Úvod do počtu diferenciálního

Funkce

In: Miloš Kössler (author): Úvod do počtu diferenciálního. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1926. pp. 47–69.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402710

2. Totéž pro řadu

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots$$

přeřazenou a) k součtu (1·5), b) k součtu (—1).

Kapitola IV.

FUNKCE.

15. Definice a druhy funkcí. Často označujeme týmž znakem, na př. x, různá čísla reálná nějakého množství O. V tom případě budeme znak x nazývati *proměnná* a množství O *obor* proměnné. Proměnná, jejíž obor jest jen jedno číslo, nazývá se konstanta.

Jestliže y tak závisí na proměnné x, že každé hodnotě x odpovídá určitá jediná hodnota y, říkáme, že y jest funkce proměnné x.

Tuto závislost značíme symbolem

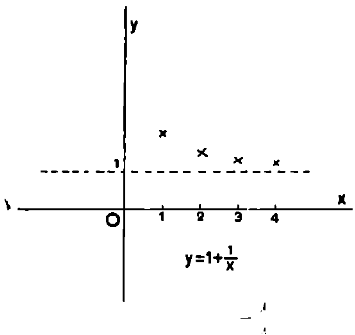
$$y = f(x),$$

který čteme: y jest (rovná se) funkce (funkci) x. Číslu x říkáme *nezávisle* proměnná, číslu y *závisle* proměnná. Při různých závislostech užíváme různých písmen k označení funkčního vztahu, na př. $g(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ atd. Geometricky znázorňujeme vztah $y = f(x)$ tak, že myslíme si v rovině, opatřené dvěma osami souřadnic, vyznačeny všechny body o souřadnicích $[x, f(x)]$. Názor, který s těmito názvy spojujeme, jest ovšem, jako všechno smyslové vnímání, nepřesný a proto podáme definice na názoru nezávislé, abychom terminologie té mohli užívati i při přesném myšlení. Rovina souřadnic jest množství všech dvojic reálných čísel $[x, y]$. Osa x jest množství všech dvojic $[x, 0]$, uspořádaných podle velikosti čísel x, osa y jest podobně uspořádané množství všech dvojic $[0, y]$. Přímka jest množství všech dvojic $[x, y]$, které vyhovují rovnici $ax + by + c = 0$. Čára (křivka, graf) jest množství všech dvojic $[x, y]$, které vyhovují rovnici $y = f(x)$. Podobně definujeme paprsek, úhel (část roviny »mezi« dvěma paprsky, vycházejícími z téhož bodu) atd.

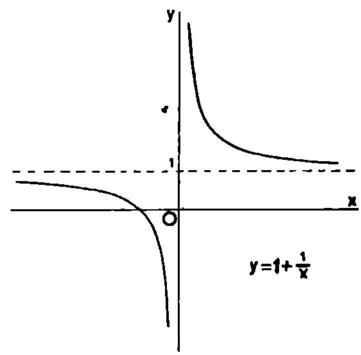
Předpis, který při definici funkce přiřazuje hodnotě čísla x určitou hodnotu čísla y, může býti velmi rozmanitý. Často to bývá aritmetický nebo jiný počtářský vztah, na př. (obr. 1a) obor x: celistvá, kladná čísla: 1, 2, 3, 4,...

$$y = 1 + \frac{1}{x} \ldots\ldots$$

Jest patrno, že hodnoty y tvoří určitou posloupnost. Obráceně můžeme považovati členy každé posloupnosti za hodnoty nějaké funkce.



Obr. 1 a.



Obr. 1 b.

Týž funkční vztah definuje ovšem při změně oboru nezávislé proměnné jinou funkci. Tak na př., tvoří-li obor x všechna reálná čísla s výjimkou nuly, představuje předešlý funkční vztah hyperbolu obrazce 1b. Jiný příklad: Obor x interval $< -1, +1 >$, funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$, obr. 2. Obor nezávisle proměnné x bývá někdy rozdělen na podobory toho druhu, že v každém z nich jest y definováno jiným vztahem počtářským. Tak na př. lomená čára v obr. 3 jest takto definována:

$$y = x \quad \text{pro} \quad 0 \leqq x < 1,$$

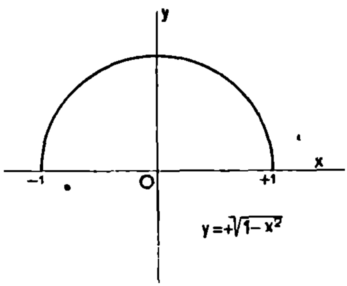
$$y = \frac{1}{2}(x + 1) \quad \text{pro} \quad 1 \leqq x < 2,$$

$$y = \frac{3}{2} \quad \text{pro} \quad 2 \leqq x \leqq 3,$$

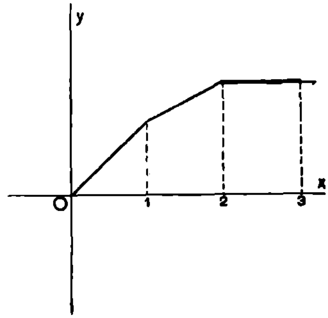
V odst. 6 jsme definovali funkci exponenciální, na př. $y = 5^x$ nebo obecněji $y = a^x$, $a > 0$, při níž obor x jsou všechna reálná čísla. Z geometrie známe funkční vztahy

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{cotg} x \text{ atd.}$$

Při této příležitosti připomeňme, že úhly budeme měřiti vždy v míře obloukové, to jest, podílem mezi délkou oblouku úhlu středového v kružnici a délkou poloměru. Jest to číslo nepojmenované, na př. úhel přímý jest $\pi = 3{\cdot}14159\ldots$, úhel pravý jest $\pi/2$ atd. Jak se měří délka oblouku, bude vyloženo v počtu integrálním. Přesná definice funkcí goniometrických, nezávislá od geometrického názoru, obsažena jest v II. dodatku.



Obr. 2.



Obr. 3.

Byl by však omyl, domnívati se, že každý funkční vztah lze vyjádřiti aritmetickou formulí. Tak na př. úřední závěrečný kurs koruny československé na burse v Novém Yorku jest funkcí data nebo výška domů v Praze v určitém okamžiku jest funkcí jejich popisného čísla atd.

Některé často se vyskytující skupiny funkcí mají zvláštní názvy.

Celistvá funkce racionální n-tého stupně (mnohočlen, polynom) má tvar

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Obor x jsou všechna reálná čísla, $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ jsou konstanty. V algebře nebo v teorii funkcí komplexní proměnné dokazuje se základní věta algebry: *Každá rovnice*

$$P(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0,$$

*má n kořenů reálných nebo komplexních od sebe různých nebo stejných.**)

*) Důkaz nalezne čtenář na př. v knize: K. Petr, Počet diferenciální, Praha 1923, nákl. J. Č. M. a F., str. 405.

Nezávisle od předešlé základní věty dokážeme další rovněž důležité. Jestliže rovnice

$$P(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0$$

má kořen a, platí pro *každé* x

$$P(x) = (x - a) \,.\, P_1(x), \text{ kdež } P_1(x) = x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \ldots + \beta_{n-1}.$$

Jest totiž

$$P(x) = P(x) - P(a) = x^n - a^n + b_1 (x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + b_{n-1}(x - a),$$

a z toho obdržíme vytknutím kořenového činitele $x - a$ vztah žádaný.

Z toho plyne dále: Jestliže rovnice $P(x) = 0$ má dva navzájem různé kořeny $a \neq \beta$, platí pro každé x

$$P(x) = (x - a)(x - \beta) P_2(x), \text{ kdež } P_2(x) = x^{n-2} + \gamma_1 x^{n-3} + \ldots + \gamma_{n-2}.$$

Rovnice $P(x) = (x - a) P_1(x) = 0$ má totiž kořen β, a tedy $(\beta - a) \,.\, P_1(\beta) = 0$, čili $P_1(\beta) = 0$. Podle předešlé věty jest

$$P_1(x) = (x - \beta) P_2(x) \text{ čili } P(x) = (x - a)(x - \beta) \,.\, P_2(x).$$

Z toho obecnou indukcí: Jestliže rovnice $P(x) = 0$ má k navzájem různých kořenů $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$, jest její levá strana beze zbytku dělitelna mnohočlenem $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_k)$ a tedy rovnice jest *nejméně* stupně k-tého.

Rovnice $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, v níž aspoň jeden z koeficientů $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ jest od nuly různý, může tedy míti *nanejvýše* n navzájem různých kořenů. Z toho vyplývá, že jediná rovnice n-tého stupně, která má více než n navzájem různých kořenů, jest

$$0 \,.\, x^n + 0 \,.\, x^{n-1} + \ldots + 0 = 0.$$

Rovnice ta jest pak ovšem splněna pro každé x.

Lomená funkce racionální jest podíl dvou mnohočlenů

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Obor x tvoří všechna reálná čísla s výjimkou těch, pro která jmenovatel jest rovný nule (neboť nulou nelze děliti). Tak na př. funkce

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x}$$

jest definována pro všechna x s výjimkou hodnot $x = 0$, $x = 2$; pro tyto hodnoty hořejší formule y vůbec nedefinuje.

Obor proměnné x jest tedy utvořen všemi reálnými čísly s výjimkou 0 a 2. Jest ovšem možno utvořiti *jinou* funkci $y = f(x)$, která jest definována pro všechna x a při tom se shoduje s předešlou funkcí všude tam, kde tato jest definována. Tak na př.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x} \quad \text{pro } x \neq 0, 2,$$
$$f(x) = 1 \quad \text{pro } x = 0, 2.$$

Definice tato jest ve shodě s tím, jak jsme si definovali funkci na počátku tohoto odstavce. Proto nemůžeme na př. o funkcích

$$y = \frac{(x-a)^2}{(x-a)}, \quad y = (x-a)$$

tvrditi, že jsou identické, neboť první z nich není definována pro $x = a$.

Funkce $y = +\sqrt{x}$ hoví rovnici $y^2 - x = 0$. Každá funkce y, která hoví algebraické rovnici

$$p_0(x) \cdot y^n + p_1(x) \cdot y^{n-1} + \ldots + p_n(x) = 0, \tag{1}$$

kdež $p_0(x)$, $p_1(x), \ldots$ jsou mnohočleny v x, nazývá se *algebraická funkce n-tého stupně*. Je-li algebr. funkce definována rovnicí dosud nerozřešenou, říká se jí *implicitní* funkce algebraická (viz též odstavec 53) na rozdíl od *eksplicitní* funkce algebraické, jako na př.

$$y = +\sqrt{\frac{x^2-1}{x+2}}.$$

O mnohých funkcích lze dokázati, že nejsou algebraické, jako na př. funkce goniometrické, funkce eksponenciální, funkce logaritmické atd. Důkazy toho zde prováděti nemůžeme.

Definujme ještě jednu velmi jednoduchou funkci. Ke každému reálnému číslu x přiřadíme *celistvé* číslo y, které hoví nerovnostem

$$y \leqq x < y + 1.$$

Funkci tu budeme označovati

$$y = [x]$$

a čísti y jest celé číslo v x. Tak na př. $[3{\cdot}14] = 3$, $[4] = 4$, $[-2{\cdot}3] = -3$. Obr. 4 znázorňuje graficky tuto funkci.

Jest však dobře uvědomiti si, že obrazec nevystihuje všech vlastností funkce, neboť pro $x = 1, 2, 3, \ldots$ má y vždy jedinou hodnotu $1, 2, 3, \ldots$, což nikterak není patrno z obrazce.

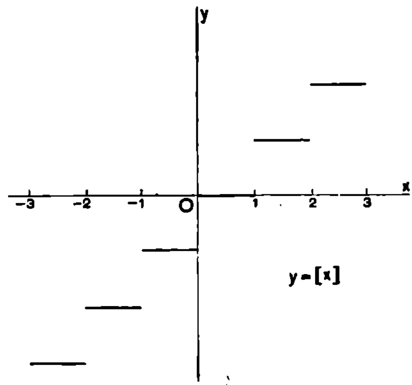
Cvičení. 1. Znázorněte graficky funkce celočíselné proměnné n:

a) $y = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, *b*) $y = 1 + (-1)^n + \frac{1}{n}$.

2. Znázorněte graficky funkce:
a) $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, atd.
b) $y = x - [x]$, $y = \{x - [x]\}^2$, $y = [x] + \{x - [x]\}^2$.

3. Nechť $y = x$, když x jest racionální a y vůbec není definováno, když x jest iracionální. Liší se grafické znázornění této funkce od znázornění přímky $y = x$? (Uvažte, že čísla racionální tvoří množství všude husté!)

5. Pro která x nejsou definovány funkce *sec x, cosec x, tg x, cotg x*?



Obr. 4.

16. Limity funkcí. Funkce $y = 1 + 1 : x$ (viz obr. 1*b*) má tu vlastnost, že s jakkoliv vzrůstajícím x blíží se neomezeně číslu 1. Podobně jako při posloupnostech (viz odst. 4) říkáme, že y má limitu 1, když x vzrůstá do nekonečna. Přesná definice zní takto:

Funkce $f(x)$ má limitu A, když x vzrůstá do nekonečna, jestliže ke každému libovolně malému kladnému číslu ε lze nalézti číslo $X(\varepsilon)$ tak, že

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \text{ čili } |f(x) - A| < \varepsilon$$

pro všechna $x > X(\varepsilon)$.

Jsou-li tyto podmínky splněny, píšeme stručně

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Při tom jest $X(\varepsilon)$ konstanta nezávislá na x, ale závislá na ε. Tak na př. pro funkci $1 + 1 : x$ jest $X(\varepsilon) = 1 : \varepsilon$, neboť

$$1 - \varepsilon < 1 + 1 : x < 1 + \varepsilon, \text{ pokud } x > 1 : \varepsilon.$$

Funkce $y = x^3$ má tu vlastnost, že vzrůstá do $+\infty$, když x vzrůstá do $+\infty$. To značíme zkratkou

$$f(x) \to +\infty, \text{ když } x \to +\infty.$$

Přesná definice zní:

Funkce $f(x)$ vzrůstá do $+\infty$ spolu s x, jestliže ke každému, libovolně velkému číslu M lze nalézti číslo $X(M)$ tak, že

$$f(x) > M \quad \textit{pro všechna} \quad x > X(M).$$

V předcházejícím příkladu jest zřejmě $X(M) = M^{\frac{1}{3}}$.

Jest patrno, že obě předcházející definice vztahují se k funkcím, jež jsou definovány pro všechna kladná čísla x vůbec, anebo aspoň pro všechna čísla x větší než určitá konstanta. Funkce toho druhu mohou splňovati buď podmínky prvé definice, nebo podmínky druhé definice, nebo konečně ani jedny ani druhé. Příklad funkce posledního druhu jest $y = \cos x$, která s rostoucím x kolísá v mezích -1, $+1$. O takových funkcích říkáme, že *oscilují*, když $x \to +\infty$.

Cvičení. 1. Podle analogie předešlých vět definujte význam symbolů:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A, \quad \underset{x \to -\infty}{f(x) \to +\infty}, \quad \underset{x \to -\infty}{f(x) \to -\infty}, \quad \underset{x \to +\infty}{f(x) \to -\infty}$$

a uveďte příklady!

2. Jak se chovají funkce

$$3 + 1 : x, \; \sqrt{x}, \; [x], \; x - [x], \; \sin \pi x : x, \; \sin \pi x, \; x \, . \sin \pi x,$$

když $x \to +\infty$? (Grafické znázornění!)

3. Sestrojte jiné příklady funkcí, *a)* které mají limitu, když $x \to +\infty$, *b)* které vzrůstají do $+\infty$, když $x \to +\infty$, *c)* které oscilují, když $x \to +\infty$.

17. Pokračování. Všimněme si nyní funkce

$$y = \varphi(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a},$$

která jest výrazem tím definována pro každé x s výjimkou hodnoty $x = a$. Pro každé $x \neq a$ jest však také

$$\varphi(x) = x + a.$$

Z toho soudíme, že pro x velmi blízká číslu a je y velmi blízké číslu $2a$. Přesně řečeno, rozdíl $\varphi(x) - 2a$ jest roven právě rozdílu $(x-a)$ pro všechna $x \neq a$. Tento fakt můžeme také vystihnouti nerovninami: $|\varphi(x)-2a|<\varepsilon$ pro všechna x splňující nerovninu $|x-a|<\varepsilon$ ať ε jest jakkoliv malé, kladné číslo, pokud při tom $x \neq a$. Místo předešlého souvětí říkáme stručně, že $\varphi(x)$ má limitu $2a$, kdy x blíží se k a a píšeme

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 2a.$$

Při tom jest zvláště důležito všimnouti si, že limita $2a$ *není* hodnota $\varphi(x)$ pro $x=a$. Limita jest číslo, které charakterisuje určitou vlastnost funkce $\varphi(x)$ *v okolí bodu $x=a$ s výjimkou toho bodu samého.*

Mějme nyní obecnou funkci $f(x)$ definovanou pro všechna x v intervalu $\langle a, b \rangle$. Jen v bodě $x=a$ tohoto intervalu $f(x)$ nemusí býti dáno. Jestliže číslo $f(x)$ blíží se k číslu A, když x blíží se k a, píšeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Tato vlastnost funkce není tím logicky přesně vystižena, protože není definováno, co to znamená: *blíží se.* Přesná definice jest obšírnější:

Jestliže k libovolně malému, kladnému ε lze nalézti takové kladné číslo $\delta(\varepsilon)$, že

$$A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon, \text{ čili } |f(x)-A| < \varepsilon$$

pro všechna x různá od a, náležející k $\langle a, b \rangle$ a splňující nerovniny $a-\delta(\varepsilon) < x < a+\delta(\varepsilon)$, čili $|x-a| < \delta(\varepsilon)$, **pak je**

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Jako příklad dokážeme vztah, který budeme později potřebovati, že totiž

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Při důkazu můžeme se omeziti na kladná x, neboť pro záporné $x=-\xi$ je $\sin x : x = \sin \xi : \xi$.

V obr. 5 jest $\widehat{BB_1} > BB_1$ čili $2x > 2\sin x$, $x > \sin x$. Dále jest výseč $OCB <$ trojúhelník OCD a tedy $x \,.\, 1 < 1 \,.\, tg\, x$ čili $\sin x : x > \cos x$. Celkem jest tedy

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Z toho plyne dále

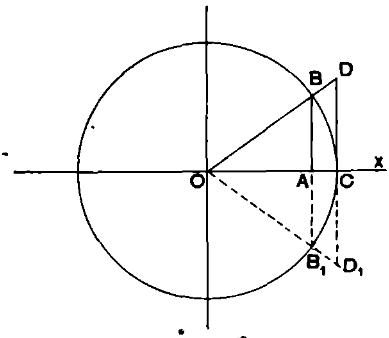
$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x,$$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Je-li nyní ε libovolně malé, kladné, mohu voliti číslo x tak, že je $\frac{x^2}{2} < \varepsilon$ a tedy také

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon \quad \text{pokud} \quad x < \sqrt{2\varepsilon} = \delta(\varepsilon).$$

Všechny podmínky pro existenci hledané limity jsou tedy splněny. Kdyby ovšem x bylo měřeno v jiné nežli obloukové míře, byla by i limita jiná. Tak na př., je-li x'' míra úhlu



Obr. 5.

v sekundách a x míra oblouková, je $\sin x'' = \sin x$ a tedy

$$\lim_{x'' \to 0} \frac{\sin x''}{x''} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{x''} = \frac{\pi}{648000} \cdot 1.$$

Při počítání limitami platí tytéž obecné věty, které jsme poznali při limitách posloupností:

$$\lim\,[f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x),$$
$$\lim\,[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x),$$
$$\lim\,[f(x) : g(x)] = \lim f(x) : \lim g(x), \text{ pokud } \lim g(x) \neq 0.$$

Poznámka. Funkce $f(x) = \sin x : x$ není v bodě $x = 0$ vůbec definována. To nám ovšem nemůže brániti, abychom sestrojili jinou funkci $F(x)$, která pro $x \neq 0$ jest rovna $f(x)$ a pro $x = 0$ jest rovna libovolně zvolenému číslu b. Patrně bude

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1,$$

neboť limita nezávisí na hodnotě funkce v bodě $x = 0$. Volím-li b různé od jedné, na př. $b = 2$, je

$$F(0) = 2, \quad \lim_{x \to 0} F(x) = 1.$$

Z toho jest zřejmě patrno, že limita $F(x)$, když $x \to a$ a hodnota $F(a)$ mohou se navzájem lišiti.

Často se stává, že funkce vůbec nemá limity. Na př. $f(x) = [x]$ nemá limity, když $x \to 2$, neboť v každém sebe menším okolí čísla $x = 2$ nabývá $f(x)$ hodnoty 1 pro $x < 2$ a také hodnoty 2 pro $x > 2$, a tedy pro žádné A nemůže platiti v *celém* takovém okolí

$$|\,[x] - A\,| < \varepsilon, \text{ jestliže } \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Cvičení. $\lim_{x \to 0} x^n = 0$, když n jest celistvé kladné.

$\lim_{x \to \infty} 2x : (3x + 5) = 2/3$. (Děl dělence i dělitele číslem x.)

$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}$ (Děl čitatele i jmenovatele číslem x^n.)

$\lim_{x \to a} x^n = a^n$. (Polož $x = (a + y)$ a užij věty binomické.)

$\lim_{x \to 0} (\operatorname{tg} x : x) = 1$. (Rozlož $(\operatorname{tg} x : x) = (\sin x : x) \,.\, (1 : \cos x)$.)

$\lim_{x \to 0} (\sin ax : x) = a$. (Polož $ax = y$.)

$\lim_{x \to a} \{(x^n - a^n) : (x - a)\} = n \,.\, a^{n-1}$, n celistvé, kladné.

18. Limita v rozšířeném smyslu. Pojem limity funkce lze rozšířiti rozmanitým způsobem. Tak na př.:

Jestliže k libovolně malému, kladnému ε dá se nalézti takové kladné $\delta(\varepsilon)$, že $|f(x) - A| < \varepsilon$ pro všechna $a - \delta(\varepsilon) < x < a$, pak říkáme, že $f(x)$ má limitu A *z leva,* a píšeme symbolicky

$$\lim_{x \to a - 0} f(x) = A.$$

Podobně definujeme limitu *z prava.* Funkce může míti limitu z leva nebo z prava a při tom nemusí míti limitu v obyčejném smyslu. Tak na př. $\lim_{x \to 1-0} [x] = 0$, $\lim_{x \to 1+0} [x] = 1$, $\lim_{x \to 1} [x]$ neexistuje.

Další rozšíření pojmu limity jest limita *v širším smyslu.* Budiž $f(x)$ definováno v $\langle a + \delta, a - \delta \rangle$. Jestliže M jest libovolně veliké číslo a $f(x) > M$ pro všechna $|x - a| < \varepsilon(M)$, pak říkáme, že $f(x)$ má limitu *v širším smyslu* a píšeme $\underset{x \to a}{f(x) \to +} - \infty$. Význam symbolů

$$\underset{x \to a-0}{f(x) \to +\infty}, \quad \underset{x \to a+0}{f(x) \to +\infty}, \quad \underset{x \to a}{f(x) \to -\infty} \quad \text{a p.}$$

jest nyní samozřejmý. Symbolu

$$\underset{x \to a}{f(x) \to \pm \infty}$$

budeme užívati, když

$$\underset{x \to a+0}{f(x) \to +\infty}, \ \underset{x \to a-0}{f(x) \to -\infty} \quad \text{nebo} \quad \underset{x \to a-0}{f(x) \to +\infty}, \ \underset{x \to a+0}{f(x) \to -\infty}.$$

Cvičení. 1. Jestliže $\lim_{x \to a+0} f(x) = A$, $\lim_{x \to a-0} f(x) = A$, je také $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

2. Jestliže $\lim_{x \to a} f(x) = A$, je také $\lim_{x \to a-0} f(x) = A$, $\lim_{x \to a+0} f(x) = A$.

3. $\operatorname{Lim}_{x \to 2-0} \{x - [x]\} = 1$, $\lim_{x \to 2+0} \{x - [x]\} = 0$.

4. $\operatorname{Lim}_{x \to +0} [1 - x^2] = 0$, $\lim_{x \to -0} [1 - x^2] = 0$, $[1 - 0^2] = 1$.

5, $\underset{x \to a}{1 : (x-a)^2 \to +\infty}$, $\underset{x \to a+0}{1 : (x-a) \to +\infty}$, $\underset{x \to a}{1 : (x-a) \to \pm\infty}$.

$\underset{x \to \frac{\pi}{2} - 0}{\operatorname{tg} x \to +\infty}$, $\underset{x \to \frac{\pi}{2} + 0}{\operatorname{tg} x \to -\infty}$, $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg} x \to \pm\infty}$, $\underset{x \to +0}{\log x \to -\infty}$, $\underset{x \to 0}{\log x}$

neeksistuje ani v širším smyslu.

19. Kritéria pro limitu funkce. Zbývá určiti kritéria, podle nichž se pozná, zdali $f(x)$ má limitu, když $x \to a$ čili nic. První takové kritérium týká se funkce $f(x)$, která v $< a, b >$ jest definována a při tom jest *neklesající*. To znamená, že $f(x_1) \leqq f(x_2)$, kdykoliv $x_1 < x_2$. Věta o limitě zní:

Jestliže $f(x)$ jest v intervalu $< a, b >$ shora ohraničená a neklesající, pak eksistuje $\lim_{x \to b-0} f(x)$.

Důkaz provedeme užitím posloupnosti

$$x_1 = b - \frac{1}{k+1}, \quad x_2 = b - \frac{1}{k+2}, \ldots x_n = b - \frac{1}{k+n}, \ldots,$$

kdež k jest kladné číslo tak volené, že $b - 1 : (k+1) > a$. Příslušné hodnoty

$$y_1 = f(x_1), \ y_2 = f(x_2), \ldots y_n = f(x_n), \ldots$$

tvoří posloupnost neklesající a shora ohraničenou. Eksistuje tedy $\lim_{n \to \infty} y_n = A$, to znamená: Zvolíme-li ε libovolně malé, kladné, lze nalézti vždy takové $N(\varepsilon)$, že

$$0 \leqq A - f(x_n) < \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad n \geqq N(\varepsilon).$$

Tvrdíme nyní, že tato nerovnost platí nejen pro členy posloupnosti $x_N, x_{N+1}, \ldots$, atd., nýbrž i pro všechna x splňující nerovniny

$$b - \frac{1}{N+k} < x < b, \quad \text{čili} \quad 0 < b - x < \frac{1}{N(\varepsilon)+k} = \delta(\varepsilon)$$

a že tedy $\lim_{x \to b-0} f(x) = A$.

Důkaz jest tento: Splňuje-li x hořejší nerovnosti, padne mezi dva za sebe jdoucí členy posloupnosti:

$$x_{N+r} \leqq x < x_{N+r+1} \;.$$

Jest tedy, protože $f(x)$ jest neklesající funkce,

$$f(x_{N+r}) \leqq f(x) \leqq f(x_{N+r+1}),$$
$$\varepsilon > A - f(x_{N+r}) \geqq A - f(x) \geqq A - f(x_{N+r+1}) \geqq 0 \text{ s. e. d.}$$

Obdobná věta platí o druhém konci intervalu

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = B$$

a obě věty dokážou se snadno i pro funkce *nestoupající.*

Pro funkce, které nejsou monotoní, užívá se obecného kritéria Bolzano-Cauchy-ova, které zní:

Jestliže ke každému libovolně malému, kladnému ε lze nalézti $\delta(\varepsilon)$, takže

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

pro všechna x_1 a x_2 splňující nerovnosti

$$0 < |x_1 - a| \leqq |x_2 - a| \leqq \delta(\varepsilon),$$

pak $f(x)$ má limitu, když $x \to a$.

Podmínka tato jest nutná, neboť, když $f(x)$ má limitu A, pak lze ke každému $\varepsilon/2$ nalézti $\delta(\varepsilon)$, takže

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro} \quad 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon).$$

Volíme-li tedy x_1 a x_2 v tomto intervalu, je

$$|(f(x_1) - A) - (f(x_2) - A)| \leqq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

a tedy
$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

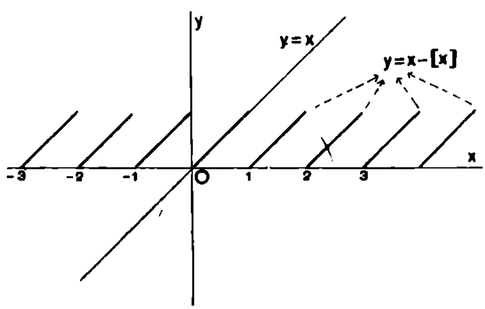
Podmínka jest však také postačující, neboť, když jest splněna, lze kolem a nalézti interval $< a - \delta(10^{-1}),\ a + \delta(10^{-1}) >$, takže pro x v něm ležící padnou příslušné hodnoty $f(x)$ do intervalu na ose y-ové délky $2:10$. Uvnitř předešlého intervalu na ose x lze však nalézti druhý $< a - \delta(10^{-2}),\ a + \delta(10^{-2}) >$, takže příslušná $f(x)$ jsou v intervalu délky $2:100$ atd. Intervaly na ose y, do nichž padne $f(x)$, mají délky $2 \,.\, 10^{-1}, 2 \,.\, 10^{-2}, 2 \,.\, 10^{-3}, \ldots$ a leží vždy následující uvnitř předcházejícího. Definují tedy podle věty o zařazených intervalech z odst. 8. jeden jediný bod všem společný A, který jest hledanou limitou, neboť rozdíl

$$|f(x) - A| < 2 \,.\, 10^{-n}$$

pro všechna x, ležící v intervalu

$$< a - \delta(10^{-n}),\ a + \delta(10^{-n}) > .$$

Cvičení. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(1:x)}{\sin(1:x)}$ neexistuje. (Uvažujte posloupnost $x_1 = 1/\pi$ $x_2 = 1/2\pi,\ x_3 = 1/3\pi, \ldots.\ x_n = 1/n\pi \ldots.$)



Obr. 6.

20. Funkce spojité a nespojité. Přirovnejme grafy funkcí $y = x$, $y = x - [x]$. Názor (obr. 6) nás poučuje o tom, že přímka $y = x$ probíhá nepřetržitě (spojitě), kdežto druhá čára v bodech $x = 1, 2, 3, \ldots$ se mění skokem, takže obraz křivky skládá se z různých spolů nesouvisejících tahů. Avšak slova »probíhá spojitě«, kterých jsme užili, jsou velmi neurčitá. Proto definujeme *spojitost* (continuité, Stetigkeit) funkce (křivky) v daném bodě takto:

Funkce $f(x)$ jest spojitá v daném bodě $x = x_0$, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Obšírněji řečeno:

Pro každé libovolně malé, kladné ε lze nalézti $\delta(\varepsilon)$, takže

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pokud} \quad 0 \leqq |x - x_0| < \delta(\varepsilon).$$

Limita $f(x)$, když $x \to x_0$ a $f(x_0)$ jsou tedy pro *spojité* funkce totožné. Není-li to splněno, jest $f(x)$ v bodě x_0 *nespojitá.*

Z toho jest patrno, že funkce $f(x)$, která není definována v bodě x_0, jest tam nespojitá. Tak na př.

$$\frac{1}{x}, \ \frac{x}{x}, \ \frac{\sin x}{x}, \ \frac{1}{\sin x} \text{ a pod.}$$

jsou nespojité v bodě 0. Mnohočlen jest funkce spojitá v každém bodě, neboť

$$\lim_{x \to x_0} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n) = a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Racionální funkce lomená jest spojitá ve všech bodech s výjimkou těch, v nichž jmenovatel stává se roven nule. Součet, rozdíl, součin a podíl spojitých funkcí jest opět spojitá funkce. Při podílu ovšem jen tenkrát, když v uvažovaném bodě jest jmenovatel od nuly různý. Čtenář si sestrojí důkazy těchto tvrzení, užívaje vět o limitách z odst. 17.

Dokážeme spojitost funkce $\sin x$. Víme, že $|\sin x| < |x|$ pro všechna x kladná nebo záporná. Je tedy

$$|\sin x - \sin 0| < \varepsilon \quad \text{pokud} \quad |x| < \varepsilon$$

ať ε jest kladné, jakkoli malé. Tím jest dokázána spojitost $\sin x$ v bodě 0. Z toho plyne, že $(1 - \cos x) = 2 \sin^2 x/2$ jest také spojitá funkce v bodě 0 a tedy $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$ čili $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. Z této okolnosti a ze známých vět goniometrických plyne

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \lim_{y \to 0} \{\sin (x_0 + y)\} = \lim_{y \to 0} \{\sin x_0 . \cos y + \cos x_0 . \sin y\} =$$
$$= \sin x_0, \text{ q. e. d.}$$

Funkce $\cos x = \sin (\pi/2 + x)$ jest tedy také spojitá v každém bodě.

Cvičení. 1. Ve kterých bodech jsou spojité a kde nespojité funkce $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$?

2. Je-li $f(y)$ spojitá funkce v bodě η a $\varphi(x)$ spojitá v bodě ξ a je-li mimo to $\varphi(\xi) = \eta$, pak $f(\varphi[x])$ jest spojitá funkce pro $x = \xi$.

(Polož $\varphi(x) = y$. Když $x \to \xi$, tedy $y \to \eta$. Z toho plyne, protože $f(y)$ jest spojitá

$$\lim_{x \to \xi} f(\varphi[x]) = \lim_{x \to \eta} f(y) = f(\eta) = f(\varphi[\xi]).$$

3. Funkce definovaná vztahy
$y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $y = 0$ pro $x = 0$, jest spojitá v bodě $x = 0$.

Funkce $y = [1 - x^2]$ jest nespojitá v bodě 0, ačkoliv tam má limitu.

Funkce $y = x$ pro racionální x, y nedefinováno pro iracionální x, jest nespojitá v každém bodě, ačkoliv její graf jest nerozeznatelný od grafu přímky $y = x$.

4. Podobně jako v odst. 18 jsme definovali limity z leva a z prava, můžeme definovati spojitost z leva a z prava.

Funkce $f(x)$ jest spojitá z leva v bodě $x = x_1$, jestliže jest $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} f(x) = f(x_1)$.

Dokažte věty: a) Je-li $f(x)$ v bodě x_1 spojitá, jest tam spojitá z leva i z prava. b) Je-li $f(x)$ v bodě x_1 spojitá z leva i z prava, jest tam spojitá.

5. Funkce $y = [x]$, $y = x - [x]$ jsou spojité z prava v bodech $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Všude jinde jsou spojité.

6. Funkce $y = x$ pro racionální x, $y = 2x$ pro ostatní x, jest spojitá pro $x = 0$ a nespojitá všude jinde.

21. Pokračování. Dosud jsme mluvili o spojitosti funkce v daném bodě. Můžeme nyní definovati spojitost funkce v celém intervalu:

a) Funkce jest spojitá v otevřeném intervalu (a, b), je-li spojitá v každém bodě toho intervalu.

b) Funkce jest spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, je-li spojitá v (a, b) a spojitá z prava v bodě a, z leva v bodě b.

Místo slova funkce spojitá můžeme při geometrické interpretaci klásti slova *křivka spojitá.* Jest však velmi důležito uvědomiti si, že naše definice křivky spojité v $\langle a, b \rangle$ *není* vzata z názoru. Definice ta opírá se o vlastnosti křivky v jednotlivých bodech a nikoliv o vlastnosti křivky jako celku. Spojitá křivka v $\langle a, b \rangle$, *jako celek,* má vlastnosti, které jsou nám sice známy z názoru na některé jednoduché křivky (jako přímka, kružnice nebo parabola a j.), které však vyžadují důkazu, máme-li jim přiřknouti všeobecnou platnost. Jsou to zejména tyto tři vlastnosti:

I. Je-li $f(x)$ spojitá a od nuly různá v bodě $x = x_1$, pak v určitém okolí bodu x_1 má $f(x)$ totéž znamení, jako $f(x_1)$.

II. Jestliže $f(x)$ jest v $< a, b >$ spojitá a mají-li čísla $f(a)$, $f(b)$ různá znamení, má rovnice $f(x) = 0$ v (a, b) aspoň jeden kořen, to jest křivka $y = f(x)$ protíná osu x mezi a a b.

III. Jestliže $f(x)$ jest v $< a, b >$ spojitá, pak mezi hodnotami, kterých $f(x)$ tam nabývá, jest největší hodnota a nejmenší hodnota. (Věta Weierstrass-ova.)

Důkazy těchto vět a některých jejich důsledků následují. Čtenář, který nepocítí ihned potřebu těchto důkazů, může odložiti studium následujících dvou odstavců na dobu pozdější.

22. První a druhá věta o spojitých funkcích. Funkce jest v bodě $x = x_1$ spojitá a od nuly různá. Dejme tomu, že $y_1 = f(x_1)$ jest kladné číslo. Protože $f(x)$ jest v bodě tom spojitá, jest možno splniti nerovninu

$$f(x) - f(x_1) < y_1/2, \text{ čili } f(x_1) - y_1/2 < f(x)$$

pro všechna x splňující nerovnost

$$x_1 - \delta(y_1) < x < x_1 + \delta(y_1),$$

kdež $\delta(y_1)$ jest kladné číslo závislé na y_1. Protože však $f(x_1) = y_1$, tedy

$$f(x) > y_1 - y_1/2 = y_1/2.$$

To znamená, že $f(x)$ jest kladné, pokud x jest v $< x_1 - \delta, x_1 + \delta >$.

Je-li $f(x_1)$ záporné číslo, uvažujeme funkci $y = -f(x)$ a seznáme, že v určitém okolí bodu x_1 je $-f(x)$ kladné a tedy $f(x)$ záporné. Větu první lze rozšířiti i na jednostranně spojitou funkci, když opakujeme předešlou úvahu s tou změnou, že místo intervalu $< x_1 - \delta, x_1 + \delta >$ uvažujeme příslušný interval jednostranný (na př. $< x_1, x_1 + \delta >$ při spojitosti z prava.)

Abychom dokázali druhou větu o spojitých funkcích, předpokládejme, že $f(a)$ a $f(b)$ mají různá znamení. Rozpůlíme interval $< a, b >$. V bodě půlicím x_1 je $f(x_1)$ buď rovno nule, nebo kladné, nebo záporné. Je-li $f(x_1)$ rovno nule, je věta dokázána. Je-li $f(x_1) \neq 0$, tedy buď $f(a)$ a $f(x_1)$ mají různá znamení, nebo $f(x_1)$ a $f(b)$ mají různá znamení. Zvolme k další úvaze ten poloviční interval, na jehož koncích má $f(x)$ různá znamení a označme interval ten $< a_1, b_1 >$. Rozpůlíme tento interval a opakujeme předcházející pochod myšlenkový. Obdržíme tak buď bod x_2, v němž $f(x_2) = 0$, nebo nový čtvrtinový interval $< a_2, b_2 >$, na jehož koncích má $f(x)$ různá znamení.

Tak pokračujeme dále. Jsou nyní jen dvě možnosti. Buď po konečném počtu n kroků dojdeme k bodu půlícímu x_n, který má vlastnost $f(x_n)=0$ a pak věta jest dokázána. Nebo žádný půlící bod x_n nemá této vlastnosti. V tomto případě získáme nekonečnou posloupnost intervalů $<a, b>$, $<a_1, b_1>$, $<a_2, b_2>\ldots$, do sebe zařazených, z nichž $(n+1)$-vý má délku $(b-a):2^n$. Tyto intervaly definují jediný bod ξ, který jest v každém z nich. Tvrdíme nyní, že $f(\xi)=0$. Bod ξ má totiž tu vlastnost, že v každém sebe menším jeho okolí nabývá $f(x)$ jak kladných, tak záporných hodnot, neboť každé jeho okolí obsahuje ve svém nitru nekonečně mnoho intervalů $<a_n. b_n>$. Tuto vlastnost nemůže míti podle věty I žádný bod, v němž funkce jest od nuly různa a tedy nutně $f(\xi)=0$.

Věta dokázaná má důležitý důsledek:

Jestliže $f(x)$ jest spojitá v $<a, b>$ a při tom $f(a)\neq f(b)$, pak $f(x)$ nabývá v $<a, b>$ všech hodnot obsažených mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Budiž na př. $f(a)>f(b)$ a m hodnota mezi čísly těmi položená. Potom funkce $F(x)=f(x)-m$ jest spojitá v $<a,b>$ a má vlastnost $F(a)>0$, $F(b)<0$. Podle věty II jest tedy $v<a,b>$ obsažen bod ξ té vlastnosti, že $F(\xi)=0$, čili $f(\xi)=m$.

Cvičení 1. Každá algebraická rovnice $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots$ $\ldots+a_n=0$ *lichého* stupně s reálnými koeficienty má aspoň jeden reálný kořen.

(Za předpokladu, že $a_0>0$, urči znamení funkce

$$y=P(x)=x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)$$

pro tak veliká kladná x a pro tak veliká záporná x, že znaménko závorky jest totožné se znaménkem a_0.)

2. Rovnice *Kepler*-ova $x-e.\sin x=M$, kdež $0\leq e<1$ a M jsou daná čísla, má aspoň jeden kořen reálný. (Vyhledej znamení funkce $f(x)=x-e.\sin x-M$ pro dosti veliké kladné a dosti veliké záporné x. Uvidíme později, že rovnice má jen jediný kořen.)

3. Rovnice $\operatorname{tg} x-a.x=0$ $(a>0)$, má kořeny v intervalech $(\pi/2, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, 5\pi/2)$, ...

23. Třetí věta o spojitých funkcích. Funkce nespojitá vlastnosti té míti nemusí. Tak na př. $y=x-[x]$ v intervalu $<0,2>$ jest všude menší než 1 a při tom nabývá hodnot tak blízkých jedné, jak chceme. Nenabývá tedy nikde hodnoty maximální.

Uvažujme nyní o funkci $f(x)$ spojité v $<a,b>$. Rozpůlíme $<a,b>$ a přirovnáme čísla $f(a)$, $f([a+b]:2)$, $f(b)$. Jedno z nich bude největší. Příslušnou úsečku označíme x_1. Rozdělíme $\langle a, b \rangle$ dalšími dvěma dělícími body na čtyři stejné díly. Přirovnáme pět pořadnic příslušných k dělícím bodům. Úsečku největší pořadnice nazveme x_2. Tak pokračujeme stále. Jestliže při některém z těchto kroků vznikne několik »největších« (sobě rovných) pořadnic, volíme z nich tu, která má nejmenší úsečku. Tak vzniknou dvě posloupnosti

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, f(x_1) \leqq f(x_2) \leqq f(x_3) \leqq \ldots.$$

Posloupnost prvá má aspoň jeden bod zhuštění ξ, ležící v $\langle a, b \rangle$. Tvrdíme nyní, že v bodě tom nabývá $f(x)$ svého maxima, to jest: Zvolím-li libovolně x v $\langle a, b \rangle$, bude vždy $f(x) \leqq f(\xi)$.

Z prvé posloupnosti můžeme vybrati novou posloupnost $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots x_{n_k}$ která má limitu ξ (viz odst. 4, cvič. 4). Potom jest vzhledem ke spojitosti

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

Zvolme libovolný bod x v $\langle a, b \rangle$. Bod ten leží mezi dvěma dělícími body dělení n-tého $x_n' \leqq x \leqq x_n''$. Protože jest $x_n'' - x_n' = (b - a) : 2^n$, je patrně $\lim\limits_{n \to \infty} x_n' = x$ a tedy podle věty b) z odst. 4 také $\lim\limits_{k \to \infty} x'_{n_k} = x$ a proto $\lim\limits_{k \to \infty} f(x'_{n_k}) = f(x)$. Avšak x_{n_k} a x'_{n_k} jsou úsečky patřící k témuž n_k-tému půlení. Jest tedy

$$f(x_{n_k}) \geqq f(x'_{n_k}) \text{ a tedy také } \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) \geqq \lim_{k \to \infty} f(x'_{n_k}),$$

to jest $f(\xi) \geqq f(x)$ q. e. d.

Podobně se dokáže, že existuje v $\langle a, b \rangle$ bod η, v němž má $f(x)$ minimální hodnotu $f(\eta) \leqq f(x)$. Tím jest třetí věta dokázána.

Důsledek její jest:

Funkce $f(x)$ spojitá v $\langle a, b \rangle$ jest tam oboustranně ohraničená. Jest totiž $f(\eta) \leqq f(x) \leqq f(\xi)$ pro každé $a \leqq x \leqq b$. Funkce $f(x)$ jest spojitá také v $\langle \xi, \eta \rangle$ (nebo $\langle \eta, \xi \rangle$) a podle důsledku ke druhé větě nabývá všech hodnot mezi $f(\eta)$ a $f(\xi)$.

24. Inversní funkce. Budiž $y = f(x)$ funkce spojitá v $\langle a, b \rangle$ stále stoupající; tím míníme, že, kdykoli $x_1 > x_2$ je také $f(x_1) > f(x_2)$. Potom jest $B = f(b) > f(a) = A$ a funkce

$y = f(x)$ nabývá každé hodnoty mezi těmito dvěma mezemi a sice každé jen jednou. Z toho vyplývá, že ke každému y, ležícímu v int. $< A, B >$, přísluší jedno jediné x, splňující rovnici $y = f(x)$. Můžeme tedy podle obecné definice funkce z odst. 15 považovati x za funkci nezávisle proměnné y v $< A, B >$ a psáti

$$x = \varphi(y).$$

Jest to *inversní funkce* k funkci $y = f(x)$. Tato inversní funkce jest samozřejmě stále stoupající a jest také spojitá, jak ihned dokážeme.

Vybeřme si v int. (A, B) libovolné číslo y_0 a volme ε libovolně malé a kladné tak, aby $x_0 + \varepsilon$ a $x_0 - \varepsilon$ leželo v $< a, b >$, při čemž jest $x_0 = \varphi(y_0)$. Pak jest

$$y_0 = f(x_0)\,, \quad x_0 = \varphi(y_0)\,; \quad y_0 + \delta_1 = f(x_0 + \varepsilon), \quad y_0 - \delta_2 = f(x_0 - \varepsilon).$$

Čísla kladná δ_1 a δ_2 jsou tím přesně určena a závisí patrně na volbě čísla ε. Inversí předešlých rovnic získáme

$$x_0 + \varepsilon = \varphi(y_0 + \delta_1), \quad x_0 - \varepsilon = \varphi(y_0 - \delta_2).$$

Označme menší z čísel δ_1, δ_2 znakem $\delta(\varepsilon)$. Zvolíme-li nyní y v int. $< y_0 - \delta, y_0 + \delta >$, padne příslušné $x = \varphi(y)$ do $< x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon >$, neboť $\varphi(y)$ jest funkce stoupající. Tím jest však dokázáno, že

$$|x - x_0| = |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon \quad \text{pokud} \quad |y - y_0| < \delta(\varepsilon), \quad \text{s. e. d.}$$

Podobným postupem se dokáže spojitost z prava v bodě $y = A$ a spojitost z leva pro $y = B$.

Rovněž funkce spojitá v $< a, b >$, stále *klesající*, má inversní funkci spojitou, což se dokáže obdobně jako nahoře.

25. Funkce eksponenciální a logaritmus. Funkce eksponenciální $y = a^x$, definovaná v odst. 6 pro každé reálné x, jest stále stoupající, jestliže $a > 1$. Dokážeme její spojitost nejdříve v bodě 0. Užijeme k tomu vztahu $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, dokázaného v citovaném odstavci, který má tento význam: Je-li ε libovolně malé a kladné, jest

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon \text{ pro } n > N(\varepsilon).$$

Uvážíme-li, že a^x jest stoupající, usoudíme, že také

$$a^x - 1 < \varepsilon \text{ pro } 0 < x < 1 : [N(\varepsilon) + 1].$$

Místo nerovnin těchto lze psáti symbol

$$\lim_{x \to +0} a^x = 1 = a^0.$$

Dále jest $\lim_{n \to \infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$ a tedy

$$1 - a^{-\frac{1}{n}} < \varepsilon \text{ pro } n > N_1(\varepsilon).$$

Z toho plyne, jako svrchu,

$$1 - a^x < \varepsilon \text{ pro } 0 > x > -1 : [N_1(\varepsilon) + 1], \text{ čili } \lim_{x \to -0} a^x = a^0.$$

Celkem můžeme psáti $\lim_{x \to 0} a^x = 1$, neboť limity z prava i z leva jsou obě rovny jedné. Spojitost v libovolném bodě x_0 jest pouhým důsledkem, neboť

$$\lim_{x \to x_0} a^x = \lim_{h \to 0} a^{x_0 + h} = a^{x_0} . \lim_{h \to 0} a^h = a^{x_0} . 1.$$

Celkem můžeme říci: Funkce $y = a^x$ $(a > 1)$ jest spojitá a stále vzrůstající v každém intervalu. Následkem toho má podle věty předešlého odst. spojitou a stále stoupající inversní funkci, kterou nazýváme *logaritmus y při základu a* a píšeme

$$x = \log_a y.$$

Obor proměnné y jsou všechna reálná čísla, větší než nula, neboť a^x nabývá všech hodnot větších než nula a jen těchto, když x probíhá množství $(-\infty, +\infty)$. Základem a logaritmů může býti kterékoliv číslo > 1. Při numerickém počítání užívá se nejčastěji logaritmů *desítkových* (dekadických, $a = 10$). Tak zvané logaritmy *přirozené* mají základem iracionální číslo $e = 2{\cdot}71828\ldots$ Důvod jejich názvu seznáme z odst. 29.

Souvislost dvou různých logaritmických soustav o základech a a b seznáme, když uvážíme, že ze vztahů

$$x_1 = \log_a y, \quad x_2 = \log_b y \text{ plyne}$$
$$y = a^{x_1} = b^{x_2} \quad \text{čili} \quad a^{\log_a y} = b^{\log_b y}.$$

Je tedy

$$\log_a [a^{\log_a y}] = \log_a [b^{\log_b y}] \quad \text{čili} \quad \log_a y = \log_a b . \log_b y.$$

Dosadíme-li sem $y = a$, obdržíme

$$1 = \log_a b . \log_b a$$

a tedy

$$\log_a y = \log_a b . \log_b y = \frac{1}{\log_b a} \log_b y.$$

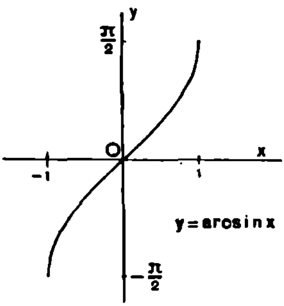
Vzorce toho užívá se při převodu soustav logaritmických. Tak na př., značíme-li dekadické logaritmy *log y* a přirozené *lg y*, bude

$$\log y = \log e \,.\, \lg y = \frac{1}{\lg 10}\,.\, \lg y, \quad \left(\log e = \frac{1}{\lg 10} = 0{\cdot}4343\ldots\right)$$

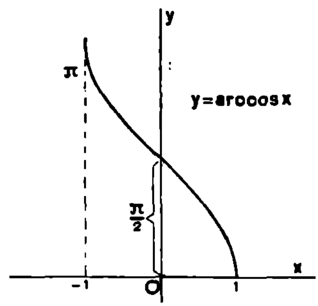
26. Funkce cyklometrické. Funkce $x = \sin y$ jest v oboru $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ pro y funkce spojitá a stále stoupající. Má tedy inversní funkci spojitou a stále stoupající, kterou nazýváme *arkus sinus x* a píšeme

$$y = \arc\sin x, \quad -1 \leqq x \leqq 1. \quad \text{(Obr. 7a.)}$$

Význam této funkce nejlépe si zapamatujeme, když předešlý vztah čteme trochu obšírněji: y jest arkus (oblouk),



Obr. 7a.



Obr. 7b.

který přísluší k danému sinu x. Tak na př. *arcsin* $0 = 0$, arcsin $1/2 = \pi/6$, arc sin $1 = \pi/2$, arc sin $-1/\sqrt{2} = -\pi/4$ atd.

O funkci *sinus* víme z geometrie, že

$$\sin y = \sin(y + 2k\pi) = \sin[(2k+1)\pi - y], \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

Následkem toho rovnice $x = \sin y$ má mimo už definované řešení $y = \arc\sin x$ ještě nekonečně mnoho dalších

$$y = \arcsin x + 2k\pi, \quad y = (2k+1)\pi - \arcsin x,$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$$

Funkce $x = \cos y$ jest spojitá a monotonní v oboru $< 0, \pi >$ pro y. Její inversní funkce jest *arkus kosinus x*

$$y = \arc\cos x, \quad -1 \leqq x \leqq 1. \quad \text{(Obr. 7b.)}$$

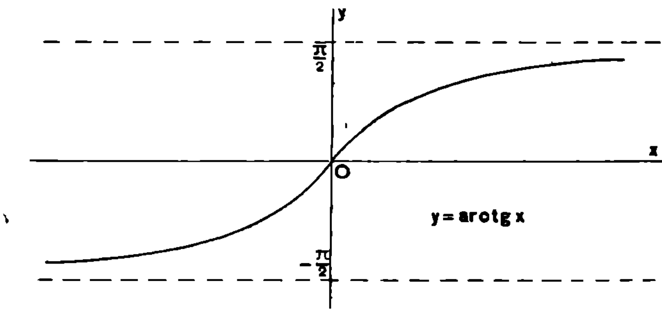
Protože $x = \cos y = \sin(\pi/2 - y)$, čili $y = \arccos x$, $\pi/2 - y = \arcsin x$, jest mezi funkcemi vztah

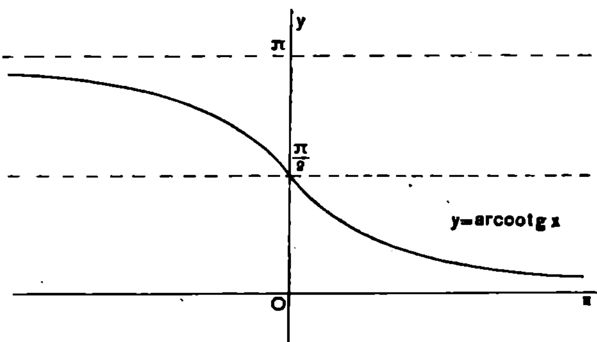
$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

Iversní funkce k $x = \operatorname{tg} y$, $-\pi/2 < y < \pi/2$, jest *arkus tangens x*

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad \text{(Obr. 8}a\text{.)}$$

Obr. 8a.





Obr. 8b.

a inversní funkce k $x = \operatorname{cotg} y$, $0 < y < \pi$, jest *arkus kotangens x*

$$y = \operatorname{arc\,cotg} x, + \infty < x < + \infty, \quad \text{(Obr. 8}b\text{.)}$$

Ze stejného důvodu, jako dříve, jest

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Cvičení. Dokažte vztahy

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$,
$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x$,

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccotg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

(pokud $0 < x < 1$),
$\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x : x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{arctg} x : x) = 1$.

Kapitola V.

PRVÁ DERIVACE A DIFERENCIÁL.

27. Definice derivace. Budiž dána funkce $y = f(x)$, definovaná v okolí bodu x. Zvětšíme-li x o kladné nebo záporné číslo $h = \Delta x$,*) zvětší se při tom $f(x)$ o kladné nebo záporné číslo $\Delta y = f(x+h) - f(x)$. Podíl

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

nazývá se podíl diferencí a závisí, jak patrno, na čísle x, na velikosti h a na tvaru funkce $f(x)$. Jestliže pokládáme $f(x)$ za pevně zvolenou funkci, x *za pevně zvolené číslo*, jest podíl ten funkcí jen proměnného čísla h. Jest tedy

$$\varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Tato funkce jest definována pro všechna h, pro která jest definováno $f(x+h)$ s výjimkou jediné hodnoty $h = 0$, neboť nulou nelze děliti. Přes to však, jak víme, může eksistovati $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)$. Jestliže limita tato v daném případě eksistuje, nazýváme ji *derivace* $f(x)$ v bodě x a píšeme

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\varphi(h) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).}$$

Limita závisí na x a na tvaru funkce $f(x)$. Není ovšem již

---

*) Δx čteme »delta x«. Jest to diference (rozdíl) dvou hodnot $(x+h)$ a x. Někdy říkáme, že Δx jest přírůstek x, Δy přírůstek y. Δx není součin veličin Δ a x, nýbrž symbol, podobně jako $f(x)$.