Dodatek I.

NÁSTIN TEORIE ČÍSEL REÁLNÝCH.

55. Spořádanost čísel reálných a věty o limitě. Nebude zde podána do všech podrobností vypracovaná teorie čísel reálných. V tom ohledu odkazuji na př. na knihu Loewyho nebo Perronovu, které jsou citovány v odst. prvém. Zde doplníme pouze důkazy, že čísla reálná, jak jsme je definovali v odst. prvém a druhém, splňují tytéž postuláty (A, B, C, D, E), jako čísla racionální.

Své úvahy navážeme na odst. první a druhý až po definici limity včetně. Čtenář učiní dobře, když si tuto část znovu přečte. Čísla reálná tedy splňují postuláty spořádanosti (A) a definice limity založená pouze na těchto postulátech (tedy nikoliv na odčítání čísel) zní: Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ má limitu a to jednu jedinou, jen když v ní eksistují totožné nebo téměř totožné úseky definitivní každého řádu. Limita ta jest reálné číslo určené definitivními úseky. Z této definice plynou ihned věty:

I. Jestliže jest $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, *jest* $\lim (-a_n) = -a$.

II. Jestliže jest $\lim a_n = a$ *a je-li* $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k \dots$ *libovolná posloupnost celistvých kladných čísel, jest* $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = a$. *Stručně říkáme, že posloupnost vybraná z členů posloupnosti konvergentní má tutéž limitu.*

Obě tyto věty jsou pouhé důsledky definice. Dokážeme ještě další dvě věty o limitách, které s předešlými tvoří základ všech úvah dalších.

III. Jestliže dvě posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \dots; b_1, b_2, b_3 \dots$ *mají členy o konečném počtu cifer a jestliže jest* $\lim a_n = a$, $\lim (b_n - a_n) = 0$, *pak i druhá posloupnost jest konvergentní a jest* $\lim b_n = a$. *Také obráceně, je-li* $\lim a_n = \lim b_n$, *jest* $\lim (b_n - a_n) = 0$.

IV. Každá posloupnost monotoní a ohraničená má limitu.

Při důkazu věty III nesmíme se odvolati na odst. 4, větu d, neboť tam jsme užívali již sčítání a odčítání čísel *reálných,* které zde chceme teprve definovati, a to právě na základě věty III. Proto musíme provésti důkaz nový, opřený pouze o počítání čísly s konečným počtem cifer (a tedy racionálních) a o definici limity.

Definitivní úseky posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ všech řádů mohou býti od nějakého indeksu počínaje buď *totožné* nebo jen téměř totožné. Důkaz rozdělíme na čtyři případy, týkající se prvé možnosti a na případ pátý, týkající se možnosti druhé.

Případ 1. Definitivní úseky posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ nechť jsou totožné a od jistého řádu počínaje končí samými devítkami. (Na př. $35{\cdot}69 = a_7^2 = a_8^2 = a_9^2 = \ldots, 35{\cdot}699 = a_{11}^3 = a_{12}^3 = a_{13}^3 = \ldots, 35{\cdot}6999 = a_{20}^4 = a_{21}^4 = a_{22}^4 = \ldots$ atd. Při tom značíme symbolem a_n^k úsek řádu k-tého *čísla* a_n). Zvolme řád k tak veliký, že definitivní úseky toho řádu končí již devítkou pro všechna n větší než nějaké číslo $N(k)$. Toto číslo $N(k)$ volme tak veliké, aby bylo pro taková n zároveň $b_n - a_n = \varepsilon_n < 10^{-k}$. Potom obsahují také čísla a_n na k-tém desetinném místě devítku a číslo $b_n = a_n + \varepsilon_n$ má zřejmě úsek řádu $(k-1)$-ho buď $b_n^{k-1} = a_n^{k-1}$ nebo $b_n^{k-1} = a_n^{k-1} + 10^{-k+1}$ pro $n > N(k)$. Posloupnost $b_1, b_2 \ldots$ má tedy definitivní úseky totožné nebo téměř totožné jako posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ Jest tedy $\lim b_n = a$.

Případ 2. Definitivní úseky posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ nechť jsou totožné a končí od určitého řádu samými nulami. Zcela stejným postupem, jako v případě 1. vyjde zde $b_n^{k-1} = a_n^{k-1}$ nebo $b_n^{k-1} = a_n^{k-1} - 10^{-k+1}$, a tedy opět $\lim b_n = a$.

Případ 3. Mezi definitivními úseky posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ nechť jest nekonečný počet čísel končících cifrou jinou než 9 nebo 0. Budiž na př. a_n^k takový úsek pro $n > N(k)$. Pak také příslušná čísla a_n mají na k-tém místě onu cifru různou od 9 a 0. Je-li mimo to $N(k)$ tak voleno, aby $\varepsilon_n < 10^{-k}$ pro $n > N(k)$, shoduje se číslo $b_n = a_n + \varepsilon_n$ s a_n v úseku řádu $(k-1)$-ho, to jest $b_n^{k-1} = a_n^{k-1}$ pro $n > N(k)$. Protože k mohu voliti libovolně veliké, má posloupnost $b_1, b_2, \ldots$ tytéž definitivní úseky všech řádů jako posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ a tedy jest $\lim b_n = a$.

Případ 4. Definitivní úseky posloupnosti $a_1, a_2, \ldots$ nechť od určitého řádu počínaje končí buď devítkou nebo nulou a to tak, že po každé devítce (třeba několikrát opakované) objeví se opět nula a po každé nule zase devítka. (Na př. $3{\cdot}40 = a_6^2 = a_7^2 = \ldots; 3{\cdot}409 = a_{10}^3 = a_{11}^3 = a_{12}^3 = \ldots; 3{\cdot}4099 = a_{15}^4 = a_{16}^4 = a_{17}^4 = \ldots; 3{\cdot}40990 = a_{21}^5 = a_{22}^5 = a_{23}^5 = \ldots$) Vybéřeme definitivní úsek a_n^k končící *devítkami* a to tak, že cifra na místě $K < k$ jest nula a cifry na místech $K+1$,

$K+2, \ldots k$ jsou *devítky*. Zvolíme $N(k)$ tak veliké, že jednak $\varepsilon_n < 10^{-k}$ a za druhé a_n^k jest definitivní pro $n > N(k)$. Pak čísla a_n mají až po řád k-tý týž ciferný obraz jako a_n^k a čísla $b_n = a_n + \varepsilon_n$ mají nutně vlastnost $b_n^{K-1} = a_n^{K-1}$. Protože K lze zvoliti libovolně veliké, jest opět $\lim b_n = a$.

Případ 5. Nechť má posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ úseky jen téměř totožné (a tedy její limita a jest číslo s periodou 9 od určitého řádu počínaje). Vybéřeme mezi členy posloupnosti ty, jimž přísluší definitivní úseky končící samými devítkami. Tato vybraná posloupnost jest typu projednaného v případě 1. Zbývající členy jsou pak typu 2. Jest tedy opět $\lim b_n = a$

Pět probraných případů vyčerpává všechny možnosti a tedy věta III jest dokázána, neboť její obrácení jest samozřejmé.

Při důkazu věty IV nemůžeme zase v celém rozsahu odvolati se na odst. 5, a to z důvodů již vytčených. Z důkazů tam uvedených převezmeme beze změny jen větu: Každá shora ohraničená posloupnost čísel kladných a neklesajících má limitu. To můžeme udělati, protože důkaz ten jest tam proveden pouze pomocí spořádanosti čísel reálných (to jest pojmů »větší než« a »menší než«) a pomocí definice limity. Důkaz platí také tenkráte, když několik počátečních členů posloupnosti jest záporných a další nezáporné. Zcela stejně provede se důkaz, že posloupnost čísel kladných nestoupajících a zdola ohraničených má limitu. Celý rozdíl proti předešlému jest pouze ten, že místo úseků přibývajících vystoupí úseky ubývající. Mějme dále posloupnost čísel neklesajících vesměs záporných a shora ohraničených. Posloupnost čísel k nim souměrných je tedy nestoupající vesměs kladná a zdola ohraničená; má tedy limitu. Podle věty I má tedy limitu také posloupnost původní. Podobně dokážeme, že také posloupnost čísel záporných nestoupajících a zdola ohraničených má limitu, neboť čísla s opačnými znaménky tvoří posloupnost čísel kladných neklesajících a shora ohraničených. Konečně jest zřejmo, že posloupnost monotoní nemůže míti současně nekonečně mnoho členů záporných i kladných. Kdyby tomu tak bylo, musily by *všechny* členy jednoho znaménka v pořadí předcházeti členům s druhým znamením a tedy indeksy všech těchto členů by musily býti větší než libovolné číslo, což není možné. Věta IV jest tedy dokázána.

Po této přípravě můžeme přikročiti k teorii základních početních úkonů.

56. Sčítání a odčítání čísel reálných. Reálná čísla a, b nechť mají úseky $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots$; $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n \ldots$ Definujme zvětšené úseky vztahem $a_n^+ = a_n + 2 \,.\, 10^{-n}$, $b_n^+ = b_n + + 2 \,.\, 10^{-n}$. Ať číslo a jest kladné, záporné nebo nula, vždy posloupnost $a_1^+, a_2^+, a_3^+, \ldots$ jest stále klesající a zdola ohraničená, neboť $a_{n+1}^+ - a_n^+ = (a_{n+1} - a_n) - 2 \,.\, (10^{-n} - 10^{-n-1}) = (a_{n+1} - a_n) - 18 \,.\, 10^{-n-1}$. Je-li a kladné, jest $(a_{n+1} - a_n) \leq \leq 9 \,.\, 10^{-n-1}$, je-li a záporné, jest dokonce $(a_{n+1} - a_n) \leqq 0$; vždy jest tedy $(a_{n+1}^+ - a_n^+) < 0$, čili posloupnost jest klesající. Jest také zdola ohraničená, neboť $a_n^+ > a_n > a_0 - 1$. Její limita podle věty III. jest rovna a.

Utvořme posloupnost $s_1 = a_1^+ + b_1^+$, $s_2 = a_2^+ + b_2^+$, $s_3 = a_3^+ + + b_3^+, \ldots$ která podle předešlého jest klesající a zdola ohraničená. Podle věty IV má tedy určitou limitu s. Posloupnost $(a_1 + b_1), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3), \ldots$ má pak touž limitu s, neboť $(a_n^+ + b_n^+) - (a_n + b_n) = 4 \,.\, 10^{-n}$, což odpovídá podmínkám věty III.

Definice sčítání:

Součet dvou reálných čísel a, b jest limita s posloupnosti $(a_1 + b_1), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3), \ldots$ Píšeme $s = a + b$.

Při této definici platí zákon *komutativní*, neboť $\lim (a_n + + b_n) = \lim (b_n + a_n)$ a tedy $a + b = b + a$.

Zákon *asociativní* jest rovněž splněn. Jsou-li totiž a, b, c reálná čísla, jest $a + (b + c) = (a + b) + c$, jak plyne z této úvahy. Označme $b + c = d$. Podle definice sčítání jest $a + d = \lim (a_n^+ + d_n^+)$. Dále posloupnost $(a_n^+ + b_n^+ + c_n^+)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jest klesající zdola ohraničená a má tedy limitu, která podle věty III jest rovna $a + d$, neboť $\lim \{(a_n^+ + b_n^+ + c_n^+) - (a_n^+ + + d_n^+)\} = \lim (b_n^+ + c_n^+ - d_n^+) = 0$. Stejným postupem dokážeme při označení $a + b = e$, že také posloupnosti $(a_n^+ + b_n^+ + c_n^+)$ a $(e_n^+ + c_n^+)$ mají identickou limitu a tedy i posloupnosti $(a_n^+ + + d_n^+)$ a $(e_n^+ + c_n^+)$ mají touž limitu, s. e. d.

Číslo nula $+ 0{\cdot}000 \ldots = - 0{\cdot}000 \ldots$ jest *neutrální element* při sčítání, neboť $a + 0 = a$. Žádné jiné číslo nemá této vlastnosti, neboť obsahuje-li číslo b aspoň jednu cifru od nuly různou, změní se v definitivních cifrách součtu $(a + b)$ aspoň jedna cifra v porovnání s a.

Rovnice $a + x = 0$ má řešení $x = (-a)$ a toto řešení jest jediné. Neboť je-li b nějaké řešení rovnice, to jest $a + b = 0$, pak také $(-a) + (a + b) = (-a) + 0$. Podle postulátů (V) a (VI) jest tedy $((-a) + a) + b = -a$, čili $0 + b = -a$ a tedy $b = -a$.

Odčítání dvou čísel reálných definujeme vztahem $(a - b) = a + (-b)$.

Zákon monotonie (VII) jest rovněž splněn, neboť z nerovnosti $a > b$ plyne $a - b = \varepsilon > 0$, a tedy, je-li c reálné číslo $(a + c) - (b + c) = \varepsilon$, čili $(a + c) > (b + c)$.

Všechny postuláty skupiny B jsou tedy pro čísla reálná splněny.

57. Násobení čísel reálných. Z úseků n-tého řádu a_n a b_n dvou reálných čísel a a b utvořme násobením posloupnost $a_n b_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Tato posloupnost jest při stejných znameních čísel a a b neklesající, při různých znameních nestoupající a v obou případech ohraničená; má tedy vždy limitu.

Definice násobení. Součin dvou reálných čísel a, b jest limita s posloupnosti $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots$ Píšeme $s = ab$.

Zákon komutativní jest splněn, protože $a_n b_n = b_n a_n$ a tedy také $\lim a_n b_n = \lim b_n a_n$. Zákon asociativní $a(bc) = (ab)c$ se dokáže obdobně jako při sčítání. Označíme $bc = d$, $ab = e$. Posloupnosti $a_n b_n c_n$ a $a_n d_n$ mají obě limitu, posloupnost rozdílů $a_n b_n c_n - a_n d_n = a_n (b_n c_n - d_n)$ má limitu rovnou nule, jak vyplývá z úvahy, opřené o to, že $b_n c_n$ a d_n mají touž limitu. Číslo $|a_n|$ jest menší než $|a_0| + 1$ a to jest menší než nějaká mocnina desíti 10^r. Dále jest podle věty III pro všechna n větší než nějaké $N(k)$: $|b_n c_n - d_n| < 10^{-k-r}$, ať k jest jakkoli zvolené kladné číslo celistvé. Celkem jest tedy číslo o konečném počtu cifer $|a_n (b_n c_n - d_n)| < 10^{-k}$ pro $n > N(k)$ a tedy $\lim a_n (b_n c_n - d_n) = 0$. Podle věty III jest tedy $\lim a_n b_n c_n = a d$. Podobně dokážeme, že také $\lim a_n b_n c_n = ec$ a tedy $ad = ec$, q. e. d. Zákon distributivní $a(b + c) = ab + ac$ dokážeme takto. Označme $b + c = d$, $ab = e$, $ac = g$. Posloupnosti $a_n d_n$ a $a_n b_n + a_n c_n$ mají touž limitu, neboť $\lim \{a_n d_n - (a_n b_n + a_n c_n)\} = \lim a_n \{d_n - (b_n + c_n)\} = 0$. Jest tedy $ad = \lim (a_n b_n + a_n c_n)$. Dále jest podle definice sčítání $e + g = \lim (e_n + g_n)$. Avšak $\lim \{a_n b_n + a_n c_n - (e_n + g_n)\} = \lim \{(a_n b_n - e_n) + (a_n c_n - g_n)\} = 0$*) a tedy podle věty III $e + g = ad$ s. e. d.

---

*) Pro libovolné k a pro $n > N(k)$ bude $|a_n b_n - e_n| < 10^{-k}$, $|a_n c_n - g_n| < 10^{-k}$, a tedy, protože se jedná o čísla s konečným počtem cifer, $|(a_n b_n - e_n) + (a_n c_n - g_n)| < 2 . 10^{-k}$.

Celkem jsme dokázali platnost postulátů skupiny C označených čísly IX, X, XI, XV. Abychom mohli dokázati i zbývající, musíme napřed definovati vztah mezi čísly racionálními a reálnými.

58. Čísla racionální a reálná. Ke každému racionálnímu číslu kladnému p/q přiřadíme určité číslo reálné takto. Zvolíme-li libovolné celistvé kladné n, lze vždy určiti celistvé kladné A_n tak, že jest $A_n/10^n \leq p/q < (A_n + 1)/10^n$. Číslo racionální $10^n p/q$ jest totiž obsaženo mezi dvěma za sebou jdoucími kladnými čísly celistvými A_n a $(A_n + 1)$, takže $A_n \leq$ $\leq 10^n p/q < (A_n + 1)$, z čehož dělením 10^n plyne hledaná nerovnina. Číslo A_n vypočteme tím, že zjistíme, kolikrát až na kladný (nebo nulový) zbytek menší než q jest číslo q obsaženo v čísle $10^n p$. To provedeme podle obyčejných pravidel pro dělení čísel celých. Z toho vyplývá okamžitě, že číslo A_{n+1} vznikne z čísla A_n tím, že k tomuto připojíme napravo další cifru. Desetinná čísla $A_1 : 10$, $A_2 : 10^2$, $A_3 : 10^3 \ldots$ tvoří tedy úseky nějakého *reálného* čísla a, které budeme považovati za *rovné* číslu racionálnímu p/q. Při výpočtu čísla A_{n+1} závisí patrně poslední cifra jeho na velikosti zbytku při dělení $10^n p : q$, na velikosti čísla q a na ničem jiném. Protože pak zbytků menších než q jest pouze q na počet — totiž $0, 1, 2, 3, \ldots q - 1$ — nastane při výpočtu čísel $A_1, A_2, A_3, \ldots$ jedna ze dvou možností. Buď po určitém počtu kroků dojdeme ke zbytku 0 a pak reálné číslo a má jen konečný počet cifer od nuly různých. Nebo zbytek 0 se nikdy nevyskytne a potom ovšem jeden ze zbytků *první* musí se objeviti při pokračujícím dělení *po druhé*. Z toho plyne, že v tomto případě číslo reálné a rovné číslu racionálnímu p/q jest buď ryze periodické nebo periodické s předčíslím (na př. $234 : 999 = 0{\cdot}\dot{2}3\dot{4}$ nebo $55 : 30 = 1{\cdot}8\dot{3}$). Obráceně také každé reálné číslo s periodou jest rovno číslu racionálnímu; neboť jestliže reálné číslo a má předčíslí o k cifrách (za desetinnou tečkou) a periodu o n cifrách, pak rozdíl $a \,.\, 10^{n+k} - a \,.\, 10^k = B$ jest číslo celistvé, kteréžto rovnici pro a hoví číslo racionální $B : 10^k(10^n - 1)$; a to, jak snadno nahlédneme, jest rovné s reálným číslem a. Podobně se definuje rovnost racionálních čísel záporných a příslušných čísel reálných.

Z rovnosti mezi čísly racionálními a určitými reálnými, kterou jsme právě definovali, plyne, že každý výpočet, vztahující se k číslům racionálním, lze provésti dvojím způsobem:

Buď podle obyčejných pravidel pro čísla racionální, nebo tak, že je nahradíme nejdříve příslušnými čísly reálnými a pak použijeme pravidel pro tato čísla platných. Jenom v tom případě, že výsledek při obou způsobech počtu je totožný, lze tvrditi, že čísla reálná tvoří účelné rozšíření pojmu čísel racionálních. Totožnost obou výsledků bude zaručena, jestliže dokážeme, že součet, součin a podíl dvou kladných čísel racionálních jest roven součtu, součinu a podílu příslušných čísel reálných, neboť každý jiný výpočet lze redukovati na úkony vytčené.

Nechť jsou $p_1 : q_1$ a $p_2 : q_2$ dvě racionální čísla, k nimž přísluší čísla reálná a, b. Celistvá čísla A_n, B_n, C_n, D_{2n}, definovaná vztahy

$$\frac{A_n}{10^n} \leq \frac{p_1}{q_1} < \frac{A_n+1}{10^n}, \quad \frac{B_n}{10^n} \leq \frac{p_2}{q_2} < \frac{B_n+1}{10^n},$$

$$\frac{C_n}{10^n} \leq \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} < \frac{C_n+1}{10^n}, \quad \frac{D_{2n}}{10^{2n}} \leq \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} < \frac{D_{2n}+1}{10^{2n}},$$

jsou jednoznačně stanovena, je-li n známo. Z prvých dvou vztahů plyne

$$\frac{A_n+B_n}{10^n} \leq \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} < \frac{A_n+B_n+2}{10^n}$$

a tedy vzhledem k třetímu vztahu C_n jest rovno buď (A_n+B_n) nebo (A_n+B_n+1). Protože posloupnosti $(A_n+B_n):10^n$ a $(A_n+B_n+1):10^n$ mají touž limitu $(a+b)$, má touž limitu také posloupnost $C_n:10^n$. To znamená: Reálné číslo příslušné k součtu dvou čísel racionálních jest rovno součtu reálných čísel příslušných k jednotlivým racionálním sčítancům. Z toho plyne mimo jiné, že také postuláty (A) jsou zachovány, neboť nerovnost $p_1 : q_1 > p_2 : q_2$ jest provázena nerovností $a > b$.

Analogické relace obdržíme i pro součin čísel racionálních a k nim příslušných čísel reálných, neboť

$$\frac{A_n B_n}{10^{2n}} \leq \frac{p_1 q_1}{p_2 q_2} < \frac{A_n B_n + A_n + B_n + 1}{10^{2n}}$$

a tedy

$$A_n B_n \leq D_{2n} < A_n B_n + A_n + B_n + 1.$$

Protože

$$A_n B_n : 10^{2n} \quad \text{a} \quad (A_n B_n + A_n + B_n + 1) : 10^{2n}$$

mají touž limitu $a \, . \, b$, má touž limitu i posloupnost $D_{2n} : 10^{2n}$.

Důkaz pro dělení číslem racionálním a příslušným reálným provedeme až v odstavci příštím.

59. Dělení číslem reálným. Nyní již můžeme dokázati, že rovnice $a \cdot x = 1$ má reálný kořen, jestliže a jest číslo reálné, od nuly různé. Úseky jeho $a_1, a_2, a_3 \ldots$ jsou čísla racionální. Je-li mezi nimi několik prvních rovno nule, vypusťme je z úvahy a značme tedy symbolem a_1 první, od nuly různý úsek. Utvořme posloupnost převratných hodnot $1 : a_1$, $1 : a_2$, $1 : a_3, \ldots$ Jsou to opět čísla racionální, kterým podle předešlého jsou rovna určitá čísla reálná buď periodická nebo o konečném počtu cifer. Tato posloupnost má limitu, neboť při kladném a jest nestoupající, při záporném a jest neklesající a v obou případech ohraničená. Tuto limitu nazveme b a tvrdíme, že jest $a \cdot b = 1$. Posloupnost reálných čísel $1 : a_1$, $1 : a_2, \ldots$ má od určitého indeksu $n(k)$ počínaje úseky řádu k-tého totožné anebo téměř totožné s úsekem téhož řádu při čísle b. Jest tedy

$$\left|\frac{1}{a_n} - b_n\right| < \frac{2}{10^k} \text{ a z toho } |1 - a_n b_n| < 2 \cdot 10^{-k} \cdot |a_n|.$$

Pravá strana nerovnosti může býti učiněna menší než libovolně malé číslo kladné vhodnou volbou čísla k. Podle věty III mají tedy posloupnosti $1, 1, 1, \ldots$ a $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots$ totožnou limitu, to jest $\lim a_n b_n = ab = 1$. Podle analogie čísel racionálních píšeme $b = 1/a$. Toto číslo jest jediným řešením rovnice $a \cdot x = 1$, neboť z ní plyne $ax \cdot b = 1 \cdot b$, $(ab)x = b$, $1 \cdot x = b$.

Dělení $a : b = a/b$ definujeme jako součin $a \cdot 1/b$.

Podle definice násobení číslo 1 vyhovuje rovnici $a \cdot 1 = a$, ať již je volíme ve tvaru $1 = 1{\cdot}\dot{0}$ či ve tvaru ekvivalentním $1 = 0{\cdot}\dot{9}$. Jest to jediné číslo té vlastnosti, neboť, když x hoví rovnici $a \cdot x = a$, jest také $ax \cdot \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a}$ a tedy $x = 1$, pokud ovšem $a \neq 0$.

Je-li $a > b$, $c > 0$, jest $a - b = e$, $e > 0$ a tedy $a \cdot c = (b + e) \cdot c = b \cdot c + e \cdot c > b \cdot c$.

Postulát Archimedův jest rovněž splněn, neboť a jest menší než celistvé číslo $(a_0 + 2)$.

Postuláty XII, XIII, XIV a XVI ze skupiny C a E jsou tedy splněny.

Zbývá doplniti důkaz z odstavce předešlého, že při dělení číslem racionálním vyjde týž výsledek jako při dělení jeho reálným ekvivalentem. K racionálním číslům $r : s$, $p : q$, $q : p$

nechť příslušejí čísla reálná c, a, b. Podle předešlého odst. jest

$$\frac{r}{s} : \frac{p}{q} = \frac{r}{s} \cdot \frac{q}{p} = c \cdot b.$$

Máme dokázati, že tento výsledek jest totožný s výrazem $c : a = c \cdot \frac{1}{a}$. Celkem tedy máme dokázati, že $c \cdot \frac{1}{a} = c \cdot b$, čili $1/a = b$.

Budiž

$$\frac{A_n}{10^n} \leqq \frac{p}{q} < \frac{A_n + 1}{10^n}, \quad \frac{B_n}{10^n} \leqq \frac{q}{p} < \frac{B_n + 1}{10^n},$$

a tedy

$$\frac{A_n B_n}{10^{2n}} \leqq 1 < \frac{A_n B_n + A_n + B_n + 1}{10^{2n}},$$

čili

$$0 \leqq 1 - \frac{A_n B_n}{10^{2n}} < \frac{A_n + B_n + 1}{10^{2n}} = \varepsilon_n.$$

Zvolím-li n dosti veliké, je ε_n menší než libovolně malé kladné číslo a tedy $\lim (A_n B_n / 10^{2n}) = \lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b = 1$, čili $b = 1/a$.

Čísla reálná splňují tedy všechny postuláty nutné k vybudování aritmetiky a jsou zároveň účelným rozšířením pojmu čísel racionálních.

Dodatek II.

FUNKCE GONIOMETRICKÉ.

60. Definice a nástin postupu. Užívali jsme při svých úvahách funkcí goniometrických $\sin x$, $\cos x$ atd., opírajíce se při tom o definice jejich, založené na geometrickém názoru. Protože jsme tohoto nepřesného způsobu definice nikde jinde neužili, jest nutno, abychom se oprostili i od tohoto zbytku závislosti na názoru.

Budeme postupovati takto. Funkce definované mocninými řadami, konvergentními pro každé reálné x

$$s(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$
$$c(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (1)$$