Úvod do počtu diferenciálního

Čísla racionální a reálná

In: Miloš Kössler (author): Úvod do počtu diferenciálního. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1926. pp. 7–17.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402707

Kapitola I.

ČÍSLA RACIONÁLNÍ A REÁLNÁ.

1. Čísla racionální. Matematika jedná o číslech. Z těchto čísel odvozujeme při počítání jiná čísla podle určitých nezměnitelných pravidel početních. S tohoto hlediska můžeme přirovnati matematiku ke hře šachové, která jest definována figurami, šachovnicí a přesnými pravidly hry. Pravidla tato jsou tak zvolena, aby žádné z nich neodporovalo druhému. Výsledkem operací jsou určité posice figur na šachovnici. Základem matematiky jest deset cifer (figur) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, potom řada operačních symbolů jako $+$, $-$, $=$, $:$, zlomková čára, desetinná tečka, závorky atd. a obecná čísla $a, b, c, \ldots p, q$, to jest zkratky, jimiž označujeme určitá seskupení cifer a jiných symbolů, jako na př. $a = 0{\cdot}357$, $b = 8/7$ atd. Z těchto symbolů tvoříme podle přesně předepsaných pravidel symboly nové. Ty jsou pak výsledkem počtu. Pravidla počtu jsou tak předepsána, aby žádné z nich nebylo ve sporu s jinými. Pravidla početní pro čísla celistvá kladná, záporná a nulu pokládejme za známá. Dvojice čísel celistvých (p, q), kdež q není rovno nule, definuje jednoznačně racionální číslo (zlomek) $a = p/q = p : q$. Jestliže dva znaky představují totéž číslo, píšeme $a = b$. Je-li a různé od b, píšeme $a \neq b$. Symbol $>$ čteme »jest větší než«, symbol $<$ »jest menší než« a symbol $\geq$ »jest větší nebo rovno«. Počítání čísly racionálními pokládáme rovněž za známé. Řídí se pravidly, která splňují určité požadavky, jež jsou tak zvoleny, že při správném počítání podle nich nemůže dojíti ke sporům. Tyto požadavky jsou:

A. Spořádanost čísel.

I. Jsou-li a, b dvě čísla, jest splněn vždy jeden a jen jeden ze vztahů $a = b$, $a > b$ (čili $b < a$), $a < b$ (čili $b > a$).

II. Je-li $a > b$, $b > c$, jest také $a > c$. ve [illegible] n (>3) atd.

Definice. Číslo a jest kladné, když $a > 0$, záporné, když $a < 0$, vymizí, když $a = 0$. Nula není ani kladná, ani záporná.

B. Sčítání.

III. Jsou-li a, b čísla, jest také $a + b$ číslo (jednoznačně určené).

IV. $a + b = b + a$. (Zákon komutatívní.)

V. $a + (b + c) = (a + b) + c$. (Zákon asociatívní.)

VI. Jediné číslo nula má vlastnost $a + 0 = a$.

VII. Je-li $a > b$, jest také $a + c > b + c$. (Zákon monotonie).

VIII. Rovnice $a + x = 0$ má vždy (jediné) řešení, které označujeme $x = -a$.

C. Násobení.

IX. Jsou-li a, b čísla, jest také ab číslo (jednoznačně stanovené). Píšeme také $ab = a \,.\, b = a \times b$.

X. $ab = ba$. (Zákon komutatívní.)

XI. $a(bc) = (ab)c$. (Zákon asociatívní.)

XII. Jediné číslo *jedna* má vlastnost $a \,.\, 1 = a$, když $a \neq 0$.

XIII. Je-li $a > b$ a $c > 0$ jest $ac > bc$. Je-li $c < 0$, jest $ac < bc$ a je-li $c = 0$, jest $ac = bc = 0$. (Zákon monotonie.)

XIV. Rovnice $ax = 1$ má vždy (jediné) řešení, pokud $a \neq 0$. Řešení to označujeme $x = 1/a = 1 : a$. (Rovnice $0 \,.\, x = 1$ *nemá* řešení!)

XV. $a(b + c) = ab + ac$. (Zákon distributívní.)

D. Odčítání a dělení.

definujeme vztahy

$$a - b = a + (-b), \qquad a : b = \frac{a}{b} = a \,.\, \frac{1}{b}, \quad (b \neq 0).$$

Děliti nulou nelze.

E. Požadavek Archimedův.

XVI. Je-li a číslo, pak lze nalézti celistvá kladná čísla n, pro která jest $n > a$.

Všechna další početní pravidla čísly racionálnými jsou pouhé logické důsledky předešlých. Tak na př. $b + (a - b) = a$, neboť

$$\begin{aligned} b + (a - b) &= b + (a + [-b]), \text{ (podle D)}, \\ &= b + ([-b] + a), \text{ (podle IV)}, \\ &= (b + [-b]) + a, \text{ (podle V)}, \\ &= 0 + a = a \text{ (podle VIII a VI)}. \end{aligned}$$

Důležité jest počítání nerovninami. Mimo pravidla sub I, II, VII, XIII, často se užívá těchto dalších, jež jsou z nich odvozena. Ve vztazích VII a XIII lze všechna znamení nerovnosti nahraditi opáčnými. Tak na př. z nerovnosti $a < b$ plyne $a + c < b + c$, neboť podle I jest $a < b$ ekvivalentní s $b > a$ a tedy podle VII jest $b + c > a + c$, čili opět podle I $a + c < b + c$. Z nerovnosti $ac > bc$ plyne při $c > 0$, $a > b$; při $c < 0$, $a < b$.

Zákony monotonie lze poněkud rozšířiti. Ze vztahů $a > b$, $c \geq d$, plyne $a + c > b + d$, neboť $a + c > b + c \geq b + d$. Je-li mimo to $d > 0$, bude také $ac > bd$ (neboť $ac > bc \geq bd$). Je-li $a > 1$, jest $\frac{1}{a} < 1$. Je-li $0 < b < 1$, jest $\frac{1}{b} > 1$.

Postuláty a definice, které jsme uvedli, stačí úplně k vybudování celé aritmetiky čísel racionálních, nemůžeme však tvrditi, že jsou na sobě nezávislé, to jest, že žádný z nich nelze odvoditi z ostatních.*)

Čísly racionálními nevystačíme při všech úlohách, ke kterým vede aritmetika. Tak na př. rovnice kvadratická $x^2 = 2$ (vypočísti úhlopříčku čtverce, jehož strana jest rovna jedné), není řešitelna, jak věděl již E u k l e i d e s, číslem racionálním. Úloh toho druhu jest mnoho. Proto jsme nuceni zavésti do matematiky n o v á č í s l a, tak zv. čísla *reálná*, která nám umožní řešiti i úlohy toho druhu. Tato nová čísla jsou čtenáři jistě známa ve tvaru nekonečných zlomků desetinných, jako na př. $1/3 = 0{\cdot}33333\ldots$, $\sqrt{2} = 1{\cdot}414\ldots$, $\pi = 3{\cdot}14159\ldots$ Na prvý pohled se může zdáti, že čísla ta nejsou nic nového, neboť na př. obvod kružnice každý ze čtenářů již mnohokráte počítal podle vzorce $O = 2\pi r$, což by mohlo vésti k domněnce, že pravidla početní pro taková čísla nijak se neliší od obvyklých pravidel pro čísla racionální. Zde však jest nutno si uvědomiti, že při tom užíváme čísla π pouze zdánlivě, neboť ve sku-

*) Viz o tom podrobněji L o e w y A.: Lehrbuch der Algebra, Lipsko 1915, nebo P e r r o n O.: Irrationalzahlen, Berlín-Lipsko, 1921.

tečnosti počítáme přibližnou hodnotou 22/7 nebo 3·14159, která jest racionální. Takové přibližné počítání není uspokojivé se stanoviska teorie, která naopak žádá, abychom odvodili právě tak přesná pravidla početní pro čísla reálná, jako je známe pro čísla racionální. Abychom k tomu dospěli, musíme čísla reálná definovati a stanoviti pro ně pravidla početní, neobsahující sporu. Tak na př. musíme stanoviti, jak se počítá přesně součet $\sqrt{2}+\pi$ nebo součin $\sqrt{2}.\pi$. Že při tom nevystačíme s pravidly, která známe z aritmetiky pro desetinné zlomky o konečném počtu cifer, jest ihned patrno, neboť není na př. možno napsati pod sebe dvě čísla o nekonečném počtu cifer a pak prováděti sčítání nebo násobení jejich.

Proto látka, tvořící obsah odstavce následujícího (a dodatku I) jest základní důležitosti pro logické vybudování matematiky jako vědy. A jen v tomto vybudování spočívá oprávněnost matematiky, neboť o správnosti výsledku nemůžeme se přesvědčiti experimentem (jako na př. ve fysice), nýbrž jen tím, že dokážeme jeho souhlas s pravidly početními, která jsme přijali jako základ.

2. Definice čísel reálných a počítání jimi. Užíváme cifer a znamének vztahu + a — podobně jako při číslech desetinných o konečném počtu cifer. Definujeme číslo reálné takto:

Číslo reálné jest symbol myšlený v podobě čísla desetinného kladného, záporného nebo rovného nule o nekonečném počtu cifer.

Slovy »symbol o nekonečném počtu cifer« rozumíme takový symbol, v němž za *každou* cifrou na pravo od desetinné tečky následují cifry ležící ještě dále na pravo. Jest zřejmo, že takové číslo nemůžeme definovati tím, že bychom je vskutku napsali. Přes to jest možno číslo takové v myšlenkách sestrojiti na př. rčením: Na levo od desetinné tečky stojí plus a nula, na pravo od desetinné tečky stojí na n-tém místě cifra 1, když n jest mocnina dvojky ($n = 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$) a cifra 0, když n není mocnina dvojky. Čísla reálná, která v hořejší definici jsme postulovali, lze tedy vskutku sestrojiti určitým konstruktivním předpisem. Obecně to vyjádříme slovy:

Číslo reálné, od nuly různé, jest dáno, když jest možno jednoznačně stanoviti jeho znamení vztahu a cifru stojící na libovolném místě před nebo za desetinnou tečkou.

Znamení vztahu + a — musíme při tom rozeznávati od stejně psaných znamení úkonu (sčítání a odčítání). Znamení vztahu + u čísel reálných obyčejně vynecháváme. Cifra, která stojí na n-tém místě na pravo od desetinné tečky, nazývá se cifra *řádu n-tého.* U čísel reálných budeme cifry až po řád n-tý nazývati *úsek řádu n-tého.* Tak na př. pro číslo $\pi =$ $= 3{\cdot}1415926\ldots$ jest úsek řádu nultého $\pi_0 = 3$, úsek řádu třetího $\pi_3 = 3{\cdot}141$ atd. Při čísle $\beta = -2{\cdot}718281\ldots$ jest úsek řádu prvého $\beta_1 = -2{\cdot}7$, úsek řádu čtvrtého $\beta_4 = -2{\cdot}7182$ atd.

Číslo reálné α s vynechaným znamením vztahu označujeme $|\alpha|$ a nazýváme symbol ten *prostá hodnota čísla α.*

Číslo nula, které pokládáme za rozhraní mezi čísly kladnými a zápornými, jest určeno jedním ze znaků ekvivalentních

$$0 = +0{\cdot}0000\ldots = -0{\cdot}000000\ldots$$

Nula jest číslo, které není ani kladné, ani záporné. Dva ekvivalentní znaky zavedeme mimo pro nulu také pro čísla, která od některého místa počínajíce tvořena jsou samými nulami, jako na př.

$$56{\cdot}980400000\ldots = 56{\cdot}980399999\ldots \text{ nebo}$$
$$-0{\cdot}357000\ldots = -0{\cdot}3569999\ldots$$

Čísla ekvivalentní se mohou vzájemně zastupovati. Číslo takové mimo to prohlásíme za rovné číslu desetinnému o konečném počtu cifer, které vznikne vynecháním koncových nul (v našich příkladech $56{\cdot}9804$, po případě $-0{\cdot}357$).

Symbol $\alpha = \beta$ značí, že čísla α a β jsou totožná nebo ekvivalentní. V každém jiném případě píšeme $\alpha \neq \beta$. Dvě čísla α a β, lišící se od sebe jen znamením vztahu, nazýváme čísly *souměrnými (symetrickými)* a píšeme $\alpha = -\beta$, $\beta = -\alpha$.

Čísla reálná lze uspořádati co do velikosti podle těchto definic: Číslo kladné jest větší než nula a než jakékoliv číslo záporné. Číslo kladné α jest větší než kladné číslo β, jestliže prvá cifra z leva u čísla α, která se neshoduje se stejnolehlou cifrou čísla β, jest větší nežli tato a jestliže při tom α a β nejsou ekvivalentní. Pak píšeme $\alpha > \beta$ a říkáme také, že β jest menší než α ($\beta < \alpha$). Nula jest větší než kterékoliv číslo záporné. Dvě čísla záporná $\alpha \neq \beta$ nechť mají k sobě souměrná čísla kladná $\alpha_1 \neq \beta_1$. Pak říkáme, že $\alpha > \beta$ nebo $\alpha < \beta$ podle toho, zda $\alpha_1 < \beta_1$ či $\alpha_1 > \beta_1$. Z těchto definic jest zřejmo, že pro dvě daná čísla reálná platí vždy jeden a jen jeden ze tří vztahů $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$.

Jestliže pro vesměs kladná nebo vesměs záporná čísla α, β, γ platí $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$, jest také $\alpha > \gamma$, jak plyne přímo z definice. Je-li α rovno nule, jest β i γ záporné a věta jest také splněna. Je-li α kladné a γ záporné, jest věta samozřejmá, právě tak, jako když γ jest rovno nule a tedy β i α kladné. Čísla reálná splňují tedy postuláty spořádanosti *A*, podobně jako čísla racionální. Dále říkáme, že čísla reálná tvoří množství všude husté. To znamená, že můžeme mezi kterákoliv dvě čísla $\alpha > \beta$ zařaditi nekonečně mnoho čísel γ takových, že jest $\alpha > \gamma > \beta$. To vyplývá bezprostředně z definice.

Nyní můžeme definovati důležité pojmy: posloupnost čísel a limita posloupnosti, které nám umožní stanoviti pravidla pro sčítání, odčítání, násobení a dělení čísel reálných.

Jestliže každému celistvému číslu z přirozené řady číselné 1, 2, 3,... *jest přiřazeno určité číslo reálné* $a_1, a_2, a_3, \ldots$, *nazýváme všechna tato čísla hromadným názvem posloupnost čísel.*

Příklad 1. $a_1 = 0{\cdot}1\dot{0}\dot{2}$, $a_2 = 0{\cdot}\dot{2}$, $a_3 = 0{\cdot}\dot{1}0\dot{2}$, $a_4 = 0{\cdot}\dot{2}, \ldots$.

2. $a_1 = 3{\cdot}2\dot{4}$, $a_2 = 3{\cdot}22\dot{4}$, $a_3 = 3{\cdot}2224$, $a_5 = 3{\cdot}22224, \ldots$.

3. $a_1 = -2{\cdot}680\dot{1}$, $a_2 = -2{\cdot}679\dot{2}$, $a_3 = -2{\cdot}6800\dot{1}$,

$a_4 = -2{\cdot}6799\dot{2}, \ldots$.

Tečkou nad poslední cifrou, nebo dvěma tečkami nad první a poslední cifrou skupiny značíme, jak obvykle, že cifra nebo skupina se opakuje do nekonečna, na př. $0{\cdot}\dot{2} = 0{\cdot}2222\ldots$, $5{\cdot}30\dot{1}0\dot{2} = 5{\cdot}30102102\ldots$.

Všimněme si zvláště posloupností 2 a 3. V posloupnosti 2 všechna čísla mají týž úsek prvého řádu (3·2), všechna čísla od druhého a_2 počínajíce mají týž úsek druhého řádu (3·22), všechna čísla od n-tého a_n počínajíce mají týž úsek n-tého řádu (3·222 ... 2, dvojka n-kráte opakovaná) atd. V posloupnosti 3 všechna čísla mají totožné úseky prvého řádu (— 2·6), všechna mají téměř totožné úseky třetího řádu (— 2·680, — 2·679), od třetího a_3 počínajíce mají téměř totožné úseky čtvrtého řádu (— 2·6800, — 2·6799), od pátého a_5 počínajíce mají téměř totožné úseky pátého řádu (— 2·68000, — 2·67999) atd. Při tom nazýváme úseky téměř totožnými n-tého řádu takové dva úseky, jichž rozdíl jest roven jedné jednotce n-tého řádu.

O posloupnosti 2 můžeme říci: Ať zvolím jakkoliv vysoký řád n, vždy od a_n počínajíce všechna čísla a_n, a_{n+1}, $a_{n+2}, \ldots$ mají totožné úseky řádu n-tého (3·222 ... 2). Tento úsek nazveme *definitivní úsek n-tého řádu* dané posloupnosti Posloupnost 2 má tedy definitivní úseky všech řádů (3·2, 3·22, 3·222, 3·2222,...), které patrně můžeme považovati za úseky jednoho jediného reálného čísla $a = 3{\cdot}\dot{2} = 3{\cdot}22222\ldots$. Toto reálné číslo a nazývá se *limita* posloupnosti 2.

U posloupnosti 3 zjistíme: Ať zvolím jakkoliv vysoký řád n, vždy lze nalézti takové a_N, že všechna čísla posloupnosti od něho počínajíce $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ mají totožné nebo téměř totožné úseky řádu n-tého ($-2{\cdot}6800\ldots0$, $-2{\cdot}6799\ldots9$). Tyto úseky můžeme považovati za úseky dvou ekvivalentních tvarů téhož čísla reálného $a = -2{\cdot}68\dot{0} = -2{\cdot}67\dot{9}$, které nazveme opět *limitou* posloupnosti 3.

Obecně označme úsek řádu k-tého čísla a znakem $a^{(k)}$. Jestliže mezi členy posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ existuje takový a_N, že úseky řádu k-tého $a_n^{(k)}$ pro všechna $n > N$ jsou rovny témuž číslu a, budeme říkati: *Posloupnost má definitivní úseky řádu k-tého.* *Téhož* rčení užijeme i v tom případě, jestliže $a_n^{(k)}$ pro $n > N$ jsou všechna rovna buď jistému číslu a nebo číslu $(a + 10^{-k})$ (úseky téměř totožné).

Definujeme pak:

Posloupnost** $a_1, a_2, a_3, \ldots$ **má limitu, a to jednu jedinou, když v ní eksistují úseky definitivní každého řádu. Limita ta jest reálné číslo určené definitivními úseky.

Píšeme symbolicky $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, což vyslovujeme větou: Limita a_n, když n vzrůstá do nekonečna, jest a. O posloupnosti, která má limitu, budeme říkati, že *konverguje* (jest *konvergentní*). Jest zřejmo, že nikoliv každá posloupnost konverguje; tak na př. posloupnost 1 nemá limity, neboť nemá definitivních úseků ani prvého řádu a tedy ani řádů vyšších.

Abychom definice právě uvedené mohli užívati, musíme se ještě přesvědčiti, zda posloupnost s definitivními úseky každého řádu určuje vskutku jen jednu jedinou limitu. Jsou-li definitivní úseky každého řádu mezi sebou totožné, jest jimi limita jednoznačně stanovena. Zbývá dokázati, že posloupnost s definitivními úseky *téměř* totožnými má jedinou limitu. Jestliže mezi definitivními úseky řádu na př. k-tého se vyskytují stále (t. j. po každém indeksu) úseky dvojího typu (téměř totožné), pak definitivní úseky řádu $(k + 1)$-ho jsou také stále dvojího typu a můžeme o nich dokázati, že menší z nich končí devítkou a větší nulou. Dejme tomu, že menší z definitivních úseků řádu k-tého končí cifrou a a tedy větší cifrou $(a+1)$, po případě 0, když $a=9$. Mezi definitivními úseky řádu $(k+1)$-ho budou tedy některé (menší) s cifrou a na předposledním místě a jiné (větší) s cifrou $(a+1)$ na předposledním místě. Protože jsou to definitivní úseky nestejné, musí jejich rozdíl býti roven 10^{-k-1}. To jest možné jen tak, že menší končí dvojskupinou $a9$ a větší dvojskupinou $(a+1)0$. Opakováním těchto úsudků pro řády $(k+1)$, $(k+2)$ atd. obdržíme větu, která vysvětluje, proč posloupnosti, které mají pouze t é m ě ř totožné definitivní úseky, se nazývají konvergentní.

Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ve které se vyskytují stále definitivní úseky každého řádu dvojího typu (téměř totožné), má limitu s periodou $\dot{9}$ (anebo, což jest totéž, číslo ekvivalentní s periodou $\dot{0}$).

Můžeme tedy vysloviti větu: *Každá konvergentní posloupnost má jedinou limitu, která jest úplně stanovena definitivními úseky dané posloupnosti.*

Nyní již můžeme definovati sčítání a násobení čísel reálných. Učiníme to bez důkazů, pouhým výčtem vět. Důkazy jsou připojeny na konci této knihy v dodatku I.

Dvě čísla reálná α, β nechť mají úseky $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$; β_1 $\beta_2, \ldots \beta_n, \ldots$ Posloupnost $\sigma_1 = \alpha_1 + \beta_1$, $\sigma_2 = \alpha_2 + \beta_2, \ldots$ má limitu σ, kterou nazveme součet reálných čísel α, β a píšeme $\sigma = \alpha + \beta$. Posloupnost $\tau_1 = \alpha_1\beta_1$, $\tau_2 = \alpha_2\beta_2, \ldots \tau_n = \alpha_n\beta_n \ldots$ má limitu τ, kterou nazýváme součin reálných čísel α, β a píšeme $\tau = \alpha\beta$.

O takto definovaném sčítání a násobení platí zákony komutativní, asociativní a distributivní, to jest

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \qquad \alpha\beta = \beta\alpha,$$
$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \qquad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Dále lze dokázati, že jediné nula a jednotka mají vlastnosti

$$\alpha + 0 = \alpha, \qquad \alpha \cdot 1 = \alpha\,(\alpha + 0).$$

Odčítání definujeme vztahem $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Rovnice $\alpha + x = 0$ má jediné řešení $x = -\alpha$.

Je-li $\alpha > \beta$, jest $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. Je-li $\gamma > 0$, jest také $\alpha\gamma > \beta\gamma$, Je-li $\gamma < 0$, jest $\alpha\gamma < \beta\gamma$, je-li $\gamma = 0$, jest $\alpha\gamma = \beta\gamma$.

Racionální čísla p/q, kdež p, q jsou čísla celistvá, $q \neq 0$, jsou zvláštním případem čísel reálných, když p/q položíme rovno konečnému nebo periodickému zlomku desetinnému, který vznikne, když provádíme dělení podle pravidel pro čísla desetinná o konečném počtu cifer.

Převrácenou hodnotu čísla reálného a, to jest řešení rovnice $x \,.\, a = 1$ stanovíme takto. Úseky čísla a (při $a \neq 0$) nechť jsou $a_1, a_2, a_3 \ldots$; je-li mezi nimi několik prvních rovno nule, vypustíme je z úvahy. Utvořme posloupnost převrácených úseků racionálních čísel

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots . \frac{1}{a_n}, \ldots .$$

Každé z těchto čísel je podle předešlého rovno určitému reálnému číslu. Posloupnost tak vzniklá má limitu x, která jest jediným řešením rovnice $x \,.\, a = 1$ a označuje se znakem $x = \frac{1}{a}$ (nebo $1/a$).

Dělení $\frac{\beta}{a} = \beta : a$ definujeme jako násobení $\beta \cdot \frac{1}{a}$, když ovšem $a \neq 0$.

Každé číslo reálné a jest menší než celistvé číslo $(a_0 + 2)$ (postulát Archimedův).

Ze všech těchto vět vyplývá, že čísla reálná splňují všechny skupiny postulátů (A, B, C, D, E), nutné k přesnému vybudování aritmetiky, jak jsme je vytkli na začátku svých úvah při číslech racionálních. Z toho plyne, že reálnými čísly můžeme počítati právě takovým způsobem, jako čísly racionálními. Mimo to čísla racionální jsou pouze zvláštním případem čísel reálných.

Důkazy všech těchto tvrzení obsaženy jsou, jak již bylo řečeno, v dodatku na konci této knížky. Při prvém čtení není třeba, aby čtenář dychtící seznati co nejdříve metody počtu diferenciálního se jimi zdržoval. Avšak při studiu soustavném jest nezbytno dobře se s nimi seznámiti.

Všude v dalším budeme užívati k označování čísel reálných nebo racionálních bez rozdílu písmen latinské abecedy. Připomeňme ještě, že číslo reálné, které není racionální, nazývá se často *číslo iracionální*; podle našich definic jest to tedy číslo reálné o nekonečně velkém počtu cifer od nuly různých, neperiodické.

3. Prosté hodnoty a nerovniny. Jak v předešlém odstavci jsme stanovili, jest prostá hodnota reálného čísla kladného a číslo samo a prostá hodnota čísla záporného b jest $-b$. Prostá hodnota nuly jest nula. Užíváme znaku $|a|$, který čteme: prostá hodnota a. Tedy na př. $|7\cdot5| = 7\cdot5$, $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$. Patrně jest

$$|a.b| = |a|.|b|, \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Důležitá nerovnost, které v dalším mnohokrát použijeme, jest

$$|a+b| \leqq |a| + |b|.$$

Vztah ten — přesněji řečeno, jeden z obou naznačených vztahů — jest vždy splněn, ať a a b jsou jakákoliv dvě reálná čísla, kladná nebo záporná; důsledkem rovněž důležitým jest vztah $|x+y| \geqq |x| - |y|$, který plyne z předešlého dosazením $a = x + y$, $b = -y$.

Množství všech reálných čísel uspořádaných podle velikosti nazýváme *osa reálných čísel*. Jednotlivá reálná čísla nazýváme často *body* na ose číselné. V analytické geometrii říkáme jí obyčejně osa úseček (nebo pořadnic) a spojujeme s ní, abychom získali názornost, hrubou představu »přímky« narýsované na papíře nebo na tabuli. Z představy té nesmíme ovšem odvozovati žádných matematických důsledků pro čísla reálná.

Buďtež $a < b$ dvě reálná čísla. Jestliže r. číslo x jest větší než a a menší než b, nebo rovno jednomu z nich, říkáme, že x patří k *uzavřenému intervalu a, b*. Slova »uzavřený interval a, b« nahrazujeme symbolem $\langle a, b \rangle$. Číslo x, které k němu patří, splňuje vztah $a \leq x \leq b$. Podobně definujeme interval *otevřený* (a, b), jakožto všechna čísla x splňující nerovnosti $a < x < b$. Interval otevřený tvoří na ose číselné *úsečku*, jejíž body koncové k intervalu *nepatří;* k intervalu uzavřenému počítáme i tyto body. *Okolí* bodu x jest každý otevřený interval, který obsahuje x. Bod x samotný k okolí nepřísluší.

Cvičení. 1. Dokažte větu $|a+b| \leqq |a| + |b|$ tím, že uvážíte zvláště všechny možné kombinace znaménkové čísel a, b $(++, +-, -+, --)$. Dokažte větu

$$|a+b+c+\cdots+k| \leqq |a| + |b| + |c| + \cdots + |k|.$$

2. a) Reálné číslo, jehož cifra řádu n-tého jest dána konečnou cifrou v součinu $2n$, $(5n)$ jest racionální. b) Reálné číslo, jehož cifra.

řádu n-tého jest 1, když n jest prvočíslo, nebo nula, když n není prvočíslo, jest iracionální. Totéž platí pro číslo, jehož cifra řádu n-tého jest 1 nebo 0, podle toho, zda n jest či není mocninou čísla dvě. Dokažte tato tvrzení! (Důkazy opírají se o periodicitu čísla racionálního.)

Kapitola II.

POSLOUPNOSTI ČÍSELNÉ.

4. O limitách posloupností. V předešlé kapitole definovali jsme posloupnost čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$; řekli jsme si, co rozumíme slovy *limita* posloupnosti a *konvergentní* posloupnost. Posloupnost má limitu A, když a jen když má*) definitívní úseky všech řádů, které definují reálné číslo A (limitu). Všimněme si, v jakém vztahu jsou členy posloupnosti k její limitě A. *Zhruba můžeme říci, že členy a_n s dosti vysokým indexem velmi málo se liší od limity A.* To vyplývá z té okolnosti, že všechny členy, které mají definitívní úseky řádu k-tého, liší se podle definice těchto úseků a limity od A nanejvýše o jednu jednotku řádu k-tého (10^{-k}). Vlastnost tu budou míti všechny členy a_n pro něž n jest větší, než určité číslo celé, kladné $N(k)$, závislé na k. Zvolím-li nyní kladné číslo ε libovolně malé, mohu vždy nalézti k takové, že bude 10^{-k} ještě menší než ε.

Z toho plyne, že prostá hodnota rozdílu $|a_n - A|$ jest menší než ε pro všechna n, která jsou větší než pevné číslo $N(k) = N(\varepsilon)$, závislé na k a tedy na ε. Proto říkáme, že členy posloupnosti se vzrůstajícím n blíží se ke své limitě. Také obráceně, platí-li nerovnina $|a_n - A| < \varepsilon$ pro *každé* ε, pokud $n > N(\varepsilon)$, můžeme tvrditi, že posloupnost má definitivní úseky každého řádu a že tedy má limitu. Neboť volím-li $\varepsilon = 10^{-k} (n > N(\varepsilon))$, jest a_n větší nebo menší než pevné číslo A nanejvýše o 10^{-k} a tedy má s číslem A nutně totožný nebo

*) Budeme užívati rčení (viz též odst. 7.)

B, když a jen když A

místo dvou vět

1) *B, když A.* 2) *non B, když non A.*

Na př. věta: »Číslo jest dělitelno třemi, když a jen když ciferný součet je dělitelný třemi« zastupuje dvě věty: »Číslo jest dělitelno třemi, když ciferný součet jest dělitelný třemi« a »Číslo není dělitelno třemi, když ciferný součet není dělitelný třemi«.