty $\frac{\xi_1}{\xi_2}$, $\frac{\xi'_1}{\xi'_2}$. Grupa transformací 1), které reprodukují tuto rovnici (až na konstantní faktor), jest jednomocná. Důkaz ponechávám čtenáři.

Takto jsme si vše připravili pro konečnou definici problému neeuklidovské geometrie jednorozměrného útvaru:

Neeuklidovská geometrie jednorozměrného útvaru studuje invarianty projektivní jednomocné grupy transformací

1) $\begin{aligned} \varrho\,'x_1 &= a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 \\ \varrho\,'x_2 &= a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \end{aligned} \qquad D = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0,$

které reprodukují dvojici absolutních elementů, danou rovnicí

8) $f_{\xi\xi} \equiv g_{11}\,\xi^2_1 + 2\,g_{12}\,\xi_1\,\xi_2 + g_{22}\,\xi^2_2 = 0. \qquad (g_{ik}$ reálné)

2. Tři druhy neeuklidovské geometrie jednorozměrného útvaru. Řešením rovnice 8) obdržíme pro souřadnice absolutních elementů výrazy

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{-g_{12} + \sqrt{g^2_{12} - g_{11} g_{22}}}{g_{11}} \qquad \frac{\xi'_1}{\xi'_2} = \frac{-g_{12} - \sqrt{g^2_{12} - g_{11} g_{22}}}{g_{11}}$$

Jest ihned zřejmo, že tyto absolutní elementy mohou býti trojího druhu. Buď jsou

a) reálné rozdílné, když $g^2_{12} - g_{11}\,g_{22} > 0$, nebo

b) imaginárné, sdružené, když $g^2_{12} - g_{11}\,g_{22} < 0$, nebo

c) reálné, splývající v jeden element, když $g^2_{12} - g_{11}\,g_{22} = 0$.

---

[3]) Viz na příklad (III, 4).

Dle těchto alternativ rozeznáváme tři druhy geometrií jednorozměrného útvaru: Geometrii hyperbolickou [sub *a)*], eliptickou [sub *b)*] a konečně parabolickou [sub *c)*]. Budeme mluviti kratčeji o jednorozměrném útvaru hyperbolickém, eliptickém, parabolickém. (Toto pojmenování pochází od *Kleina*.) — Jak uvidíme, bude nutno každý z těchto útvarů podrobiti úvaze zvláštní, což učiníme v paragrafech následujících. Existují však alespoň formální analogie mezi vzorci těchto tří geometrií. Proto odvodíme některé vzorce ihned, bez ohledu na jakost absolutních elementů, a teprve později při studiu jednotlivých útvarů je budeme interpretovati zvláště.

3. Míra dvou elementů. Základní vzorec, společný všem třem útvarům, jest vzorec pro míru dvou elementů. Při tom pod slovem míra rozumíme buď (neeuklidovskou) vzdálenost dvou bodů, když útvarem je přímka, a elementy body, nebo (neeuklidovský) úhel dvou přímek, když útvarem jest svazek a elementy přímky svazku. Míru dvou elementů budeme obecně důsledně značiti μ. Je-li tato míra vzdáleností dvou bodů, označíme ji m, pro míru, která jest úhlem, zavedeme označení M. Chtěli-li bychom zdůrazniti, že se jedná o míru (vzdálenost, úhel) dvou elementů ${}^ix$ $({}^ix_1, {}^ix_2)$, ${}^jx$ $({}^jx_1, {}^jx_2)$, užili bychom některých z těchto označení

$$\begin{array}{cc} \mu_{ij} , & \mu({}^ix, {}^jx) \\ m_{ij} , & m({}^ix, {}^jx) \\ M_{ij} , & M({}^ix, {}^jx) \end{array}$$

Má-li nějaká funkce býti měrou, žádáme (řídíce se analogií s „obyčejnou“ vzdáleností), aby vyhovovala těmto požadavkům:

A) Jest invariantem vzhledem ke grupě „pohybů“ 1).

B) Pro míry tří elementů musí vždy býti splněna rovnice

9)
$$\mu_{12} + \mu_{23} = \mu_{13}$$

a z ní plynoucí

10)
$$\mu_{jj} = 0 \qquad \mu_{ij} = -\mu_{ji}$$

C) Nesmí býti identicky rovna nule pro dva rozdílné elementy.

Najdeme funkci, která těmto požadavkům vyhovuje, načež ji prohlásíme za míru. Funkce, která splňuje podmínku *A)*, jest dvojpoměr čtyř elementů. Studujme jej tedy blíže! Buďtež dány dva elementy $x(x_1, x_2)$, $y(y_1, y_2)$.

Stanovme dvojpoměr $(x\,y\,\xi\,\xi')$! Mohli bychom postupovati tak, jako dříve: Do obecného vzorce pro dvojpoměr čtyř elementů dosadili bychom jejich souřadnice. Z důvodů, jichž oprávnění později vysvitne, vyjádříme nejprve souřadnice absolutních elementů souřadnicemi elementů x, y, a teprve tyto dosadíme do vzorce pro dvojpoměr.

Tři elementy v útvaru jsou vždy lineárně závislé. To znamená: souřadnice třetího elementu můžeme vždy lineárně vyjádřiti souřadnicemi prvých dvou elementů. Vyjádříme souřadnice absolutního elementu lineárně souřadnicemi elementů x, y rovnicemi

11) $$\sigma\xi_1 = a_1 x_1 + a_2 y_1 \qquad \sigma\xi_2 = a_1 x_2 + a_2 y_2$$

Při tom σ jest libovolný faktor úměrnosti, od nuly různý, a $a = \frac{a_1}{a_2}$ prozatím neznámý parametr, který blíže určíme dosazením hodnot 11) do rovnice absolutních elementů 8). Získáme tak

12) $$a_1^2 f_{xx} + 2a_1 a_2 f_{xy} + a_2^2 f_{yy} = 0,$$

kde

13) $$\begin{aligned} a)\ & f_{xx} = g_{11} x_1^2 + 2g_{12} x_1 x_2 + g_{22} x_2^2 \\ b)\ & f_{xy} = g_{11} x_1 y_1 + g_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + g_{22} x_2 y_2 \\ c)\ & f_{yy} = g_{11} y_1^2 + 2g_{12} y_1 y_2 + g_{22} y_2^2 \end{aligned}$$ [1])

Rovnici 12) řešíme podle $\frac{a_1}{a_2} = a$ a získáme tak

14) $$\left\{ \begin{aligned} \nu_1 = a = \frac{a_1}{a_2} &= \frac{-f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xx}}, \\ \nu_2 = a' = \frac{a'_1}{a'_2} &= \frac{-f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xx}} \end{aligned} \right.$$

---

[1]) Rovnice $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 0$ mají tento geometrický význam:

$\begin{matrix} f_{xx} = 0 \\ f_{yy} = 0 \end{matrix}$ značí, že element $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ splývá s absolutním elementem ξ (nebo ξ'),

$f_{xy} = 0$ je rovnicí elementů harmonicky sdružených k absolutním elementům. (Viz VIII, 5.) Tyto právě uvedené vlastnosti jsou invariantní vzhledem k projektivní grupě transformací. Z toho plyne, že rovnice je vyjadřující jsou invarianty vzhledem k této grupě. Musí se tedy transformovati podle

$$'f_{xx} = \delta f_{xx} \qquad 'f_{xy} = \beta f_{xy} \qquad 'f_{yy} = \gamma f_{yy}$$

Ale v teorii invariantů se dokazuje, že pak jest

$$\delta = \beta = \gamma$$

mocninou determinantu D transformace 1).

Každé hodnotě α resp. α' odpovídá jeden absolutní element, což jest ve shodě s počtem absolutních elementů, dříve předpokládaným. — Tím jsme si vše připravili ke stanovení dvojpoměru $(x\,y\,\xi\,\xi')$. Dosazením z 11) obdržíme

$$(x\,y\,\xi\,\xi') = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \xi'_1 & \xi'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \xi'_1 & \xi'_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 & \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 y_1 & \alpha'_1 x_2 + \alpha'_2 y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 y_1 & \alpha'_1 x_2 + \alpha'_2 y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 & \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \alpha_2 \alpha'_1}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \alpha'_2 \alpha_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

a tudíž dle 14)

15) $$(x\,y\,\xi\,\xi') = \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}.$$

Od nynějška budeme psáti místo symbolu $(x\,y\,\xi\,\xi')$ vždy λ. Získáme tak možnost připojenými indexy rozeznávati dvojpoměry, příslušné různým elementům (z nichž dva jsou vždy elementy absolutní). Tak označíme dvojpoměry, příslušné elementům ${}^1x \equiv x$, ${}^2x \equiv y$, ${}^3x \equiv z$ postupně

$$\lambda_{12} = \frac{\nu_2}{\nu_1}, \qquad \lambda_{23} = \frac{\nu_3}{\nu_2}, \qquad \lambda_{13} = \frac{\nu_3}{\nu_1}$$

Při tomto označení snadno nahlédneme, že λ není možno prohlásiti za míru, neboť nesplňuje podmínky 9), 10). Je totiž

$$\lambda_{13} + \lambda_{23} = \frac{\nu_2}{\nu_1} + \frac{\nu_3}{\nu_2},$$

což jest obecně rozdílné od $\lambda_{13} = \dfrac{\nu_3}{\nu_1}$

Platí však jiný vztah mezi těmito veličinami, kterého s výhodou použijeme, totiž

$$\lambda_{12}\lambda_{23} = \frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\nu_3}{\nu_2} = \frac{\nu_3}{\nu_1} = \lambda_{13} \quad \text{a} \quad \lambda_{jj} = \frac{\nu_j}{\nu_j} = 1, \quad \lambda_{ik} = \frac{\nu_k}{\nu_i} = \frac{1}{\lambda_{ki}}$$
$$(i, j, k, \ldots = 1, 2, 3, \ldots)$$

Logaritmováním těchto rovnic získáme

9') $\log \lambda_{12} + \log \lambda_{23} = \log \lambda_{13}$, 10') $\log \lambda_{jj} = 0$, $\log \lambda_{ik} = -\log \lambda_{ki}$

Vyhovuje tedy $\log \lambda$ podmínkám kladeným na míru dvou elementů a můžeme jej tudíž za takovou prohlásiti. Je však zřejmé, že těmže podmínkám vyhovuje i výraz $\frac{c}{2} \log \lambda$, kde c jest libovolná, od nuly různá konstanta. Z toho plyne obecná definice míry útvaru jednorozměrného:

Míra dvou elementů jednorozměrného útvaru neeuklidovského je dána vzorcem

$$\boxed{\mu(x\,y) = \frac{c}{2} \log \lambda = \frac{c}{2} \log \frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}}} \tag{16}$$

Výraz pod odmocninou může míti trojí hodnotu. Buď

a) jest $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} > 0$. V tom případě je dvojpoměr $\lambda = (x\,y\,\xi\,\xi')$ podle 15) vždy reálný. Ježto i elementy x, y jsou reálné, musí nutně i elementy absolutní býti reálné. Jednorozměrný útvar jest hyperbolický. Nebo

b) jest $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} < 0$. V tom případě je dvojpoměr imaginární, obecně tvaru $A + Bi$ a elementy absolutní tudíž imaginárné. Jednorozměrný útvar jest eliptický. Nebo konečně

c) jest $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} = 0$. V tom případě dvojpoměr $\lambda = (x\,y\,\xi\,\xi')$ jest roven jedné pro každé dva elementy x, y, což není jinak možné, než když absolutní elementy splývají v jeden reálný. Pak jest jednorozměrný útvar parabolický. V tomto případě musíme vhodně vzorec 16) přetvořiti. — Hodnota výrazu $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}$ jest právě tak kriteriem pro druh útvaru, jako hodnota výrazu $g_{12}^2 - g_{11} g_{22}$.

V dalších odstavcích budeme probírati jednotlivé druhy neeuklidovských útvarů zvláště.

Hyperbolický útvar jednorozměrný.

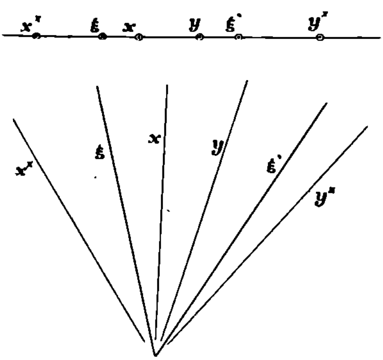
§ 3. Základní vzorce.

1. Volba konstanty c. Ve volbě konstanty c ve vzorci 16) nejsme prozatím ničím vázáni. Zvolíme ji takovým

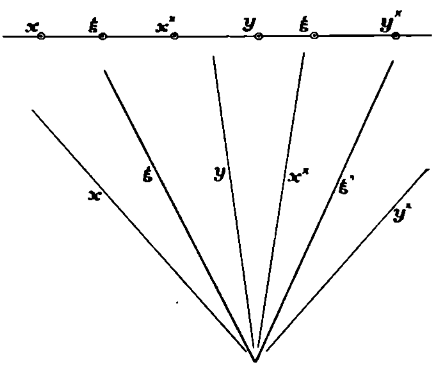
způsobem, aby získané výsledky byly pokud možno názorné. Prozatím ji můžeme předpokládati v tvaru

$$c = k + k'i, \qquad i = \sqrt{-1},$$

kde k, k' jsou libovolná čísla reálná, z nichž alespoň jedno je $\neq 0$. — Dvojpoměr λ jest v hyperbolickém útvaru vždy reálný, neboť absolutní elementy jsou reálné jak ostatně již víme z § 2, a elementy zkoumané vždy předpokládáme jako reálné. Z definice dvojpoměru (VIII, 5 konec) je ihned zřejmo, že λ jest kladné tenkráte a jen tenkráte, když elementy ξ, ξ' nejsou elementy x, y oddělovány. V případě opačném je λ vždy záporné. Jsou-li tedy elementy x, y (resp. x^*, y^*) umístěny tak, jak je na obraze 1*a)*, 1*b)* naznačeno, jest λ kladné. Mají-li elementy x, y, ξ, ξ', resp. x^*, y^*, ξ, ξ' polohu, naznačenou v obraze 2*a)*, 2*b)* jest λ záporné.



Obr. 1*a)*, 1*b)*.



Obr. 2*a)*, 2*b)*.

Obě eventuality mohou v našem případě nastati a musíme o nich uvažovati. Pro rozepsání vzorce 16) použijeme rovnic (uvedených v VIII, 2, 13)

$$\log \lambda = \overline{\log}\, \lambda + 2\varkappa\pi i \ldots.\ \lambda > 0$$
$$\log \lambda = \overline{\log}\, |\lambda| + (2\varkappa + 1)\pi i \ldots\ \lambda < 0$$

Obdržíme tudíž vzhledem k 16) **pro kladné** λ

$$\mu = \tfrac{1}{2}\,(k + k'\,i)\,(\overline{\log}\,\lambda + 2\varkappa\pi i) = \tfrac{1}{2}\,[i\,(k'\,\overline{\log}\,\lambda + 2\varkappa k\pi) + (k\,\overline{\log}\,\lambda - 2k'\varkappa\pi)]$$

a pro λ záporné

$$\mu = \tfrac{1}{2}(k+k'i)\,[\overline{\log}\,|\lambda| + (2\varkappa+1)\pi i] = \tfrac{1}{2}\{i[k'\,\overline{\log}\,|\lambda| + (2\varkappa+1)k\pi] + k\,\overline{\log}\,|\lambda| - (2\varkappa+1)k'\pi\}$$

Hlavní hodnoty (VIII, 2) těchto výrazů jsou

$$\mu = \frac{ik'}{2}\overline{\log}\,\lambda + \frac{k}{2}\overline{\log}\,\lambda\,, \qquad (\lambda > 0)$$

$$\mu = \frac{i}{2}(k'\,\overline{\log}\,|\lambda| + k\pi) + \frac{1}{2}(k\,\overline{\log}\,|\lambda| - k'\pi), \qquad (\lambda < 0)$$

V dalším omezíme se jen na hlavní hodnoty funkce μ.[4a]) Zároveň budeme žádati, aby míra dvou reálných elementů byla vždy reálná. Pak jest ale nutno voliti

$$k' = 0, \quad \text{to jest} \quad c = k$$

a vyloučiti ze svých úvah dvojice elementů, které jsou absolutními elementy oddělovány. Pro ně je totiž vždy $\lambda < 0$ a tudíž

$$\mu = \frac{k}{2}\overline{\log}\,|\lambda| + \frac{ik}{2}\pi \qquad (\lambda < 0)$$

vždy imaginární.

Pro elementy, které nejsou absolutními elementy oddělovány, obdržíme vždy míru reálnou

$$\mu = \frac{k}{2}\overline{\log}\,\lambda\,, \qquad (\lambda > 0) \tag{17}$$

Tímto omezením jen na studium určitých elementů jsme si úlohu podstatně zjednodušili. Je záhodné upozorniti na to, v čem ono zjednodušení spočívá. K tomu cíli je nutno zmíniti se o tak zvané „volnosti pohybu“ v geometrii. Říkáme, že v útvaru neexistuje volnost pohybu, když libovolný jeho element (nikoliv absolutní) nemůžeme převésti do libovolné polohy.[5]) Kdybychom se neomezili v našem

---

[4a]) Libovůle tohoto omezení nezmění podstatně výsledků. Podobné omezení provádíme často. Nejznámější je případ úhlu dvou přímek, který podle vzorce 4) jest funkcí mnohoznačnou. Přes to uvažujeme jen o hlavní hodnotě této funkce.

[5]) Taková geometrie, kde neexistuje volnost pohybu, je nám snad logicky nejpřístupnější. Ukážeme to na úvaze prostorové: Jsou-li x_1, x_2, x_3 nehomogenní souřadnice v prostoru a x_4 značí čas, je zřejmo, že ve čtyřrozměrném prostoru o souřadnicích x_1, x_2, x_3, x_4 neexistuje volnost pohybu po čarách $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$, $x_3 = \text{const}$, neboť v čase nemůžeme postupovati nikdy směrem do minulosti, nejvýše do budoucnosti.

případě na elementy, které absolutními elementy nejsou oddělovány, existovaly by dvojice elementů, z nichž jeden nelze převésti v druhý. Na př. bychom nemohli element x dvojice x, y v obr. 2 převésti do polohy elementu x v obr. 1. Neboť v obr. 1 element x určuje s nějakým pevným elementem y téhož útvaru míru reálnou, ale v obr. 2 elementy stejně označené mají míru imaginárnou, což odporuje požadavku, který jsme na míru kladli. Existovaly by zde tedy dva druhy elementů, které bychom pohybem nikdy nemohli v sebe převésti. Jinými slovy, v takovém útvaru hyperbolickém by neexistovala volnost pohybu. Omezíme-li se však jen na elementy, které nejsou oddělovány absolutními elementy, pak ovšem volnost pohybu existuje. To je právě ono podstatné zjednodušení, o němž jsme mluvili. — Nadále budeme pod slovem elementy rozuměti jen elementy té části útvaru, která na znázorňujícím obraze 1 má svůj obraz buď uvnitř, nebo vně absolutních elementů.[6]) Toto omezení nám dovoluje vysloviti velmi důležité věty:

Míra dvou reálných elementů hyperbolického útvaru je vždy reálná. V hyperbolickém útvaru existuje volnost pohybu.

2. Základní vzorce. V tomto odstavci odvodíme některé základní vzorce po míru, jichž později často budeme používati. Při tom použijeme vzorců pro funkce goniometrické (sin, cos) a hyperbolické (Sin, Cos) (VIII, I). Z rovnice 17) (kde opět píšeme symbol log místo $\overline{\log}$ pro logaritmus v obvyklém smyslu aritmetickém) plyne

$$\sqrt{\lambda} = e^{\frac{\mu}{k}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = e^{\frac{-\mu}{k}}$$

a tudíž (vzhledem k VIII, 1, 7 a VIII, 1, 10)

$$\text{a)}\quad e^{\frac{\mu}{k}} + e^{\frac{-\mu}{k}} = \frac{\lambda +}{\sqrt{\lambda}} = 2\,\mathrm{Cos}\,\frac{\mu}{k} = 2\cos\frac{\mu i}{k} = 2\cos\frac{\mu}{k i}$$

18)

$$\text{b)}\quad e^{\frac{\mu}{k}} - e^{\frac{-\mu}{k}} = \frac{\lambda - 1}{\sqrt{\lambda}} = 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{\mu}{k} = -2i\sin\frac{\mu i}{k} = 2i\sin\frac{\mu}{ki}$$

[6]) Nikdy tedy nebudeme uvažovati současně o elementech x, y resp. x^*, y^* v poloze, jejíž znázornění je dáno obrazem 2. Toto omezení, zdánlivě libovolné je způsobeno nedokonalostí euklidovského obrazu hyperbolického útvaru. Uvidíme později, že na příklad pro „bytosti“, nadané schopností měřiti hyperbolicky, toto omezení vůbec neexistuje, neboť takové „bytosti“ nemohou překročiti absolutní elementy!

Zvratnou operací získáme z těchto rovnic vzhledem k 15)

$$18') \quad a) \quad \frac{\mu(xy)}{k} = \operatorname{arc\,Cos} \frac{\lambda + 1}{2\sqrt{\lambda}} = \operatorname{arc\,Cos} \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}} = i \arccos \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}}$$

$$b) \quad \frac{\mu(xy)}{k} = \operatorname{arc\,Sin} \frac{\lambda - 1}{2\sqrt{\lambda}} = \operatorname{arc\,Sin} \sqrt{\frac{f^2_{xy} - f_{xx} f_{yy}}{f_{xx} f_{yy}}} = i \arcsin \frac{\sqrt{f^2_{xy} - f_{xx} f_{yy}}}{i\sqrt{f_{xx} f_{yy}}}$$

Z této rovnice je zřejmo, že míra je definována jen pro elementy x, y, pro něž $f_{xx} \neq 0$ a $f_{yy} \neq 0$. V případě, že na př. $f_{xx} = 0$, budeme říkati, že míra elementů je nekonečně veliká.[6a]) Tím jsme definovali míru pro každé dva reálné elementy.

§ 4. Elementy nevlastní.

Uvažujme euklidovskou přímku, t. j. přímku v geometrii euklidovské. Označme písmenem $x = \frac{x_1}{x_2}$ vzdálenost bodu x na této přímce od bodu základního o souřadnicích $0:1$. Každý bod x na přímce jest určen poměrem souřadnic $\frac{x_1}{x_2}$. Vzdálenost m dvou bodů x, y je dána známým vzorcem

$$m = \frac{y_1}{y_2} - \frac{x_1}{x_2}$$

Mezi všemi body na přímce existuje jeden o souřadnicích v poměru $x_1 : x_2 = 1 : 0$. Jest charakterisován tím, že jeho vzdálenost od libovolného bodu y téže přímky jest nekonečně velká.

Tomuto bodu říkáme „bod nevlastní“ (abychom se vyhnuli pojmenování „bod v nekonečnu“). Na euklidovské přímce jest j e d i n ý r e á l n ý bod nevlastní. Prakticky, m ě ř e n í m e u k l i d o v s k ý m, h o n e m ů ž e m e n i k d y d o-

---

[6a]) Obecně, výraz $\frac{1}{a}$ je definován jen pro hodnoty $a \neq 0$. Je-li $a = 0$, říkáme, že $\frac{1}{a}$ je nekonečně velké, což značíme symbolickou rovnicí $\frac{1}{a} = \infty$.

sáhnouti. Říkáme, že „úhrnná délka“ euklidovské přímky, (t. j. horní hranice funkce m) je nekonečně veliká.[6b]) V euklidovském svazku přímek je tomu jinak. Již z názoru je vidno, že neexistuje (reálná) přímka svazku, která by s libovolnou přímkou téhož svazku svírala úhel nekonečně veliký. Ve svazku přímek neexistují tedy reálné přímky „nevlastní“.

Jest nasnadě zavésti pojem elementu nevlastního i do geometrie hyperbolického útvaru. Definujeme jej takto:

Nevlastní element v útvaru hyperbolickém určuje s libovolným jiným elementem téhož útvaru míru nekonečně velkou. — Podobně nazveme „úhrnnou délkou“ hyperbolického útvaru horní hranici funkce μ. Z definice nevlastních elementů je zřejmo, že bytost, která by byla nadána schopností měřiti hyperbolicky (jako my jsme nadáni schopností měřiti pouze euklidovsky), nedosáhla by nikdy tímto způsobem nevlastních elementů. (Byly by pro ni vždy v „nekonečnu“.)

V následujících řádcích dokážeme tyto dvě věty:

Absolutní elementy hyperbolického útvaru jsou jeho elementy nevlastní.

Jen absolutní elementy hyperbolického útvaru jsou jeho elementy nevlastní.

Abychom dokázali prvou větu, stanovíme míru elementu obecného x a absolutního ξ. Použijme k tomu vzorce 18*a*). Hodnota dvojpoměru λ jest v daném případě buď rovna nule nebo nekonečně velká. V obou případech obdržíme podle 18*a*)

$$2\,\mathrm{Cos}\,\frac{\mu\,(x\xi)}{k}=\infty,\quad (k\neq 0)$$

a tudíž (podle VIII, 1, 8) v obou případech

$$\frac{\mu\,(x\xi)}{k}=\infty,\quad (k\neq 0).$$

Tím je dokázána první věta. K důkazu druhé věty užijeme týchž vzorců. Je zřejmo, že $\left(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)=\infty$ tenkrát a jen tenkráte, když $\lambda=0$, nebo $\lambda=\infty$. Dvojpoměr λ může však nabýti této hodnoty, jen když jeden z elementů, jichž míru ustanovujeme, splývá s elementem absolutním.

[6b]) Přesněji: horní hranice funkce m neexistuje a my proto říkáme, že „úhrnná délka“ je nekonečně velká.

Má-li tudíž míra dvou elementů býti nekonečně velká, je nutno, aby alespoň jeden z těchto elementů byl elementem absolutním. Tím jsme dokázali i větu druhou.

Poznámka: Je zřejmo, že zde nikterak nerozhodovala volba určitého elementu absolutního. Výsledky získané platí jak pro element ξ, tak pro element ξ'.

Stejným počtem, který přenechávám čtenáři, dokázali bychom, že míra absolutních elementů ξ, ξ' jest nekonečně velká. Ostatně to plyne i z vývodů předcházejících. — Jaký je důsledek vět právě dokázaných? Pro bytost, nadanou schopností měřiti jen hyperbolicky, by absolutní elementy byly nedostupné. Nikdy praktickým měřením by jich nedosáhla. Nemohla by je tudíž ani překročiti. Omezení, o němž byla řeč v poznámce pod čarou [6]), bylo by jí proto nesrozumitelné. My jsme toto omezení učinili jen proto, že zobrazujeme hyperbolický útvar na modelu euklidovském. Proto je důležito vždy si uvědomiti, že nesmíme nějaké vlastnosti hyperbolického útvaru odvozovati z názoru na jeho model euklidovský.

Interpretujme nyní útvar zkoumaný jednou jako řadu bodovou na přímce, po druhé jako svazek přímek bodem. Výsledky získané v těchto odstavcích můžeme vysloviti větami:

Hyperbolická přímka má dva reálné body nevlastní.

Hyperbolická vzdálenost libovolného bodu od každého z bodů nevlastních je nekonečně velká.

Úhrnná délka hyperbolické přímky je také nekonečně velká.

Podobně pro svazek přímek:

Hyperbolický svazek přímek má dvě reálné přímky nevlastní.

Hyperbolický úhel libovolné přímky svazku s každou z těchto nevlastních přímek je nekonečně velký.

Úhel obou přímek nevlastních je rovněž nekonečně velký.

§ 5. Geometrický význam konstanty *k*.

Konstanta k má zajímavý geometrický význam. Stanovíme jej úvahami diferenciálními. Při tom omezíme se na studium hyperbolické přímky.

Zaveďme do odvozených vzorců místo souřadnic homogenních $x_1 : x_2$ bodu x souřadnici nehomogenní tak, že položíme $x_2 = 1$. Pišme pak kratčeji místo x_1 přímo x. Rovnici absolutních bodů předpokládejme v tvaru (VIII, 6, 29')

$$-k^2 + \xi^2 = 0$$

Rovnice 13) pro nehomogenní souřadnice jsou tvaru

13')
$$a)\ f_{xx} = x^2 - k^2$$
$$b)\ f_{xy} = xy - k^2$$
$$c)\ f_{yy} = y^2 - k^2$$

Dosadíme-li tyto výrazy do rovnice 17), získáme pro vzdálenost bodů x, y

$$m = \frac{k}{2} \log \frac{xy - k^2 + \sqrt{(xy - k^2)^2 - (x^2 - k^2)(y^2 - k^2)}}{xy - k^2 - \sqrt{(xy - k^2)^2 - (x^2 - k^2)(y^2 - k^2)}} =$$
$$= \frac{k}{2} \log \frac{xy - k^2 + k(x - y)}{xy - k^2 - k(x - y)},$$

nebo v jiném tvaru

19)
$$m = \frac{k}{2} \log \frac{(x-k)(y+k)}{(x+k)(y-k)} = \frac{k}{2}\left[\log \frac{x-k}{x+k} - \log \frac{y-k}{y+k}\right]$$

Ale výraz na pravé straně této rovnice je možno psáti

$$\int_y^x \frac{k^2 dx}{x^2 - k^2} = k^2 \int_x^y \frac{dx}{k^2 - x^2} = \int_x^y \frac{dx}{1 - \frac{x^2}{k^2}},\ ^{7)}$$

kde považujeme x za proměnný bod, y za pevný bod. Je tedy hyperbolická vzdálenost bodu x od y dána vzorcem

19')
$$\int_y^x dm = \int_x^y \frac{dx}{1 - \frac{x^2}{k^2}}$$

---

[7]) Skutečně platí

$$\int \frac{k^2 dx}{x^2 - k^2} = \frac{k^2}{2k} \log \frac{x-k}{x+k} + \text{const.}$$

a tudíž

$$\int_y^x \frac{k^2 dx}{x^2 - k^2} = \int_x^y \frac{dx}{1 - \frac{x^2}{k^2}} = \frac{k}{2}\left[\log \frac{x-k}{x+k} - \log \frac{y-k}{y+k}\right]$$

a pro bod x nekonečně blízký bodu y

19'') $$dm = \frac{-dx}{1 - \frac{x^2}{k^2}}$$

Změníme-li orientaci směrů na euklidovském modelu hyperbolické přímky (t. j. píšeme-li $-x$ místo x a obráceně) a ponecháme orientaci směrů přímky hyperbolické, obdržíme

20) $$\boxed{dm = \frac{dx}{1 - \frac{x^2}{k^2}}}$$

Tento vzorec určuje diferenciál vzdálenosti na hyperbolické přímce. Diferenciál vzdálenosti na přímce euklidovské je dx. Diferenciály dm a dx liší se od sebe faktorem $1 - \frac{x^2}{k^2}$. Čím je $\frac{x}{k}$ menší, tím méně se tento faktor liší od jednotky a tím méně se tedy oba diferenciály liší. Je-li $\frac{x}{k}$ hodně malé, můžeme hoření rovnici uvésti na tvar

$$dm = dx\,(1 + \eta)\,,$$

kde η je velmi malé číslo, které je tím menší, čím menší je $\frac{x}{k}$. Když $\frac{x}{k} \to 0$ (čti: když se $\frac{x}{k}$ blíží nule), pak i $\eta \to 0$, což vyjadřujeme tak, že píšeme

$$\lim_{\frac{x}{k} \to 0} dm = dx$$

(Čti: limita dm, při $\frac{x}{k} \to 0$ je rovna dx.) Diferenciály dm a dx se tedy liší v tomto případě jen o veličinu ηdx. V prvním přiblížení (t. j. při zanedbání této veličiny) jsou tedy oba diferenciály stejné. Ale $\frac{x}{k} \to 0$ jen v okolí bodu $x = 0$, které je velmi malé vzhledem ke konstantě k. Za takový bod však můžeme považovati každý bod na modelu hyperbolické přímky, volíme-li vhodně systém souřadný. Proto můžeme říci:

V okolí obecného bodu hyperbolické přímky, které je dostatečně malé vzhledem ke konstantě k, je hyperbolický diferenciál vzdálenosti v prvém přiblížení roven euklidovskému diferenciálu vzdálenosti.

Měříme-li na euklidovské přímce, činí to dojem, jako bychom měřili na hyperbolické přímce vzdálenosti velmi malé, pro něž $\frac{x}{k} \to 0$. Proto někdy říkáme, že euklidovská geometrie na přímce je diferenciální geometrií hyperbolické geometrie na přímce.[7a])

Než přistoupíme k dalšímu paragrafu, všimneme si ještě jedné věci. Označme ζ nevlastní bod euklidovského modelu hyperbolické přímky, jejíž absolutní body splňují rovnici

$$\xi^2 - k^2 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmo, že pro hyperbolickou přímku H, jejíž euklidovské znázornění obsahuje bod ζ, je výraz $1 - \frac{x^2}{k^2} < 0$, kdežto pro hyperbolickou přímku H', jejíž euklidovské znázornění ζ neobsahuje, je $1 - \frac{x^2}{k^2} > 0$. Proto musí dle 20') pro $dx > 0$ býti na H $dm < 0$ a na H' $dm > 0$. Vidíme tedy, že kladný směr na euklidovském modelu může býti znázorněním kladného směru na H', pak ale nutně musí na H znázorňovati směr záporný. To je ostatně zřejmo i bez počtu. Neboť směr na H, určený sledem $\xi'\xi$ je znázorněn na euklidovském modelu směrem $\xi'\zeta\xi$, kdežto týž sled $\xi'\xi$ určuje na H' směr, který na euklidovském modelu je znázorněn sledem $\xi'\xi\zeta$.

O jiných úvahách diferenciálních pojednáme v kapitole V.

§ 6. **Základní konstrukce.**[8])

Hyperbolický útvar znázorňujeme útvarem euklidovským. Nemůžeme však konstruktivně řešiti metrické úlohy hyperbolické geometrie metodami euklidovskými. Je možno

[7a]) Činí to dojem, jakoby měření euklidovské dávalo nám výsledky (čísla) aktuálně „nekonečně" malé vzhledem k měření hyperbolickému. Zajímavé je, že o zavedení aktuálně nekonečně malých čísel pokoušeli se — byť i na zcela jiném podkladě — i filosofové (*Natorp*).

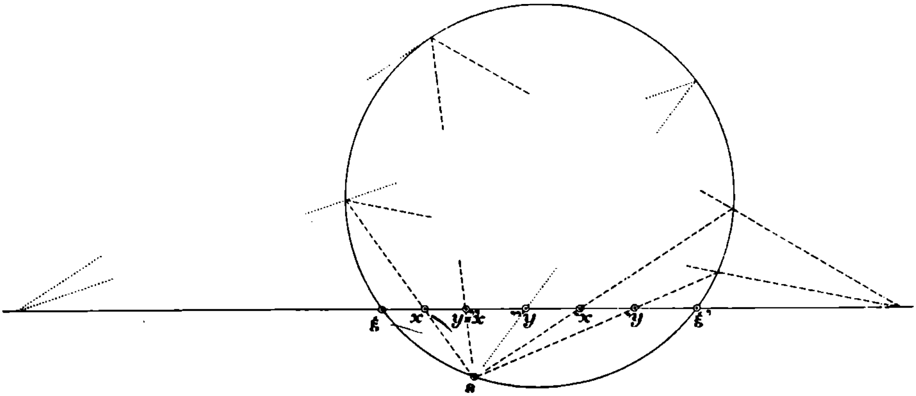
[8]) Znalost tohoto paragrafu není nutna pro pochopení výkladů v dalších odstavcích. Zde předpokládám znalost základních konstrukcí syntetické projektivní geometrie.

však používati jiných metod, jak v následujících řádcích ukážeme. Rozřešíme metodou projektivní tyto základní úlohy:

Danou délku přenésti do daného bodu.

Danou délku rozpůliti.

A) Buďtež na obraze 3 body ξ, ξ' znázorněním bodů absolutních.



Obr. 3.

Vzdálenost bodů x a y přeneseme z bodu x do bodu $'x$ následující úvahou: Můžeme vždy předpokládati, že bod $'x$ vznikl pohybem z bodu x, ovšem pohybem hyperbolickým, který jest jednomocnou transformací projektivní, jež reprodukuje body absolutní. Jsou-li hyperbolické vzdálenosti jednak bodů x, y, jednak bodů $'x$, $'y$ stejné co do směru i velikosti, lze úsečku xy převésti pohybem do úsečky $'x\ 'y$. Ježto dle předpokladu $xy = 'x'y$, musí i příslušné dvojpoměry se rovnati:

$$(xy\xi\xi') = ('x'y\xi\xi')$$

Tato rovnice však definuje projektivnost bodových řad x, y, ξ, ξ'.... a $'x$, $'y$, ξ, ξ'....., kde ξ, ξ' jsou body samodružné. Tohoto poznatku použijeme při stanovení bodu $'y$, jsou-li body ξ, ξ', x, y, $'x$ dány. Na obraze 3 zvolena pomocná kružnice tak, aby přímka $\xi\xi'$ byla právě direkční přímkou projektivních svazků paprsků s (x, y, ξ, ξ'....) a s ($'x$, $'y$, ξ, ξ'....) Další konstrukce (čárkovaná) je zřejma z obrázku.

Zmínky zasluhuje případ, kdy $y \equiv {}'x$. (Na obraze konstrukce provedena tečkovaně pro bod $''x \doteq y$.) Pak ovšem $''x''y = xy$ co do směru i velikosti. Z toho plyne, že bod $''x$ je půlícím bodem úsečky $x''y$. Dle této konstrukce rozpůlíme tedy snadno úsečku $x''y$, jak je provedeno na obr. 3 (tečkovaně). Tím jsme zároveň rozřešili úlohy:

Daný úhel $\widehat{xsy}$ přenésti do polohy $\widehat{'xs'y}$.

Daný úhel rozpůliti.

Neboť je zřejmo, že můžeme svazek $s\,(x, y, \xi, \xi' \ldots)$ interpretovati jako euklidovský model hyperbolického svazku o absolutních přímkách $s\xi$, $s\xi'$. — Tím jsme skončili úvaby o hyperbolickém útvaru jednorozměrném a obrátíme se nyní k jednorozměrnému útvaru eliptickému.

Eliptický útvar jednorozměrný.

§ 7. Vzorce základní.

1. Volba konstanty.

Studium eliptického útvaru jednorozměrného jeví formální podobnost se studiem hyperbolického útvaru a některé známé výsledky budeme moci s malou změnou opsati. Proto se omezíme na stručnější zmínky. V eliptickém útvaru jsou absolutní elementy imaginární a $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} < 0$. (Viz § 2, konec.) V tom případě jest dvojpoměr $\lambda = (xy\xi\xi')$ imaginární, podle 15) obecně tvaru

$$\lambda = \frac{a + bi}{a - bi}$$

(a, b čísla reálná, nikoli současně obě rovna nule) a tudíž, píšeme-li jej

$$\lambda = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (= A + Bi),$$

jest modul

$$r = |\sqrt{A^2 + B^2}| = 1.$$

(VIII, 2, 14.) Proto jest obecný tvar pro log λ dán výrazem (VIII, 2, 15)

$$\log\lambda = i(\varphi + 2\varkappa\pi).$$

Této rovnice použijeme, abychom rozhodli o volbě konstanty c ve vzorci 16) pro míru dvou elementů. Pro konstantu c jsme zavedli označení

$$c = k + k'i. \qquad (k^2 > 0,\ k'^2 > 0)$$

Podle posledních dvou rovnic a podle rovnice 16) získáme pro μ

$$\mu = -\frac{k'}{2}(\varphi + 2\varkappa\pi) + \frac{ki}{2}(\varphi + 2\varkappa\pi).$$

Z toho je zřejmo, že chceme-li, aby $\log \lambda$ dvou reálných elementů byl reálný, musíme voliti $k = 0$, t. j. $c = k'i$. Je tedy vzorec pro míru dvou elementů eliptického útvaru

$$\mu = \frac{k'i}{2}\log\lambda = -\frac{k'}{2}(\varphi + 2\varkappa\pi), \tag{21}$$

a míra μ veličinou mnohoznačnou. Známe-li jednu její hodnotu, obdržíme ostatní přičtením $k'\varkappa\pi$. Nazveme „měrou“ jen hlavní hodnotu (pro $\varkappa = 0$)

$$\mu = -\frac{k'}{2}\varphi \qquad \text{(VIII, 2)}. \tag{21'}$$

Kdy má μ ve vzorci 21') největší možnou hodnotu? Tu musí $\varphi = -2\pi$. Hlavní hodnota této funkce je tedy

$$\mu_{max} = k'\pi. \tag{22}$$

Tato hodnota představuje *úhrnnou míru eliptického útvaru*. Neboť ze vzorce 21') plyne, že nemůžeme zvoliti (reálné) elementy tak, aby jejich míra byla větší než $|k'\pi|$. Získané výsledky můžeme shrnouti v poučky:

Míra dvou reálných elementů v eliptickém útvaru je vždy reálná.

Eliptický útvar má úhrnnou míru konečnou, rovnou $k'\pi$.

Zvláštní zmínky zasluhují přímky v eliptickém svazku, pro něž je $\lambda = -1$ a které jsou tudíž *harmonicky sdružené* vzhledem k přímkám absolutním (VIII, 5). V tom případě musí býti $\varphi = \pm\pi$. Hlavní hodnota funkce M dvou takových přímek je tedy

$$M = \frac{\pm k'\pi}{2}.$$

Ježto pro $k' = 1$ je právě $M = \frac{\pm\pi}{2}$, jmenujeme takové dvě přímky, řídíce se analogií euklidovské geometrie, přímkami *kolmými* (kolmicemi).

2. *Základní vzorce.* Z rovnice

$$\mu(xy) = \frac{k'i}{2}\log\lambda = \frac{k'i}{2}\log\frac{f_{xy} + \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}}} \tag{23}$$

plynou vztahy (VIII, 1)

$$24)\quad \begin{cases} a)\ e^{\frac{\mu}{k'i}} = \sqrt{\lambda}, \\ b)\ e^{-\frac{\mu}{k'i}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \\ c)\ e^{-\frac{\mu i}{k'}} + e^{+\frac{\mu i}{k'}} = \frac{\lambda+1}{\sqrt{\lambda}} = 2\cos\frac{\mu}{k'}, \\ d)\ e^{-\frac{\mu i}{k'}} - e^{\frac{\mu i}{k'}} = \frac{\lambda-1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{i}\sin\frac{\mu}{k'} = -2i\sin\frac{\mu}{k'}. \end{cases}$$

Zpětnou operací získáme

$$25)\quad \begin{cases} a)\ \frac{\mu(xy)}{k'} = \operatorname{arc\ cos}\frac{\lambda+1}{2\sqrt{\lambda}} = \operatorname{arc\ cos}\frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx}f_{yy}}}, \\ b)\ \frac{\mu(xy)}{k'} = \operatorname{arc\ sin}\frac{i}{2}\frac{\lambda-1}{\sqrt{\lambda}} = \operatorname{arc\ sin}\frac{\sqrt{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}}{\sqrt{f_{xx}f_{yy}}}. \end{cases}$$

Těchto vzorců budeme později hojně používati. Čeho však nyní si všimneme, jest jejich nápadná podobnost se vzorci pro úhel dvou přímek ve svazku euklidovském. Ukážeme, že není zásadního rozdílu mezi svazkem euklidovským a eliptickým. Euklidovský pohyb ve svazku byl definován jako projektivní transformace, která reprodukuje přímky isotropické o rovnici

$$2')\qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$$

Úhel euklidovský, invariant vzhledem k této transformaci, byl definován vzorcem *Laguerreovým* (III, 1, 4). Naproti tomu eliptický pohyb ve svazku jest projektivní transformací, která reprodukuje dvě imaginární, sdružené přímky o rovnici

$$7')\qquad g_{11}\xi_1^2 + 2g_{12}\xi_1\xi_2 + g_{22}\xi_2^2 = 0$$

Úhel eliptický, invariant vzhledem k této transformaci, byl definován vzorcem 23). Definice u obou svazků jsou tedy zásadně stejné, rozdíl jest však v tom, že absolutní elementy jsou jinak dány. My však víme, že kvadratickou formu 7') možno vždy převésti (vhodnou volbou systému souřadného) na kanonický tvar 2') (VIII, 6, odst. 2). Můžeme tedy vždy předpokládati absolutní přímky eliptického útvaru dané rovnicí 2'). Pak vzorce obou geometrií liší se jen zavedením konstanty k'. V geometrii euklidovské je totiž

$k' = 1$, jak je vidno ze vzorce *Laguerreova*. Tento výsledek pro jeho důležitost vyslovíme větou:

Je-li v eliptickém svazku přímek $k' = 1$ a jsou-li absolutní přímky přímkami isotropickými, pak tento svazek je euklidovským svazkem.

Je tedy euklidovský svazek přímek zvláštním případem svazku eliptického. Jest otázka, zda i pro eliptickou přímku najdeme podobnou interpretaci pomocí nějakého útvaru euklidovského. Ihned jest zřejmo, že to euklidovská přímka nemůže býti, neboť na té pohyb reprodukuje jediný bod, kdežto na eliptické přímce se reprodukují dva body. Existuje však vztah mezi geometrií euklidovskou na kružnici a eliptickou přímkou. Ten odvodíme v odstavci následujícím.

§ 8. Eliptická přímka.

1. Souřadnice *Weierstrassovy*. Nechť souřadnice absolutních bodů na eliptické přímce vyhovují rovnici

26) $$f_{\xi\xi} \equiv \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$$

Řešením této rovnice obdržíme souřadnice dvou imaginárních (sdružených) bodů. Pro souřadnice x_1, x_2 každého jiného bodu eliptické přímky musí tedy býti součet čtverců $x_1^2 + x_2^2$ rozdílný od nuly. Omezíme-li se jen na body reálné, musí tento součet čtverců býti větší než nula. Pak můžeme vždy vhodnou volbou koeficientu úměrnosti dosáhnouti, aby

27) $$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Souřadnice x_1, x_2, které vyhovují rovnici 27) nazývají se souřadnice *Weierstrassovy*. Jsou-li x_1, x_2 takové souřadnice, nemůžeme vůbec výrazy ϱx_1, ϱx_2 ($\varrho \neq \pm 1$) za *Weierstrassovy* souřadnice bodu považovati, neboť nevyhovují rovnici 27). Z toho plyne, že v souřadnicích *Weierstrassových* není bod určen poměrem souřadnic. Těchto souřadnic použijeme ke stanovení některých zajímavých vztahů mezi eliptickou přímkou a euklidovskou kružnicí (t. j. kružnicí v euklidovské rovině). Z rovnice 26) pro souřadnice absolutních bodů snadno odvodíme

$$f_{xx} = 1, \qquad f_{yy} = 1, \qquad f_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Rovnice 24c) pro vzdálenost dvou bodů se zjednoduší, na

$$28) \qquad \boxed{\cos \frac{m(xy)}{k'} = x_1 y_1 + x_2 y_2}$$

V této rovnici jest výraz na levé straně invariantem vzhledem k eliptickému pohybu, jak jsme již dříve dovodili. Musí tedy i výraz na pravé straně býti vzhledem k tomuto pohybu invariantní. Můžeme proto vhodnou volbou bodů x, y získati snadno interpretaci souřadnic *Weierstrassových* z rovnice 28). Nechť počáteční bod na eliptické přímce jest $x \equiv {}^0x$ o souřadnicích ${}^0x_1 = 0$, ${}^0x_2 = 1$. Dosazením těchto hodnot do 28) získáme

$$29) \qquad \boxed{y_2 = \cos \frac{m({}^0xy)}{k'}}$$

a vzhledem ke 27) (a VIII, 1, 3)

$$30) \qquad \boxed{y_1 = \pm \sin \frac{m({}^0xy)}{k'}}$$

Tím jsme získali interpretaci souřadnic y_1, y_2 bodu y. V dalším odstavci použijeme těchto souřadnic k úvahám diferenciálním, které nám osvětlí souvislost euklidovské kružnice a eliptické přímky.

2. Diferenciál vzdálenosti. Uvažujme dva body nekonečně blízké x a y o souřadnicích

$$x_j, \qquad y_j = x_j + dx_j + \frac{1}{2} d^2x_j + \ldots, \qquad (j = 1, 2)$$

Vzdálenost těchto bodů *dm* získáme ze vzorce 28) dosazením souřadnic těchto bodů

$$28') \qquad \cos \frac{dm}{k'} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = (x_1^2 + x_2^2) + (x_1 dx_1 + x_2 dx_2) + \\ + \frac{1}{2} (x_1 d^2 x_1 + x_2 d_2 x_2) + \ldots$$

Výrazy na pravé straně této rovnice obdržíme též diferencováním rovnice 27)

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0 \qquad x_1 d^2 x_1 + x_2 d^2 x_2 = -(dx_1^2 + dx_2^2)$$

Nyní dosadíme tyto hodnoty do rovnice 28') a zároveň rozvineme cos v řadu (dle VIII, 1, 2):

$$\cos\frac{dm}{k'} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{dm}{k'}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{dm}{k'}\right)^4 - \ldots = 1 - \frac{1}{2}(dx_1^2 + dx_2^2) + \ldots$$

Z této rovnice obdržíme v prvém přiblížení

$$\boxed{\left(\frac{dm}{k'}\right)^2 = dx_1^2 + dx_2^2} \tag{31)}$$

Víme, že v euklidovské rovině, v pravoúhlých souřadnicích x_1, x_2 je čtverec diferenciálu vzdálenosti dán právě výrazem $dx_1^2 + dx_2^2$ a rovnice 27) je rovnicí kružnice o poloměru 1. Podle toho můžeme výraz $\frac{dm}{k'}$ interpretovati jako diferenciál vzdálenosti dvou bodů na kružnici o poloměru 1 a tudíž dm jako diferenciál vzdálenosti na kružnici o poloměru k'. Proto platí v okolí zkoumaného bodu věta:

Eliptickou geometrii na přímce můžeme interpretovati jako geometrii na euklidovské kružnici o poloměru k'.

Tímto způsobem ozřejmí se některé poznatky o eliptické přímce, které jsou na prvý pohled tak překvapující: Na příklad tvrzení, že eliptická přímka není nekonečná.

Mohla by se vyskytnouti námitka, proč zavádíme vůbec pojem eliptické přímky, když její geometrie dá se interpretovati geometrií na kružnici? Nepřispíváme tímto způsobem jen ke zbytečnému matení pojmů? Na tuto námitku musíme odpověděti záporně. Neboť z věty, kterou jsme shora uvedli, neplyne ještě, že obě geometrie jsou pro celý útvar identické.[8a]) Že tomu tak skutečně není, plyne z jednoduché úvahy o právě uvedeném příkladě: Úhrnná délka kružnice o poloměru k' jest $2\pi k'$, kdežto úhrnná délka přímky eliptické jest $\pi k'$! Jistě tedy nemůžeme v celém rozsahu identifikovati oba útvary! Proč tomu tak není a kde spočívá rozdíl, ukážeme v paragrafu následujícím.

§ 9. **Eliptická přímka.** (Pokračování.)

1. Centrální průmět kružnice. V tomto odstavci vyjdeme od kružnice a ukážeme, jak ještě jiným způsobem

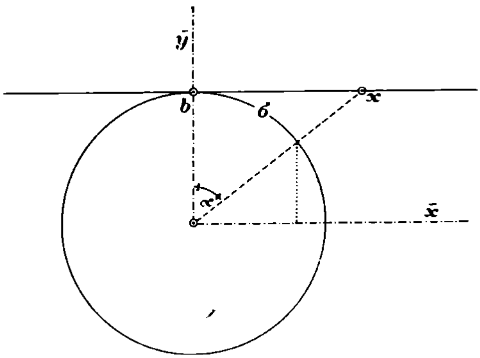
---

[8a]) To znamená, že dosud nevíme, zda všechny věty, vyjadřující vlastnosti celé euklidovské kružnice, můžeme interpretovati souhlasně v geometrii celé eliptické přímky.

můžeme dospěti k interpretaci eliptické geometrie. Nechť kružnice na obr. 4 je dána rovnicí v pravoúhlých souřadnicích $\bar{x}\,\bar{y}$

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = k'^2.$$

Tečnu v bodě b považujme za model eliptické přímky. Promítněme body kružnice na tuto přímku ze středu kružnice. (Tomuto druhu projekce říkáme projekce centrální.)



Obr. 4.

Je-li běžná souřadnice bodu (měřená od bodu b) na přímce x, pak souvislost souřadnic $\bar{x}$, $\bar{y}$, x je dána úměrou

$$\bar{y} : \bar{x} = k' : x,$$

odkudž pomocí rovnice kružnice odvodíme

$$\bar{x} = \pm k' \frac{x}{\sqrt{k'^2 + x^2}}, \qquad \bar{y} = \pm k'^2 \frac{1}{\sqrt{k'^2 + x^2}}.$$

Diferenciací těchto rovnic získáme

$$d\bar{x} = \pm k'^3 \frac{dx}{(k'^2 + x^2)^{3/2}} \qquad d\bar{y} = \mp k'^2 \frac{x\,dx}{(k'^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Oblouk kružnice má čtverec diferenciálu

$$d\sigma^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 = k'^4 \frac{dx^2}{(k'^2 + x^2)^2},$$

z čehož (zvolíme-li odmocninu zápornou)

32) $$d\sigma = \frac{-dx}{1 + \frac{x^2}{k'^2}}.$$

K výrazu na pravé straně bychom však dospěli postupem uvedeným v § 5 pro hyperbolický útvar, když bychom dosadili místo k všude ik'.[9]) Skutečně výsledný vzorec 19'') touto substitucí se změní na

20') $$dm = \frac{-dx}{1 + \frac{x^2}{k'^2}}.$$

Porovnáním výsledků 32) a 20') získáme

33) $$d\sigma = dm.$$

Tento výsledek vyslovíme větou:

Interpretaci eliptické geometrie na přímce (o níž byla řeč v paragrafu předcházejícím) získáme centrální projekcí kružnice.

Poznámka: Integrací rovnice 33) získáme

$$m = \sigma + \text{const}.$$

Počítáme-li oblouk kružnice i vzdálenost na eliptické přímce od bodu dotyčného b, je const = 0. Úhel příslušný oblouku σ budiž α. Pak možno z poslední rovnice vyjádřiti eliptickou vzdálenost vztahem

$$m = k'\alpha = \sigma.$$

Pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ je oblouk kružnice, počítaný od bodu b, roven $\frac{k'\pi}{2}$ a délka eliptické přímky na eukl. modelu od bodu b „napravo" je $\frac{k'\pi}{2}$. Z toho plyne, že úhrnná délka eliptické přímky je $k'\pi$. To je ve shodě s rovnicí 22). Vzhledem k souvislosti geometrie eliptické přímky a kružnice byli bychom však očekávali $2k'\pi$, neboť i obvod kružnice zkoumané je $2k'\pi$. Vysvětlení tohoto rozporu podáme v příštím odstavci.

2. Eliptická přímka a svazek přímek. Geometrii řady bodové na kružnici o středu s můžeme interpretovati jako geometrii svazku paprsků (polopřímek opatřených směry), přiřadíme-li každému bodu b kružnice paprsek, kterým od s dospějeme do b. Přiřazení to jest jedno-

[9]) Opomíjíme zde tento postup, ježto formálně jest úplně stejný. Doporučuji však čtenáři, by jej provedl sám.

jednoznačné. Jednomu bodu kružnice odpovídá jeden a jen jeden paprsek svazku a obráceně. Horní mez úhlu ve svazku paprsků je 2π a příslušný oblouk kružnice je $2k'\pi$. Můžeme interpretovati v celém rozsahu geometrii na eliptické přímce jako geometrii svazku paprsků? Jistě že nikoliv. To plyne jednak z různosti vzorců pro horní meze úhlu ve svazku a vzdálenosti na eliptické přímce, jednak z toho, že jednomu bodu eliptické přímky odpovídají dva paprsky svazku (svírající úhel π). Tím je vysvětlen i rozpor, o kterém jsme se zmínili v odstavci předcházejícím, neboť ten byl vlastně způsoben tím, že jsme porovnávali eliptickou přímku a svazek paprsků.

Zbavíme-li každý paprsek svazku orientace, získáme svazek přímek. Jedné přímce svazku odpovídají na kružnici dva body, ale na eliptické přímce jen jeden bod. Obráceně jednomu bodu eliptické přímky odpovídá jedna přímka. Horní mez úhlu ve svazku přímek je π a příslušná délka eliptické přímky je $k'\pi$. Z toho plyne:

Geometrii na eliptické přímce můžeme v celém rozsahu interpretovati jako geometrii svazku přímek.

Uvedeme alespoň jeden důsledek této interpretace: Následují-li tři přímky svazku A, B, C v tomto pořádku, můžeme vždy od přímky A dospěti k přímce C, aniž přejdeme přes přímku B. (Ve svazku orientovaných přímek je to nemožné, jak se čtenář může přesvědčiti.) Aplikujeme-li tento poznatek na eliptickou přímku, můžeme říci:

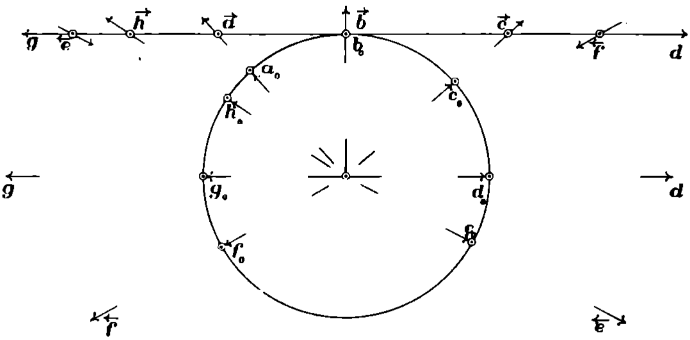
Jsou-li na eliptické přímce tři body a, b, c v tomto pořádku, můžeme vždy od bodu a dospěti do bodu c, aniž bychom přešli bod b.[9a]) (Čtenář může se snadno přesvědčiti, že u přímky hyperbolické tomu tak není.)

V následujícím odstavci odvodíme některé důsledky porovnání kružnice (resp. svazku paprsků) a eliptické přímky.

3. Eliptická přímka a svazek paprsků. Promítněme kružnici (obr. 5) svazkem paprsků na jednu její tečnu. Nějakému bodu a_0 na kružnici odpovídá tedy bod $\vec{a}$ na přímce, která je euklidovským modelem eliptické přímky.

9a) Přesnější, ale záporné znění této poučky jest: „Na eliptické přímce neplatí věta: ‚Jsou-li dány tři body (na přímce), je z nich jeden a jen jeden mezi oběma zbývajícími‘."

Zaveďme nyní označení „orientovaný bod“ pro body na přímce, které jsou opatřeny směrem promítacího paprsku. Směr ten značme šipkou a příslušný bod rovněž ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$). Směřují-li šipky na obraze n a h o r u, říkáme, že bod jest orientován kladně, což vyznačíme polohou šipky u písmene tak, že tato směřuje napravo ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...). V opačném případě mluvíme o bodech záporně orientovaných, $\overleftarrow{e}$, $\overleftarrow{f}$, ...



Obr. 5.

Počněme promítati kružnici na přímku právě v libovolném bodě a_0. Bod $\vec{a}$ jest kladně orientován. Rovněž tak body $\vec{b}$ a $\vec{c}$. Dalším postupem v tomto směru obdržíme bod d, který n a t o m t o m o d e l u nemá orientace. Bod následující $\overleftarrow{e}$ jest však již orientován z á p o r n ě. Dojdeme tedy k bodu a s o p a č n o u orientací po jednom oběhnutí přímky. Další projekce v témže směru skýtá bod $\overleftarrow{f}$, rovněž záporně orientovaný. Poté přijdeme k bodu g, který n a t o m t o m o d e l u nemá orientace. Následující bod $\vec{h}$ jest však již opět k l a d n ě orientován. Konečně dospějeme do bodu $\vec{a}$ s původní k l a d n o u orientací.

Z tohoto postupu jest zřejmo, že musíme oběhnouti eliptickou přímku d v a k r á t e, abychom se dostali do t é h o ž bodu s t o u ž orientací. Při tom však jsme oběhli kružnici jen j e d n o u. Tím je také vysvětleno, proč úhrnná délka přímky eliptické je právě p o l o v i č n í obvodu příslušné kružnice. Když totiž oběhneme j e d n o u přímku, na příslušné kružnici oběhneme jen půl obvodu. — Výsledek můžeme shrnouti ve věty:

Rozdíl mezi eliptickou přímkou a příslušnou kružnicí spočívá v tom, že přímku musíme oběhnouti dvakráte, abychom dospěli k bodu s touž orientací, kdežto kružnici oběhneme při tom jen jednou. V souvislosti s tím musí úhrnná délka eliptické přímky býti právě poloviční obvodu příslušné kružnice.

V posledních dvou paragrafech jsme ukázali, jak možno uvésti v souvislost eliptickou přímku a euklidovskou kružnici. Tato souvislost snad ozřejmí výsledky paragrafu následujícího o bodech nevlastních. Při tom opět budeme uvažovati svazek přímek i řadu bodů současně.

§ 10. Elementy nevlastní.

Podle vývodů předcházejících paragrafů možno očekávati, že eliptický útvar nemá reálných elementů nevlastních, to jest, že neexistují reálné elementy, které by s jiným libovolným elementem určovaly míru, jež je nekonečně velkou. Očekáváme tak proto, že úhrnná míra eliptického útvaru jest konečná. Tím však není řečeno, že neexistují ani imaginárné elementy nevlastní. V následujících řádcích dokážeme skutečně jejich jsoucnost. Odvodíme totiž tyto věty:

V eliptickém útvaru neexistují reálné elementy nevlastní.

Absolutní elementy eliptického útvaru jsou jeho elementy nevlastní.

Jen absolutní elementy eliptického útvaru jsou jeho elementy nevlastní.

K důkazu všech tří vět stačí aplikovati rovnici 25*a*)

$$\frac{\mu\,(xy)}{k'} = \arccos \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}}\,.$$

Podle předpokladu je v eliptickém útvaru pro každé dva reálné elementy $f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy} < 0$, z čehož plyne $\dfrac{f_{xy}^2}{f_{xx} f_{yy}} < 1$.

Nikdy tedy nemůže pro reálné elementy býti $\dfrac{f_{xy}}{\sqrt{f_{xx} f_{yy}}} > 1$.

Tím je dokázána věta prvá. Dokážeme nyní současně druhou a třetí větu.

Má-li býti jeden z elementů x, y nevlastním, musí podle této rovnice býti

$$f_{xx} f_{yy} = 0,$$

t. j.
$$f_{xx} = 0, \quad \text{nebo} \quad f_{yy} = 0.$$

V tom případě nemůže však býti pro $x \neq y$ současně $f_{xy} = 0$. (Zcela snadný důkaz přenechávám píli čtenářově.) To znamená, že případ $m = \infty$ může nastati, to jest, že existují body nevlastní a jejich souřadnice $\eta_1 : \eta_2$ splňují rovnici

$$f_{\eta\eta} = 0.$$

Této rovnici však vyhovují jen elementy absolutní. Tím jsou všechny tři věty dokázány.[10]) V případě svazku přímek jsme tento výsledek již znali, neboť euklidovský svazek jest v podstatě eliptickým svazkem a ve svazku euklidovském jsou nevlastní přímky přímkami isotropickými. Ale ani na přímce tento výsledek nepřekvapuje, známe-li její souvislost s euklidovskou kružnicí. Tato má totiž právě dva nevlastní body, isotropické body své roviny.

Nyní též můžeme doplniti větu předposledního odstavce minulého paragrafu o třech bodech eliptické přímky:

Jsou-li na eliptické přímce dány tři body a, b, c v tomto pořádku, můžeme vždy dospěti od bodu a k bodu c

I. bez přejití bodu b a

II. bez přejití nevlastních elementů.

Takto vyslovená věta zásadně odlišuje přímku eliptickou nejen od přímky hyperbolické, ale i od přímky euklidovské.

Tím jsme v hlavních rysech vyčerpali teorii eliptického útvaru a přejdeme ke studiu útvaru parabolického.

Poznámka: V útvaru hyperbolickém uváděli jsme některé konstrukce. Totéž bychom mohli učiniti i zde. Obě úvahy jsou však principielně stejné a čtenář je může tedy provésti sám, když si uvědomí, že zde samodružné elementy jsou imaginárně sdružené.

---

[10]) Téhož postupu mohli jsme ovšem použíti i při úvaze o nevlastních elementech hyperbolického útvaru.

Jednorozměrný útvar parabolický.

§ 11. Úprava základního vzorce.

1. Předběžný výpočet. Jednorozměrný útvar parabolický jest charakterisován tím, že jeho elementy absolutní splývají v jediný reálný element. V tom případě je však dvojpoměr $\lambda = (\xi\xi xy)$ roven jedné a tudíž vzorec 16) pro každé dva elementy x a y a pro každou od nuly různou konstantu c skýtá podle (VIII, 2, 13)

$$\mu = c\varkappa\pi i \qquad (\varkappa \text{ celé číslo})$$

$$\text{resp. pro } \varkappa = 0 \qquad \mu = 0$$

Tato definovaná míra nevyhovuje ovšem požadavkům, které klademe na úhel, resp. vzdálenost. Proto musíme buď jako míru definovati jinou funkci, nebo vzorec 16) tak přetvořiti, aby shora zmíněným požadavkům vyhovoval. Učiníme toto druhé.

Budeme pokládati útvar parabolický za mezný případ útvaru hyperbolického (když se absolutní elementy nekonečně málo liší). Odvodíme nejdříve rozvoj funkce log λ pro tento hyperbolický útvar a pak limitním pochodem dospějeme ke vzorci pro útvar parabolický.

Můžeme zvoliti soustavu souřadnou tak, že souřadnice absolutních elementů hyperbolického útvaru jsou dány rovnicemi

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = 0 \qquad \frac{\xi_2'}{\xi_1'} = \delta\,, \tag{34}$$

kde $\delta \neq 0$ jest libovolné číslo. Tím je jejich poloha v útvaru stanovena. Dvojpoměr λ, který určují tyto dva elementy s libovolnými elementy $x = x_1 : x_2$ a $y = y_1 : y_2$, je dán vzorcem (VIII, 5, 25)

$$\lambda = \frac{[x_1\xi_2]\,[y_1\xi_2']}{[y_1\xi_1]\,[x_1\xi_2']} = \frac{x_2}{y_2}\quad\frac{y_2 - y_1\delta}{x_2 - x_1\delta} = \frac{1 - y\delta}{1 - x\delta}\,.$$

Omezíme přechodně obecnost svých úvah předpokladem, že souřadnice elementů, jichž míru hledáme, splňují podmínky

$$|y\delta| < 1, \quad |x\delta| < 1, \quad -1 < \delta(x-y)(1 + x\delta + x^2\delta^2 + \ldots) \gtrless 1,$$

abychom mohli rozvinouti v řady výrazy $\dfrac{1}{1 - x\delta}$ resp. log λ. Podmínky ty jsou potud omezením obecnosti, pokud předpokládáme δ libovolné, rozdílné od nuly. Za předpokladu, (který později skutečně učiníme) že $\delta \to 0$, jsou zmíněné podmínky splněny pro **každé** dva **obecně** položené elementy x, y.

Poslední zlomek vpravo můžeme rozvésti v řadu. Tak obdržíme

$$\lambda = \frac{1 - y\delta}{1 - x\delta} = (1 - y\delta)(1 + x\delta + x^2\delta^2 + \ldots),$$

nebo po úpravě

$$\lambda = 1 + \delta(x - y)[1 + x\delta + x^2\delta^2 + \ldots].$$

Pro výraz $\log(1 + \psi)$ platí však rozvoj

$$\log(1 + \psi) = \psi - \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{3} - \ldots, \qquad (-1 < \psi \leqq 1)$$

a tudíž

$$\log \lambda = \delta(x - y)[1 + x\delta + x^2\delta^2 + \ldots] -$$
$$- \frac{1}{2}\delta^2(x - y)^2[1 + x\delta + x^2\delta^2 + \ldots]^2 - \ldots,$$

nebo po úpravě

35) $$\log \lambda = \delta(x - y)[1 + \frac{\delta}{2!}(x + y) + \frac{\delta^2}{3!}(\ldots) + \ldots]$$

Nevypisujeme koeficientů u vyšších mocnin δ, neboť jich nebudeme potřebovati.

Míra dvou elementů hyperbolického útvaru je dána vzorcem $\mu = \frac{k}{2}\log\lambda$. Zvolme $k = \frac{2l}{\delta}$, kde l je libovolná, od nuly různá konstanta. Získáme tak z rovnice 35)

35') $$\mu(xy) = l(x - y)[1 + \frac{\delta}{2!}(x + y) + \frac{\delta^2}{3!}(\ldots) + \ldots].$$

Čím je δ menší, tím méně se liší μ od $l(x - y)$ za předpokladu, že ani x, ani y nesplývá s některým z bodů absolutních. Je-li konečně δ tak malé, že $\delta \to 0$, můžeme pro míru hyperbolického útvaru psáti

36) $$\lim_{\delta \to 0} \mu(xy) = l(x - y) = l\frac{[x_1 y_2]}{x_2 y_2}.$$

Ale když $\delta \to 0$, přechází hyperbolický útvar v útvar parabolický, v němž elementy ξ ξ' splývají. Je tedy nasnadě otázka, nemůžeme-li výraz μ při $\delta \to 0$ považovati za nekonečně málo odlišný od hledané míry parabolického útvaru. Aby tomu tak bylo, musela by $\lim_{\delta \to 0} \mu$

a) splňovati podmínky, kladené na míru, a

b) býti invariantem projektivních transformací, které reprodukují dva splývající body absolutní (a značí parabolický pohyb).

Ukážeme nejprve, že $\lim\limits_{\delta \to 0} \mu$ splňuje požadavek sub *a)*. Skutečně

$$\lim_{\delta\to 0}\mu(xy)+\lim_{\delta\to 0}\mu(yz)=l[(x-y)+(y-z)]=(x-z)\,l=\lim_{\delta\to 0}\mu(xz)$$

$$\lim_{\delta\to 0}\mu(xy)=l(x-y)=-\,l(y-x)=-\lim_{\delta\to 0}\mu(yx)\neq 0,\ (x\neq y)$$

$$\lim_{\delta\to 0}\mu(xx)=l(x-x)=0$$

Dokážeme nyní, že $\lim\limits_{\delta \to 0} \mu$ splňuje i požadavek sub *b)*. K tomu cíli přetvoříme poněkud vzorec 36) tím, že vhodně určíme konstantu l.

2. Volba konstanty l. Konstantu l určíme tak, že zvolíme dva libovolné elementy $j=j_1:j_2$, $p=p_1:p_2$, jimž přisoudíme míru 1, t. j.

$$1=l(j-p),$$

z čehož

36′) $$l=\frac{j_2p_2}{[p_2j_1]}.$$

Dosazením této hodnoty do rovnice 36) získáme

$$\lim_{\delta\to 0}\mu(xy)=\frac{[x_1y_2]\,p_2j_2}{[p_2j_1]\,x_2y_2}$$

nebo vzhledem k 34)

37) $$\lim_{\delta\to 0}\mu(xy)=\frac{[y_2x_1]\,[j_2\xi_1]\,[p_2\xi_1]}{[p_2j_1]\,[x_2\xi_1]\,[y_2\xi_1]}.$$

Tento výraz jest invariantem vzhledem k projektivní grupě a tím spíše tedy k její podgrupě, která určuje parabolický pohyb útvaru.[11]) Samozřejmě vyhovuje i podmínkám, odvozeným pro výraz 36).

[11]) Pro každý determinant tvaru $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ platí transformace až na konst. faktor

$$\begin{vmatrix} 'x_1 & 'y_1 \\ 'x_2 & 'y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1a_{11}+x_2a_{12} & y_1a_{11}+y_2a_{12} \\ x_1a_{21}+x_2a_{22} & y_1a_{21}+y_2a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Ve výraze 37) se determinanty $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ právě krátí. Je tedy rovnice 37) skutečně vzhledem k projektivní grupě transformací invariantní.

Skutečně tedy $\lim\limits_{\delta \to 0} \mu$ hoví podmínkám, kladeným na míru parabolického útvaru. Proto definitoricky zavedeme pojem míry parabolického útvaru větou:

Limitu míry hyperbolického útvaru, který se nekonečně málo liší od útvaru parabolického, nazveme měrou útvaru parabolického.

Pro tuto míru zavedeme opět označení μ. Je tedy míra parabolického útvaru dána vzorcem

37′) $$\boxed{\mu\,(xy) = \frac{[y_2\, x_1]\,[j_2\, \xi_1]\,[p_2\, \xi_1]}{[p_2\; j_1]\,[x_2\, \xi_1]\,[y_2\, \xi_1]}}$$

Jest samozřejmé, že v tomto výraze vyskytuje se jen jeden absolutní element, neboť podle předpokladu splývají oba v jeden. — Vzorec 36) upomíná na vzorec pro vzdálenost dvou bodů na přímce euklidovské. Není to výsledek překvapující. Vždyť euklidovský pohyb na přímce je také definován pomocí projektivní grupy transformací, které reprodukují jediný bod (t. zv. bod úběžný, nevlastní) dané přímky. Je zde tedy úplná analogie s pohybem parabolickým. Osvětlíme tuto analogii ještě tak, že určitým způsobem přetvoříme vzorec 37′).

3. Jiný tvar vzorce 37′). Ku přetvoření vzorce použijeme identity

$$[x_1\, y_2]\,[p_1\, \xi_2] = [x_1\, p_2]\,[y_1\, \xi_2] - [x_1\, \xi_2]\,[y_1\, p_2].$$

Dosazením této identity do vzorce 37′) obdržíme

$$\mu\,(xy) = \frac{[x_1\, p_2]\,[\xi_1\, j_2]}{[x_1\, \xi_2]\,[p_1\, j_2]} - \frac{[y_1\, p_2]\,[\xi_1\, j_2]}{[y_1\, \xi_2]\,[p_1\, j_2]}.$$

Tvar sčítanců na pravé straně této rovnice je nám znám. Jsou to výrazy pro dvojpoměry bodů $(p\,\xi\,x\,j)$, resp. $(p\,\xi\,y\,j)$. Podle toho můžeme tedy psáti

38) $$\mu\,(xy) = (p\,\xi\,x\,j) - (p\,\xi\,y\,j).$$

Tím jsme míru dvou elementů vyjádřili rozdílem dvou dvojpoměrů. Vhodnou volbou elementů j, p převedeme jej na jednodušší tvar. Je-li totiž p elementem počátečním ($p_1 = 0$, p_2), element j elementem jednotkovým ($j_1 : j_2 = 1$) a element absolutní o souřadnicích ξ_1, $\xi_2 = 0$, je

$$(p\xi xj) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 0 \\ x_2 p \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 1 \\ 0 1 \end{Vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 \xi_1 \\ x_2 0 \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 1 \\ p_2 1 \end{Vmatrix}} = \frac{+ x_1 p_2 \xi_1}{+ x_2 p_2 \xi_1} = \frac{x_1}{x_2}$$

a tudíž

$$\mu(xy) = + \frac{x_1}{x_2} - \frac{y_1}{y_2}.$$

Jde-li o přímku a je-li bod absolutní zobrazen na modelu euklidovském bodem nevlastním, můžeme $x = \frac{x_1}{x_2}$ a $y = \frac{y_1}{y_2}$ pokládati právě za euklidovské vzdálenosti od bodu počátečního. Pak je vzdálenost dvou bodů na euklidovském modelu i na parabolické přímce

$$\mu(xy) = + x - y.$$

Výslovně můžeme formulovati tento poznatek větou:

Zvolíme-li euklidovské zobrazení parabolické přímky tak, že absolutní bod parabolické přímky splývá s nevlastním bodem přímky euklidovské, pak parabolická přímka jest přímo přímkou euklidovskou.

K témuž výsledku museli bychom ovšem dospěti i jinou cestou. Mohli bychom totiž vyjíti od definice pohybu a ukázati, že v tomto zvláštním případě je pohyb parabolický shodný s euklidovským pohybem na přímce (s t. zv. *translací*). Doporučuji tento způsob píli čtenářově.[12]) — Z vývodů předcházejících jest zřejmo, že element absolutní parabolického útvaru je jeho elementem nevlastním. Dokážeme to však výslovně v odstavci následujícím.

4. *Elementy nevlastní.* Element nevlastní v parabolickém útvaru jest opět definován tím, že s libovolným jiným elementem téhož útvaru určuje míru nekonečně velkou. Dokážeme o něm věty:

Nevlastním elementem parabolického útvaru je jeho element absolutní.

Jen absolutní element parabolického útvaru je jeho elementem nevlastním.

---

[12]) Nejdříve se vyjádří, že bod absolutní ξ se reprodukuje transformací 1). Poté nutno bráti v úvahu, že vzdálenost bodů j, p je právě rovna jedné při každé transformaci.

Obě věty plynou ihned ze vzorce 37'). Dokážeme nejprve větu druhou. Má-li totiž míra dvou elementů býti větší než každé libovolné číslo, musí jmenovatel v 37') se rovnati nule. Ze tří determinantů tohoto jmenovatele může se anulovati buď $[\xi_1 x_2]$ nebo $[\xi_1 y_2]$. (Determinant $[p_1 j_2]$ se nemůže anulovati podle předpokladu, vyjádřeného rovnicí 36'). Anulováním jednoho z prvých dvou determinantů obdržíme

buď $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{x_1}{x_2} = x$, nebo $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{y_1}{y_2} = y$.

Z toho plyne, že buď element x nebo element y splývá s elementem ξ. Tím je dokázána druhá věta. — Důkaz prvé věty nečiní zvláštních potíží. Čitatel zlomku v 37') je vždy konečný, od nuly různý. Je tedy anulování jednoho z determinantů $[\xi_1\ x_2]$, $[\xi_1\ y_2]$ ve jmenovateli nejen nutnou, ale i postačující podmínkou, aby μ bylo nekonečně velké. Ale toto anulování nastane jen tenkráte, je-li $x = \xi$, neb $y = \xi$, jak jsme nahoře ukázali. Tak jsme dokázali i prvou větu.

Více se geometrií jednorozměrného útvaru zabývati nebudeme. Poznatků zde získaných upotřebíme v dalších kapitolách, kde budeme studovati útvary dvojrozměrné. Napřed však již upozorňuji, že se budeme zabývati pouze rovinou a nikoliv též (dvojmocným) svazkem rovin, daným bodem procházejících. Omezení to neděje se z důvodů teoretických, nýbrž jen z ohledu na čtenáře, kterému asi ve velké většině geometrie v rovině jest bližší než geometrie takového svazku. Ostatně je možno věty získané při jakési opatrnosti vždy přenésti na teorii tohoto svazku.