Úvod do počtu diferenciálního

Vyšší derivace a jejich užití

In: Miloš Kössler (author): Úvod do počtu diferenciálního. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1926. pp. 89–107.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402712

Kapitola VI.

VYŠŠÍ DERIVACE A JEJICH UŽITÍ.

36. Definice vyšších derivací a diferenciálů. Nechť funkce $y = f(x)$ má v nějakém intervalu derivaci $y' = f'(x)$. Často se stává, že tato nová funkce má opět derivaci; tu pak označujeme $y'' = f''(x)$ anebo také D^2y a nazýváme ji *druhá derivace funkce* $f(x)$. Právě tak *třetí* derivace $y''' = f'''(x)$ jest derivace druhé derivace atd. Obecně n-tá derivace $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = D^n y$ jest derivace $(n$-$1)$-vé derivace.

Pomocí derivací sestrojujeme vyšší diferenciály. V prvém diferenciálu $dy = f'(x) \,.\, dx$ jest dx libovolné číslo. Volme je pevně a měňme x. Bude se měniti $f'(x)$ a tedy i dy. Jest tedy dy funkcí veličiny x. Utvořme diferenciál této nové funkce

$$d(dy) = d(f'(x) \,.\, dx) = d(f'(x)) \,.\, dx,$$

to jest

$$d(dy) = (f''(x) \,.\, d_1x) \,.\, dx.$$

Znakem d_1x rozumíme opět *libovolné* číslo, které tedy může býti různé od dx. Jest však již od doby Leibnicovy zvykem voliti $d_1x = dx$. Pak dostaneme *druhý diferenciál* funkce $y = f(x)$

$$d(dy) = f''(x) \,.\, (dx)^2.$$

Místo toho píše se bez závorek

$$d^2y = f''(x) \,.\, dx^2$$

a tedy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

Druhý diferenciální kvocient jest roven *druhé derivaci.* Podobně utvoří se další diferenciály a diferenciální kvocienty

$$d^3y = f'''(x) \,.\, dx^3, \quad \text{obecně} \quad d^ny = f^{(n)}(x) \,.\, dx^n,$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x), \quad \text{obecně} \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x),$$

ovšem za předpokladu, že vyšší derivace existují.

Příklady.

$$y = x^n, \quad y' = nx^{n-1}, \quad y'' = n(n-1)\,x^{n-2} \ldots\ldots$$

$$y^{(k)} = n(n-1)\,(n-2) \ldots\ldots (n-k+1)\,x^{n-k}.$$

Z toho jest patrno, že pro n celistvé a kladné n-tá derivace jest rovna konstantě $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n = n!$ a všechny vyšší derivace jsou rovny nule. Pro n jiného druhu má x^n všechny derivace od nuly různé.

$y = e^x$, $y' = e^x$, ... $y^{(n)} = e^x$.

$y = \sin x$, $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{IV} = \sin x$ atd.

Obecné formule pro vyšší derivace jsou zpravidla velmi komplikované. Jednoduchý jest vzorec pro n-tou derivaci součinu dvou funkcí (vzorec Leibnicův). Jest totiž

$$D(u \, . \, v) = u'v + uv', \quad D^2(u \, . \, v) = u''v + 2u'v' + uv'' \text{ atd.}$$

$$D^n(u \, . \, v) = u^{(n)} v + A_1 u^{(n-1)} . \, v' + A_2 u^{(n-2)} . \, v'' + \cdots + u \, . \, v^{(n)}.$$

Konstanty $A_1, A_2, A_3 \ldots$ jsou nezávislé na tvaru funkcí u a v. Abychom je určili, volme $u = e^x$, $v = e^{\alpha x}$. Pak je $u^{(k)} = e^x$, $v^{(k)} = \alpha^k \, . \, e^{\alpha x}$, $(u \, . \, v) = e^{(\alpha+1)x}$ a tedy $D^n(u \, . \, v) = (1+\alpha)^n \, . \, e^{x(1+\alpha)}$.

Dosazením obdržíme

$$e^{(\alpha+1)x} \, . \, (1+\alpha)^n = e^{(\alpha+1)x} \, . \, \{1 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \ldots . + \alpha^n\}.$$

Rovnici krátíme činitelem $e^{(\alpha+1)x}$ a obdržíme na obou stranách rovnice mnohočleny v *proměnné* α, neboť α jest libovolné číslo. Koeficienty stejných mocnin α na obou stranách musí si býti rovny, neboť jinak by rovnice byla splněna pro nejvýše n hodnot α a tedy nikoliv pro *všechna* α.

$$A_1 = \binom{n}{1}, \quad A_2 = \binom{n}{2}, \quad \cdots A_k = \binom{n}{k} \cdots$$

Formuli výslednou jest možno si zapamatovati v *symbolickém* tvaru věty binomické

$$D^n(u \, . \, v) = (u+v)^n = u^n \, . \, v^0 + \binom{n}{1} u^{n-1} \, . \, v^1 + \cdots + u^0 \, . \, v^n,$$

kdež ovšem mocniny u^k, v^l nahradíme derivacemi $u^{(k)}$, $v^{(l)}$ a mocniny u^0, v^0 nahradíme funkcemi u, v.

Vyšší derivace *algebraické funkce implicitní* jest možno počítati stejným postupem, jako jsme počítali prvou derivaci v odst. 30. Uvedeme zde jen příklad, z něhož i obecný postup jest patrný:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + fy + g = 0.$$

Derivujme, pokládajíce y za funkci x, danou předešlou rovnicí:

$$2ax + 2by + 2bxy' + 2cyy' + d + f \, . \, y' = 0.$$

V této rovnici jsou y a y' opět funkce x, neboť y lze vypočísti z prvé rovnice a pak y' z druhé rovnice. Lze tedy derivovati dále

$$2a+2by'+2by'+2bxy''+2cy'y'+2cyy''+fy''=0.$$

Z této rovnice vypočteme y'' jako funkci x, y a y' a tedy jako funkci x. Tak lze pokračovati.

Geometrický význam vyšších derivací jest mnohostranný a tvoří obsah diferenciální geometrie, která nemůže býti pojata do této malé knížky. Nepatrná zmínka o tomto významu učiněna bude v odst. 38 a 39.

Fysikální (kinematický) význam druhé derivace jest spojen s pojmem urychlení. Jestliže hmotný bod pohybuje se tak, že jeho okamžitá rychlost v čase t jest rovna $v(t)$, pak průměrný přírůstek rychlosti mezi časovými okamžiky t a $t+\Delta t$ jest patrně

$$\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

To jest tak zv. *průměrné* (střední) *urychlení.* Limita tohoto urychlení, když $\Delta t \to 0$, nazývá se, jestliže ovšem existuje, *okamžité urychlení* v čase t a označuje se $a(t)$. Jest tedy

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$$

protože, jak víme, $v(t)=f'(t)=ds/dt$.

Cvičení.

$$D^n\, lx=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n},\quad D^n \sin x=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right),$$

$$D^n \cos x=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right),\quad D^n\frac{1}{1+x}=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

$$D^n\frac{1}{1-x}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\quad D^n\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left\{D^n\frac{1}{1+x}+D^n\frac{1}{1-x}\right\}.$$

37. Věta Taylorova a Maclaurinova. Mnohočlen $(n-1)$-vého stupně

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$$

má tu vlastnost, že $P(a+x)$ jest opět mnohočlen téhož stupně v x. Jak závisí koeficienty nového mnohočlenu na původním? To rozhodneme nejsnáze postupným derivováním. Položíme

$$P(a+x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}.$$

Pro $x=0$ obdržíme první koeficient $A_0=P(a)$. Derivujeme obě strany rovnice k-kráte za sebou podle x:

$$P^{(k)}(a+x)=A_k\,.\,k!\,.\,1+A_{k+1}(k+1)k(k-1)\ldots 2\,.\,x+\cdots$$

a položme $x=0$, čímž vyjde

$$A_k = P^k(a) : k!$$

Výsledek jest tedy*)

$$P(a+x) = P(a) + \frac{x}{1!} P'(a) + \frac{x^2}{2!} \cdot P''(a) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} P^{(n-1)}(a).$$

Dosaďme $(a+x) = b$ a tedy $x = b - a$.

$$P(b) = P(a) + \frac{b-a}{1!} P'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} P''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} P^{(n-1)}(a).$$

To jest *Taylorův* vzorec pro mnohočlen $(n-1)$-ho stupně. Připomeňme, že a jest zcela libovolné číslo.

Podobný vzorec lze odvoditi i pro obecnější funkce. Nechť $f(x)$ jest definováno v $< a, b >$ a má tam všechny derivace až po řád n-tý. Utvořme výraz podobný, jako při mnohočlenu, avšak místo a položme x, ležící v int. $< a, b >$. Dostaneme nějakou funkci x:

$$F(x) = f(x) + \frac{b-x}{1!} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$$

Patrně jest

$$F(b) - F(a) = f(b) - \{ f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \}.$$

Kdyby bylo $F(b) = F(a)$, dostali bychom týž výsledek jako při mnohočlenu, což ovšem při obecné funkci nemůže býti. Přes to však dospějeme k velmi užitečné formuli, jestliže se nám podaří rozdíl $F(b) - F(a)$ vyjádřiti v nějaké stručné formě. K tomu nám poslouží Cauchyova věta z odst. 34:

$$F(b) - F(a) = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \{\varphi(b) - \varphi(a)\}.$$

Abychom výraz ten vypočetli, určíme

$$F'(x) = f'(x) + \{ -f'(x) + \frac{b-x}{1} f''(x)\} + \{ -\frac{(b-x)}{1!} f''(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x)\} + \dots,$$

$$F'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x).$$

*) Volbou $P(x) = x^{n-1}$ obdržíme binomickou větu.

To dosadíme do Cauchyho formule a položíme ještě $b = a + h$, $\xi = a + \Theta h$, $0 < \Theta < 1$. Tak získáme nejčastěji užívaný tvar věty *Taylorovy n-tého stupně:*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

kdež

$$R_n = F(a+h) - F(a) =$$

$$= \frac{h^{n-1}(1-\Theta)^{n-1}}{(n-1!)} \cdot \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{\varphi'(a+\Theta h)} \cdot f^{(n)}(a + \Theta h).$$

Výraz R_n nazývá se *zbytek n-tého řádu.* Funkce $\varphi(x)$, v něm obsažená, jest libovolná, musí však vyhovovati podmínkám věty Cauchyovy.' Nejčastěji volívá se buď $\varphi(x) = (a + h - x)^n$ nebo $\varphi(x) = x$. Tak obdržíme tak zv. *Lagrange*-ův a *Cauchy*-ův tvar zbytku

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \Theta h), \qquad R_n = \frac{h^n (1-\Theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \Theta h).$$

V každém z těchto zbytků znak Θ zastupuje po případě jinou numerickou hodnotu.

Zvolíme-li speciálně $a = 0$, $h = x$, obdržíme tak zv. větu *Maclaurin*-ovu n-tého stupně

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\Theta x), \qquad R_n = \frac{x^n (1-\Theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\Theta x).$$

Podmínky její platnosti jsou patrně, aby $f(x)$ měla v nějakém okolí bodu $x = 0$ všechny derivace až po n-tou. Formule Maclaurinova a Taylorova jsou proto důležité, že nahražují funkci $f(x)$ funkcí mnohem jednodušší, totiž mnohočlenem, a zbytkem R_n. Zbytek ten zpravidla nedovedeme přesně vypočísti, protože neznáme přesnou velikost čísla Θ, ve zbytku taom obsaženého. Přes to bývá možno odhadnouti maksimum, které $|R_n|$ nemůže přestoupiti a tak zjistiti maksimální velikost chyby, které se dopouštíme, když funkci $f(x)$ nahradíme příslušným mnohočlenem. V následujících odstavcích ukážeme, jak se vzorce Taylorova užívá.

Cvičení. 1. Jaký tvar nabude věta Taylorova i její zbytky, když klademe $h = x - a$?

2. Proč nelze užíti věty Maclaurinovy na funkce $y = 1 : x$, $y = \lg x$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^{1-\alpha}$, $(\alpha > 0)$?

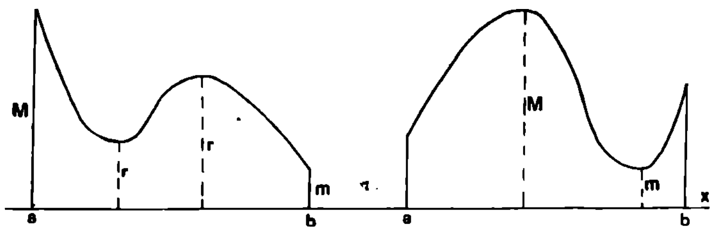
3. Jaká n smíme a jaká nesmíme voliti v Maclaurinově větě pro $y = x^{\frac{22}{3}}$. (Smíme voliti $n = 1, 2, 3, \ldots 7$.)

38. Maksima a minima funkcí. Funkce spojitá v $\langle a, b \rangle$ nabývá tam své maksimální i minimální hodnoty (odst. 21). Tomuto maksimu říkáme *absolutní*. Jinak jest definováno *relativní maksimum (minimum).*

Jestliže vnitřní bod ξ v $\langle a, b \rangle$ má tu vlastnost, že v nějakém jeho okolí jest

$$f(x) < f(\xi), \quad (f(x) > f(\xi)),$$

nazýváme $f(\xi)$ relativní maksimum (minimum).



Obr. 13a, b.

Společný název pro tyto dvě vlastnosti jest *relativní ekstrém.* Relativní ekstrém může splývati s absolutním, avšak nemusí, jak jest patrno z obr. 13 a, b. V dalším budeme pro stručnost užívati slov ekstrém, maksimum, minimum, vynechávajíce přívlastek relativní.

Učiňme o funkci $f(x)$ další předpoklad, že má v $\langle a, b \rangle$ derivaci. Z geometrického názoru soudíme, že, když $f(x)$ má v bodě ξ ekstrém, tečna jest tam rovnoběžna s osou x a že tedy $f'(\xi) = 0$. To jest ovšem pouhý dohad, který musíme dokázati.

Nechť v bodě ξ jest ekstrém. Derivace $f'(\xi)$ eksistuje a tvrdíme, že musí býti rovna nule. Kdyby byla od nuly různa, tedy by podle první věty odst. 32 v každém okolí bodu ξ nabývalo $f(x)$ hodnot jednak větších a jednak menších než $f(\xi)$ a tedy by tato hodnota nebyla ekstrémní.

Nutná podmínka pro ekstrém jest tedy $f'(\xi) = 0$.

Není to však postačující podmínka, jak patrno z příkladu $y = x^3$, v němž $y' = 3 \,.\, x^2$ má nulový bod $x = 0$, avšak $y = 0$

není ekstrém, neboť na levo od $x=0$ jest $y<0$ a na pravo $y>0$.

Abychom našli postačující podmínky, učiňme další předpoklad, že $f(x)$ má v $<a,b>$ nejen první, ale i další derivace. Užijme věty o střední hodnotě

$$f(\xi+h)-f(\xi)=h\,.\,f'(\xi+\Theta h)=h^2\,.\,\Theta\,\frac{f'(\xi+\Theta h)-f'(\xi)}{\Theta h},$$

neboť $f'(\xi)=0$. Když $h\to 0$, pak také $\Theta\,.\,h\to 0$ a zlomek na pravé straně má limitu $f''(\xi)$. Jestliže tato derivace jest od nuly různa, má pro dosti malá $|h|$ zlomek totéž znamení, jako $f''(\xi)$ a tedy znaménko celé pravé strany bude dáno znaménkem $f''(\xi)$. Z toho plyne, že $f(\xi)$ jest maksimum nebo minimum podle toho, zda $f''(\xi)$ jest záporné či kladné.

$f'(\xi)=0$, $f''(\xi)\neq 0$ *jsou postačující podmínky pro ekstrém.*

Stává se však, že $f''(\xi)=0$ (na př. u funkce $y=x^4$). Zde rozhodnou vyšší derivace. Předpokládejme hned obecněji, že nejen první a druhá, ale i několik dalších derivací jest rovno nule, to jest $f'(\xi)=0$, $f''(\xi)=0$, $f'''(\xi)=0,\ldots f^{(n-1}(\xi)=0$, avšak $f^{(n)}(\xi)\neq 0$. Užijme věty Taylorovy (n—1)-ho stupně.

$$f(\xi+h)-f(\xi)=\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n-1)}(\xi+\Theta h)=$$

$$\frac{h^n\,\Theta}{(n-1)!}\,.\,\frac{f^{(n-1)}(\xi+\Theta h)-f^{(n-1)}(\xi)}{\Theta\,.\,h}.$$

Druhý zlomek na pravé straně má limitu od nuly různou $f^{(n)}(\xi)$, když $h\to 0$. Pro dosti malá $|h|$ jest tedy znaménko tohoto zlomku identické se znamením $f^{(n)}(\xi)$. Má tedy rozdíl $f(\xi+h)-f(\xi)$ totéž znamení, jako součin $h^n\,.\,f^{(n)}(\xi)$. Toto znamení se *mění* se znamením h, je-li n liché (a tedy nenastává ekstrém) a nemění se znamením h, je-li n sudé (minimum pro plus, maksimum pro minus). Z toho plyne toto pravidlo:

Vypočteme kořeny rovnice $f'(x)=0$. Budiž ξ jeden z nich. Dosazujeme tento kořen postupně do vyšších a vyšších derivací $f(x)$ až dojdeme k té z nich, která prvá jest od nuly různa. Je-li tato derivace lichého stupně, není v bodě ξ ekstrém. Je-li stupeň ten sudý a derivace sama záporná, nastává maksimum, je-li kladná, minimum.

V případě liché derivace jest v bodě ξ *infleksní bod,* to jest křivka probíhá po jedné straně bodu ξ nad tečnou, po druhé straně pod tečnou.

Místo předešlého pravidla, které užívá vyšších derivací, lze užíti také jiného, které vystačí s prvou derivací.

Budiž $f'(\xi) = 0$. Jestliže nalevo od ξ, to jest v jistém int. $(\xi - \delta, \xi)$ má $f'(x)$ stále totéž znamení a napravo, to jest v $(\xi, \xi + \delta)$ stále opačné znamení, pak v bodě ξ jest ekstrém. Přechází-li při postupu z leva napravo $f'(x)$ z hodnot kladných k záporným, nastane maksimum, při opačných znameních nastane minimum. Jestliže na obou stranách má $f'(x)$ totéž znamení, nenastává ekstrém.

Funkce $f(x)$ totiž vzrůstá nebo ubývá podle znamení $f'(x)$. V prvém případě $f(x)$ nejdříve vzrůstá až do $f(\xi)$ a pak ubývá. V druhém nejdříve ubývá až k mezi $f(\xi)$ a pak vzrůstá. V třetím stále vzrůstá, nebo stále ubývá.

Rozdíl mezi prvým a druhým pravidlem jest ten, že v prvém vystačíme s hodnotami derivací v *jediném* bodě ξ. Ve druhém vystačíme s prvou derivací, avšak musíme znáti její hodnoty v nějakém okolí bodu ξ. V praxi většinou jest pohodlnější druhé pravidlo.

Ekstrémy mohou ovšem nastati i u funkcí, které nemají všude derivaci. Na př. $y = 1 + |x|$ má minimum v bodě $x = 0$.

Cvičení. 1. Vyšetřte ekstrémy funkce $y = (x - a)^m \, (x - b)^n$ pro m a n obě sudá, obě lichá, jedno sudé a jedno liché! Znázorněte graficky!

2. Pro která a mají funkce $y = ax - \sin x$, $ax - \cos x$, $ax - \operatorname{tg} x$ ekstrémy a jaké?

3. Nejmenší hodnota $a^2 \sec^2 x + b^2 \operatorname{cosec}^2 x$ jest $(a + b)^2$.

4. Součet přepony a odvěsny pravoúhlého trojúhelníka jest dán. Plocha jeho jest maksimální, když strany ty svírají 60^0!

5. Bodem o souřadnicích $[a, b]$ vedena jest přímka, která protíná osy OX a OY v bodech P a Q. Dokažte, že minima čísel $\overline{PQ}$, $\overline{OP} + \overline{OQ}$ a $\overline{OP} \,.\, \overline{OQ}$ jsou $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ a $4ab$.

6. Tečna elipsy protíná prodloužené osy její v bodech P a Q. Dokažte, že délka $\overline{PQ}$ nemůže klesnouti pod součet obou poloos!

7. Nalézti na dané přímce OX bod P tak, aby součet jeho vzdáleností ode dvou daných bodů A, B byl co nejmenší. ($\sphericalangle APX + \sphericalangle BPX = 180^0$.)

8. Ve kterých systémech logaritmických mohou býti nalezena čísla rovná svému logaritmu? (Rozdíl $f(x) = x - \log_a x$ musí se anulovati a tedy jeho minimum musí býti negativní nebo rovné nule. Z toho $a < e^{1/e}$).

9. Přímý kužel kruhový má krychlový obsah V. Který z těchto kuželů má nejmenší plášť, který nejmenší povrch?

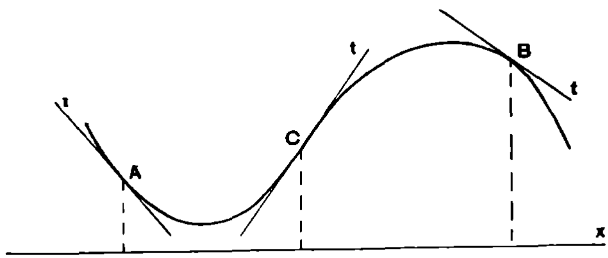
10. Má funkce $y = x \sin^2(\pi : x)$ pro $x \neq 0$, $y = 0$ pro $x = 0$ minimum v bodě $x = 0$? (Uvažte, že $y = 0$ pro $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ Jest to tak zv. *nevlastní* minimum.)

11. Funkce $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ má v bodě $x = 0$ minimum, ačkoli tam vymizí všechny derivace.

39. Poloha křivky vůči tečně. Pokládejme vztah $y = f(x)$ za rovnici křivky v souřadnicích pravoúhlých a předpokládejme existenci funkce a derivací v $< a, b >$. Tam volme bod vnitřní x a sestrojme v něm tečnu T ke křivce. Výraz

$$\varphi(h) = f(x+h) - f(x) - h \,.\, f'(x)$$

jest funkce proměnné h a představuje rozdíl mezi pořadnicí křivky v bodě $(x+h)$ a pořadnicí tečny t v témž bodě, jak čtenář še snadno přesvědčí (viz obr. 12). Jestliže $\varphi(h)$ jest kladné (záporné), pokud $0 < |h| < \delta$, říkáme, že křivka probíhá



Obr. 14.

nad (pod) tečnou, je-li v $(-\delta, 0)$ a v $(0, \delta)$ $\varphi(h)$ různého znamení, říkáme, že křivka má v bodě ξ infleksní bod (obr. 14, bod C). Křivce probíhající nad tečnou říká se *konveksní* v tom bodě, opak jest křivka *konkávní*. Případ kladného $\varphi(h)$ jest analogický relativnímu minimu, případ záporného $\varphi(h)$ maksimu. Docela stejně jako při ekstrémech dokáže se pravidlo:

Dosazujme $x = \xi$ postupně do $f''(x)$, $f'''(x)$, atd., až dojdeme k té derivaci, která prvá jest od nuly různá. Je-li tato derivace lichého stupně, nastává inflekse. Je-li stupeň ten sudý a derivace sama záporná, probíhá křivka pod tečnou (jest konkávní), je-li derivace kladná, probíhá křivka nad tečnou (jest konveksní) v bodě ξ.

Cvičení. 1. Nechť v bodě ξ jest $f''(\xi) = 0$. Rozhodněte o jakosti bodu ξ podle toho, jaké znamení má $f''(x)$ nalevo a napravo od bodu ξ. Co nastane, je-li $f''(x) = 0$ v nějakém okolí bodu ξ? ($y = f(x)$ jest v okolí tom přímkou.)

2. Dokažte, že kuželosečky nemají infleksních bodů! [Užijte rovnice vrcholové $y^2 - 2px + qx^2 = 0$ a počítejte druhou derivaci impli-

citní funkce algebraické, rovnicí tou definované pro $x \neq 0$. Pak položte $y'' = 0$ a odvoďte důsledky! Bod $x = 0$, $y = 0$ vyšetřte zvláště otočením os souřadných o 90°!]

3. Určete infleksní body křivek $y = \sin x$, $\operatorname{tg} x$, $(x-a)^n (x-b)^m$ a dokažte, že křivky $y = x \,.\, \sin x$, $y = \sin x/x$ mají nekonečně mnoho infleksních bodů!

4. Dokažte, že křivka $y = x : (x^2 + 2px + q)$ má buď jeden nebo tři reálné body inflexní. Jsou-li tři, dokažte, že leží na přímce! (Rovnice $x^3 - 3qx - 2pq = 0$ má buď jen jeden nebo tři reálné kořeny. Rovnici tu jest možno psáti ve tvaru $(x^2 + 2px + q).(x - 2p) + 4(q - p^2)x = 0$, čili $(x - 2p) + 4(q - p^2) \,.\, y = 0$).

40. Řada Taylorova a Maclaurinova. Jestliže funkce $f(x)$ má v int. $\langle a - \delta, a + \delta \rangle$ všechny derivace, můžeme pro ni napsati Taylorovu větu libovolně vysokého stupně n

$$f(a+h) = \left\{ f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \right\} + R_n.$$

Označme závorku na pravé straně S_n a učiňme předpoklad $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$. Potom je $f(a+h) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ aneb, užijeme-li způsobu psaní, který jsme zavedli při nekonečných řadách

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

Jiný tvar tohoto vzorce obdržíme, píšeme-li $(a + h) = x$

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

Oba tyto vzorce jsou různé tvary *nekonečné řady Taylorovy.*

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci řady Taylorovy k součtu $f(a+h)$ jest tedy $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

Klademe-li $a = 0$, obdržíme z druhého tvaru řadu Maclaurinovu

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots,$$

která konverguje, když $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

Příklady. Funkce exponenciální $f(x) = e^x$ má derivaci k-tou $f^{(k)}(x) = e^x$ a tedy $f^{(k)}(0) = 1$. Užijeme-li zbytku Lagrange-ova,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\vartheta x}, \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

Abychom odhadli zbytek, spojme ve výrazu $n!$ první faktor s posledním, druhý s předposledním atd. (pro $n > 2$)

$$n! = 1 \,.\, n \,.\, 2 \,.\, (n-1) \,.\, 3 \,.\, (n-2) \ldots$$

Při sudém n obdržíme $n/2$ dvojic tvaru

$$(k+1)\,.\,(n-k) \geqq n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \left(\frac{n}{2} - 1\right),$$

při lichém n pak $(n-1)/2$ takových dvojic a člen poslední $(n+1)/2 > \sqrt{n}$. Jest tedy vždy $n! > n^{\frac{n}{2}}$ a proto

$$e^{\vartheta x} \,.\, \frac{x^n}{n!} < e^{\vartheta x} \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \to 0, \text{ když } n \to +\infty,$$

ať x jest jakékoli kladné nebo záporné číslo. Při numerickém výpočtu na př. $e^{4\cdot 5}$ užíváme té okolnosti, že známe $e = 2{\cdot}718281828459045 \ldots$ a tedy násobením vypočteme e^4, takže řady užijeme pouze k výpočtu $e^{0\cdot 5}$. Při tom bude zbytek $R_n < 1 : 2^{n-1} \,.\, n!$

Obecná funkce exponenciální a^x převede se na předešlý případ *)

$$a^x = e^{x la} = 1 + \frac{x\, la}{1!} + \frac{(x\, la)^2}{2!} + \ldots, R_n = a^{\vartheta x} \frac{(x\, la)^n}{n!}.$$

Užitím řady pro e^x odvodíme několik limitních vztahů často používaných. Při celistvém kladném n jest

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{1!}\, \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{2!}\, \frac{1}{x^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{x}{(n+1)!} + \ldots$$

Pravá strana jest tedy pro kladné x větší než $x : (n+1)!$ Vzrůstá-li x do plus nekonečna, vzrůstá pravá strana rovnice (a tedy i levá) do plus nekonečna, to jest

$$\frac{e^x}{x^n} \to \infty, \qquad \text{čili} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} x^n \,.\, e^{-x} = 0.$$

Proto se říká, že e^x vzrůstá rychleji než jakkoli vysoká mocnina čísla x. Tím jsou určeny ještě další důležité limity

$$\lim_{y \to \infty} \frac{l y}{y} = 0, \qquad \lim_{y \to +0} y \,.\, l y = 0,$$

které obdržíme z předešlé zavedením nové proměnné $x = l y$ po případě $x = l(1 : y)$, když $n = 1$. Podobně se dokáže

$$\lim_{x \to \infty} (l x : x^{\alpha}) = 0, \qquad \lim_{x \to +0} x^{\alpha} \,.\, l x = 0 \qquad \text{pokud } \alpha > 0.$$

---

*) Přirozený logaritmus čísla a značíme zde la.

Proto se říká, že logaritmus vzrůstá pomaleji než libovolně vysoká odmocnina čísla x.

Funkce $f(x) = \sin x$ má k-tou derivaci $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ a tedy $f^{(k)}(0)$ jest rovno nule pro sudé k a $(-1)^{\frac{k-1}{2}}$ pro liché k.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} +$$
$$+ (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} \cos \Theta x.$$

Podobně $f(x) = \cos x$ má k-tou derivaci $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ a tedy

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} +$$
$$+ (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cos \Theta x.$$

Zbytky v obou těchto řadách mají limitu 0, když $k \to \infty$ z téhož důvodu, jako při e^x. Při numerickém počítání jest nutno pamatovati na to, že x musí býti vyjádřeno v míře *obloukové* $1^0 \equiv \pi/180 = 0{\cdot}017453\ldots$ protože jsme užívali vztahu $(\sin x)' = \cos x$.

Na těchto řadách založena jest přesná definice funkcí goniometrických. (Dodatek II.)

41. Výpočet logaritmů. Funkce $y = lx$ nemá v bodě $x = 0$ derivací a proto nelze ji rozvinouti v řadu Maclaurinovu. Za to funkce $y = l(1 + x)$ má v bodě tom všechny derivace

$$y^{(k)} = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

a tedy

$$l(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} +$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \cdot \frac{1}{(1+\Theta x)^n}.$$

Pro kladná x v mezích $\langle 0, 1 \rangle$ jest

$$0 \leq \frac{x}{1+\Theta x} < 1 \quad \text{a proto} \quad |R_n| < \frac{1}{n}, \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Řada tedy konverguje jistě pro $0 \leqq x \leqq 1$. Formule se zbytkem platí ovšem také pro $x > 1$. Nekonečná řada však v tom případě diverguje, neboť prosté hodnoty členů vzrůstají od jistého n počínaje. Pro záporná x zbytek Lagrange-ův jest neužitečný. Za to vede k výsledku zbytek Cauchyův ($x > 0$)

$$l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{n-1}}{n-1} - x^n \frac{(1-\Theta)^{n-1}}{(1-\Theta x)^n}$$

Pro $x < 1$ jest $\frac{1-\Theta}{1-\Theta x} < 1$ a tedy $|R_n| < \frac{x^n}{1-x} \to 0$, když $n \to \infty$.

Pro $x \geqq 1$ to ovšem už neplatí. Kriterium d'Alembertovo, když $x > 1$, prozrazuje divergenci řady. Pro $x = 1$ pak obdržíme divergentní řadu harmonickou. Výsledek jest tedy následující:

Řada $l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ *konverguje pokud* $-1 < x \leqq 1$, a jen pro tato x.

Pro numerický výpočet řada tato hodí se jen při malých x, kdežto při větších x užíváme různých řad odvozených. Tak na př. odečtením řad pro $l(1+x)$ a $l(1-x)$ dostaneme

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{2k-1}\right\} +$$

$$+ \frac{2x^{2k+1}}{2k+1}\left\{1 + x^2\frac{2k+1}{2k+3} + x^4\frac{2k+1}{2k+5} + \ldots\right\} \tag{1}$$

Druhá závorka má součet menší než $1 + x^2 + x^4 \ldots = 1 : (1 - x^2)$ a tedy zbytek jest menší než $2x^{2k+1} : (2k+1) . (1-x^2)$. Tak na př. pro $(1+x) : (1-x) = 2$, čili pro $x = 1/3$ dostaneme při $k = 7$ zbytek menší než $1 : 2 . 10 . 3^{14} < 2 . 10^{-8}$. Přesně na 6 míst jest pak $l2 = 0{\cdot}693147\ldots$ Podobně pro $x = 1/9$ se vypočte $l5 = 2 . l2 + 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \ldots\right\} = 1{\cdot}6094379\ldots$

Řady lze užíti k výpočtu la, pokud $a > 1$, neboť substituce $(1+x) : (1-x) = a$ dává $x < 1$. Ještě výhodnější jest položiti $x = 1 : (2a+1)$, čili

$$l\frac{1+x}{1-x} = l\frac{a+1}{a} = 2\left\{\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{3 . (2a+1)^3} + \ldots\right\}$$

a tedy

$$l(a+1) = l\,a + 2\left\{\frac{1}{2a+1} + \ldots\right\}$$

kterýžto vzorec umožňuje postupný výpočet logaritmů všech celých čísel. Téhož cíle lze dosíci výpočtem logaritmů prvočísel, neboť pak logaritmy ostatních čísel vypočteme pouhým sčítáním. K tomu se hodí řada, kterou obdržíme z předešlé, klademe-li $a = z^2 - 1$

$$l\,z = \frac{1}{2}\,l\,(z+1) + \frac{1}{2}\,l\,(z-1) + \left\{\frac{1}{2z^2-1} + \frac{1}{3\,(2z^2-1)^3} + \dots\right\}.$$

Je-li z prvočíslo, jsou $(z+1)$ a $(z-1)$ rozložitelny v prvočísla menší. Tak na př.

$$l\,3 = \frac{3}{2}\,l\,2 + \left\{\frac{1}{17} + \frac{1}{3\,.\,17^3} + \dots\right\}.$$

K výpočtu *dekadických* logaritmů užíváme vztahu (odst. 25)

$$\log_{10} a = \frac{1}{l\,10}\,.\,l\,a = M\,.\,l\,a, \quad M = \frac{1}{l\,10} = 0{\cdot}43429\dots$$

Cvičení. 1. Dokažte, že pro $0 \leqq x < 1$ jest v rovnici (1) druhý sčítanec na pravé straně (R_k) omezen nerovninami

$$\frac{2\,x^{2k+1}}{(2\,k+1)\,(1-x^2)} > R_k > \frac{2\,x^{2k+1}}{(2\,k+1)\,(1-x^2)} - \frac{4\,x^{2k+3}}{(2k+1)\,(2k+3)\,(1-x^2)}\,.$$

2. Vypočtěte přesně na 8 míst $l2$, $l5$, $1:l10$. {0·6931 4718.. 1·6094 3791... 0·4342 9448...}

42. Řada binomická. Pro celistvá a kladná m platí binomická věta:

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1}\,.\,b + \dots + b^m\,.$$

Jestliže m není celistvé a kladné, věta ovšem neplatí. Můžeme však užíti Taylorovy věty na výraz $a^m \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m$, kdež položíme $b/a = x$. Tedy $f(x) \doteq (1+x)^m, f^{(k)}(x) = m(m-1)\dots \dots(m-k+1).\ (1+x)^{m-k}$..

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \dots + \binom{m}{n-1} x^{n-1} + R_n.$$

Lagrangeův a Cauchy-ův zbytek mají tvar

$$R_n = \frac{\binom{m}{n} x^n (1+\Theta x)^{m-n}.}{\binom{m}{n} n \,.\, x^n (1+\Theta x)^{m-1} \,.\, \left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta x}\right)^{n-1}.}$$

Ve výrazu pro $f^{(k)}(x)$ má poslední závorka záporný exponent pro $k > m$ a tedy Maclaurinova formule jest upotřebitelna jen v takovém intervalu, v němž není obsažen bod $x = -1$. Chceme-li tedy vyšetřiti okolí bodu $x = 0$, musíme předpokládati $x > -1$. Při vyšetřování zbytku uvažujme nejdříve případ $x > 0$. V Lagrangeově zbytku bude $(1 + \Theta x)^{m-n}$ pro záporné $m - n$, to jest, pro dosti veliká n, menší než jedna. Zbývá tedy vyšetřiti, jak se chová $\binom{m}{n} x^n$, když $n \to \infty$. To však jest právě $(n+1)$-vý člen řady binomické. Jestliže řada ta konverguje, pak $u_{n+1} \to 0$, když $n \to \infty$ a tedy také $R_n \to 0$. Kriterium Alembertovo praví $|u_{n+1} : u_n| = \left|\frac{m-n+1}{n} x\right| = \left|1 - \frac{m+1}{n}\right| x \to x$. Jestliže tedy $x < 1$, řada konverguje a zbytek má limitu rovnou nule. Pro $x > 1$ řada diverguje a nemá tedy význam.

Obraťme se k záporným hodnotám $x = -y$, $0 < y < 1$. Ve zbytku Cauchyově součin $(1 - \Theta y)^{m-1} \left(\frac{1-\Theta}{1-\Theta y}\right)^{n-1}$ jest shora ohraničený, když $n \to \infty$, neboť druhý faktor jest vždy menší než jedna a první faktor pro $m > 1$ jest menší než jedna a pro $m < 1$ jest faktor ten menší než $1 : (1-y)^{1-m}$, což nezávisí na n. Zbývá tedy vyšetřiti, jak se chová $\binom{m}{n} n y^n$, když $n \to \infty$. Označíme-li člen tento v_{n+1}, je $|v_{n+1} : v_n| = \left|\frac{m-n+1}{n}\right| . \frac{ny}{n-1}$. Výraz ten konverguje k y, když $n \to \infty$. Pro $y < 1$ jest tedy $R_n \to 0$ a řada binomická konverguje k součtu $(1-y)^m$. Výsledek celé úvahy shrneme do věty: *Řada binomická*

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \ldots$$

konverguje, když $-1 < x < 1$ *a* m *jest libovolná konstanta.*

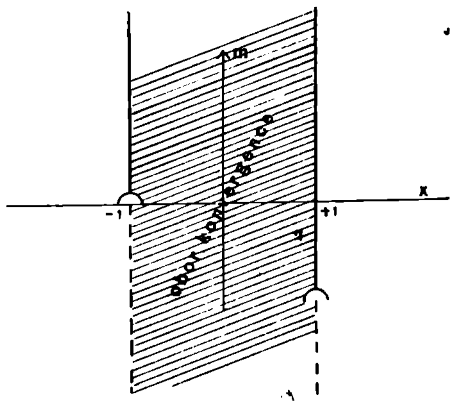
Poznámka. 1. Případy $x = 1$ a $x = -1$ vyžadují zvláštního vyšetřování. Lze dokázati, že řada zůstává platná pro $x = 1$, když $m > -1$, a pro $x = -1$, když $m > 0$.*)

*) Jako pomůcka paměti poslouží diagram 15.

Poznámka. 2. Napíšeme-li v binomické řadě $x = b/a$, kdež $a > 0$, $|b| < a$ a násobíme-li pak obě strany rovnice výrazem a^m, obdržíme řadu nekonečnou

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} . b + \binom{m}{2} a^{m-2} . b^2 + \ldots$$

43. Neurčité výrazy. Jestliže jest $f(a) = 0$, $g(a) = 0$, není výraz $y = f(x) : g(x)$ definován v bodě $x = a$. Místo toho říkáme také, že výraz ten jest v bodě $x = a$ *neurčitý*. Přes to však, jak již často jsme pozorovali, může eksistovati



Obr. 15.

$\lim\limits_{x \to a} (f(x) : g(x))$. Mají-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ v okolí bodu $x = a$ derivace, jest často možno pomocí derivací těch zmíněnou limitu vypočísti; tak na př., je-li $g'(a) \neq 0$, je

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{(f(a+h) - f(a)) : h}{(g(a+h) - g(a)) : h}$$

a tedy

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} .$$

Stává se však někdy, že také $f'(a) = 0$, $g'(a) = 0$, po případě i další některé derivace jsou rovny nule. Učiňme tedy předpoklad, že funkce mají derivace takových řádů, jaké právě potřebujeme, a že jest

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0, \dots\quad f^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$g'(a) = 0,\ g''(a) = 0, \dots\quad g^{(n-1)}(a) = 0,\ g^{(n)}(a) \neq 0.$$

Pak je podle Taylorovy formule n-tého stupně

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{h^n f^{(n)}(a+\Theta_1 h)}{h^n g^{(n)}(a+\Theta_2 h)}$$

a tedy učiníme-li předpoklad, že n-té derivace jsou spojité,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Tak na př. v neurčitém výrazu $\lim (x - \sin x) : x^3$ jsou prvé tři derivace jmenovatele $3x^2$, $6x$, 6, z nichž poslední jest od nuly různa. Z toho jest patrno, že také v čitateli vystačíme s třemi derivacemi $(1 - \cos x)$, $\sin x$, $\cos x$ a tedy hledaná limita jest $1/6$.

Pravidlo toto (první pravidlo *l'Hospitalovo)* selhává, jestliže prvá z derivací čitatele, která nevymizí v bodě a, jest stupně nižšího, nežli derivace stejné vlastnosti ve jmenovateli. Nelze ho užíti také v případě $x \to \infty$ a mimo to tenkráte, jestliže vyšší derivace neexistují. V případech těch často poslouží nám tak zv. druhé pravidlo *l'Hospitalovo:*

Jest $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *za předpokladu, že druhá limita eksistuje.*

Pravidlo to platí také, když místo $x \to a$ jest předepsáno $x \to a + 0$ nebo $x \to a - 0$, dále i v případě $x \to +\infty$ nebo $x \to -\infty$, jakož i tenkráte, když eksistují jen limity v širším smyslu ($+\infty$ nebo $-\infty$).

Důkaz plyne z Cauchy-ovy věty o střední hodnotě:

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f'(a+\Theta h)}{g'(a+\Theta h)}.$$

Když $h \to 0$, pak $\Theta \, . \, h \to 0$ a tedy

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

jestliže ovšem tato druhá limita eksistuje. Při tom však nutno pamatovati, že v určitém okolí bodu a (s výjimkou bodu a samotného) musí býti $g(x) \neq 0$ a že obě derivace musí tam eksistovati a nesmí se současně anulovati.

Je-li výraz $f'(a) : g'(a)$ opět neurčitý, můžeme, jsou-li opět příslušné podmínky splněny, pochod opakovati, to jest

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} \quad \text{atd. Na př.}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

Často se stává, že má býti určena limita, když $x \to +\infty$. Zavedeme-li novou proměnnou $y = 1/x$, převede se úloha na hledání limity pro $y \to +0$ a tedy

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to +0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \to +0} \frac{-\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Vrátíme-li se k původní proměnné $x = 1/y$, obdržíme

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Limity jiných tvarů $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 —, to jest, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, jestliže $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$; $\lim_{x \to a} f(x) . g(x)$, jestliže $f(x) \to 0$, $g(x) \to \infty$ atd. hledíme převésti na počítání limity $0/0$, anebo na některou jinou známou limitu, jako na př. $\lim_{x \to \infty} (x^a : e^x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} (lx : x^a) = 0$, $a > 0$.

Postup počtu objasníme jen na příkladech.

$$\frac{\infty}{\infty} : \lim_{x \to 0} \left(\operatorname{cotg} x : \frac{1}{x}\right) = \lim (x \cos x : \sin x) = 1,$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{l^4 (a + x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{l^4 (a + x)}{a + x} . \frac{a + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{l (a + x)}{(a + x)^{\frac{1}{4}}}\right)^4 . \lim_{x \to \infty} \frac{a + x}{x} = 0.$$

$$0 . \infty : \lim_{x \to 1} l\ (2 - x) . \operatorname{cotg} \pi x = \lim_{x \to 1} \frac{l (2 - x) . \cos \pi x}{\sin \pi x} = -\frac{1}{\pi}.$$

$$\infty - \infty : \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{cotg} x}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \frac{1}{3}.$$

Ostatní neurčité výrazy převádíme na předešlé identitou $\{f(x)\}^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\, l f(x)}$, užívajíce věty o spojité funkci

$$\lim e^{\varphi(x) l f(x)} = e^{\lim \varphi(x) l f(x)}.$$

$$0^0 : \lim_{x \to 0} x^x = \lim_{x \to 0} e^{x l x} = e^0 = 1.$$

$$1^\infty : \lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{l \cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\infty^0 : \lim_{x \to \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} e^{\frac{l(1+x)}{x}} = e^0 = 1.$$

Velmi jednoduše lze limity počítati, známe-li pro funkce uvažované Taylorovy řady, platné v okolí bodu $x = a$. Na př.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots}{x^3} = \frac{1}{3!}.$$

Poznámka. Funkce $F(x) = f(x) : g(x)$, jejíž limitu v bodě a jsme vyhledávali, byla vždy spojitá v okolí toho bodu, neboť měla tam derivace. V bodě a samotném není $F(x)$ definováno a tedy jest tam nespojité. Jestliže však eksistuje limita $\lim\limits_{x \to a} F(x) = A$ a přiřkneme-li funkci $F(x)$ v bodě a právě tuto hodnotu A, stane se tím $F(x)$ spojitou i v bodě a. Proto se říkává číslu A někdy *pravá hodnota* neurčitého výrazu.

Cvičení 1. $x \to 0 : \frac{\arcsin x}{x} \to 1, \frac{e^x - 1}{x} \to 1, \frac{a^x - 1}{x} \to la,$

$$\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \to \frac{1}{2}, \frac{\sin x - x \cos x}{x - \sin x} \to 2, \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} \to \frac{1}{3}, \frac{a^x - 1 - x la}{x^2} \to \frac{1}{2} l^2 a$$

$$2.\ x \to \frac{\pi}{4} : (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} \to e^{-1};\ x \to 0 : \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \to e^{-\frac{1}{6}}.$$

Kapitola VII.

FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH.

44. Základní pojmy. Funkce spojité. Funkce z dvou nezávisle proměnných x, y $z = f(x, y)$ jest definována, když dán jest předpis, jak k dvojici čísel $[x, y]$ se přiřadí číslo z. Ke grafickému znázornění užívá se obyčejně tří os v prostoru na