Úvod do počtu diferenciálního

Prvá derivace a diferenciál

Cvičení. Dokažte vztahy

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$,
$\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,cotg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,cotg} x$,

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,cotg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

(pokud $0 < x < 1$),
$\lim\limits_{x\to 0} (\arcsin x : x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{arc\,tg} x : x) = 1$.

Kapitola V.

PRVÁ DERIVACE A DIFERENCIÁL.

27. Definice derivace. Budiž dána funkce $y = f(x)$, definovaná v okolí bodu x. Zvětšíme-li x o kladné nebo záporné číslo $h = \Delta x$,*) zvětší se při tom $f(x)$ o kladné nebo záporné číslo $\Delta y = f(x+h) - f(x)$. Podíl

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

nazývá se podíl diferencí a závisí, jak patrno, na čísle x, na velikosti h a na tvaru funkce $f(x)$. Jestliže pokládáme $f(x)$ za pevně zvolenou funkci, *x za pevně zvolené číslo,* jest podíl ten funkcí jen proměnného čísla h. Jest tedy

$$\varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Tato funkce jest definována pro všechna h, pro která jest definováno $f(x+h)$ s výjimkou jediné hodnoty $h = 0$, neboť nulou nelze děliti. Přes to však, jak víme, může eksistovati $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h)$. Jestliže limita tato v daném případě eksistuje, nazýváme ji *derivace $f(x)$ v bodě x* a píšeme

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \varphi(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).}$$

Limita závisí na x a na tvaru funkce $f(x)$. Není ovšem již

*) Δx čteme »delta x«. Jest to diference (rozdíl) dvou hodnot $(x+h)$ a x. Někdy říkáme, že Δx jest přírůstek x, Δy přírůstek y. Δx není součin veličin Δ a x, nýbrž symbol, podobně jako $f(x)$.

závislá na h. Jest dobře si uvědomiti, co značí přesně předešlý limitní vztah:

Funkce $f(x)$ má v bodě x derivaci, jestliže eksistuje takové číslo $f'(x)$, že pro libovolně zvolené kladné ε jest

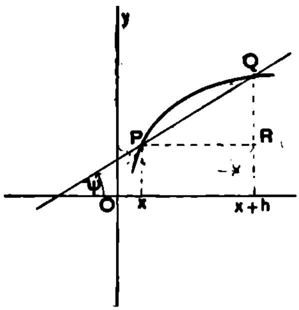
$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon,$$

když $0<|h|<\delta(\varepsilon)$.

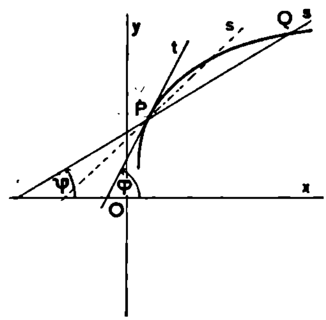
Vztah ten lze také psáti ve tvaru, který často upotřebíme,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\eta(h),$$

kdež $\lim\limits_{h\to 0}\eta(h)=0$.



Obr. 9a.



Obr. 9b.

Pojem derivace byl od Leibnize a Newtona definován na základě geometrickém a fysikálním. Vyložíme-li funkční vztah $y=f(x)$, jako rovnici křivky v pravoúhlých souřadnicích, pak

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

jest směrnice sečny s, to jest přímky, která prochází dvěma body křivky $P\equiv(x,\ y)$, $Q\equiv(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ (obr. 9*a*). Jestliže P trvá na svém místě (x se nemění) a bod Q se blíží po křivce bodu P (to jest $h\to 0$), potom $\operatorname{tg}\psi$ se mění. Může se státi a často se stává, že při tom $\operatorname{tg}\psi$ blíží se určité limitě, ať h blíží se nule *jakýmkoliv* způsobem. V tom případě také sečna blíží se jisté mezné poloze t. Tuto limitní polohu sečny nazýváme *tečna* (tangenta) *křivky v bodě P.* (Obr. 9*b*.) Její směrnice jest

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Ve fysice souvisí derivace s pojmem rychlosti.

Nechť bod M pohybuje se po přímce tak, že vzdálenost M od pevného bodu O na přímce jest známá funkce času. Značme čas t ve vteřinách, vzdálenost $\overline{OM} = s$ v centimetrech. Čtenář nechť si laskavě nakreslí příslušný obrazec. Pišme $s = f(t)$. Nechme uplynouti od okamžiku t další čas h sek. Bod M octne se v posici M_1, určené vztahem $\overline{OM_1} = f(t+h)$. Urazil tedy bod M v čase h vzdálenost $\overline{MM_1} = f(t+h) - f(t)$ a urazil průměrně za jednotku časovou vzdálenost

$$\varphi(h) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Podíl ten nazývá se *průměrná* (střední) *rychlost bodu M* v intervalu časovém $< t, t+h >$. Limita $\lim_{h \to 0} \varphi(h)$, jestliže ovšem vůbec eksistuje, nazývá se *okamžitá rychlost v čase t*, nebo v bodě M. Jest známo z fysiky, že touto rychlostí, už se neměnící, pohyboval by se hmotný bod M po přímce dále, kdyby v okamžiku t přestaly účinkovati všechny síly. Okamžitá rychlost jest tedy *definována* rovnicí

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t).$$

Příklad 1. Parabola má rovnici $y = a \cdot x^2$. Derivace v bodě x jest $\lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2ax + ah) = 2ax$. To jest tedy směrnice tečné.

Příklad 2. Harmonický pohyb na přímce dán jest rovnicí $s = \sin \omega \cdot t$ (t čas, ω konstanta). Okamžitá rychlost v čase t jest

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(\omega t + \omega h) - \sin \omega t}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin(\omega h/2) \cdot \cos(\omega t + \omega h/2)}{h}.$$

Označme $\omega h/2 = \xi$, kteréžto $\xi \to 0$, když $h \to 0$.

$$v(t) = \lim_{\xi \to 0} \omega \frac{\sin \xi \cos(\omega t + \xi)}{\xi} = \lim_{\xi \to 0} \left(\omega \cdot \frac{\sin \xi}{\xi}\right) \cdot \lim \cos(\omega t + \xi) =$$

$$= \omega \cdot \cos \omega t.$$

Eksistence derivace funkce a spojitost funkce jsou ve vztahu vyjádřeném větou:

Funkce $f(x)$, která má v bodě x_1 derivaci $f'(x_1)$, jest v tom bodě spojitá.

Podle definice derivace jest totiž

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}=f'(x_1)+\eta(h),\ \lim_{h\to 0}\eta(h)=0$$

a tedy $$f(x_1+h)=f(x_1)+h\,.\,f'(x_1)+h\,.\,\eta(h),$$

čili $$\lim_{h\to 0}f(x_1+h)=f(x_1).$$

Označím-li $x=x_1+h$, dostanu

$$\lim_{x\to x_1}f(x)=f(x_1),\quad \text{q. e. d.}$$

Spojitost v bodě x jest tedy nutná podmínka pro existenci derivace v bodě x. Není to však *postačující* podmínka, neboť na př. funkce $y=x\,.\sin(1:x)$ pro $x\neq 0$, $y=0$ pro $x=0$ jest všude spojitá. Přesto však v bodě $x=0$ nemá derivace, neboť

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h\sin(1:h)-0}{h}=\sin\frac{1}{h}$$

nemá limitu, když $h\to 0$ (osciluje v mezích -1, 1). Křivka spojitá $y=x\,.\sin(1:x)$ nemá tedy v bodě $x=0$, $y=0$, tečnu. B o l z a n o ukázal po prvé, že lze dokonce sestrojiti funkce (křivky) spojité v celém $\langle a, b\rangle$, které tam *nikde* nemají derivaci.*)

Cvičení. 1. Funkce $f(x)$ má derivaci z *prava* v bodě x, jestliže existuje limita z prava

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

Podobně se definuje derivace z *leva*. Dokažte věty: *a)* Má-li $f(x)$ derivaci $f'(x)$, pak má *tutéž* derivaci z *prava* i z *leva*. *b)* Má-li funkce touž hodnotu za derivaci z prava i z leva, má touž hodnotu za derivaci.

2. Funkce spojitá $y=|x|$ má v bodě $x=0$ derivaci z prava $+1$ a derivaci z leva -1. Nemá tam tedy derivaci.

28. Pravidla pro derivování. Vypočteme nyní derivace nejčastěji se vyskytujících funkcí a odvodíme některá všeobecná pravidla týkající se derivací.

---

*) Viz na př. Petr: P. d. str. 16f.

Derivace konstanty $y = c$ jest rovna nule, neboť $f(x) = c$, $f(x + h) = c$ a tedy $[f(x + h) - f(x)] : h = 0$, bez ohledu na číslo h.

Derivace mocniny $y = x^n$, *(n celistvé kladné) jest*

$$y' = (x^n)' = n \,.\, x^{n-1}.$$

K důkazu užijeme známého rozkladu

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$

v němž položíme $a = x + h$, $b = x$ a tedy po dělení číslem h

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = (x+h)^{n-1} + x \,.\, (x+h)^{n-2} + \cdots + x^{n-1}.$$

Když $h \to 0$, všechny sčítance pravé strany v počtu n mají limitu x^{n-1} a tedy

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n \,.\, x^{n-1}$$

Uvidíme později, že toto pravidlo platí pro každého mocnitele n (i lomeného nebo iracionálního, kladného i záporného).

Derivace funkce $y = \sin x$ *jest* $(\sin x)' = \cos x$, pokud x jest měřeno v míře obloukové.

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin h \cos x + \cos h \sin x - \sin x}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} -$$

$$- \sin x \frac{1 - \cos h}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \,.\, \sin(h/2) \cdot \frac{\sin(h/2)}{(h/2)}$$

a tedy protože $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ (viz odst. 17), $(\sin x)' = \cos x.$

Je-li úhel měřen v sekundách, jest derivace

$$(\sin x'')' = \cos x'' : (\pi : 648000).$$

neboť $\lim\limits_{h'' \to 0} (\sin h'' : h'') = \pi : 648000.$

Derivace funkce $y = \cos x$ *jest* $(\cos x)' = -\sin x.$

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{\cos x \,.\, (1 - \cos h)}{h} - \sin x \,.\, \frac{\sin h}{h} =$$

$$- \sin x \frac{\sin h}{h} - \cos x \sin(h/2) \frac{\sin(h/2)}{(h/2)} \quad \text{a tedy} \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Další výpočty usnadní nám některá obecná pravidla o derivacích. Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ dvě funkce mající derivace $f'(x)$

a $g'(x)$, pak platí $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$,

$$[f(x) \, . \, g(x)]' = f'(x) \, . \, g(x) + f(x) \, . \, g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \, . \, g(x) - f(x) \, . \, g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0.$$

Důkazy. Označme $F(x) = f(x) \pm g(x)$. Jest

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

a tedy, když $h \to 0$, $F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

Ve druhém vzorci klademe $F(x) = f(x) \, . \, g(x)$:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h) \, . \, g(x+h) - f(x) \, g(x+h) + f(x) \, g(x+h) - f(x) \, g(x)}{h}$$

$$g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad \text{a tedy, když } h \to 0$$

$$F'(x) = g(x) \, . \, f'(x) + f(x) \, . \, g'(x), \text{ neboť } g(x+h) \to g(x),$$

protože jest to spojitá funkce (má derivaci).

Označíme-li $f(x) = u$, $g(x) = v$, můžeme si pravidlo o derivaci součinu zapamatovati ve tvaru

$$(u \, . \, v)' = u' \, . \, v + u \, . \, v'.$$

Zvláště jest pro $g(x) = c$ (konstantě), $[c \, . \, f(x)]' = c \, . \, f'(x)$,

Při důkazu třetího vzorce klademe $F(x) = f(x) : g(x)$. Protože $g(x) \neq 0$ a jest spojité, jest pro dosti malé h také $g(x+h) \neq 0$.

$$\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{g(x) \, f(x+h) - f(x) \, g(x+h)}{g(x) \, . \, g(x+h) \, . \, h} =$$

$$= \frac{g(x) \, . \, f(x+h) - g(x) \, f(x) + g(x) \, f(x) - f(x) \, g(x+h)}{g(x) \, g(x+h) \, . \, h} =$$

$$= \frac{1}{g(x) \, . \, g(x+h)} \left\{ g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$$

a z toho, když $h \to 0$, hledaný výsledek, který si zapamatujeme ve tvaru

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \, . \, v - u \, . \, v'}{v^2}.$$

Zvláště jest pro $u = 1$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Příklady.

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \qquad y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}; \qquad y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$y = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \text{ (} n \text{ celistvé kladné); } y' = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}.$$

Platí tedy $(x^m)' = m x^{m-1}$ i pro *záporné celistvé m.*

Nechť $y = f(x)$ jest v $< a, b >$ spojitá a stále stoupající nebo klesající funkce, která má tam všude derivaci $f'(x)$. Její *inversní funkce* $x = \varphi(y)$ má pak, jak ihned dokážeme, také derivaci $\varphi'(y)$, o níž platí

$$\varphi'(y) = 1 : f'(x), \text{ pokud ovšem } f'(x) \neq 0.$$

Buďtež y, $y + k$ dvě různé hodnoty z int. $< f(a), f(b) >$. Příslušná čísla $x = \varphi(y)$, $x + h = \varphi(y + k)$ jsou pak také navzájem různá a při tom, když $k \to 0$, také $h \to 0$, což jest následek spojitosti. Dále jest $y = f(x)$, $y + k = f(x + h)$ a tedy

$$\frac{\varphi(y + k) - \varphi(y)}{k} = \frac{h}{f(x + h) - f(x)} = 1 : \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Když $k \to 0$, tedy také $h \to 0$. Pravá strana poslední rovnice má v tom případě limitu $1 : f'(x)$. Proto také levá strana má limitu a tedy

$$\varphi'(y) = 1 : f'(x).$$

Připojíme ihned důkaz dalšího vzorce pro *derivaci funkce složené* (viz odst. 20, cv. 2)

$$\{f(\varphi(x))\}' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Nechť $\varphi(x)$ a $f(u)$ mají derivace $\varphi'(x)$ a $f'(u)$ pro $u = \varphi(x)$. Jest tedy pro $k \neq 0$

$$\frac{f(u + k) - f(u)}{k} = f'(u) + \eta(k), \text{ kdež } \lim_{k \to a} \eta(k) = 0.$$

jinak psáno

$$f(u + k) - f(u) = k\{f'(u) + \eta(k)\}.$$

Tato rovnice platí i pro $k = 0$, když definujeme $\eta(0) = 0$. Při tom jest k libovolné číslo, omezené jen tím požadavkem, aby $f(u+k)$ bylo definováno. Zvolme nyní k speciálně

$$k=\varphi(x+h)-\varphi(x),\ u=\varphi(x),$$
$$f(\varphi(x+h))-f(\varphi(x))=\{\varphi(x+h)-\varphi(x)\}.\{f'(\varphi(x))+\eta(k)\}.$$

Při tom h jest voliti tak malé, aby všechny funkce měly význam. Jestliže obě strany poslední rovnice dělíme h a pak vyhledáme limitu pro $h \to 0$, obdržíme větu hledanou, neboť, když $h \to 0$, také $k \to 0$ a $\eta(k) \to 0$. Výsledný vzorec dá se snáze psáti i pamatovati ve tvaru

$$\{f(u)\}'=f'(u)\,.\,u',\qquad (u=\varphi(x)).$$

Derivace funkcí *cyklometrických* vypočteme podle věty o inversní funkci.

$$y=\arcsin x,\ x=\sin y,\ -1<x<1$$
$$(\arcsin x)'=1:\cos y=1:\sqrt{1-\sin^2 y}=1:\sqrt{1-x^2}.$$
$$y=\arccos x,\ x=\cos y,\ -1<x<1$$
$$(\arccos x)'=1:(-\sin y)=-1:\sqrt{1-x^2}.$$
$$y=\operatorname{arc\,tg} x,\ x=\operatorname{tg} y,$$
$$(\operatorname{arc\,tg} x)'=1:(1:\cos^2 y)=1:(1+\operatorname{tg}^2 y)=1:(1+x^2).$$
$$y=\operatorname{arc\,cotg} x,\ x=\operatorname{cotg} y,$$
$$(\operatorname{arc\,cotg} x)'=1:(-1:\sin^2 y)=-1:(1+x^2).$$

29. Derivace funkce eksponenciální a logaritmické. Budiž $y=e^x$. Derivace této funkce jest v bodě x

$$(e^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\,.\,\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}.$$

Limitu, která patrně nezávisí na x, vypočteme takto. Podle odst. 6, př. 2 jest

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

a tedy

$$\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}-1<\frac{1}{n-1},\qquad 1<\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}<\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n-1}.$$

Z toho plyne

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=1.$$

Je-li h libovolně malé kladné číslo, eksistuje vždy celistvé kladné m tak, že $m \leqq 1/h < m + 1$ a tedy vzhledem k tomu, že e^x jest vzrůstající funkce, $e^{\frac{1}{m+1}} < e^h \leqq e^{\frac{1}{m}}$ a tedy také $(e^{\frac{1}{m+1}} - 1) < (e^h - 1) \leqq (e^{\frac{1}{m}} - 1)$. Tuto nerovnost, obsahující samá kladná čísla, násobme předcházející nerovností pro $1/h$, čímž obdržíme

$$(e^{\frac{1}{m+1}} - 1)\, m < \frac{e^h - 1}{h} < (e^{\frac{1}{m}} - 1)(m+1),$$

$$\frac{e^{\frac{1}{m+1}} - 1}{1:(m+1)} \cdot \frac{m}{m+1} < \frac{e^h - 1}{h} < \frac{e^{\frac{1}{m}} - 1}{1:m} \cdot \frac{m+1}{m}.$$

Když $h \to +0$, pak $m \to +\infty$ a $\lim (m+1)/m = \lim m/(m+1) = 1$. Tedy $\lim\limits_{h\to+0} (e^h - 1):h = 1$. Dále jest $\lim\limits_{h\to-0} (e^h - 1):h = \lim\limits_{\delta\to+0} (e^{-\delta} - 1):(-\delta) = \lim\limits_{\delta\to+0} (e^\delta - 1):e^\delta\,.\,\delta = \lim\limits_{\delta\to+0} e^{-\delta}\,.\,\lim\limits_{\delta\to+0} (e^\delta - 1):\delta = 1$. Jest tedy celkem $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ a tedy $(e^x)' = e^x$.

Derivaci obecné funkce exponenciální $y = a^x$, $(a > 0)$, obdržíme ve vztahu $a^x = e^{\lg a \,.\, x}$ a tedy, klademe-li $x \,.\, \lg a = u$, je podle pravidla pro funkci složenou

$$(a^x)' = e^u \,.\, u' = e^{x \lg a} \,.\, \lg a = a^x \,.\, \lg a.$$

Derivaci funkce *logaritmické* obdržíme z identity platné pro *kladné* x

$$a^{\log_a x} = x, \text{ čili } x = a^y, \text{ kdež } y = \log_a x.$$

Jest tedy $(x)' = 1 = a^y \,.\, \lg a \,.\, y'$, čili

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{a^y \lg a} = \frac{1}{\lg a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Pro *záporné* x je podobně

$$a^{\log_a (-x)} = -x, \text{ čili } -x = a^y, \text{ kdež } y = \log_a (-x)$$

a tedy

$$(-x)' = -1 = a^y \,.\, \lg a \,.\, y',$$

čili

$$(\log_a (-x))' = \frac{-1}{\lg a \,.\, a^y} = \frac{1}{\lg a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Pro *jakékoli* od nuly různé *reálné* x jest tedy

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\lg a}.$$

Zvláště jednoduchá jest tedy derivace funkce logaritmické při základu e

$$(\lg |x|)' = \frac{1}{x}.$$

To jest jeden z důvodů, proč se logaritmům těmto říká »přirozené« a proč se jim v analysi dává pravidelně přednost před každou jinou soustavou logaritmickou.

Z derivace pro funkci exponenciální lze vypočísti derivaci obecné mocniny $y = x^n$ kdež n jest libovolné reálné číslo a $x > 0$. Jest totiž $y = e^{n \lg x}$ a tedy $y' = e^{n \lg x} \cdot n \cdot \frac{1}{x} = n \cdot x^{n-1}$.

Někdy bývá snazší vypočísti derivaci logaritmu nějaké funkce, nežli derivaci funkce samé. V tom případě užijeme tak zv. *logaritmické derivace,* to jest formule

$\{\lg f(x)\}' = f'(x) : f(x)$, a tedy označíme-li $y = f(x)$, $y' = y \cdot (\lg y)'$.

Příklad 1.

$$y = (x - a_1)^{p_1} (x - a_2)^{p_2} \ldots (x - a_n)^{p_n}, \quad x > \text{Maximum}\,(a_1, a_2, \ldots a_n)$$

$$\lg y = p_1 \cdot \lg (x - a_1) + p_2 \cdot \lg (x - a_2) + \ldots + p_n \cdot \lg (x - a_n)$$

$$y' = y \cdot \left\{ \frac{p_1}{x - a_1} + \frac{p_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{p_n}{x - a_n} \right\}.$$

Příklad 2.

$$y = \{f(x)\}^{\varphi(x)} = (v)^u \qquad \lg y = u \cdot \lg v, \qquad v = f(x) > 0$$

$y' : y = u' \cdot \lg v + u \cdot v' : v$ a tedy

$$y' = (v)^u \{u' \lg v + u \cdot v' : v\}.$$

Cvičení. Uvádíme jen několik příkladů, podle nichž lze sestrojiti jiné podobné. Výsledky jsou připojeny v závorkách. Užívání pravidel derivačních jest možno osvojiti si jen propočtením velkého počtu příkladů.

1. Pomocí obecného vztahu $y' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ vypočtěte derivace funkcí $4x$, $x^{\frac{1}{2}}$, x^{-1}, x^{-3}, $2x^{-\frac{1}{2}}$, $x^5 - x^3$, $(1-x)^2$! $\left\{4,\ \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}},\ -x^{-2},\ -3x^{-4},\ -x^{-\frac{3}{2}},\ 5x^4 - 3x^2,\ -2(1-x)\right\}$.

2. $x^5 + 3$, $x^5 - 7$, $x^5 + a$, $(5x^4)$; 2^x, $(2^x \cdot \lg 2)$; 10^x, $(10^x \lg 10)$.

~~3.~~ $y = \frac{x^4}{3} - \frac{6x^3}{7} + x^2 - \frac{3x}{5} + 2, \quad \left(y' = \frac{4x^3}{3} - \frac{18x^2}{7} + 2x - \frac{3}{5}\right).$

~~4.~~ $y = 2\frac{1}{2}x^4 - \pi \,.\, x^2 + \sqrt{3}, \quad (y' = 10x^3 - 2\pi x).$

~~5.~~ $s = v_0 \,.\, t - 2\,5\,at^2, \quad (s' = v_0 - a \,.\, t).$

~~6.~~ $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$
$(y' = na_0 x^{n-1} + (n-1)\, a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}).$

~~7.~~ Podle pravidla $(u \,.\, v)' = u'v + uv'$ derivujte funkce

a) $x^2\, 3^x, \ (2x\, 3^x + x^2 \lg 3 \,.\, 3^x)$;
b) $x^a \,.\, a^x, \ (ax^{a-1} \,.\, a^x + x^a a^x \lg a)$;
c) $x^{10} \,.\, \sin x$;
d) $x^{-4} \,.\, e^x$;
e) $\sqrt{x} \lg x$;
f) $x^{\frac{3}{2}} \operatorname{arc\,sin} x$;
g) $5e^x \sin x$;
h) $a \lg |x|\, e^x$;
$\pi \,.\, \operatorname{arc\,cos} x$;
k) $(x^3 + e^x) \,.\, \lg |x|$;
$(\sin x + \operatorname{tg} x)(\cos x + \operatorname{cotg} x)$ atd.

~~8.~~ Je-li $P(x)$ mnohočlen stupně n-tého a má-li algebr. rovnice $P(x) = 0$, k násobný kořen α, má rovnice $P'(x) = 0$, $(k-1)$ násobný kořen α! (Položte $P(x) = (x - \alpha)^k \cdot Q(x)$, kdež $Q(x)$ jest mnohočlen stupně $(n-k)$tého).

~~9.~~ Podle pravidla $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ vypočtěte derivace funkcí

a) $\frac{x}{1-x^2}, \ \left\{\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\right\}$;
b) $\frac{1}{1+x^2}, \ \left\{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right\}$;
c) $\frac{1-t}{1+t}, \ \left\{\frac{-2}{(1+t)^2}\right\}$;
d) $\frac{z^2+a}{z+a}, \ \left\{\frac{z^2+2az-a}{z^2+2az+a^2}\right\}$;
e) $\frac{2ay}{a^2-y^2}$;
f) $\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$;
g) $\sec x = \frac{1}{\cos x}, \ \left\{\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right\}$;
h) $\operatorname{cosec} x, \ \left\{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right\}$;
i) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \ \left\{-e^{-x}\right\}$
k) $\frac{x^n}{n^x}, \ \left\{\frac{nx^{n-1} - \lg n \,.\, x^n}{n^x}\right\}$.

~~10.~~ Podle pravidla o funkci složené $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$; $y' = f'(u) \,.\, u' = f'(\varphi(x)) \,.\, \varphi'(x)$

a) $(3x+5)^7, \ \{7(3x+5)^6 \,.\, 3\}$;
b) $(ax+b)^n, \ \{n(ax+b)^{n-1} \,.\, a\}$;
c) $\sin nx, \ \{n \cos nx\}$;
d) $\cos(nx+b), \ \{-n \sin(nx+b)\}$;
e) $\lg |3x^2+2|, \ \left\{\frac{1}{3x^2+2} \cdot 6x\right\}$;
f) $\lg |\sin x|, \ \left\{\frac{1}{\sin x} \,.\, \cos x\right\}$;
$\lg |\cos x|, \ \{-\operatorname{tg} x\}$;
g) $[f(x)]^n, \ \{n\,[f(x)]^{n-1} \,.\, f'(x)\}$;
h) $f(x^n), \ \{n f'(x^n) \,.\, x^{n-1}\}$.

11. Dokažte, že

$$(u \,.\, v \,.\, w)' = u'vw + uv'w + uvw',$$

když u, v, w jsou funkce x mající derivace!

12. Dokažte, že derivace složené funkce

$F\{f[g(x)]\}$ jest $F'\{f[g(x)]\} \,.\, f'[g(x)] \,.\, g'(x)$! Na př.: $y = \lg|\sin a^x|$.

30. Derivace funkce algebraické. Algebraická funkce implicitní určena jest rovnicí

$$a_0(x) \,.\, y^n + a_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + a_n(x) = 0,$$

kdež $a_k(x)$ jsou mnohočleny v x. Víme, že rovnice má vždy aspoň jeden kořen pro každé x, pro které aspoň jeden z koeficientů $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ jest od nuly různý. Dokážeme v posledním odstavci, že tyto kořeny definují za určitých předpokladů funkci $y = u(x)$, která jest spojitá, má derivaci a vyhovuje identicky rovnici algebraické, to jest: rovnice

$$a_0(x) \,.\, u^n(x) + a_1(x) \,.\, u^{n-1}(x) + \ldots + a_n(x) \equiv 0$$

jest splněna pro všechna x nějakého intervalu. V tomto intervalu derivace levé strany rovnice musí býti rovna derivaci pravé strany a to jest nula. Tedy

$$(a'_0 u^n + a_0 \,.\, nu^{n-1} \,.\, u') + (a'_1 \,.\, u^{n-1} + a_1 \,.\, (n-1)\, u^{n-2} \,.\, u') + \ldots + a'_n = 0$$

čili

$$u'(x) = -\frac{a'_0 \,.\, u^n + a'_1 u^{n-1} + \ldots + a'_n}{n a_0 u^{n-1} + (n-1) a_1 u^{n-2} + \ldots + a_{n-1}} \,.$$

Cvičení. 1. Vypočtěte směrnice tečen pro křivky

$$b^2 x^2 \pm a^2 y^2 = a^2 b^2, \qquad (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

$$\left(\mp \frac{b^2 x}{a^2 y},\ -\frac{x-p}{y-q},\ -\frac{2ax + by + d}{2cy + bx + e}\right).$$

2. Vypočtěte směrnice křivek algebraických

$x^3 - 2xy + y^5 = 0$ v bodě (1, 1), $\left(y' = -\frac{1}{3}\right)$,

$2x^3 - 3x^2 y + 4xy + 6y^3 = 0$, $\left(y' = \frac{6x^2 - 6xy + 4y}{3x^2 - 4x - 18y^2}\right)$.

3. Dokažte, že křivka $x^4 - 2xy^2 + y^3 + 3x - 3y = 0$ protíná osu x v počátku pod úhlem 45°.

4. Derivujte y dvojím způsobem (jako implicitní a jako explicitní funkci) *a)* $xy + 4y = 3x$; *b)* $y^2 = 2px$!

5. Dokažte, že křivky $3y = 2x + x^4y^3$, $2y + 3x + y^5 = x^3y$ protínají se v počátku pod pravým úhlem!

6. Parabola $y^2 = 2px$ protíná křivku $x^3 - 3pxy + y^3 = 0$ v počátku a ještě v dalším bodě. Jak zní rovnice tečen sestrojených k oběma křivkám v tomto bodě? Dokažte, že tečny svírají úhel $32^0\,12'$!

31. Rozšíření pojmu derivace. Derivace jest určitá limita. Protože jsme v odst. 18 definovali limitu v širším smyslu, můžeme také definovati derivaci v širším smyslu.

Jestliže jest

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to +\infty, \text{ nebo } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to -\infty, \qquad (h \to 0)$$

říkáme, že $f(x)$ má v bodě x *derivaci v širším smyslu* a píšeme místo předešlého vztahu *symbolickou* rovnici

$$f'(x) = +\infty \text{ nebo } f'(x) = -\infty.$$

Geometrický význam derivace ve smyslu širším jest prostě ten, že tečna v příslušném bodě jest rovnoběžná s osou y.

Význam podobných symbolů, jako

$$f'(x) = \pm\infty, \; f'^{+}(x) = -\infty, \; f'^{-}(x) = +\infty \text{ a p.}$$

jest nyní podle definic v odst. 18 zcela zřejmý.*)

Cvičení. V bodě $x = 0$ vypočtěte derivaci v širším smyslu funkcí $y = \sqrt[3]{x}$, $y = -\sqrt[3]{x}$ a derivaci z prava a z leva v širším smyslu u funkcí $y = -\sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = -\sqrt[3]{x^2}$.

Znázorněte funkce ty graficky!

32. Věta o rostoucí funkci a věta Rolle-ova. Funkce $y = f(x)$ nechť jest definována v nějakém okolí pevného bodu x_0.

J e s t l i ž e jsou mimo to v tomto okolí splněny nerovniny

$$f(x) < f(x_0), \text{ když } x < x_0,$$
$$f(x) > f(x_0), \text{ když } x > x_0,$$

říkáme, že funkce jest *v bodě x_0 rostoucí* (obr. 10a). Podobně jest definována funkce klesající v bodě x_0 (obr. 10b).

Jest nutno dobře rozeznávati funkci rostoucí v bodě x_0 od funkce *stále rostoucí* v daném intervalu (odst. 28).

Má-li nějaká funkce derivaci od nuly různou v daném bodě, lze vždy rozhodnouti, zda-li jest rostoucí či klesající pomocí následující věty:

---

*) Symbolem $f'^{+}(x)$ značíme derivaci z prava a symbolem $f'^{-}(x)$ derivaci z leva.

Jestliže $y = f(x)$ má v bodě x_0 kladnou (zápornou) derivaci $f'(x_0)$, pak jest $f(x)$ v tom bodě rostoucí (klesající).

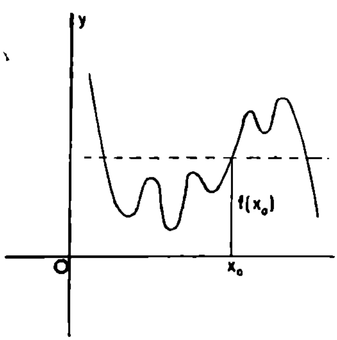
Podle str. 60 jest totiž

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a + \eta(h), \quad \lim_{h \to 0} \eta(h) = 0, \quad a = f'(x_0)$$

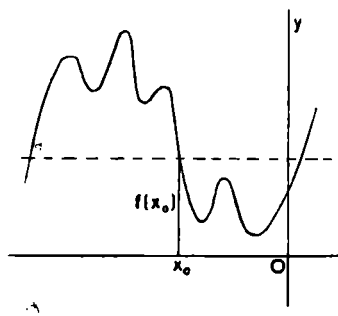
a tedy $f(x_0 + h) - f(x_0) = h \,.\, \{a + \eta(h)\}$.

Omezíme-li se na tak malé prosté hodnoty $|h|$, že pro ně je $|\eta(h)|$ menší než $|a|$ má závorka na pravé straně totéž znamení jako číslo a. O znamení pravé strany tedy rozhodne znaménko součinu $h \,.\, a$. Jestliže na př. $a = f'(x_0) > 0$, je pro kladné h znamení to kladné a pro záporné h znamení to záporné, čili

$$f(x) - f(x_0) > 0, \text{ když } x > x_0,$$
$$f(x) - f(x_0) < 0, \text{ když } x < x_0.$$



Obr. 10a.



Obr. 10b.

Analogicky se dokáže věta při záporném a.

Důležitý důsledek předešlé věty jest *věta Rolle-ova:*

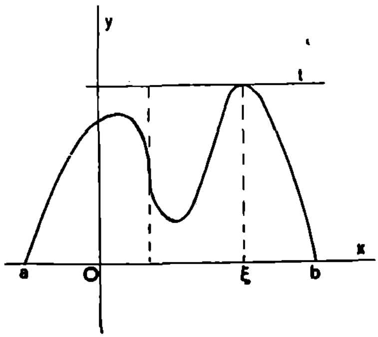
Jestliže $y = f(x)$ jest spojitá v $\langle a, b \rangle$ a má ve všech vnitřních bodech derivaci a je-li mimo to $f(a) = f(b) = 0$, pak lze nalézti aspoň jeden vnitřní bod ξ v $\langle a, b \rangle$, v němž $f'(\xi) = 0$.

Protože $f(x)$ jest v $\langle a, b \rangle$ spojitá, musí tam v určitém bodě nabýti své maximální hodnoty M a v jiném bodě své minimální hodnoty m (viz odst. 23), to jest

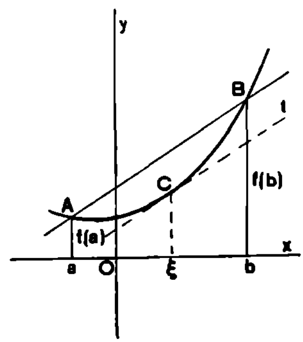
$$M \geqq f(x) \geqq m \text{ pro každé } x \text{ v } \langle a, b \rangle.$$

Dále jest $M \geqq m$. Když $M = m$, pak jest i $f(x) = M$ pro všechna x intervalu a tedy také $f'(x) = 0$, a věta R. jest splněna.

Zbývá tedy uvážiti jen případ $M > m$, v němž aspoň jedno z čísel těch musí býti od nuly různo. Dejme tomu, že jest to M a že tedy $M > 0$ (neboť $M \geqq f(a) = 0$). Pak v určitém vnitřním bodě ξ jest $f(\xi) = M$. V bodě tom existuje derivace $f'(\xi)$. Tvrdíme, že musí býti $f'(\xi) = 0$. Kdyby totiž $f'(\xi) \neq 0$, bylo by možno podle předešlé věty o rostoucí nebo klesající funkci nalézti takové okolí čísla ξ, že by v něm $f(x)$ nabývalo hodnot větších než $f(\xi) = M$. To však jest vyloučeno, neboť M jest maximum. Je-li $M = 0$ a tedy $m < 0$, nabývá $f(x)$ hodnoty m pro nějaké vnitřní $x = \eta$. Dokáže se jako shora, že $f'(\eta) = 0$.



Obr. 11a.



Obr. 11b.

Větu Rolle-ovu lze si vštípiti v paměť tímto heslem: Mezi dvěma kořeny rovnice $f(x) = 0$ leží aspoň jeden kořen rovnice $f'(x) = 0$. Heslo to ovšem nevystihuje všechny podmínky, nutné ke splnění věty!

Tečna křivky $y = f(x)$ jest rovnoběžná s osou x v bodě, v němž $f'(\xi) = 0$. Tím jest věta R. geometricky interpretována (obr. 11a).

Větu R. lze poněkud zobecniti tím, že místo předpokladu $f(a) = f(b) = 0$, stačí předpokládati pouze $f(a) = f(b)$. Nová funkce $F(x) = f(x) - f(a)$ splňuje totiž podmínku $F(a) = F(b) = 0$ a také ostatní podmínky věty R. a tedy $F'(\xi) = f'(\xi) = 0$.

Cvičení. 1.* Přesvědčte se přímým řešením rovnice $f'(x) = 0$, že věta R. platí pro funkce

$$y = A \cdot \sin x \quad \text{v} \quad \langle 0, \pi \rangle; \quad y = (x-a)^m \cdot (x-b)^n, \ (m > 0, \ n > 0).$$

2. Proč neplatí věta R. pro funkce

$$y = x - [x] \quad \text{v} \quad <0, 1>; \quad y = 1 - |x| \quad \text{v} \quad <-1, +1>,$$
$$y = (1 - x^2) : x^2 \quad \text{v} \quad <-1, +1>?$$

(Znázorněte graficky!)

33. Věta o střední hodnotě jest základní důležitosti pro počet diferenciální. Zní takto:

Jestliže $f(x)$ jest spojitá v $< a, b >$ a má derivaci ve všech vnitřních bodech, pak existuje aspoň jeden vnitřní bod ξ, pro který jest

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

čili jinak psáno

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi).$$

Čtenář jistě postřehl, že podmínky téťo věty jsou velmi podobny podmínkám věty R. Dokonce ve zvláštním případě $f(a) = f(b)$ věta o stř. h. přechází přímo ve větu R. V obecném případě nebude ovšem $f(x)$ splňovati podmínky $f(a) = f(b)$. Lze však velmi snadno sestrojiti novou funkci $F(x) = f(x) - c \,.\, x$, kdež c jest dosud neurčená konstanta a pokusiti se o takové její určení, aby $F(a) = F(b)$, to jest

$$f(a) - c \,.\, a = f(b) - c \,.\, b.$$

Rovnici té hoví vskutku číslo

$$c = \{ f(b) - f(a) \} : (b - a).$$

Nyní již $F(x)$ splňuje všechny podmínky věty R, a tedy existuje číslo ξ, pro něž

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \text{s. e. d.}$$

Věta o střední hodnotě bývá psána v různých tvarech. Tak na př. místo ξ mohu klásti

$$\xi = a + \Theta \,.\, (b - a), \text{ kdež } 0 < \Theta < 1.$$

Věta zní pak $f(b) = f(a) + (b - a) \,.\, f'[a + \Theta\,(b - a)]$. Označíme-li délku intervalu $(b - a) = h$, obdržíme tvar, kterého bývá nejčastěji užíváno:

$$f(a + h) = f(a) + h \,.\, f'(a + \Theta \,.\, h)$$

nebo $$f(b - h) = f(b) - hf'(b - \Theta_1 \,.\, h), \quad \Theta_1 = 1 - \Theta.$$

Geometrický výklad věty vyplývá z obrazce 11b. Tětiva $\overline{AB}$ má směrnici $\{ f(b) - f(a) \} : (b - a)$. Věta tvrdí, že lze nalézti na oblouku AB bod C, v němž tečna t jest rovnoběžna s tětivou $\overline{AB}$.

Užijeme věty o střední hodnotě k důkazu jedné ze základních vět počtu integrálního:

Jestliže $f'(x) = 0$ v celém intervalu $< a, b >$,) jest $f(x)$ rovno konstantě v témž intervalu.*

Budiž $\alpha = (a + b) : 2$ půlící bod intervalu a číslo kladné $h \leqq (b - a) : 2$. Pak jest $f(x)$ spojitá funkce v $< \alpha - h, \alpha + h >$, protože tam má všude derivaci. Podle věty o střední hodnotě je tedy $f(\alpha \pm h) - f(\alpha) = \pm h \, . \, f'(\xi) = 0$, čili

$$f(\alpha \pm h) = f(\alpha) \text{ pro } \textit{každé } h \leqq (b - a) : 2, \quad \text{q. e. d.}$$

Důsledkem jest věta další:

Jestliže $f(x)$ a $g(x)$ mají v $< a, b >$ všude stejné derivace $f'(x) = g'(x)$, liší se od sebe nejvýše o aditivní konstantu $g(x) = f(x) + c$.

Označíme-li totiž jako novou funkci $F(x) = g(x) - f(x)$, jest $F'(x) = 0$ v $< a, b >$ a tedy $F(x) = c$. Tak na př. funkce $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$ má derivaci $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-(1-x^2)} . \sqrt{1 - x^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Touž derivaci má $\arccos x$ a tedy $\arccos x = \arcsin \sqrt{1 - x^2} + c$. Konstantu určíme na př. tak, že položíme $x = 0$, z čehož plyne $c = 0$.

Věta o funkci *monotonní* jest dalším důsledkem věty o střední hodnotě.

Jestliže $f'(x) \geqq 0$ v $< a, b >$ a víme-li aspoň o jednom bodě tohoto intervalu, že v něm $f'(x) > 0$, pak $f(b) > f(a)$.

Zvolme x v (a, b). Pak jest podle věty o střední hodnotě

$$f(b) - f(x) = (b - x) f'(\xi_1) \geqq 0,$$
$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(\xi_2) \geqq 0,$$

a tedy $\quad f(b) \geqq f(x) \geqq f(a)$.

Z toho plyne, že jest buď $f(b) = f(a)$, nebo $f(b) > f(a)$. Kdyby platila prvá možnost, bylo by nutně $f(x) = f(a) = f(b)$ pro všechna x intervalu a tedy by bylo $f'(x) = 0$ v celém $< a, b >$, což odporuje předpokladu. Zbývá tedy jen druhá možnost.

Můžeme nyní tvrditi, že za předpokladů předešlé věty jest $f(x)$ v int. $< a, b >$ *neklesající* funkce, to jest

*) V bodech a, b míníme tím derivaci z prava nebo z leva.

$$f(x_1) \geqq f(x_2), \text{ pokud } x_1 > x_2,$$

neboť v int. $< x_2, x_1 >$ buď platí předešlá věta, anebo jest v něm všude $f'(x) = 0$ a tedy $f(x_1) = f(x_2)$.

Dále jest patrno: Jestliže v $< a, b >$ jest $f'(x) \geqq 0$ a jestliže body, v nichž $f'(x) = 0$, nevyplňují zcela žádný interval obsažený v $< a, b >$, jest $f(x)$ *stále rostoucí* funkce, to jest

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ jestliže } x_1 > x_2.$$

Obdobně se dokážou věty vyplývající z předpokladu $f'(x) \leqq 0$ a týkající se funkce nerostoucí, po případě stále klesající.

Příklad. Rovnice Keplerova $x - e \sin x = M$ (odst. 22, cv. 2) má aspoň jeden reálný kořen. Můžeme nyní dokázati, že má jediný reálný kořen. Funkce $f(x) = (x - e \sin x - M)$ má totiž derivaci $f'(x) = 1 - e \cos x > 0$, neboť $0 \leqq e < 1$ a $\cos x \leqq 1$. Jest tedy $f(x)$ stále rostoucí funkce, která může býti rovna nule jen pro jediné x.

Cvičení. 1. Vyložte geometrický význam předešlých vět!

2. Pro které hodnoty konstanty a jest funkce $f(x) = ax - \sin x$ stále rostoucí nebo stále klesající?

3. Dokažte, že rovnice $\operatorname{tg} x = x$ má v každém z intervalů $(\pi/2, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 5\pi/2)$, atd. jediný kořen!

34. Cauchy-ho věta o střední hodnotě. Větu o stř. hodnotě lze zobecniti. Buďtež $f(x)$ a $\varphi(x)$ dvě funkce, které v $< a, b >$ jsou spojité a mají derivace ve všech vnitřních bodech. Učiňme další dva předpoklady: 1) $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, 2) $f'(x)$ a $\varphi'(x)$ nechť nejsou nikdy *současně* rovny nule v (a, b). Pak jest

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \quad (a < \xi < b).$$

Důkaz jest založen na téže myšlence, jako při větě o stř. hodnotě. Utvořme novou funkci $F(x) = f(x) - c \cdot \varphi(x)$ a hleďme konstantu c tak určiti, aby bylo $F(a) = F(b)$, to jest

$$f(a) - c \cdot \varphi(a) = f(b) - c \cdot \varphi(b).$$

Tomu vyhoví

$$c = \{f(b) - f(a)\} : \{\varphi(b) - \varphi(a)\},$$

neboť podle předpokladu 1) rozdílem $\varphi(b) - \varphi(a)$ jest možno děliti.

Protože $F'(x)$ všude v $< a, b >$ eksistuje, je podle věty *R.* pro nějaké ξ v (a, b)

$$F'(\xi) = f'(\xi) - c \cdot \varphi'(\xi) = 0.$$

Z rovnice této soudíme, že $\varphi'(\xi) \neq 0$, neboť kdyby bylo rovno nulle, anulovalo by se také $f'(\xi)$, což odporuje předpokladu 2). Můžeme tedy poslední rovnici děliti číslem $\varphi'(\xi)$ a obdržíme větu Cauchy-ovu.

Poznámka. Oba předpoklady 1) a 2) buďou jistě splněny, bude-li $\varphi'(x) \neq 0$ v celém (a, b).

Cvičení. 1. Co obdržíme volbou $\varphi(x) = x$?

2. Jestliže spojíme dva body v rovině A, B dvěma oblouky $y = f(x)$ a $y = \varphi(x)$, které mají všude derivace, pak existuje bod ξ mezi A, B, v němž tečny obou oblouků jsou rovnoběžné.

– **35. Diferenciál a podíl diferenciální.** Nechť $f(x)$ má v bodě x derivaci $f'(x) > 0$. Podle odst. 27 jest

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \eta(h), \quad \lim_{h \to 0} \eta(h) = 0.$$

Užijeme-li označení zavedené v odst. citovaném, můžeme psáti

$$\Delta y = f'(x) \,.\, \Delta x + \eta(\Delta x) \,.\, \Delta x.$$

Zvolíme-li $|\Delta x|$ tak malé, že $|\eta(\Delta x)|$ je menší než $f'(x)$, převládá na pravé straně rovnice první sčítanec $f'(x)\,\Delta x$ nad sčítancem druhým, to jest, rozhoduje o znaménku celé pravé strany. Tento sčítanec nazývá se proto *převládající částí* pravé strany a obdržel zvláštní název *diferenciál* y, psáno zkratkou dy (Leibnic). Název ten nevážeme však už na velikost Δx, ani na okolnost $f'(x) > 0$ a užíváme jej pro *každé* Δx a pro *každé* $f'(x)$. Naše definice tedy zní:

diferenciál $y = dy = f'(x) \,.\, \Delta x$,

kdež Δx jest *libovolné* číslo. Z tohoto důvodu říkáme o funkci $f(x)$, která má derivaci v bodě x, že jest tam *schopna diferenciace*.

Když jsme přijali tuto definici, musíme ji důsledně užíti také při zvláštní funkci $y = x$, a tedy

$$dy = 1 \,.\, \Delta x, \text{ čili protože } y = x,\ dx = \Delta x.$$

Diferenciál nezávisle proměnné x jest tedy pro tuto zvláštní funkci roven Δx a to jest libovolné číslo. Proto jest zvykem i při obecné funkci $y = f(x)$ místo Δx psáti dx a tedy

$$dy = f'(x) \,.\, dx, \text{ čili } \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Podíl diferenciálů (diferenciální kvocient) funkce a nezávisle proměnné jest roven derivaci funkce.

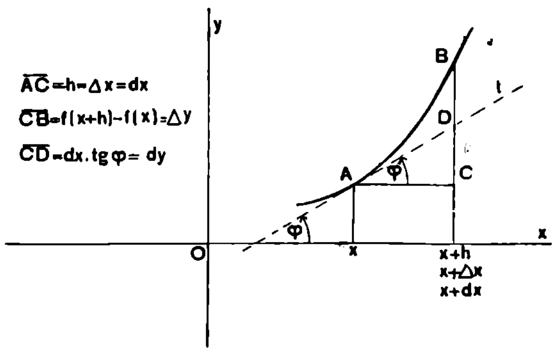
Zvláště důrazně vytknouti jest dvě okolnosti:

1. $dx = \Delta x = h$ jest libovolné číslo.

2. dy *není* rovno Δy a proto také podíl diferencí $\Delta y/\Delta x$ jest něco jiného, než podíl diferenciálů dy/dx.

Geometricky jest rozdíl mezi Δy a dy zřetelně vytčen na obr. 12.

$$\overline{AC} = h = \Delta x = dx, \quad \overline{CB} = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y,$$
$$\overline{CD} = \overline{AC} \,.\, \text{tg}\varphi = \Delta x \,.\, f'(x) = dy.$$



Obr. 12.

Δy jest přírůstek pořadnice *křivky,* když x zvětšilo se o Δx. dy jest přírůstek pořadnice *tečny,* když x zvětšilo se o totéž Δx.

Poznámka. Při této příležitosti připomeňme si, že pro derivaci funkce $y = f(x)$ užívá se těchto různých označení:

$$y' = (f(x))' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = Dy = Df(x).$$

Cvičení. Přepište pravidla derivační do formy diferenciální, jako na př.

$$d(x^n) = n \,.\, x^{n-1} \,.\, dx, \quad d(\sin x) = \cos x \,.\, dx, \quad d(c \,.\, f(x)) = c \,.\, d(f(x)),$$
$$d(u \,.\, v) = u \,.\, dv + v \,.\, du, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \,.\, du - u \,.\, dv}{v^2} \text{ atd.}$$