nechť přísluší čísla reálná c, a, b. Podle předešlého odst. jest

$$\frac{r}{s} : \frac{p}{q} = \frac{r}{s} \cdot \frac{q}{p} = c \cdot b.$$

Máme dokázati, že tento výsledek jest totožný s výrazem $c : a = c \cdot \frac{1}{a}$. Celkem tedy máme dokázati, že $c \cdot \frac{1}{a} = c \cdot b$, čili $1/a = b$.

Budiž

$$\frac{A_n}{10^n} \leqq \frac{p}{q} < \frac{A_n + 1}{10^n}, \quad \frac{B_n}{10^n} \leqq \frac{q}{p} < \frac{B_n + 1}{10^n},$$

a tedy

$$\frac{A_n B_n}{10^{2n}} \leqq 1 < \frac{A_n B_n + A_n + B_n + 1}{10^{2n}},$$

čili

$$0 \leqq 1 - \frac{A_n B_n}{10^{2n}} < \frac{A_n + B_n + 1}{10^{2n}} = \varepsilon_n.$$

Zvolím-li n dosti veliké, je ε_n menší než libovolně malé kladné číslo a tedy $\lim (A_n B_n / 10^{2n}) = \lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b = 1$, čili $b = 1/a$.

Čísla reálná splňují tedy všechny postuláty nutné k vybudování aritmetiky a jsou zároveň účelným rozšířením pojmu čísel racionálních.

Dodatek II.

FUNKCE GONIOMETRICKÉ.

60. Definice a nástin postupu. Užívali jsme při svých úvahách funkcí goniometrických $\sin x$, $\cos x$ atd., opírajíce se při tom o definice jejich, založené na geometrickém názoru. Protože jsme tohoto nepřesného způsobu definice nikde jinde neužili, jest nutno, abychom se oprostili i od tohoto zbytku závislosti na názoru.

Budeme postupovati takto. Funkce definované mocninými řadami, konvergentními pro každé reálné x

$$s(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$
$$c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \quad (1)$$

splňují čtyři základní vztahy

$$\text{I.} \qquad s(0) = 0, \quad c(0) = 1,$$

$$\text{II.} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{s(x)}{x} = 1,$$

$$\text{III.} \qquad s(-x) = -s(x), \quad c(-x) = c(x),$$

$$\text{IV.} \qquad s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x),$$
$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y).$$

Až provedeme důkaz, že tomu tak vskutku jest, dokážeme dále, že vztahům (I—IV) hoví pro každé reálné x *jenom* funkce (1) a *žádné* jiné. Protože pak víme, že vztahům (I—IV) hoví také geometricky definované funkce $\sin x$ a $\cos x$, prohlásíme vztahy (1) za aritmetickou definici základních funkcí goniometrických.

61. Vztahy (I—III) a derivace funkcí $s(x)$, $c(x)$. Řady pro $s(x)$ a $c(x)$ jsou absolutně konvergentní a splňují zřejmě vztahy I. a III. Mimo to jest

$$\frac{s(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots$$

a tedy podle věty o řadách se střídavými znaménky (odst. 14) pro $0 < |x| < 1$ jest jistě

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{s(x)}{x} < 1$$

a tedy $\lim\limits_{x \to 0} s(x) : x = 1$, což jest vztah II.

Dále dokážeme, že $s(x)$ i $c(x)$ mají pro každé reálné x derivaci a že tedy jsou všude spojité.

Protože všechny uvažované řady jsou absolutně konvergentní, jest (n značí liché číslo)

$$\frac{s(x+h) - s(x)}{h} - c(x) = \left(\frac{(x+h) - x}{h} - 1\right) - \frac{1}{3!}\left\{\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} - 3x^2\right\} + \frac{1}{5!}\left\{\frac{(x+h)^5 - x^5}{h} - 5x^4\right\} - \ldots \pm \frac{1}{n!}\left\{\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}\right\} \pm \ldots$$

Na obecný člen užijme věty o střední hodnotě

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n \,.\, \xi^{n-1}, \quad \xi = x + \Theta_1 h, \quad 0 < \Theta_1 < 1$$

a tedy znovu podle věty o střední hodnotě pro $n > 1$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} = n(\xi^{n-1} - x^{n-1}) = n(n-1)(\xi - x)\eta^{n-2},$$

$$= \Theta_1 h n (n-1) \cdot \eta^{n-2},$$

$$\eta = x + \Theta \cdot \Theta_1 h = x + \Theta_2 h, \qquad 0 < \Theta_2 < 1.$$

Z toho plyne, že

$$\left| \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} \right| < \Theta_1 |h| n (n-1) \cdot x_0^{n-2},$$

kdež x_0 jest *kladné* číslo volené tak, že $x_0 > |\eta|$, na př. $x_0 = |x| + 1$, když se omezíme na hodnoty $|h| < 1$. Jest tedy

$$\left| \frac{s(x+h) - s(x)}{h} - c(x) \right| < |h| \left\{ x_0 + \frac{x_0^3}{3!} + \frac{x_0^5}{5!} + \ldots \right\} < |h| \cdot e^{x_0},$$

čili

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = c(x), \quad \text{to jest} \quad s'(x) = c(x).$$

Způsobem zcela obdobným dokáže se $c'(x) = -s(x)$. Z toho plyne dále, že obě funkce mají všechny derivace a že jest

$$s''(x) = c'(x) = -s(x),\ s'''(x) = -s'(x) = -c(x),\ s^{IV}(x) = s(x), \ldots$$
$$c''(x) = -s'(x) = -c(x),\ c'''(x) = -c'(x) = s(x),\ c^{IV}(x) = c(x), \ldots$$

62. Adiční teorémy funkcí $s(x)$ **a** $c(x)$. Utvořme funkci složenou

$$\varphi(x) = \{c(a+x) - c(a)c(x) + s(a)s(x)\}^2 + \\ + \{s(a+x) - s(a)c(x) - s(x)c(a)\}^2,$$

kdež a jest libovolná reálná konstanta. Tato funkce má patrně všude derivaci a jest

$$\frac{1}{2}\varphi'(x) = \{c(a+x) - c(a)c(x) + s(a)s(x)\}\{-s(a+x) + c(a)s(x) + \\ s(a) \cdot c(x)\} + \{s(a+x) - s(a)c(x) - s(x)c(a)\}\{c(a+x) + \\ s(a)s(x) - c(a)c(x)\} = 0,$$

neboť první a čtvrtá závorka $\{\}$ jsou identické, kdežto druhá a třetí liší se pouze znamením! O funkci $\varphi(x)$ mohu tedy tvrditi $\varphi(x) \equiv 0$*) a tedy také, protože součet dvou čtverců reálných čísel může býti roven nule jen, když každé z obou

---

*) Jest totiž $\varphi(x) =$ konstantě. Avšak $\varphi(0) = 0$ a tedy konstanta ona jest rovna nule.

čísel jest rovno nule,

$$c(a+x)=c(a)c(x)-s(a)s(x),$$
$$s(a+x)=s(a)c(x)+s(x)c(a),$$

což jsou tak zv. součtové vzorce, čili adiční teorémy IV pro naše funkce. Z nich plynou následující vztahy, kterých v dalším upotřebíme:

$$s^2(x)+c^2(x)=1, \text{ když položíme } a=-x;$$

$$c(h)=c^2\left(\frac{h}{2}\right)-s^2\left(\frac{h}{2}\right), \text{ když položíme } a=x=\frac{h}{2}$$

a tedy

$$1-c(h)=2s^2\left(\frac{h}{2}\right).$$

První z těchto vztahů má za následek $|s(x)|\leq 1$, $|c(x)|\leq 1$.

63. Důkaz unicity. V předcházejících odstavcích provedli jsme prvou část důkazu, neboť jsme zjistili, že řady (1) hoví základním rovnicím (I—IV). Zbývá dokázati, že každé dvě funkce, na př. $f(x)$ a $g(x)$, které hoví vztahům (I—IV) pro každé reálné x a y, jsou identické s funkcemi $s(x)$ a $c(x)$. Učiňme tedy vskutku předpoklad, že dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$ hoví vztahům (I—IV) a nic jiného o těchto funkcích nepředpokládejme. Jest tedy $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x):x=1$ a klademe-li $f(x):x=\varphi(x)$, je $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=1$. Jest tedy $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to 0} x\,.\,\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\,.\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0\,.\,1=0$, čili $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. To znamená, že funkce $f(x)$ jest spojitá v bodě $x=0$. Ze vztahu $\lim\varphi(x)=1$ plyne mimo to, že lze nalézti okolí bodu $x=0$, na př. $0<|x|<\delta$, které má tu vlastnost, že v něm jest $\varphi(x)>0$ a tedy také $|f(x)|>0$.

Klaďeme-li v adičním teorému

$$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),\ x=y=h,$$

obdržíme $f(2h)=2f(h)g(h)$ a tedy, volím-li $0<h<\delta$, je

$$g(h)=\frac{f(2h)}{2f(h)}=\frac{f(2h)}{2h}:\frac{f(h)}{h}.$$

Z toho plyne

$$\lim_{h\to 0} g(h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)}{2h}:\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=1=g(0),$$

což značí, že $g(x)$ jest spojitá funkce v bodě 0. Z adičního teorému pro funkci $g(x)$ vyplývá dále podobně jako na konci předešlého odstavce

$$1 - g(h) = 2f^2\left(\frac{h}{2}\right) \text{ a tedy } \frac{1-g(h)}{h} = \frac{f\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot f\left(\frac{h}{2}\right),$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-g(h)}{h} = 1 \,.\, 0 = 0.$$

Nyní již můžeme dokázati, že funkce mají derivace. Podle adičního teorému pro $f(x+h)$ jest

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(h)}{h} \cdot g(x) - f(x)\,\frac{1-g(h)}{h} \text{ a tedy}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(x), \quad \text{čili} \quad f'(x) = g(x).$$

Podobně

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g(x)\,\frac{g(h)-1}{h} - f(x)\,.\,\frac{f(h)}{h}$$

a tedy

$$g'(x) = -f(x).$$

Z toho plyne dále docela stejně jako při funkcích $s(x)$ a $c(x)$

$$f''(x) = -f(x),\ f'''(x) = -g(x),\ f^{IV}(x) = f(x), \text{ atd.}$$
$$g''(x) = -g(x),\ g'''(x) = f(x),\ g^{IV}(x) = g(x), \text{ atd.}$$

Můžeme tedy užíti formule *Maclaurinovy* libovolného stupně pro kteroukoli z obou funkcí, čímž vypočteme, jako v odst. 37

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + R_n^{(1)},$$

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + R_n^{(2)}.$$

Zbytky mají pro každé x vlastnost $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(1)}(x) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(2)}(x) = 0$, což odůvodníme zcela stejně, jako v citovaném odstavci, když uvážíme, že $|f(x)| \leq 1$, $|g(x)| \leq 1$, jak plyne ze vztahu $f^2(x) + g^2(x) = 1$. Jest tedy $f(x) = s(x)$, $g(x) = c(x)$ s. e. d. Rovnice (I—IV) mají za daných předpokladů jedno jediné řešení (1) a proto píšeme

$$\text{sinus } x = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\text{cosinus } x = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

64. Funkce sin x a cos x jsou periodické. Spojitá funkce $\cos x$ má hodnotu kladnou pro $x=0$ a zápornou pro $x=2$, neboť

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1-\frac{2^2}{3\,.\,4}\right) - \frac{2^6}{6!}\left(1-\frac{2^2}{7\,.\,8}\right) - \dots$$

a tedy

$$\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1-\frac{2^2}{3\,.\,4}\right) = -\frac{1}{3}\,.$$

Proto musí míti rovnice $\cos\xi = 0$ aspoň jeden kořen $0 < \xi < 2$. Tento kořen jest jediný, neboť, kdyby dvě čísla splňovala vztahy $0 < \xi < \xi_1 < 2$, $\cos\xi = 0$, $\cos\xi_1 = 0$, bylo by podle věty *Rolle-ovy* možno nalézti číslo třetí η tak, že by bylo $(\cos\eta)' = -\sin\eta = 0$, $0 < \xi < \eta < \xi_1 < 2$. Avšak pro takové η výraz

$$\sin\eta = \frac{\eta}{1!}\left(1-\frac{\eta^2}{2\,.\,3}\right) + \frac{\eta^5}{5!}\left(1-\frac{\eta^2}{6\,.\,7}\right) + \dots$$

jest jistě kladný, neboť všichni sčítanci jsou čísla kladná. Rovnice $\cos\xi = 0$ má tedy v intervalu $(0, 2)$ jediný kořen, který označíme $\frac{\pi}{2}$. Podle předešlého jest jednak $\sin\frac{\pi}{2} > 0$, jednak $\sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = 1$ a tedy $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Z adičních teorémů plyne dále

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \qquad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$$

$$\sin(x+\pi) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$$

$$\cos(x+\pi) = -\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x,$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x, \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x.$$

Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou tedy periodické s periodou 2π. Ostatní funkce goniometrické definují se pak vztahy $tg\, x = \sin x : \cos x$, $\operatorname{cotg} x = \cos x : \sin x$, $\sec x = 1 : \cos x$, $\operatorname{cosec} x = 1 : \sin x$. Pro tyto přesně definované funkce platí všechny vzorce známé z goniometrie, jak čtenář se sám přesvědčí.