Počet differenciální

XIII. O užití řad potenčních ku vyšetřování funkcí implicitních

In: Karel Petr (author): Počet differenciální. Část analytická. (Czech). Praha: Jednota československých mathematiků a fysiků, 1923. pp. 430–465.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402701

XIII. O užití řad potenčních ku vyšetřování funkcí implicitních.

252. O funkcích implicitních v případě, že levé strany rovnic je definujících jsou dány potenčními řadami. Buďiž dána rovnice $F(x, y) = 0$, kde

$$F(x,y) = a_{10}(x - x_0) + a_{01}(y - y_0) + a_{20}(x - x_0)^2 + a_{11}(x - x_0)(y - y_0) + \ldots \tag{1}$$

jest potenční řadou proměnných $x - x_0$, $y - y_0$ konvergentní v jistém oboru, kterýž obsahuje ve svém nitru bod $[R, S]$; $R > 0$, $S > 0$. Jelikož

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = a_{01},$$

víme, že, je-li $a_{01} \neq 0$, existuje jedna jediná funkce y proměnné x hovící rovnici $F(x, y) = 0$, nabývající v bodě $x = x_0$ hodnoty $y = y_0$ a v okolí bodu x_0 hodnot nacházejících se v okolí bodu y_0. Funkce ta jest spojitá a má derivace dle x (všech řádů). Dokážeme si nyní dále, že lze ji rozvinouti v potenční řadu proměnné $x - x_0$. K tomu cíli pišme danou rovnici ve tvaru (převedeme člen $a_{01}(y - y_0)$ na druhou stranu a dělíme a_{01})

$$y - y_0 = b_{10}(x - x_0) + b_{20}(x - x_0)^2 + b_{11}(x - x_0)(y - y_0) + b_{02}(y - y_0)^2 + \ldots \tag{2}$$

Jestliže funkce daná řadou

$$y - y_0 = A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + A_3(x - x_0)^3 + \ldots \tag{3}$$

splňuje rovnici $F(x, y) = 0$, jsou pro součinitele $A_1, A_2, \ldots$ nutně splněny rovnice (získané dosazením dle (3) do (2) a užitím věty o neurčitých součinitelích)

$$A_1 = b_{10}, \quad A_2 = b_{20} + b_{11}A_1 + b_{02}A_1^2, \quad A_3 = b_{11}A_2 + 2b_{02}A_1A_2 + \\ + b_{30} + b_{21}A_1 + b_{12}A_1^2 + b_{03}A_1^3, \ldots \tag{4}$$

a naopak, jsou-li rovnice tyto pro koefficienty A_k splněny a řada v (3) jest konvergentní, máme v řadě té výraz pro $y - y_0$, který splňuje rovnici $F(x, y) = 0$ (identicky, t. j. pro všecka x, y v jistém okolí bodu $[x_0, y_0]$). Avšak rovnice pro koefficienty jsou rovnice rekurrentní a jsou již tak upraveny, že koefficient A_k jest vyjádřen jako racionálná celistvá funkce součinitelů A_i s menšími indexy než k ($i < k$), při čemž součinitelé v této racionálné celistvé funkci jsou právě koefficienty b_{ik} z řady (2) násobené *kladnými* celými čísly. Jest tedy patrno, že, nahradíme-li v rovnicích (4) čísla b_{ik} čísly kladnými v absolutní hodnotě většími než b_{ik}, dostaneme rovnice, které pro A_k dávají hodnoty kladné a větší v absolutní hodnotě než jsou A_k vyplývající ze (4). Tím jest patrno, že sestrojíme-li řadu (3) pro rovnici vzniklou z rovnice (2) tím, že pravou stranu rovnice (2) nahradíme nějakou majorantní funkcí pravé strany (levou stranu nechávajíce nezměněnu) a dostaneme-li pak řadu potenční konvergentní pro $y-y_0$ jakožto řešení rovnice naznačeným způsobem ze (2) vzniklé, tím spíše bude konvergovati řada (3), jejíž koefficienty jsou dány v (4) (a jež tudíž stanoví implicitní funkci definovanou rovnicí (2)).

Nahraďme tedy v (2) pravou stranu majorantní funkcí ku př. uvedenou v odst. 215.; dostaneme rovnici (při tom jest třeba od výrazu tam uvedeného odečísti ještě dva členy tak, aby majorantní funkce výsledná neobsahovala člen s $(y-y_0)^1$ a člen nezávislý na proměnných)

$$y-y_0=\frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{R}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{S}\right)}-M-\frac{M(y-y_0)}{S}.$$

Řešíme-li však tuto rovnici dle $y-y_0$ (při čemž hledáme tu hodnotu pro $y-y_0$, jež jest nullou, když $x-x_0=0$), obdržíme po snadném počtu

$$y-y_0=\frac{S^2-S\sqrt{\varDelta}}{2(M+S)},\quad \text{kde}\quad \varDelta=\frac{S^2R-(2M+S)^2(x-x_0)}{R-(x-x_0)}$$

a

$$\sqrt{\varDelta}=S\left(1-\left(\frac{2M}{S}+1\right)^2\cdot\frac{x-x_0}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{x-x_0}{R}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

odkudž (dle binomické věty a věty o násobení řad) jest patrno, že získaný výraz pro $y-y_0$ lze rozvinouti v řadu potenční proměnné $x-x_0$ s poloměrem konvergence

$$\frac{R}{(1+2MS^{-1})^2}.$$

Tím spíše tedy bude konvergovati v témž intervalu konvergenčním řada (3), v níž A_k jsou počítány dle rovnic (4). Tak jest tvrzení učiněné dokázáno a můžeme výsledek docílený vysloviti takto: *Implicitní funkce y proměnné x daná jednak rovnicí $F(x, y)=0$, kde $F(x, y)$ jest v (1) dáno jakožto potenční řada proměnných $x-x_0$, $y-y_0$, konvergentní v jistém oboru dvojrozměrném, s $a_{10}\neq 0$, jednak požadavkem, aby $y=y_0$ pro $x=x_0$, jest v jistém okolí bodu x_0 rozvinutelna v potenční řadu argumentu $x-x_0$; koefficienty této potenční řady lze stanoviti methodou neurčitých součinitelů.*

Poznámka 1. Věta (resp. důkaz) tu podaný jest zevšeobecnění věty (resp. důkazu) o funkci inversní (odst. 155.).

Poznámka 2. Důkaz podaný by v podstatě se neměnil, kdyby šlo vyjádření funkce y *dvou* neodvisle proměnných x, u stanovené rovnicí $F(x, u; y) = 0$, jejíž levá strana jest rozvinutelna v okolí bodu $[x_0, u_0, y_0]$ v řadu Taylorovu, jest rovna nulle v tom bodě a má při $(y - y_0)^1$ součinitel různý od nully. I tu lze implicitní funkci y, jež v bodě $[x_0, u_0]$ jest rovna y_0 a jest v tom bodě a jeho okolí funkcí spojitou, vyjádřiti v jistém okolí bodu $[x_0, u_0]$ řadou potenční postupující dle mocností rozdílů $x - x_0$, $u - u_0$. Stejně tomu jest i při libovolném počtu neodvisle proměnných, takže větu, již jsme si dokázali pro případ jedné neodvisle proměnné, můžeme rozšířiti bez dalších úvah na libovolný počet neodvisle proměnných. V tomto rozsahu budeme předpokládati v následujícím větu tu jako známou a dokázanou.

253. Rozšíření věty o implicitních funkcích pro libovolný počet odvisle proměnných. Větu dokázanou v odst. předcházejícím lze bez jakékoliv překážky rozšířiti pro libovolný počet rovnic stanovících stejný počet odvisle proměnných jakožto funkce daných neodvisle proměnných. K vůli ušetření místa a zjednodušení psaní budu však ve vývodech následujících předpokládati, že máme toliko dvě rovnice stanovící dvě proměnné y_1, y_2 jakožto funkce dvou neodvisle proměnných x_1, x_2; rovnice tyto buďtež

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \quad G(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0. \tag{5}$$

Rovnice tyto buďtež splněny pro $[x_1, x_2, y_1, y_2] = [c_1, c_2, d_1, d_2]$ a levé jich strany buďtež rozvinutelny v řady mocninné v okolí toho bodu (t. j. v řady mocninné argumentů $x_1 - c_1$, $x_2 - c_2$, $y_1 - d_1$, $y_2 - d_2$). Můžeme ostatně předpokládati, že bod $[c_1, c_2, d_1, d_2]$ jest bodem $[0, 0, 0, 0]$; neboť klademe-li v (5) $x_1 - c_1 = x'_1$, $x_2 - c_2 = x'_2$, $y_1 - d_1 = y'_1$, $y_2 - d_2 = y'_2$, dostaneme místo (5) dvě rovnice, jež splněny jsou pro $[x'_1, x'_2, y'_1, y'_2] = [0, 0, 0, 0]$ a jichž levé strany jsou právě rozvinutelny v řady mocninné argumentů x'_1, x'_2, y'_1, y'_2. Každé řešení těchto nových rovnic dle y'_1, y'_2 pak dává ihned řešení rovnic (5) (a naopak) a můžeme se tedy omeziti na rovnice (5), při nichž však $[c_1, c_2, d_1, d_2] = [0, 0, 0, 0]$. Levé strany rovnic (5) lze tedy dle předpokladů psáti ve tvaru

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \Sigma a_{i_1, i_2, j_1, j_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2} y_1^{j_1} y_2^{j_2}, \quad a_{0,0,0,0} = 0,$$
$$G(x_1, x_2, y_1, y_2) = \Sigma b_{i_1, i_2, j_1, j_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2} y_1^{j_1} y_2^{j_2}, \quad b_{0,0,0,0} = 0,$$
$$i_1, i_2, j_1, j_2 = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Budiž dále funkcionální determinant

$$\left[\frac{D(F, G)}{D(y_1, y_2)}\right]_{[y_1, y_2, x_1, x_2] = [0,0,0,0]} = \begin{vmatrix} a_{0,0,1,0}, & a_{0,0,0,1} \\ b_{0,0,1,0}, & b_{0,0,0,1} \end{vmatrix} \tag{6}$$

různý od nully. Pak dle obecné věty o implicitních funkcích vyplývá existence dvou funkcí $y_1 = \varphi(x_1, x_2)$, $y_2 = \psi(x_1, x_2)$ splňujících identicky rovnice (5) v okolí bodu $[x_1, x_2] = [0, 0]$, jež obě stávají se rovny nulle v $[0, 0]$ a jsou jednoznačně stanoveny. My pak si dokážeme, že tyto dvě funkce jsou rozvinutelny v řady Taylorovy v okolí $[0, 0]$.

K tomu cíli píšeme rovnice (5) tak, že obdrží tvar

$$a_{0,0,1,0}y_1 + a_{0,0,0,1}y_2 = Q(x_1, x_2, y_1, y_2),$$
$$b_{0,0,1,0}y_1 + b_{0,0,0,1}y_2 = R(x_1, x_2, y_1, y_2),$$

kde na pravých stranách se nevyskytují členové tvaru A, By_1, Cy_2; (A, B, C konstanty). Řešíme-li tyto rovnice, jakoby neznámé y_1, y_2 se nacházely toliko na levé straně (pak jsou to rovnice lineární, jichž determinant (6) jest dle předpokladu různý od nully), dostávají konečně rovnice (5) tento tvar

$$y_1 = \Sigma c_{i_1, i_2, j_1, j_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2} y_1^{j_1} y_2^{j_2}; \quad c_{0,0,0,0} = c_{0,0,1,0} = c_{0,0,0,1} = 0;$$
$$y_2 = \Sigma d_{i_1, i_2, j_1, j_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2} y_1^{j_1} y_2^{j_2}; \quad d_{0,0,0,0} = d_{0,0,1,0} = d_{0,0,0,1} = 0, \quad (7)$$
$$i_1, i_2, j_1, j_2 = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

Dosadíme-li do těchto rovnic za y_1, y_2 rozvoje

$$y_1 = \Sigma A_{k_1, k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2}, \quad y_2 = \Sigma B_{k_1, k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2}, \quad A_{0,0} = B_{0,0} = 0, \quad (8)$$
$$k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ldots,$$

obdržíme na základě věty o neurčitých součinitelích (stejně jako v odst. předch.) rovnice, jež postupně stanoví čísla A_{k_1, k_2}, B_{k_1, k_2}; rovnice ty budou míti tyto vlastnosti:

1. Levá strana jich jest buď A_{k_1, k_2} aneb B_{k_1, k_2}.

2. Na pravé straně jest racionálná celistvá funkce čísel $A_{k'_1, k'_2}$, $B_{k'_1, k'_2}$, kde $k'_1 < k_1$, $k'_2 < k_2$, a lineárná čísel c_{i_1, i_2, j_1, j_2}, d_{i_1, i_2, j_1, j_2}. Numeričtí součinitelé jsou na pravé straně vesměs *kladná* čísla (celá).

V důsledku těchto vlastností budou (stejně jako v odst. předch.) řady (8) s koefficienty určenými naznačeným způsobem jistě konvergentní, jestliže budou konvergovati řady sestrojené obdobně, avšak k rovnicím, jež vzniknou ze (7), nahradíme-li jich pravé strany majorantními funkcemi. Dostaneme tak místo (7) ku př. tyto rovnice

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{M}{\left(1-\frac{y_1}{R}\right)\left(1-\frac{y_2}{R}\right)\left(1-\frac{x_1}{S_1}\right)\left(1-\frac{x_2}{S_2}\right)} - M - M\frac{y_1}{R} - M\frac{y_2}{R}, \\ y_2 &= \frac{M}{\left(1-\frac{y_1}{R}\right)\left(1-\frac{y_2}{R}\right)\left(1-\frac{x_1}{S_1}\right)\left(1-\frac{x_2}{S_2}\right)} - M - M\frac{y_1}{R} - M\frac{y_2}{R}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Jestliže funkce y_1, y_2 proměnných x_1, x_2 hovící těmto dvěma rovnicím a jež pro $[x_1, x_2] = [0, 0]$ jsou obě rovny nulle, jsou rozvinutelny v řady Taylorovy proměnných x_1, x_2 v okolí $[0, 0]$, tím spíše tomu bude tak i pro funkce y_1, y_2 hovící rovnicím (7) brané v úvahu. Avšak o rovnicích (9) snadno můžeme rozhodnouti. Neboť z nich plyne, jelikož pravé strany se shodují,

$$y_1 = y_2 \quad \text{a tedy} \quad y_1 = \frac{M}{\left(1-\frac{y_1}{R}\right)^2\left(1-\frac{x_1}{S_1}\right)\left(1-\frac{x_2}{S_2}\right)} - M - 2M\frac{y_1}{R},$$

což jest rovnice jedna definující y_1 jakožto implicitní funkci proměnných x_1, x_2 a to dle výsledku odst. předch. (viz pozn. 2.) jakožto funkci rozvinutelnou v řadu poteční argumentů x_1, x_2.

Můžeme tudíž obecně vysloviti větu: *Funkce $y_1, y_2, \ldots, y_n$ proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_m$, dané jednak rovnicemi*

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

jednak požadavkem, aby $y_1 = y_1^{(0)}$, $y_2 = y_2^{(0)}, \ldots, y_n = y_n^{(0)}$, když $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}, \ldots, x_m = x_m^{(0)}$, existují a jsou rozvinutelny v řady Taylorovy v okolí bodu $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}]$, jsou-li splněny tyto předpoklady

1. $F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$
2. *Determinant funkcionální*

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

jest v bodě $[x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}]$ různý od nully.

3. *Funkce $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ jsou rozvinutelny v řady Taylorovy v okolí bodu $[x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}; y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}]$.*

Součinitele Taylorových rozvojů pro funkce $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lze ustanoviti methodou neurčitých součinitelů.

Vedle funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_n$ není jiných funkcí definovaných v okolí bodu $[x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}]$ hovících daným podmínkám a takových, aby $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ bylo stále v jistém okolí bodu $[y_1^{(0)}, y_n^{(0)}]$.

254. Jako užití věty odst. předch. podám odvození **řady Lagrangeovy pro několik proměnných.** Při jedné proměnné vyšetřována řada Lagrangeova již v odst. 162., methoda obecná v následujícím vyložená dá se použíti i v případě jedné neodvisle proměnné a dává výsledky ve stejném tvaru jako methoda cit. odst.

K vůli jednoduchosti zvolíme si počet neodvisle proměnných rovný 3, postup však naznačený bez jakéhokoliv změny lze provésti při libovolném, počtu neodvisle proměnných, jak čtenář snadno sezná.

Budeme uvažovati tři rovnice tvaru

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1^0 + x_1\psi_1(y_1, y_2, y_3), \\ y_2 &= a_2^0 + x_2\psi_2(y_1, y_2, y_3), \\ y_3 &= a_3^0 + x_3\psi_3(y_1, y_2, y_3), \end{aligned} \tag{1}$$

za předpokladu, že funkce ψ_1, ψ_2, ψ_3 jsou rozvinutelny v potenční řady trojné proměnných $y_1 - a_1^0$, $y_2 - a_2^0$, $y_3 - a_3^0$. Pak rovnice (1) jsou splněny, klademe-li v nich $[y_1, y_2, y_3; x_1, x_2, x_3] = [a_1^0, a_2^0, a_3^0; 0, 0, 0]$, a poněvadž funkcionální determinant levých stran rovnic (1) převedených na nullu jest v bodě $[a_1^0, a_2^0, a_3^0; 0, 0, 0]$ různý od nully (a rovný jedné, jak čtenář snadno vypočte a jak v následujícím ostatně též seznáme), definují rovnice (1) y_1, y_2, y_3 jakožto funkce bodu $[x_1, x_2, x_3]$, rozvinutelné v mocninné řady trojné proměnných x_1, x_2, x_3 a splňující rovnosti $[y_1, y_2, y_3] = [a_1^0, a_2^0, a_3^0]$ pro $[x_1, x_2, x_3] = [0, 0, 0]$. Stanovení součinitelů v těchto třech mocninných řadách trojných v jednoduchém tvaru jest právě hlavním úkolem Lagrangeovy řady.

Čísla a_1^0, a_2^0, a_3^0 mohou býti libovolné hodnoty, po případě i numericky dané, při nichž ovšem jest zachován svrchu uvedený předpoklad o funkcích ψ_1, ψ_2, ψ_3. Podržujíce předpoklad tento, budeme místo rovnic (1) vyšetřovati rovnice

$$y_i = a_i + x_i\psi_i(y_1, y_2, y_3), \quad i = 1, 2, 3, \tag{2}$$

kde a_1, a_2, a_3 jsou veličiny volně proměnné v oboru daném jistým okolím odu $[a_1^0, a_2^0, a_3^0]$, jež jest charakterisovano tím, že $\psi_i(y_1, y_2, y_3)$ jsou rozvinutelny také v řady mocninné argumentů $y_1 - a_1$, $y_2 - a_2$, $y_3 - a_3$. Funkcionálný determinant levých stran rovnic (2) převedených na nullu dle $[y_1, y_2, y_3]$ jest dán výrazem

$$J = \begin{vmatrix} 1 - x_1\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_1}, & -x_1\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_2}, & -x_1\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_3} \\ -x_2\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y_1}, & 1 - x_2\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y_2}, & -x_2\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y_3} \\ -x_3\dfrac{\partial\psi_3}{\partial y_1}, & -x_3\dfrac{\partial\psi_3}{\partial y_2}, & 1 - x_3\dfrac{\partial\psi_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}; \tag{3}$$

determinant tento jest v bodě $[y_1, y_2, y_3; a_1, a_2, a_3; x_1, x_2, x_3] = [a_1^0, a_2^0, a_3^0; a_1^0, a_2^0, a_3^0; 0, 0, 0]$ rovný 1. V důsledku toho a učiněného předpokladu*) jsou rovnicemi (2) definovány tři funkce y_1, y_2, y_3 bodu

*) Z předpokladu ihned vyplývá, že levé strany rovnic (2) převedených na nullu jsou rozvinutelny v potenční řady argumentů $y_1 - a_1^0$, $y_2 - a_2^0$, $y_3 - a_3^0$, $a_1 - a_1^0$, $a_2 - a_2^0$, $a_3 - a_3^0$, x_1, x_2, x_3. Není tedy užito dosud okolnosti, že funkce $\psi_i(y_1, y_2, y_3)$ jsou rozvinutelny také v řady mocninné argumentů $y_1 - a_1$, $y_2 - a_2$, $y_3 - a_3$.

$[x_1, x_2, x_3; a_1, a_2, a_3]$ rozvinutelné v řady mocniné argumentů $x_1, x_2, x_3, a_1 - a_1^0, a_2 - a_2^0, a_3 - a_3^0$ (a kteréžto funkce pro $[x_1, x_2, x_3; a_1, a_2, a_3] = [0, 0, 0; a_1^0, a_2^0, a_3^0]$ se redukují na a_1^0, a_2^0, a_3^0). Řady mocniné dávají pro $a_i = a_i^0$, $i = 1, 2, 3$ řady pro funkce y_1, y_2, y_3 splňující rovnice (1); i jde především o to vypočítati součinitele v oněch řadách mocniných při $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$. Abychom úkol tento rozřešili, vypočteme si nejprve koefficient při $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$ v rozvoji funkce

$$\frac{F(y_1, y_2, y_3)}{J} \tag{4}$$

v řadu mocninou argumentů $x_1, x_2, x_3, a_1 - a_1^0, a_2 - a_2^0, a_3 - a_3^0$; funkci tu lze, jsou-li y_1, y_2, y_3 funkce svrchu zmíněné splňující rovnice (2), v takovou řadu vskutku rozvinouti za předpokladu, že $F(y_1, y_2, y_3)$ jest rozvinutelna v potenční řadu argumentů $y_1 - a_1^0, y_2 - a_2^0, y_3 - a_3^0$, kterýžto předpoklad učiníme. Součinitelé v rozvoji funkce (4) při $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$ jsou dle rozvoje Taylorova dány výrazem

$$A_{k_1, k_2, k_3} = \frac{1}{k_1!\, k_2!\, k_3!} \left[D_{x_1}^{k_1} D_{x_2}^{k_2} D_{x_3}^{k_3} \frac{F(y_1, y_2, y_3)}{J} \right]_0,$$

v němž D_{x_i} značí derivaci dle x_i a index 0 znamená, že se má po naznačených derivacích dosaditi $[y_1, y_2, y_3; x_1, x_2, x_3; a_1, a_2, a_3] = [a_1^0, a_2^0, a_3^0; 0, 0, 0; a_1^0, a_2^0, a_3^0]$.

Derivujeme-li rovnice (2) dle x_k resp. a_k, dostaneme $9 + 9$ rovnic, ze kterých vypočteme derivace funkcí y_j dle x_k, resp. dle a_k. Obdržíme, označíme-li minor, jenž v determinantu (3) přísluší k elementu v řádku j-tém a sloupci k-tém, značkou J_{jk}, tyto výsledky:

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_k} = \psi_k \frac{J_{kj}}{J}, \quad \frac{\partial y_j}{\partial a_k} = \frac{J_{kj}}{J}; \qquad j, k = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Z rovnic těchto plyne obecně pro funkci $F(y_1, y_2, y_3)$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \psi_k(y_1, y_2, y_3) \cdot \frac{\partial F}{\partial a_k} \tag{5'}$$

a ještě obecněji pro funkci $\Phi(y_1, y_2, y_3; x_1, x_2, x_3)$, má-li tato funkce prvý totální differenciál dle proměnných, na nichž závisí a jež jsou vytčeny za znaménkem funkčním,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \psi_k(y_1, y_2, y_3) \frac{\partial \Phi}{\partial a_k} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right);$$

v této rovnici značí na pravé straně uzávorkovaný derivační symbol derivaci částečnou funkce $\Phi(y_1, y_2, y_3; x_1, x_2, x_3)$ dle x_k počítanou tak jakoby y_1, y_2, y_3 nezávisely na x_k (a obdobně i ve vztazích následujících). Užijme rovnice poslední na funkci (4); obdržíme

$$D_{x_k}\left(\frac{F(y_1, y_2, y_3)}{J}\right) = \frac{\psi_k}{J}\frac{\partial F}{\partial a_k} - \frac{\psi_k F}{J^2}\frac{\partial J}{\partial a_k} - \frac{F}{J^2}\left(\frac{\partial J}{\partial x_k}\right).$$

Avšak derivujeme-li determinant (3),

$$-\left(\frac{\partial J}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial \psi_k}{\partial y_1} J_{k1} + \frac{\partial \psi_k}{\partial y_2} J_{k2} + \frac{\partial \psi_k}{\partial y_3} J_{k3};$$

aneb dle druhé z rovnic (5)

$$-\left(\frac{\partial J}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial a_k} + \frac{\partial \psi_k}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial a_k} + \frac{\partial \psi_k}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial a_k}\right) J = \frac{\partial \psi_k}{\partial a_k} J$$

a tedy

$$D_{x_k}\left(\frac{F}{J}\right) = \frac{\psi_k}{J}\cdot\frac{\partial F}{\partial a_k} - \frac{\psi_k F}{J^2}\cdot\frac{\partial J}{\partial a_k} + \frac{F}{J}\cdot\frac{\partial \psi_k}{\partial a_k} = D_{a_k}\left(\frac{\psi_k F}{J}\right).$$

Rovnicí touto nahražuje se derivování dle x_k derivováním dle a_k; majíce pak na zřeteli, že derivace dle x_k a dle a_k jsou operace záměnné, můžeme hned psáti

$$D^{k_1}_{x_1} D^{k_2}_{x_2} D^{k_3}_{x_3}\left(\frac{F(y_1, y_2, y_3)}{J}\right) = D^{k_1}_{a_1} D^{k_2}_{a_2} D^{k_3}_{a_3}\left(\psi_1^{k_1}\psi_2^{k_2}\psi_3^{k_3}\cdot\frac{F(y_1, y_2, y_3)}{J}\right). \tag{6}$$

Jelikož funkce, jež na pravé straně se má derivovati dle a_1, a_2, a_3, jest rozvinutelna v řadu mocninnou argumentů x_1, x_2, x_3 (a jejíž součinitelé jsou funkce proměnných a_1, a_2, a_3 rozvinutelné v mocninné řady argumentů $a_1 - a_1^0, \ldots$), my pak pro výpočet koefficientů $A_{k1, k2, k3,}$ dosazujeme ve výraze derivováním vzniklém $[x_1, x_2, x_3] = [0, 0, 0]$, můžeme dosazení toto vykonati ještě před prováděním naznačených derivací a v důsledku toho v souhlase s rovnicemi (2) a (3) klásti zároveň $y_i = a_i$ a $J = 1$ tím dostaneme ihned

$$A_{k_1, k_2, k_3} =$$
$$\frac{1}{k_1!\,k_2!\,k_3!} D^{k_1}_{a_1} D^{k_2}_{a_2} D^{k_3}_{a_3}[\psi_1^{k_1}(a_1, a_2, a_3)\,\psi_2^{k_2}(a_1, \ldots)\,\psi_3^{k_3}(a_1, \ldots)\,F(a_1, a_2, a_3)]^0 \tag{7}$$

kde index 0 značí, že se po provedeném derivování má dosadit $a_i = a$

Tím získali jsme vyjádření koefficientů pro potenční rozvoj funkce, (4), jsou-li y_1, y_2, y_3 řešení rovnic (2) (svrchu podrobněji definované), ovšem jenom koefficientů při $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$. Avšak jelikož členy tohoto rozvoje, jichž faktor závislý na veličinách proměnných jest $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$. $(a_1 - a_1^0)^{l_1} (a_2 - a_2^0)^{l_2} (a_3 - a_3^0)^{l_3}$, vymizí při substituci $[a_1, a_2, a_3] = [a_1^0, a_2^0, a_3^0]$, nejsou-li ovšem všecka celá čísla l_1, l_2, l_3 rovna nulle, známe úplný rozvoj pro funkci (4), jsou-li y_1, y_2, y_3 řešení rovnic (1), jež právě vzniká ze (2) substitucí $[a_1, a_2, a_3] = [a_1^0, a_2^0, a_3^0]$.

Můžeme výsledek nalezený shrnouti ve větu: Jsou-li funkce $\psi_i (y_1, y_2, y_3)$, $i = 1, 2, 3$, rozvinutelny v potenční řady tří argumentů $y_i - a_i^0$ — mající spojitý trojrozměrný obor konvergence —, pak tř rovnice $y_i = a_i^0 + x_i \psi_i(y_1, y_2, y_3)$ připouštějí jedno a jen jedno řešení pro $[y_1, y_2, y_3]$, ve kterém y_1, y_2, y_3 jsou spojité funkce bodu $[x_1, x_2, x_3]$ v bodě $[0, 0, 0]$ a jeho okolí a ve kterém pro $[x_1, x_2, x_3] = [0, 0, 0]$ jest $[y_1, y_2, y_3] = [a_1^0, a_2^0, a_3^0]$. Funkce y_1, y_2, y_3 takto dané jsou rozvinutelny v řady potenční; zejména pak jest pro ně platný obecný rozvoj:

$$\frac{F(y_1, y_2, y_3)}{J} =$$

$$= \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}}{k_1!\, k_2!\, k_3!} D_{a_1}^{k_1} D_{a_2}^{k_2} D_{a_3}^{k_3} [\psi_1^{k_1}(a_1, ..) \psi_2^{k_2}(a_1, ..) \psi_3^{k_3}(a_1, ...) F(a_1, a_2, a_3)]_0,$$

$$k_1, k_2, k_3 = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

je-li ovšem $F(y_1, y_2, y_3)$ rozvinutelno v řadu potenční argumentů $y_i - a_i^0$ (mající spojitý trojrozměrný obor konvergence). Rozvoj nalezený jest **rozvoj Lagrangeův** *pro tři rovnice* (1) a obor jeho konvergence obsahuje body $[x_1, x_2, x_3]$, v nichž všecka tři čísla x_i jsou různa od nully.

Výsledek tento se rozšiřuje pro libovolný počet rovnic tvaru (1). Není žádných překážek vypsati jej ku př. pro n rovnic toho tvaru. Volíme-li $n = 1$, obdržíme (za náležitých předpokladů, jež však neuvádím) rozvoj Lagrangeův pro

$$\frac{F(y)}{1 - x\psi'(y)}, \tag{a}$$

kde mezi y a x jest vztah $y = a^0 + x\psi(y)$ Sestrojíme-li na základě tak získaného výsledku ještě rozvoj pro

$$\frac{F(y)\psi'(y)}{1 - x\psi'(y)} \tag{b}$$

a k rozvoji pro funkci (a) přičteme rozvoj pro funkci (b) násobený $-x$, dostaneme ihned rozvoj pro $F(y)$, kterýžto rozvoj při náležitém uspořádání shoduje se s rozvojem Lagrangeovým v odst. 162.

Obdobně jest tomu při dvou rovnicích $y_1 = a_1^0 + x_1\psi_1(y_1, y_2)$, $y_2 = a_2^0 + x_2\psi_2(y_1, y_2)$. Tu dostáváme nejprve ve větě dokázané rozvoj pro funkci danou zlomkem

$$\frac{F(y_1, y_2)}{1 - x_1 \psi'_{11} - x_2 \psi'_{22} + x_1 x_2 (\psi'_{11} \psi'_{22} - \psi'_{12} \psi'_{21})}, \quad \text{kde } \psi'_{ik} = \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k},$$

a obdobně rozvoje pro zlomky, jež v jmenovateli shodují se s jmenovatelem výrazu právě napsaného a jichž čitatelé po řadě jsou

$$-\psi'_{11} F(y_1, y_2), \quad -\psi'_{22} F(y_1, y_2), \quad (\psi'_{11} \psi'_{22} - \psi'_{12} \psi'_{21}) F(y_1, y_2).$$

Násobíme-li tyto (celkem čtyři) rozvoje po řadě čísly 1, x_1, x_2, $x_1 x_2$, součiny tak vzniklé sečteme a na pravé straně náležitě upravíme, máme rozvoj tvaru

$$F(y_1, y_2) = \sum_{k_1 k_2} B_{k_1, k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2}, \quad k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde jest $B_{0,0} = F(a_1^0, a_2^0)$ a při $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ jest

$$B_{k_1, k_2} = \frac{1}{k_1!\, k_2!} D_{a_1}^{k_1-1} D_{a_2}^{k_2-1} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_2} \psi_1^{k_1} \psi_2^{k_2} + \frac{\partial F}{\partial a_1} \frac{\partial \psi_1^{k_1}}{\partial a_2} \psi_2^{k_2} + \frac{\partial F}{\partial a_2} \frac{\partial \psi_2^{k_2}}{\partial a_1} \psi_1^{k_1} \right]$$

$$B_{k_1, 0} = \frac{1}{k_1!} D_{a_1}^{k_1-1} \left[\frac{\partial F}{\partial a_1} \psi_1^{k_1} \right]_0, \quad B_{0, k_2} = \frac{1}{k_2!} D_{a_2}^{k_2-1} \left[\frac{\partial F}{\partial a_2} \psi_2^{k_2} \right]_0, \tag{c}$$

ve kterýchžto výrazech jsou zavedeny u funkcí ψ_1, ψ_2, F a jich derivací neodvisle proměnné $[a_1, a_2]$ na místo proměnných $[y_1, y_2]$ a kde index 0 má význam svrchu vytčený.

Stejným způsobem dostaneme rozvoj pro funkci $F(y_1, y_2, y_3)$, kde y_1, y_2, y_3 splňují rovnici (1); označíme-li v něm koefficienty při $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$ značkou C_{k_1, k_2, k_3}, jest při $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 > 0$ *)

$$C_{k_1, k_2, k_3} = \frac{1}{k_1!\, k_2!\, k_3!} D_{a_1}^{k_1-1} D_{a_2}^{k_2-1} D_{a_3}^{k_3-1} \left[\frac{\partial^3 F}{\partial a_1 \partial a_2 \partial a_3} \psi_1^{k_1} \psi_2^{k_2} \psi_3^{k_3} + \right.$$
$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_2} \left(\frac{\partial \psi_1^{k_1}}{\partial a_3} \psi_2^{k_2} \psi_3^{k_3} + \frac{\partial \psi_2^{k_2}}{\partial a_3} \psi_1^{k_1} \psi_3^{k_3} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial a_2 \partial a_3} (\ldots) + \frac{\partial^2 F}{\partial a_3 \partial a_1} (\ldots) +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial a_1} \left(\frac{\partial^2 \psi_1^{k_1}}{\partial a_2 \partial a_3} \psi_2^{k_2} \psi_3^{k_3} + \frac{\partial \psi_1^{k_1}}{\partial a_2} \frac{\partial \psi_2^{k_2}}{\partial a_3} \psi_3^{k_3} + \frac{\partial \psi_1^{k_1}}{\partial a_3} \frac{\partial \psi_3^{k_3}}{\partial a_2} \psi_2^{k_2} \right) +$$
$$\left. + \frac{\partial F}{\partial a_2} (\ldots) + \frac{\partial F}{\partial a_3} (\ldots) \right]_0 .$$

Koefficienty $C_{k_1, k_2, 0}$ shodují se úplně ve svém vyjádření s koefficienty B_{k_1, k_2} v (c) uvedenými; obdobný tvar mají i $C_{k_1, 0, k_3}$, C_{0, k_2, k_3}.

V rozvojích získaných jako specielní případy jsou obsaženy rozvoje pro implicitní funkce danými rovnicemi definované. Tak ku př., kdy-

*) Dle souhlasných výsledků výpočtů pánů *Kořínka* a *Kotána*.

bychom chtěli míti rozvoj pro implicitní funkce y_1, y_2, y_3 definované za daných předpokladů rovnicemi (1), kladli bychom v rozvoji posledním po řadě $F(y_1, y_2, y_3) = y_1, y_2, y_3$. Klademe-li ku př. $F(y_1, y_2, y_3) = y_1$, obdržíme pro y_1 tento rozvoj

$$y_1 = a_1^0 + \sum_{k_1} \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} D_{a_1}^{k_1-1}[\psi_1^{k_1}(a_1, a_2, a_3)]_0 +$$

$$+ \sum_{k_1, k_2} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2}}{k_1! \, k_2!} D_{a_1}^{k_1-1} D_{a_2}^{k_2-1} \left[\frac{\partial \psi_1^{k_1}(a_1, \ldots)}{\partial a_2} . \psi_2^{k_2}(a_1, \ldots) \right]_0 + \cdot$$

$$+ \sum_{k_1, k_3} \frac{x_1^{k_1} x_3^{k_3}}{k_1! \, k_3!} D_{a_1}^{k_1-1} D_{a_3}^{k_3-1}[\ldots] + \sum_{k_1, k_2, k_3} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}}{k_1! \, k_2! \, k_3!} D_{a_1}^{k_1-1} D_{a_2}^{k_2-1} D_{a_3}^{k_3-1} .$$

$$\cdot \left[\frac{\partial^2 \psi_1^{k_1}}{\partial a_2 \, \partial a_3} \psi_2^{k_2} \psi_3^{k_3} + \frac{\partial \psi_1^{k_1}}{\partial a_2} \frac{\partial \psi_2^{k_2}}{\partial a_3} \psi_3^{k_3} + \frac{\partial \psi_1^{k_1}}{\partial a_3} . \frac{\partial \psi_3^{k_3}}{\partial a_2} \psi_2^{k_2} \right]_0 ;$$

$$k_1, k_2, k_3 = 1, 2, 3, \ldots,$$

za posledním součtovým znaménkem vynechány k vůli stručnosti znaky proměnných a_1, a_2, a_3.

Poznámka. Obdobné rozvoje lze odvoditi i pro rovnice obecnější než rovnice (1). Uvažujeme-li rovnice

$$\varphi_i(y_1, y_2, y_3) = a_i^0 + x_i \psi_i(y_1, y_2, y_3), \quad i = 1, 2, 3 \qquad (d)$$

místo rovnic (1), rozšíříme (za náležitých ovšem předpokladů, jež doplní snadno čtenář) platnost rovnic (5), (5′), v nichž však jest klásti místo J determinant, jehožto elementy jsou $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} - x_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k}$; za J_{ik} pak minory tohoto determinantu. Stejně rozšiřuje se i platnost vztahu (6) pro tento případ. Vyjádření koefficientů v (7) však dostává tvar

$$A_{k_1, k_2, k_3} = \frac{1}{k_1! \, k_2! \, k_3!} D_{a_1}^{k_1} D_{a_2}^{k_2} D_{a_3}^{k_3}$$

$$\left[\psi_1^{k_1}(b_1, b_2, b_3) \psi_2^{k_2}(b_1, \ldots) \psi_3^{k_3}(b_1, \ldots) \frac{F(b_1, b_2, b_3)}{j(b_1, \ldots)} \right]_0$$

kde b_1, b_2, b_3 jsou funkce bodu $[a_1, a_2, a_3]$ definované rovnicemi

$$\varphi_i(b_1, b_2, b_3) = a_i$$

a v okolí bodu $[a_1, a_2, a_3] = [a_1^0, a_2^0, a_3^0]$ rozvinutelné v řady potenční a kde

$$j(y_1, y_2, y_3) = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} .$$

Rovnicím (d) lze ovšem také dáti tvar $y_i = \Phi_i(a_1^0 + x_1 \psi_1, a_2^0 + x_2 \psi_2, a_3^0 + x_3 \psi_3)$, $i = 1, 2, 3$.

255. Věta Weierstrassova. Uvažujme nyní funkce implicitní y proměnné x v bodě $x=0$ a okolí dané rovnicí $F(x, y)=0$, jež jsou spojité a stávají se nullou pro $x=0$, v případě dosud vyloučeném. Budeme totiž předpokládati, *že vedle samozřejmého vztahu* $F(0, 0)=0$ *jsou splněny vztahy v počtu* $n-1$ *pravící, že částečné derivace funkce* $F(x, y)$ *dle* y *řádu* 1., 2., ..., $(n-1)$-ho *jsou rovny nulle v bodě* $[0, 0]$, *a že teprve* n-tá *derivace té funkce dle* y *jest v* $[0, 0]$ *od nully různá.* Dále budeme předpokládati, že $F(x, y)$ lze v okolí bodu $[0, 0]$ rozvinouti v řadu Taylorovu. Předpoklady učiněné o $F(x, y)$ nám pak dovolují psáti $F(x, y)$ ve tvaru

$$F(x, y)=xu_0(x)+xu_1(x)y+\dots$$
$$\dots+xu_{n-1}(x)y^{n-1}-u_n(x)y^n-u_{n+1}(x)y^{n+1}-\dots,$$

při čemž $u_k(x)$ jsou potenční řady proměnné x a $u_n(0)=a\neq0$. K vůli jednoduchosti budeme předpokládati, že bod $[1, 2]$ jest vnitřním bodem v oboru konvergenčním řady pro $F(x, y)$ (jakožto řady mocninné dvojné argumentů x, y). Není-li totiž tento požadavek splněn hned od počátku, stačí substitucí tvaru $x=cx'$, $y=\frac{1}{2}dy'$ zavésti nové proměnné x', y'. Je-li pak při původních proměnných bod $[c, d]$ vnitřním bodem oboru konvergenčního, jest takovým bodem též $[1, 2]$ při nových proměnných.

Provedeme nyní dělení výrazu $F(x, y)$ výrazem

$$-\varphi(x, y)=-y^n+xV_{n-1}y^{n-1}+xV_{n-2}y^{n-2}+\dots+xV_1y+xV_0, \tag{1}$$

V_k jsou zatím neurčené veličiny (parametry). Dělení provedeme tak, že nahradíme jednotlivé mocniny y vyšších exponentů než $n-1$ dle rovnic

$$\begin{aligned} y^n &= \varphi(x, y)+xV_{n-1}y^{n-1}+\dots+xV_0,\\ y^{n+1} &= (y+xV_{n-1})\varphi(x, y)+xV_{n-1}^{(1)}y^{n-1}+\dots+xV_0^{(1)},\\ y^{n+2} &= (y^2+xV_{n-1}y+xV_{n-1}^{(1)})\varphi(x, y)+xV_{n-1}^{(2)}y^{n-1}+\dots+xV_0^{(2)},\\ &\dots\dots\dots, \end{aligned} \tag{2}$$

při čemž první z těchto rovnic následuje z (1), vypočteme-li z ní y^n; druhá z první, násobíme-li ji y a použijeme (1), stejně třetí z druhé atd. Jest patrno, že ku příkl.

$$V_i^{(1)}=V_{i-1}+xV_iV_{n-1},\quad V_i^{(2)}=V_{i-1}^{(1)}+xV_{n-1}^{(1)}V_i=V_{i-2}+x(\dots),\dots,$$

kde v závorce jsou členy závislé na číslech V_i ve vyšším stupni.

Běží nyní o to, abychom vyšetřili, jak vzrůstají s rostoucím k čísla $xV_i^{(k)}$. Tato čísla hoví dle vztahů svrchu uvedených rovnicím

$$xV_i^{(k)}=xV_{i-1}^{(k-1)}+xV_i\,.\,xV_{n-1}^{(k-1)}, \tag{3}$$
$$i=0, 1, 2, \dots, n-1;\qquad k=1, 2, 3, \dots$$

(při čemž $V_{-1}^{(k)} = 0$, $V_i^{(0)} = V_i$). Jsou-li tedy všecka čísla xV_i (i jest v následujícím kterékoli číslo celé intervalu $(0, n-1)$) menší v absolutní hodnotě než ϱ, jsou dle rovnic (3) — užitých při $k=1$ — čísla $|xV_i^{(1)}|$ menší než $\varrho(1+\varrho)$. V důsledku pak týchž rovnic — při $i=2$ — následuje za téhož předpokladu dále, že $|xV_i^{(2)}|$ jsou menší než $\varrho(1+\varrho)^2$ a t. d, až obecně dospějeme k výsledku

$$|xV_i^{(k)}| < \varrho(1+\varrho)^k.$$

Jsou-li tedy čísla $|xV_i|$ menší než ϱ, pak absolutní hodnoty veličin $xV_i^{(k)}$ s rostoucím k rostou pomaleji než členové řady geometrické o kvocientu $1+\varrho$. Avšak $xV_i^{(k)}$ lze psáti jako polynom závislý na n argumentech $xV_{n-1}, xV_{n-2}, \ldots, xV_0$ a v nich stupně $k+1$. Koefficienty tohoto polynomu jsou čísla kladná. Z vývodů předcházejících jest pak zároveň patrno, že součet absolutních hodnot jednotlivých členů onoho polynomu jest rovněž menší než $\varrho(\varrho+1)^k$. Číslo kladné ϱ můžeme předpokládati tak malé, jak chceme; stačí k tomu zvoliti si pro x interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$, kde ε jest dosti malé. Můžeme tedy vhodnou volbou čísla ε docíliti, aby $1+\varrho<2$, ať již veličiny V_k jsou omezeny na jakýkoliv konečný obor (n-rozměrný).

Dosazujeme-li dle (2) do $F(x, y)$ a to tak, že ze členů, jež obsahují jako činitel $\varphi(x, y)$, tento činitel vytkneme a ostatně výsledek substituce píšeme jako mocninou řadu argumentů $x, y, V_{n-1}, V_{n-2}, \ldots, V_0$ dostáváme pro $F(x, y)$ toto vyjádření

$$F(x, y) = G(x, y, V_{n-1}, V_{n-2}, \ldots, V_0)\, \varphi(x, y) + xR, \tag{4}$$

kde G jest mocninná řada vytčených proměnných a R jest dáno výrazem

$$R = y^{n-1}(-W_{n-1} + u_{n-1}(x)) \quad y^{n-2}(-W_{n-2} + u_{n-2}(x)) + \ldots$$
$$\ldots + (-W_0 + u_0(x)), \tag{4'}$$

při čemž W_k jsou mocninné řady argumentů $x, V_{n-1}, V_{n-2}, \ldots, V_0$.)

Všecky mocninné řady tak vzniklé (t. j. řady $G, W_{n-1}, W_{n-2}, \ldots, W_0$) jsou konvergentní, je-li $1+\varrho<2$ a zároveň $|x|<1, |y|<2$. Neboť dosazujeme-li dle (2) za y^{n+k}, rozštěpí se každý člen, jenž obsahoval y^{n+k}, za činitel závislý na y, v několik členů a dovedeme snadno dle předcházejícího omeziti shora součet absolutních hodnot těchto členů. Tak ku př. součet absolutních hodnot členů, v něž se dle (2) rozštěpí y^{n+2}, jest menší než

$$(|y|^2+\varrho|y|+\varrho(1+\varrho)).|\varphi(x, y)|+\varrho(1+\varrho)^2(|y|^{n-1}+|y|^{n-2}+\ldots+|y|+1)$$

t. j. jest menší (je-li $\varrho<1$, $|y|<2$) než

$$3.2^2|\varphi(x, y)|+2^{n+2}$$

a obecně součet absolutních hodnot členů, v něž se rozpadá výraz dosazovaný za y^{n+k}, jest menší než

$$(k+1)\,2^k\,|\varphi(x,\,y)|+2^{n+k}.$$

Odtud jest patrno z předpokladů učiněných (ze kterých následuje, že i derivace řady pro $F(x,\,y)$ dle y konverguje pro $|x|<1$, $|y|<2$), že mocninné řady pro G, $W_{n-1}, \ldots, W_0$ jsou absolutně konvergentní, je-li $|y|<2$ a x tak malé, aby současně $|x|<1$ a $|xV_i|<\varrho<1$; $i=0,\,1,\,2,\ldots,\,n-1$. Rovnost (4) jest za těchto omezení tudíž platna.

Rovnici (4) můžeme pak pojímati jakožto rovnici udávající nám výsledek dělení řady dvojné $F(x,\,y)$ proměnných x, y výrazem $\varphi(x,\,y)$, kterýž jest mnohočlen n-tého stupně v y s koefficienty, jež závisí na n dosud libovolných parametrech V_k způsobem svrchu blíže vyznačeným.

Vyšetřujme nyní zda $V_{n-1}, V_{n-2}, \ldots, V_0$ lze stanoviti jako potenční řady proměnné x (konvergentní v okolí bodu $x=0$) tak, aby $R=0$ v okolí bodu $x=0$ a pro všecka y v jistém okolí bodu $y=0$. To pak nastane tenkráte a jenom tenkráte dle (4′), bude-li splněno n rovnic

$$W_k=u_k(x),\quad k=0,\,1,\,2,\ldots n-1.$$

Aby těchto n rovnic bylo řešitelno dle $V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}$, k tomu jest nutno a postačitelno (odst. 253.), by jich Jacobien dle parametrů V_k byl různý od nully v bodě $x=0$ (a dosazujeme-li zároveň za V_k hodnoty, jež V_k má nabývati pro $x=0$).

Avšak

$$W_k=u_n(x)\,V_k+u_{n+1}(x)(V_{k-1}+xV_kV_{n-1})+u_{n+2}(x)(V_{k-2}+x(\ldots))+\ldots$$

a jest tedy

$$\left[\frac{\partial(W_k-u_k(x))}{\partial V_k}\right]_{x=0}=a,\quad \left[\frac{\partial(W_k-u_k(x))}{\partial V_i}\right]_{x=0}=0,\ \text{je-li } i>k,$$

odkudž jest patrno, že Jakobien

$$\frac{D(W_{n-1}-u_{n-1},\ldots,W_0-u_0)}{D(V_{n-1},\ldots\ldots\ldots,V_0\quad)}=a^n \text{ pro } x=0,$$

— neboť jest to determinant mající v hlavní diagonále prvky rovné a, na jedné straně diagonaly hlavní pak vesměs prvky rovné nulle — ať přisuzujeme veličinám V_k pro $x=0$ jakékoliv hodnoty. Hodnoty tyto ostatně nejsou libovolné, nýbrž jsou jednoznačně stanoveny rovnicemi $W_k-u_k(x)=0$, $k=0,\,1,\,2,\ldots,\,n$, klademe-li v nich $x=0$. Tím dostáváme n lineárních rovnic pro hodnoty neznámých funkcí V_k v bodě $x=0$, jichž determinant jest právě (jak svrchu ukázáno) rovný a^n.

Stanoví tedy n rovnic $W_k - u_k(x) = 0$ jednoznačně V_k jakožto mocninné řady proměnné x v jistém okolí bodu $x = 0$. Dosadíme li za V_k tyto mocninné řady do rovnice (4), změní se R identicky v 0 a dostáváme rozklad funkce $F(x, y)$ v součin mocninné řady proměnných x, y (ve které, jak z (2) patrno, člen nezávislý na $[x, y]$ jest $-a$) a mnohočlenu n-tého stupně v y, jehož součinitelé jsou mocninné řady proměnné x (při y^n pak součinitel jest 1).

Můžeme tak vysloviti větu (měníce zároveň poněkud označení): *Je-li dána $F(x, y)$, funkce to proměnných $[x, y]$, taková, že lze ji rozvinouti v okolí bodu $[0, 0]$ v řadu potenční* (argumentů x, y), *a dále taková, že*

$$F(0, 0) = 0, \quad \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{0,0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{0,0} = 0, \ldots, \quad \left[\frac{\partial^{n-1} F}{\partial y^{n-1}}\right]_{0,0} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^n F}{\partial y^n}\right]_{0,0} = a \neq 0,$$

pak lze pro jisté okolí bodu $[0, 0]$ psáti $F(x, y)$ ve tvaru součinu

$$F(x, y) = (y^n + v_1(x) y^{n-1} + v_2(x) y^{n-2} + \ldots + v_n(x)) \,.\, F_1(x, y), \tag{5}$$

kde $v_1(x)$, $v_2(x), \ldots v_n(x)$ jsou potenční řady proměnné x rovnající se nulle pro $x = 0$ a kde $F_1(x, y)$ jest potenční řada proměnných x, y, jež v bodě $[0, 0]$ nabývá hodnoty $a \neq 0$. Takový rozklad funkce $F(x, y)$ v součin jest jen jediný možný a jsou koefficienty z řad $v_k(x)$, $F_1(x, y)$ určeny operacemi racionálnými.

Určení koefficientů řad $v_k(x)$, $F_1(x, y)$ přirozeně může provedeno býti též jinými cestami než cestou naznačenou v úvaze podané; ku př. pomocí věty o neurčitých součinitelích. Označíme-li pro okamžik součinitele v rozvoji potenčním u $F_1(x, y)$ znakem a_{ik} (což jest součinitelem součinu $x^i\, y^k$), součinitele v rozvoji výrazu $y^n + v_1(x) y^{n-1} + \ldots$ obdobně b_{ik}, vyplývají větou o neurč. souč. nejprve součinitelé a_{0k}, pak b_{1k}, a_{1k}, dále b_{2k}, a_{2k} atd.

Dokázali jsme sice, že (5) jest platna v jistém okolí bodu $[0, 0]$, avšak jest bezprostředně patrno, že platnost její se rozšiřuje na obor, který jest společným oborem konvergence obou činitelů pravé strany rovnice (5), pojímáme-li tyto činitele jakožto mocninné řady proměnných $[x, y]$ (viz odst. 216.). *Obor tento jest za předpokladů učiněných vždy obor spojitý dvojrozměrný* (tedy obor obsahující body $[x, y]$, kde i $x \neq 0$, i $y \neq 0$).

Věta dokázaná usnadňuje nám značně vyšetřování funkcí y proměnné x hovících rovnici $F(x, y) = 0$, spojitých a rovných nulle pro $x = 0$.

Jelikož $F_1(x, y)$ v bodě [0, 0] jest rovno $a \neq 0$ a v okolí toho bodu jest rovněž od nully různo, jest pro tyto funkce nutně splněna rovnice

$$y^n + v_1(x) y^{n-1} + v_2(x) y^{n-2} + \ldots + v_n(x) = 0; \qquad (6)$$

t. j. funkce ty hoví rovnici algebraické n-tého stupně o koefficientech daných řadami potenčními proměnné x (a pro něž $v_k(0) = 0$).

Poznámka 1. Úvahy podané vztahují se k vyšetřování implicitní funkce y proměnné x v okolí bodu $x = 0$, při čemž implicitní funkce jest rovna nulle pro $x = 0$ a splňuje rovnici $F(x, y) = 0$ — za předpokladu ovšem, že $F(0, 0) = 0$. Jest patrno však, že úvahy lze bezprostředně rozšířiti pro případ, že jde o vyšetřování funkcí y v okolí libovolného bodu x_0, nabývajících hodnoty $y = y_0$ pro $x = x_0$ a splňujících rovnici $F(x, y) = 0$ za předpokladu, že $F(x_0, y_0) = 0$. Stačí, abychom tento jenom nepodstatně obecnější případ na případ vyšetřený převedli, zavésti do dané rovnice $F(x, y) = 0$ místo x, y proměnné x', y' rovnicemi $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$, čímž se rovnice daná změní v rovnici $\overline{F}(x', y') = 0$. Užijeme-li pak věty získané na tuto rovnici, máme, vrátíme-li se potom k původním proměnným x, y, místo (5) obecně tento rozklad

$$F(x, y) =$$
$$[(y - y_0)^n + v_1(x - x_0) \cdot (y - y_0)^{n-1} + \ldots + v_n(x - x_0)] F_1(x - x_0, y - y_0) \cdot \qquad (5')$$

kde $v_k(x)$, $F_1'(x, y)$ jsou potenční řady o vlastnostech v základní větě svrchu vytčených; pro hodnoty funkce $F(x, y)$ a jejích prvních n derivací dle y v bodě $[x_0, y_0]$ jsou pak platny tytéž vztahy, jako byly svrchu předpokládany pro hodnoty funkce $F(x, y)$ a jejích derivací dle y v bodě [0, 0].

Tato poznámka samozřejmě se rozšiřuje i na všecky úvahy následující, v nichž stále dvojice proměnných $[x, y]$ k vůli zjednodušení označení předpokládána v okolí bodu [0, 0].

Poznámka 2. Důkaz podaný lze snadno rozšířiti na implicitní funkce y o několika neodvisle proměnných $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, dané rovnicí $F(y, x_1, x_2, \ldots, x_\mu) = 0$, za předpokladu, že F a jeho prvých n-1 derivací dle y v bodě $[x_1, x_2, \ldots, x_\mu; y] = [0, 0, \ldots 0; 0]$ jsou rovny nulle, n-tá pak derivace od nully různa (při rozšíření tom ovšem nelze z funkcí $u_i(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)$ obecně vytýkati nějaký faktor, jako to bylo učiněno v provedené úvaze, kde bylo vytčeno x; avšak toto vytknutí vykonáno tam bylo nikoliv z nějaké vnitřní nutnosti, nýbrž pouze ku zvýšení přístupnosti pro čtenáře).

Věta tu projednávaná byla poprve vyslovena a dokázána (a to hned v obecném tvaru, o němž právě byla řeč) *Weierstrassem* (Viz jeho sebrané spisy, II. sv., str. 135. a násl.); nazývá se tudíž větou Weierstrassovou

256. Jestliže y jakožto funkce proměnné x jest dáno řadou absolutně konvergentní v okolí bodu $x=0$ tvaru

$$y = a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \dots, \qquad (a)$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ jsou čísla reálná, pro něž $0 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots$, a kde $a_1, a_2, a_3, \dots$ jsou konstanty a $a_1 \neq 0$, pak říkáme, že *funkce* y *proměnné* x *jest v okolí bodu* $x=0$ **řádu** α_1 **v** x.*) *Obecněji budeme říkati, že funkce* y *proměnné* x jest **v okolí bodu** $x=0$ **řádu** α **v** x, *jestliže limita*

$$\lim_{x=0} \frac{|y|}{|x|^\alpha}$$

existuje a jest od nully různa, a to ať x *konverguje k nulle jakýmikoliv hodnotami, pro něž jest* y — jakožto funkce proměnné x — *definováno*. Je-li tedy ku př. y definováno v okolí bodu $x=0$ pouze pro všecka $x>0$, pak při limitě vypsané běží patrně o limitu z prava (pro $\lim x = +0$).

Je-li y v x řádu α, jest součin $x^p . y^q$ v x řádu $p + \alpha q$ (stále v okolí bodu $x=0$), jakož z definice podané ihned vyplývá.

Výraz $x^p y^q$ má v okolí bodu $O(0, 0; \varepsilon)$, kde $\varepsilon < 1$, tím větší hodnotu, čím jest nižšího řádu; můžeme dokonce při vyšetřování polynomů v x, y s velikým přiblížením podržeti jenom členy nejnižšího řádu a ostatní členy zanedbávati, je-li ovšem ε dosti malé. Jelikož pak náš úkol jest zabývati se rovnicí (6) v okolí bodu [0, 0], jest patrno, že v řešení toho úkolu veliký význam budou míti členy nejnižšího řádu na levé straně té rovnice se nacházející.

Stanovení členů nejnižšího řádu na levé straně rovnice (6) za předpokladu, že y jest v x řádu α, provedeme takto: V řadách $v_1(x)$, $v_2(x) \dots$ podržíme členy nejnižšího řádu v x; neboť jest patrno, že $x^p y^q$ jest nižšího řádu než $x^{p'} y^q$, je-li $p < p'$ (ať jest α jakékoliv) a to nižšího o $p' - p$. Tak dostaneme celkem nejvýše $(n+1)$ dvojic číselných $[p, q]$,

*) Pokud jest ovšem v tom okolí řadou (α) definována. Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ obecná čísla reálná, definuje řada (a) funkci y pouze v okolí bodu 0 na pravo. V následujícím $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ budou čísla racionálná se společným jmenovatelem; u, je-li nejmenší společný jmenovatel jich číslo liché, může x v (α) býti kladné i záporné. Je-li číslem sudým, jsme omezeni pro x na čísla kladná. V tomto případě však vedle řady (a) lze uvažovati řadu $a_1(-x)^{\alpha_1} + a_2(-x)^{\alpha_2} + \dots$, jež má pak význam v okolí bodu $x=0$ v levo; *i tato řada bude pro nás funkcí proměnné* x *v okolí bodu* $x=0$ *řádu* α_1 *v* x.

jež souhrnně značiti budeme $\mathfrak{A}$; pomocí nich sestrojíme hodnoty pro výraz $p+\alpha q$. Těm dvojicím, pro které tento výraz má nejmenší hodnotu, odpovídají, je-li y v x řádu α, členové $x^p y^q$ nejnižšího řádu.

Budiž ten řád ϱ; pak rovnice $p+\alpha q=\varrho$, kde p, q jsou proměnné a α, ϱ konstanty, nám v pravoúhlé soustavě souřadnicové o osách P, Q představuje přímku π o směrnici $-\alpha^{-1}$ utínající na ose P úsečku ϱ. Na této přímce π leží body $[p, q]$, jež určují svými souřadnicemi členy nejnižšího řádu (je-li y řádu α v x). Všecky ostatní ze dvojic $\mathfrak{A}$ stanoví body $[p, q]$ ležící na pravo od přímky π (t. j. na té polovině roviny rozpůlené přímkou π, na které neleží počátek souřadnicové soustavy). Neboť je-li $p'+\alpha q'=\varrho'$ a $\varrho'>\varrho$, leží $[p', q']$ na přímce $p+\alpha q=\varrho'$, která utínajíc na ose P úsečku $\varrho'>\varrho$ a jsouc rovnoběžna s π, leží celá na pravo od π.

Abychom tedy nalezli všecky členy z levé strany (6), jež mohou býti členy nejnižšího řádu (při vhodně voleném α), znázorníme dvojice $\mathfrak{A}$ jako body $[p, q]$ v pravoúhlé soustavě PQ; dostaneme množství bodové, jež označíme rovněž $\mathfrak{A}$. Jeden z těchto bodů jest na ose Q, totiž bod $[0, n]$ příslušící členu y^n; jeden na ose P, totiž bod odpovídající členu nejnižšího řádu v řadě $\mathfrak{P}v_n(x)$. Tyto dva body — značme je A_0, A_ν, — spojíme polygonální čarou o těchto vlastnostech:

1. Vrcholy polygonální čáry patří vesměs k bodům $\mathfrak{A}$.

2. Přímky vzniklé prodloužením jednotlivých stran polygonální čáry nemají na své levé straně žádný z bodů $\mathfrak{A}$.

Polygonální čáru uvažovanou si snadno představíme, když si myslíme v rovině PQ do bodů $\mathfrak{A}$ zabodnuty kolmo tyčinky. Pak niť, jež ležíc na rovině PQ, obepíná tyčinky a jejíž konce jsou napínány ve směrech kladných os P, Q, vytvořuje svou částí položenou mezi body A_0, A_ν polygonální čáru hledanou.

Vrcholy lomené čáry buďtež po řadě $A_0, A_1, \ldots, A_\nu$; bod A_i nechť jest dán dvojicí $[p_i, q_i]$. Pak na $\overline{A_{i-1} A_i}$ jsou všecky dvojice z $\mathfrak{A}$, jež odpovídají členům nejnižšího řádu, je-li y v x řádu λ_i, kde

$$\lambda_i=\frac{p_i-p_{i-1}}{q_{i-1}-q_i}.$$

Jest patrno (dle 2. vlastnosti lomené čáry), že $\lambda_i<\lambda_{i+1}$, má-li ovšem polygonální čára aspoň dvě strany.

Vrchol A_i sám přísluší členu $c.x^{p_i}y^{q_i}$; člen tento pak jest nejnižšího řádu, jestiže y jest řádu λ v x, při čemž λ jest libovolné číslo v $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$. Členy příslušící bodům A_0, A_ν jsou nejnižšího řádu, jestliže λ jest v intervalu $(0, \lambda_1)$, resp. (λ_ν, ∞). Ty z bodů $\mathfrak{A}$, jež nejsou položeny na polygonální čáře, nepřísluší nikdy členům nejnižšího řádu, ať λ (řád y v x) jest voleno jakkoliv.

Polygonální čára zde zavedená sluje **Newtonova** (polygon Newtonův).

Příklad. Mějmež ku př. výraz (koefficienty $a_1, b_1, \ldots, k_1$ nechť jsou čísla různá od 0)

$$y^9 + y^8(a_1 x + \ldots) + y^7(b_1 x + \ldots) + y^6(c_1 x^2 + \ldots) + y^5(d_1 x^2 + \ldots)$$
$$+ y^4(e_1 x^3 + \ldots) + y^3(f_1 x^4 + \ldots) + y^2(g_1 x^5 + \ldots) + y(h_1 x^5 + \ldots) + k_1 x^7 + \ldots$$

Množství bodů $\mathfrak{A}$ skládá se z bodů [0, 9], [1, 8], [1, 7], [2, 6], [2, 5], [3, 4], [4, 3], [5, 2], [5, 1], [7, 0]. Znázorníme-li si tyto body na čtverečkovaném papíře, dostaneme ihned pro vrcholy Newtonovy polygonální čáry body $A_0[0, 9]$, $A_1[2, 5]$, $A_2[5, 1]$, $A_3[7, 0]$. Převratné hodnoty směrnic jednotlivých stran s opačným znaménkem jsou po řadě čísla

```
10 .
 9 *
 8    *
 7 .  *
 6 .     *
 5 .     *
 4          *
 3             *
 2                *
 1                *
 0 . . . . . . .      *
   0  1  2  3  4  5  6  7
```

$$\frac{2-0}{9-5} = \frac{1}{2}, \quad \frac{5-2}{5-1} = \frac{3}{4}, \quad \frac{7-5}{1-0} = 2.$$

Na první straně $\overline{A_0 A_1}$ leží vedle vrcholů A_0, A_1 ještě bod [1, 7], na ostatních stranách pak jsou z bodů $\mathfrak{A}$ položeny toliko příslušné vrcholy. Je-li tedy y v x řádu $\frac{1}{2}$, jsou v daném výraze $y^9 + b_1 y^7 x + d_1 y^5 x^2$ členové nejnižšího řádu (řádu $\frac{9}{2}$). Je-li y v x řádu $\frac{3}{4}$, resp. 2, jsou nejnižší členové $d_1 y^5 x^2 + h_1 y x^5$ resp. $h_1 y x^5 + k_1 x^7$ (řádu $5\frac{3}{4}$, resp. 7). Vedle toho jest člen y^9 resp. člen $d_1 x^2 y^5$, $h_1 x^5 y$, $k_1 x^7$ nejnižšího řádu, je-li y v x řádu λ, kde λ jest v $(0, \frac{1}{2})$ resp. v $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, 2)$, $(2, \infty)$. Všecky ostatní členy — počtem 5 — nemohou býti členy nejnižšího řádu, ať jest řád y v x jakýkoliv.

257. Uvažujme zase obecně levou stranu rovnice (6), již značiti budeme $\varphi(y, x)$, a nechť jest $\overline{A_0 A_1}$ prvá strana Newtonovy polygonální čáry jí příslušné, o níž budeme předpokládati, že má více než jednu stranu. Na $\overline{A_0 A_1}$ buďtež položeny z bodů $\mathfrak{A}$ vedle $A_0[0, n]$, $A_1[p_1, q_1]$ ještě body $A_1^{(i)}[p_1^{(i)}, q_1^{(i)}]$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$, tedy s body A_0, A_1 celkem $r + 1$ bodů; $(q_1^{(i-1)} > q_1^{(i)} > q_1)$. Jest potom (pro převratnou hodnotu směrnice přímky $\overline{A_0 A_1}$ záporně branou)

$$\lambda_1 = \frac{p_1 - 0}{n - q_1} = \frac{p_1^{(i)}}{n - q_1^{(i)}} = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1}, \quad i = 1, 2, \ldots, r-1,$$

kde $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ buďtež čísla celá (kladná) bez společné míry. Je-li y řádu λ_1 v x, jsou dle předpokladů učiněných na $\overline{A_0 A_1}$ položeny všecky body odpovídající členům nejnižšího řádu ve $\psi(y, x)$; ostatní členy z $\psi(y, x)$ jsou řádu vyššího. Jest tedy zejména

$$n\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1} = p_1 + q_1\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1} = p_1^{(i)} + q_1^{(i)}\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1} < p + q\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{b}_1}$$

kde $[p, q]$ jest kterýkoliv bod z $\mathfrak{A}$ neležící na $\overline{A_0 A_1}$; t. j. jest

$$n\mathfrak{a}_1 = p_1\mathfrak{b}_1 + q_1\mathfrak{a}_1 = p_1^{(i)}\mathfrak{b}_1 + q_1^{(i)}\mathfrak{a}_1 < p\mathfrak{b}_1 + q\mathfrak{a}_1. \qquad (\beta)$$

Zaveďme do $\psi(y, x)$ nové proměnné η, t substitucí

$$y = \eta t^{\mathfrak{a}_1}, \quad x = t^{\mathfrak{b}_1}. \qquad (\gamma)$$

Pak se dá vytknouti z $\psi(y, x)$ činitel $t^{n\mathfrak{a}_1} = t^{p_1\mathfrak{b}_1 + q_1\mathfrak{a}_1}$ a dostaneme

$$\psi(y, x) = t^{n\mathfrak{a}_1}(\eta^n + \bar{v}_1(t)\eta^{n-1} + \bar{v}_2(t)\eta^{n-2} + \ldots + \bar{v}_n(t)) = t^{n\mathfrak{a}_1}\bar{\psi}(\eta, t), \qquad (\delta)$$

kde v důsledku vztahů (β)

$$\bar{v}_{n-q_1}(0) = c_{p_1}^{(n-q_1)} \neq 0, \quad \bar{v}_{n-q_1^{(i)}}(0) = c_{p_1^{(i)}}^{(n-q_1^{(i)})} \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots r-1$$

a všecky ostatní rozvoje $\bar{v}_k(t)$ pro $t = 0$ jsou rovny nulle. Následkem toho lze dle věty Weierstrassovy (odst. 255.) odloučiti z $\bar{\psi}(\eta, t)$ činitel, který jest v η stupně q_1 (neboť posledních q_1 funkcí $\bar{v}_k(t)$ jest rovno nulle pro $t = 0$), a jelikož $\bar{\psi}(\eta, t)$ jest celkem v η stupně n, bude druhý činitel v η stupně $n - q_1$; tento druhý činitel v bodě $[0, 0]$ bude rovný $c_{p_1}^{(n-q_1)}$. Lze tedy psáti

$$\begin{aligned} t^{n\mathfrak{a}_1}\bar{\psi}(\eta, t) = t^{n\mathfrak{a}_1}(\eta^{n-q_1} + \bar{u}_1(t)\eta^{n-q_1-1} + \ldots + \bar{u}_{n-q_1}(t)) \cdot \\ \cdot (\eta^{q_1} + \bar{w}_1(t)\eta^{q_1-1} + \ldots + \bar{w}_{q_1}(t)), \end{aligned} \qquad (\delta')$$

při čemž

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u}_{n-q_1}(0) = c_{p_1}^{(n-q_1)} \neq 0, \quad \bar{w}_k(0) = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, q_1 \\ &\text{a kde též} \\ &\bar{u}_{n-q_1^{(i)}}(0) = c_{p_1^{(i)}}^{(n-q_1^{(i)})} \neq 0, \quad \bar{u}_l(0) = 0, \quad \text{je-li } l \neq n - q_1^{(i)}, \quad n - q_1, \end{aligned}\right\} \qquad (\varepsilon)$$

jakož patrno, klademe-li v poslední identitě, krátivše dříve $t^{n\mathfrak{a}_1}$, t rovno nulle.

$\bar{\psi}(\eta, t)$ jest tak rozloženo ve dva činitele, jež jsou mnohočleny v η stupně n-q_1 resp. q_1. Resultant těchto mnohočlenů (který vzniká rac. cel. operacemi s koefficienty, mocninnými to řadami proměnné t) jest potenční řada proměnné t konvergentní v okolí bodu $t = 0$. Pro $t = 0$ se oba mnohočleny redukují prvý na $\eta^{n-q_1} + \ldots + c_{p_1}^{(n-q_1)}$, druhý na η^{q_1}, což jsou mnohočleny nemající společné míry; jest tudíž pro $t = 0$ resultant různý od nully (jest ostatně pro $t = 0$ rovný $(c_{p_1}^{(n-q_1)})^{q_1}$). Tedy i v jistém okolí bodu $t = 0$ jest resultant různý od nully a nemají prvý a druhý činitel společné míry závislé na η (pokud jest t v tom okolí).

Resultant zůstane očividně různý od nully v jistém okolí bodu $t=0$, i když místo η, t dosadíme třeba jen do jednoho z těch mnohočlenů násobky těchto proměnných $g\eta$, ht, kde g, h konstanty od nully různé.

Činitel $t^{n a_1}$ v rovnici (δ') rozložme v součin $t^{(n-q_1)a_1}\, t^{q_1 a_1}$. Prvým činitelem vynásobme v první, druhým v druhé závorce a nahraďme η původní proměnnou y. Obdržíme

$$\psi(y, x) = (y^{n-q_1} + y^{n-q_1-1} t^{a_1} \bar{u}_1(t) + \ldots + t^{p_1 b_1} \bar{u}_{n-q_1}(t))(y^{q_1} + \ldots). \quad (\delta'')$$

Oba činitelé pravé strany zůstávají bez společné míry závislé na y. Rovnice $\psi(y, x)=0$ dává pro y jakožto neznámou, ať x jest jakékoliv (v jistém okolí bodu $x=0$), n kořenů; $n-q_1$ těchto kořenů činí rovnou nulle prvou závorku na pravé straně, zbývajících q_1 kořenů pak druhou závorku. Při tom lze koefficienty při různých mocninách y v prvé i druhé závorce psáti ve tvaru

$$\pi_0(t^{b_1}) + t\pi_1(t^{b_1}) + t^2\pi_2(t^{b_1}) + \ldots + t^{b_1-1}\pi_{b_1-1}(t^{b_1}), \quad (\iota)$$

kde $\pi_k(t^{b_1})$ jsou mocninné řady proměnné $t^{b_1}=x$. Rovnost (δ'') jest splněna identicky, t. j. pro každé y, x resp. každé y, t, jsou-li obojí dvojice proměnných v jistém okolí bodu $[0, 0]$ a je-li $x=t^{b_1}$. Můžeme pak za t klásti kteroukoli hodnotu rovnici $x=t^{b_1}$ hovící, tedy ku př. místo t původně voleného můžeme dosazovati αt, je-li $\alpha^{b_1}=1$. Tím místo činitelů *původních* dostáváme *nové* činitele (je-li ovšem α různo od 1), v něž se rozpadá $\psi(y, x)$; rovněž kořeny rovnice $\psi=0$ se rozpadají v kořeny obou nových činitelů. Avšak prvý **nový** činitel nemá, jak jsme seznali, společné míry s druhým činitelem **původním**; tedy tím, že jsme místo t zavedli αt, se kořeny prvého faktoru nemohly změnit a tudíž také jeho koefficienty při různých mocninách proměnné y se nezměnily (pro všecka t — resp. x — jistého okolí bodu $t=0$). Musí tudíž výrazy (ι) pro koefficienty v prvém činiteli (a obdobně i v druhém) se redukovati na prvý člen, t. j. na tvar $\pi_0(t^{b_1}) = \pi_0(x)$. Máme tak konečně tento výsledek provedené úvahy (místo t^{b_1} klademe x a, zavádějíce nové označení, máme na zřeteli vztahy (ε)):

Mnohočlen $\psi(y, x)$ lze rozložiti v součin dvou činitelů tvaru

$$\psi(y, x) = (y^{n-q_1} + u_1(x)\, y^{n-q_1-1} + \ldots + u_{n-q_1}(x)).$$
$$.\,(y^{q_1} + w_1(x)\, y^{q_1-1} + \ldots + w_{q_1}(x)).$$

Při tom jsou $u_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, n\text{-}q_1$ potenční rozvoje proměnné x takové, že Newtonova polygonální čára prvého činitele skládá se z jediné přímky o rovnici $p + q\lambda_1 = p_1$, na které jsou body $[0, n-q_1]$, $[p_1, 0]$, *jakož i body* $[p_1^{(i)}, q_1^{(i)} - q_1]$, $i=1, 2, \ldots, r_1 - 1$. *Členy nejnižšího řádu v prvém činiteli jsou, je-li y v x řádu λ_1, vesměs obsaženy* *ve výraze*

$$y^{n-q_1} + c_{p_1^{(1)}}^{(n-q_1^{(1)})} y^{q_1^{(1)}-q_1} x^{p_1^{(1)}} + \ldots + c_{p_1}^{(n-q_1)} x^{p_1}.$$

Součinitelé $w_k(x)$ *druhého činitele,* $k=1, 2, \ldots, q_1$, *jsou rovněž potenční řady proměnné* x, *pro které jest* $w_k(0)=0$. Jak ihned plyne z okolnosti, že členy nejnižšího řádu v prvém činiteli jsou, je-li y v x řádu $\lambda > \lambda_1$, obsaženy pouze v členu posledním (t. j. v $u_{n-q_1}(x)$ a jest takový člen pouze jeden, totiž $c_{p_1}^{(n-q_1)} x^{p_1}$), *jsou členové nejnižšího řádu v druhém činiteli, je-li* y *v* x *řádu* $\lambda > \lambda_1$, *shodny se členy nejnižšího řádu v* $\psi(y, x)$ *příslušícími bodům* $\mathfrak{A}$ *položeným na polygonální čáře* $A_1 A_2 \ldots A_\nu$ (což jest polygonální čára Newtonova funkce $\psi(y, x)$ v bodě $[0, 0]$ bez první strany $\overline{A_0 A_1}$), *dělíme-li jenom tyto členy výrazem* $c_{p_1}^{(n-q_1)} x^{p_1}$. Následkem toho lze údati při každé řadě potenční $w_k(x)$ buď člen nejnižšího stupně v x neb aspoň lze stupeň toho členu zdola celým číslem ohraničiti. Tak ku př. jsou členové nejnižšího stupně v rozvojích $w_{q_1-q_2}(x)$, $w_{q_1-q_3}(x), \ldots, w_{q_1}(x)$ dány po řadě výrazy (k vůli stručnosti kladeno $c_{p_1}^{(n-q_1)} = \gamma$ a užito okolnosti $q_\nu = 0$)

$$\gamma^{-1} c_{p_2}^{(n-q_2)} x^{p_2-p_1}, \quad \gamma^{-1} c_{p_3}^{(n-q_3)} x^{p_3-p_1}, \ldots, \quad \gamma^{-1} c_{p_\nu}^{(n)} x^{p_\nu-p_1}.$$

Členové v rozvojích $w_k(x)$, kde k jest ku př. v intervalu $(0, q_1 - q_2)$, jsou takoví, že členové součinu $y^{q_1-k} w_k(x)$ jsou, je-li y v x řádu λ_2, vesměs řádu většího ($\geqq$) než $q_1 \lambda_2$; t. j. je-li α stupeň v x jednoho takového členu z $w_k(x)$, jest

$$\alpha \geqq k \lambda_2, \quad \alpha \geqq k \frac{p_2 - p_1}{q_1 - q_2}$$

a obdobně, je-li k v $(q_1 - q_2, \; q_1 - q_3)$ atd. Z toho však dále následuje, že, je-li y v x řádu $\leqq \lambda_1$, členy stupně nejnižšího v činiteli druhém redukují se na člen y^{q_1} a že *tedy celá polygonální čára Newtonova druhého činitele shodna jest s čarou lomenou* $A_1 A_2 \ldots A_\nu$, t. j. *s polygonální čárou Newtonovou pro výraz* $\psi(y, x)$ *zbavenou první strany* $A_0 A_1$.

258. Jestliže polygonální čára Newtonova příslušná ku mnohočlenu $y^{q_1} + w_1(x) y^{q_1-1} + \ldots$ má více stran než 1, můžeme mnohočlen ten opětně naznačeným způsobem rozkládati atd., až konečně se $\psi(y, x)$ rozloží ve faktory počtem ν takové, že ku každému z nich příslušná polygonální čára skládá se z jediné přímky. Můžeme pak se zřetelem k vývodům předcházejícím vysloviti větu: Jestliže ku $\psi(y, x)$, polynomu to n-tého stupně v y, jehožto koefficienty jsou mocninné řady v x, přísluší polygonální čára Newtonova skládající se z ν stran, při čemž členy nejnižšího řádu odpovídající bodům na j-té straně jsou dány výrazem

$$c_{p_{j-1}}^{(n-q_{j-1})} y^{q_{j-1}} x^{p_{j-1}} + c_{p_j^{(1)}}^{(n-q_j^{(1)})} y^{q_j^{(1)}} x^{p_j^{(1)}} + c_{p_j^{(2)}}^{(n-q_j^{(2)})} y^{q_j^{(2)}} x^{p_j^{(2)}} + \dots$$
$$\dots + c_{p_j}^{(n-q_j)} y^{q_j} x^{p_j}, \tag{a}$$

kde $q_{j-1} > q_j^{(1)} > q_j^{(2)} > \dots > q_j, \quad p_{j-1} < p_j^{(1)} < p_j^{(2)} < \dots < p_j,$

$$\lambda_j = \frac{p_j - p_{j-1}}{q_{j-1} - q_j} = \frac{p_j^{(i)} - p_{j-1}}{q_{j-1} - q_j^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \dots r_j - 1,$$

pak lze racionálními operacemi provésti rozklad $\psi(y, x)$ v součin ν polynomů v y: $\psi_1(y, x), \dots, \psi_\nu(y, x)$ tak, že

$$\psi(y, x) = \psi_1(y, x)\psi_2(y, x) \dots \psi_\nu(y, x) \tag{7}$$

a polynom $\psi_j(y, x)$ $[j = 1, 2, \dots, \nu]$ jest stupně $q_{j-1} - q_j$ v y s koefficientem při $y^{q_{j-1}-q_j}$ rovným 1 (při ostatních mocninách y jsou koefficienty mocninné řady v x), jeho polygonální čára Newtonova skládá se z jediné přímky o směrnici $-\lambda_j^{-1}$ a členy příslušné nejnižšího řádu jsou obsaženy ve výraze, který dostaneme z (a), dělíme-li (a) součinem $c_{p_{j-1}}^{(n-q_{j-1})} y^{q_j} x^{p_{j-1}}$. Za q_0 jest dosazovati n, dále $p_0 = 0$, $c_0^{(0)} = 1$, $q_\nu = 0$.

259. Stačí tedy dle věty předch. odst. vyšetřovati funkce hovící rovnici $\psi(y, x) = 0$, kde $\psi(y, x)$ jest jedním z polynomů $\psi_j(y, x)$ a jest tudíž mnohočlenem v y tvaru

$$\psi(y, x) = y^m + u_1(x) y^{m-1} + \dots + u_m(x).$$

jehož polygonální čára Newtonova se skládá z jediné přímky a v němž členy nejnižšího řádu jsou shrnuty ve výraze (užívám označení poněkud zjednodušeného: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ jsou čísla celá bez společné míry)

$$y^m + l_1 y^{m-\mathfrak{b}} x^{\mathfrak{a}} + l_2 y^{m-2\mathfrak{b}} x^{2\mathfrak{a}} + \dots + l_r x^{r\mathfrak{a}}. \tag{b}$$

V tomto výraze lze místo m psáti $r\mathfrak{b}$ a mohou některá z čísel l_k býti rovna nulle, ovšem $l_r \neq 0$. Směrnice Newtonovy přímky nechť jest $-\lambda^{-1}$, pak $\lambda = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$. Zavedeme do rovnice $\psi(y, x) = 0$ nové proměnné η, t rovnicemi $y = \eta t^{\mathfrak{a}}$, $x = t^{\mathfrak{b}}$; je-li $\mathfrak{b}$ číslo sudé, jest nutno vedle substituce právě napsané prováděti též substituci $y = \eta t^{\mathfrak{a}}$, $x = -t^{\mathfrak{b}}$, aby přišly v úvahu hodnoty kladné i záporné proměnné x. Substitucí prvou změní se rovnice $\psi(y, x) = 0$, *krátíme-li po provedené substituci činitelem* $t^{r\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = t^{m\mathfrak{a}}$, v rovnici tvaru

$$0 = (\eta^{r\mathfrak{b}} + l_1 \eta^{(r-1)\mathfrak{b}} + \dots + l_r) + tP(t, \eta), \tag{c}$$

v níž jsme vypsali členy nezávislé na t vyplývající vesměs z výrazu (b) a v níž $P(t, \eta)$ značí mnohočlen v η nejvýše stupně $r\mathfrak{b} - 1 = m - 1$ s koefficienty, jež jsou mocninné řady v t konvergentní v okolí bodu $t = 0$.

Předpokládejme nejprve, že závorka na pravé straně rovnice (c) není úplnou m-tou mocninou lineárného výrazu v η (což by bylo možno jenom, když $\mathfrak{b} = 1$); pak lze (řešíme-li rovnici m-tého stupně s konstantními koefficienty) provésti rozklad

$$(\eta^{r\mathfrak{b}} + l_1 \eta^{(r-1)\mathfrak{b}} + \ldots + l_r) = (\eta^{m_1} + g_1 \eta^{m_1-1} + \ldots + g_{m_1})$$
$$(\eta^{m-m_1} + h_1 \eta^{m-m_1-1} + \ldots + h_{m-m_1}) \qquad (d)$$

tak, aby oba činitelé pravé strany byly bez společné míry. *Za toho předpokladu lze pravou stranu rovnice* (c) *psáti ve tvaru součinu*

$$(\eta^{m_1} + p_1(t)\eta^{m_1-1} + p_2(t)\eta^{m_1-2} + \ldots + p_{m_1}(t))$$
$$(\eta^{m-m_1} + P_1(t)\eta^{m-m_1-1} + \ldots + P_{m-m_1}(t)), \qquad (e)$$

kde $p_k(t)$, $P_l(t)$ jsou potenční řady proměnné t konvergentní v okolí bodu $t = 0$, pro něž

$$p_k(0) = g_k; \quad P_l(0) = h_l; \quad k = 1, 2, \ldots, m_1; \quad l = 1, 2, \ldots \; m - m_1. \quad (f)$$

Těmito podmínkami řady ty jsou jednoznačně stanoveny.

Neboť roznásobíme-li poslední součin a porovnáme koefficienty jednotlivých mocnin η s koefficienty týchž mocnin η na pravé straně (c), dostaneme $m_1 + (m - m_1) = m$ rovnic k určení m funkcí $p_k(t)$, $P_l(t)$; levé jich strany jsou dány výrazy (neodvisle proměnná k vůli stručnosti nevyznačena):

$$p_1 + P_1, \quad p_2 + p_1 P_1 + P_2, \ldots$$
$$p_k + p_{k-1}P_1 + p_{k-2}P_2 + \ldots + P_k, \ldots, \qquad (\varrho)$$

v nichž p_r (resp. P_s) jest klásti, je-li $r > m_1$ (resp. $s > m - m_1$) rovno nulle. Jelikož jde o stanovení funkcí p_k, P_l v okolí bodu $t = 0$ a hodnoty těchto funkcí pro $t = 0$ jsou dány, stačí ku rozhodnutí, zda rovnice, jichž levé strany jsou uvedeny v (ϱ) a jichž pravé strany jsou nezávisly od neznámých funkcí p_k, P_l, mají řešení, vyšetřovati funkcionální determinant výrazů (ϱ) dle $p_1, p_2, \ldots, p_{m_1}, P_1, P_2, \ldots, P_{m-m_1}$ v bodě $t = 0$. Tento determinant jest ku př. pro $m = 5$, $m_1 = 2$ dán determinantem

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ P_1(0), & 1, & p_1(0), & 1, & 0 \\ P_2(0), & P_1(0), & p_2(0), & p_1(0), & 1 \\ P_3(0), & P_2(0), & 0, & p_2(0), & p_1(0) \\ 0, & P_3(0), & 0, & 0, & p_2(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ h_1, & 1, & g_1, & 1, & 0 \\ h_2, & h_1, & g_2, & g_1, & 1 \\ h_3, & h_2, & 0, & g_2, & g_1 \\ 0, & h_3, & 0, & 0, & g_2 \end{vmatrix}$$

a obdobně jest tomu v případě obecného m. Jak z pouhého pohledu na výsledek právě napsaný (pro $m = 5$) plyne, jest determinant funkcionální rovný resultantu polynomů $\eta^{m_1} + g_1\eta^{m_1-1} + \ldots$, $\eta^{m-m_1} + h_1\eta^{m-m_1-1} + \ldots$, kterýžto však dle předpokladu (oba polynomy jsou bez sp. m.) jest od nully různý. Mají tedy rovnice pro $p_k(t)$, $P_l(t)$ řešení za podmínek svrchu udaných; tvrzení učiněné jest úplně dokázáno.

Poznámka. Důkaz tu podaný jest beze změny platný i pro rozklad obecnějšího výrazu

$$\Phi(x, y) = y^m + u_1(x)\, y^{m-1} + \ldots + u_m(x),$$

kde $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\ldots$, $u_m(x)$ jsou funkce proměnné x rozvinutelné v mocninné řady v okolí bodu $x = 0$. Jestliže

$$y^m + u_1(0)y^{m-1} + \ldots + u_m(0) = (y^{m_1} + g_1 y^{m_1-1} + \ldots)(y^{m-m_1} + h_1 y^{m-m_1-1} + \ldots),$$

kde poslední dva faktory jsou beze společné míry. lze výraz Φ právě tak rozložiti ve dva činitele jako pravou stranu rovnice (c). Věta tato jest. máme-li na zřeteli pouze výrazy Φ, zevšeobecněním věty Weierstrassovy. *Kdybychom tedy vyšetřovali pouze funkce dané rovnicí $\Phi = 0$ — a specielně funkce algebraické —, nebylo by třeba vycházeti z věty Weierstrassovy, nýbrž vystačili bychom s touto větou značně jednodušší a důkazu přístupnější.*

260. Lze-li činitele pravé strany rovnice (d) dále rozkládati ve dva činitele, jež jsou polynomy v η bez společné míry, lze dále rozkládati i příslušný činitel součinu v (e) způsobem právě naznačeným. Tak postupujíce rozložíme pravou stranu rovnice (c) (jež jest mnohočlen v η) v jistý počet činitelů; může pak se státi, že již tímto rozkladem jest rozřešen náš úkol, nalézti všecky funkce η proměnné t splňující rovnici (c) a tím také úkol obdobný vztahující se k původní rovnici $\psi(y, x) = 0$. Tyto jednoduché případy nejprve vezmeme v úvahu. Lze je shrnouti ve dvě skupiny.

I. *Číslo* b *buď liché*; rovnice $\eta^{rb} + l_1\eta^{(r-1)b} + \ldots + l_r = 0$ nechť pak má reálné kořeny jenom jednonásobné, jež označíme ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m_1}$; patrně jest $m_1 \leqq r$. Pak můžeme psáti

$$\eta^{rb} + l_1\eta^{(r-1)b} + \ldots + l_r = (\eta - \varepsilon_1)(\eta - \varepsilon_2)\ldots(\eta - \varepsilon_{m_1}) (\eta^{m-m_1} + h_1\eta^{m-m_1-1} + \ldots + h_{m-m_1}), \tag{g}$$

při čemž poslední činitel prané strany (stupně $m - m_1$) položen byv rovný nulle, má pro η jenom komplexní kořeny.

Pravá strana rovnice (c) rozpadá se pak v důsledku výsledku svrchu odvozeného (po sobě m_1-kráte použitého) v součin $m_1 + 1$ činitelů. A to nejprve v činitele prvého stupně v η tvaru

$$\eta - p_{1k}(t), \quad \text{kde } p_{1k}(0) = \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, 3 \ldots, m_1 \tag{h}$$

jichž jest celkem m_1 a v činitele $\eta^{m-m_1}+P_1(t)\eta^{m-m_1-1}+\ldots+P_{m-m_1}(t)$, kde pro $P_i(0)$ jsou splněny rovnice uvedené svrchu v (f). Činitel tento v důsledku rovnic právě vytknutých pro $t=0$ přejde v poslední činitel pravé strany rovnice (g) a jest tedy (dle učiněného předpokladu) pro $t=0$ různý od nully, ať η nabývá jakoukoliv hodnotu. Tudíž jest činitel $\eta^{m-m_1}+P_1(t)\eta^{m-m_1-1}+\ldots$ i v okolí bodu $t=0$ (dosti malém) stále (to j. pro všechna η) různý od nully a pravá strana rovnice (c) může býti (je-li t v okolí bodu $t=0$) rovna nulle jenom tenkráte, když jeden z činitelů (h) jest rovný nulle, t. j. když $\eta=p_{1k}(t)$ — aneb obšírněji vypsáno — když

$$\eta=\varepsilon_k+a_k^{(1)}t+a_k^{(2)}t^2+\ldots,\quad k=1,2,\ldots,\ m_1\,;$$

když pak tato rovnost mezi η a t jest splněna, jest pravá strana rovnice (c) vskutku rovna nulle. Vrátíme-li se k původním proměnným y, x, můžeme dosažené vysloviti ve větě: *Jsou-li při lichém* $\mathfrak{b}$ *reálné kořeny rovnice* $\eta^{r\mathfrak{b}}+l_1\eta^{(r-1)\mathfrak{b}}+\ldots+l_r=0$ *vesměs jednonásobné, pak rovnice* $\psi(y,x)=0$ *jest v okolí bodu* $x=0$ *splněna tenkráte a jenom tenkráte, když* y *jakožto funkce proměnné* x *jest dáno jedním z těchto rozvojů*

$$y=x^{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}}(\varepsilon_k+a_k^{(1)}x^{\frac{1}{\mathfrak{b}}}+a_k^{(2)}x^{\frac{2}{\mathfrak{b}}}+\ldots),\quad k=1,2,\ldots,\ m_1 \tag{8}$$

konvergentních v okolí bodu $x=0$; $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{m_1}$ *jsou všecky reálné kořeny svrchu zmíněné, koefficienty* $a_k^{(i)}$ *jsou určeny jednoznačně a lze je stanoviti ku př. methodou neurčitých součinitelů*; $\varepsilon_k\neq\varepsilon_{k'}$ při $k\neq k'$.

II. *Číslo* $\mathfrak{b}$ *buď sudé* (jelikož $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ jsou bez spol. míry, jest $\mathfrak{a}$ liché). V tomto případě, jak svrchu poznamenáno, jest vedle substituce $y=\eta t^{\mathfrak{a}}$, $x=t^{\mathfrak{b}}$ uvažovati též substituci $y=\eta t^{\mathfrak{a}}$, $x=-t^{\mathfrak{b}}$, kteroužto substitucí výraz (b) po krácení nabývá tvaru $\eta^{r\mathfrak{b}}-l_1\eta^{(r-1)\mathfrak{b}}+l_2\eta^{(r-2)\mathfrak{b}}-\ldots$. Jest tedy v tomto případě bráti v úvahu dvě rovnice a to rovnici $\eta^{r\mathfrak{b}}+l_1\eta^{(r-1)\mathfrak{b}}+$ $+\ldots=0$ (jako při $\mathfrak{b}$ lichém) a rovnici $\eta^{r\mathfrak{b}}-l_1\eta^{(r-1)\mathfrak{b}}+\ldots=0$. Vedle toho jest ještě míti na paměti, že rovnice binomická $\eta^{\mathfrak{b}}=1$ má dva reálné kořeny $+1$, -1. Jinak úvaha příslušná se úplně shoduje s úvahou pro případ $\mathfrak{b}$ lichého. Výsledek jí docílený můžeme pak vysloviti takto: Má li rovnice

$$\xi^r+l_1\xi^{r-1}+l_2\xi^{r-2}+\ldots+l_r=0$$

reálné kořeny vesměs jednoduché a to $\varepsilon_1^{\mathfrak{b}}$, $\varepsilon_2^{\mathfrak{b}},\ldots\varepsilon_s^{\mathfrak{b}}$, $-\varepsilon_1'^{\mathfrak{b}}$, $-\varepsilon_2'^{\mathfrak{b}},\ldots-\varepsilon_{s'}'^{\mathfrak{b}}$, pak rovnice $\eta^{r\mathfrak{b}}+l_1\eta^{(r-1)\mathfrak{b}}+\ldots=0$ má jednoduché reálné kořeny $\pm\varepsilon_1$, $\pm\varepsilon_2,\ldots\pm\varepsilon_s$ (a žádné jiné reálné kořeny), rovnice pak $\eta^{r\mathfrak{b}}-l_1\eta^{(r-1)\mathfrak{b}}+$ $+\ldots=0$ má rovněž pouze jednonásobné reálné kořeny a to $\pm\varepsilon'_1$, $\pm\varepsilon'_2,\ldots$ $\ldots$, $\pm\varepsilon'_{s'}$; tudíž rovnice $\psi(y,x)=0$ může za těchto předpokladů v okolí bodu $[0,0]$ tenkráte a jenom tenkráte býti splněna, když y jakožto funkce x jest dáno jedním z těchto rozvojů

$$\left.\begin{array}{l} y = x^{\frac{a}{\mathfrak{b}}}(\ \ \varepsilon_l + a_l^{(1)} x^{\frac{1}{\mathfrak{b}}} + a_l^{(2)} x^{\frac{2}{\mathfrak{b}}} + a_l^{(3)} x^{\frac{3}{\mathfrak{b}}} + \ldots) \\ y = x^{\frac{a}{\mathfrak{b}}}(-\varepsilon_l + a_l^{(1)} x^{\frac{1}{\mathfrak{b}}} - a_l^{(2)} x^{\frac{2}{\mathfrak{b}}} + a_l^{(3)} x^{\frac{3}{\mathfrak{b}}} - \ldots) \end{array}\right\} l = 1, 2 \ldots s, \quad x > 0\,;$$

$$(8')$$

$$\left.\begin{array}{l} y = (-x)^{\frac{a}{\mathfrak{b}}}(\ \ \varepsilon'_{l'} + a_{l'}^{(1)}(-x)^{\frac{1}{\mathfrak{b}}} + a_{l'}^{(2)}(-x)^{\frac{2}{\mathfrak{b}}} + \ldots) \\ y = (-x)^{\frac{a}{\mathfrak{b}}}(-\varepsilon'_{l'} + a_{l'}^{(1)}(-x)^{\frac{1}{\mathfrak{b}}} - a_{l'}^{(2)}(-x)^{\frac{2}{\mathfrak{b}}} + \ldots) \end{array}\right\} l' = 1, 2, \ldots s', \quad x < 0.$$

Při tom jest ještě podotknouti, že rozvoje prvý a druhý (pro $x > 0$) odpovídají jednomu rozvoji funkce η v potenční řadu argumentu t: neboť při kladném x má rovnice $t^{\mathfrak{b}} = x$ dvě řešení $t = + x^{\frac{1}{\mathfrak{b}}}$, $t = - x^{\frac{1}{\mathfrak{b}}}$. Obdobně jest tomu i při rozvoji třetím a čtvrtém pro $x < 0$. Odtud se vysvětluje stejnost koefficientů (nehledě ovšem k znaménkům) v rozvoji 1. a 2. (resp. 3 a 4.)

Poznámka. Kdyby při $\mathfrak{b}$ lichém rovnice $\eta^{r\mathfrak{b}} + l_1\eta^{(r-1)\mathfrak{b}} + \ldots = 0$ měla kořeny jenom komplexní, pak pravá strana rovnice (c) pro $t = 0$ nestává se nullou pro žádnou hodnotu η a neexistuje vůbec funkce η implicitní proměnné t, jež by hověla právě rovnici (c) a byla definována v bodě $t = 0$ a jeho okolí.

Stejně tomu jest i při $\mathfrak{b}$ sudém, nemá-li ani rovnice $\eta^{r\mathfrak{b}} + l_1\eta^{(r-1)\mathfrak{b}} + \ldots = 0$ ani rovnice $\eta^{r\mathfrak{b}} - l_1\eta^{(r-1)\mathfrak{b}} + \ldots = 0$ kořenů reálných.

V důsledku toho v obou případech uvedených výraz $\psi(y, x)$ (odst. 259.) jest v okolí bodu [0, 0] (dosti malém) stále od nully různý; v bodě [0, 0] jest ovšem roven nulle.

261. Zbývá vyšetřovati případ, kdy rovnice

$$\eta^{r\mathfrak{b}} \pm l_1\eta^{r\mathfrak{b}-\mathfrak{b}} + l_2\eta^{r\mathfrak{b}-2\mathfrak{b}} \pm \ldots = 0 \tag{9}$$

má kořeny reálné mnohonásobné (v rovnici té jest buď všady voliti znaménko horní aneb všady znaménko dolní, znaménko dolní ovšem jenom tehdy, když $\mathfrak{b}$ jest sudé). Budiž ε takový kořen a to n_1-násobný; tu v důsledku úvahy odst. 259. má pravá strana rovnice (c) činitel tvaru

$$\eta^{n_1} + p_1(t)\eta^{n_1-1} + \ldots + p_{n_1}(t), \tag{k}$$

kde identicky

$$\eta^{n_1} + p_1(0)\eta^{n_1-1} + p_2(0)\eta^{n_1-2} + \ldots + p_{n_1}(0) = (\eta - \varepsilon)^{n_1}, \tag{l}$$

a jest třeba vyšetřovati, zda činitel tento může býti roven nulle v okolí bodu $t = 0$, volíme-li vhodně η jakožto funkci proměnné t v okolí bodu $t=0$. Abychom to vyšetřili, zavedeme nové proměnné, kladouce

$$\eta-\varepsilon=y_1, \quad t=x_1, \text{ *)}$$

čímž činitel (l) se redukuje na výraz

$$\psi^1(y_1, x_1)=y_1^{n_1}+v_1^1(x_1)y_1^{n_1-1}+v_2^1(x_1)y_1^{n_1-2}+\ldots+v_{n_1}^1(x_1)$$

(ve výraze právě napsaném číslice u znaménka funkčního nahoře psaná neznačí mocnitele — jak tomu obyčejně bývá — nýbrž index k vůli odlišení funkcí příslušných od funkcí dříve zavedených; stejně jest tomu i v následujícím). Avšak dle (l) jest identicky $\psi^1(y_1, 0)=y_1^{n_1}$ a tedy $v_1^1(0)=v_2^1(0)=\ldots=v_{n_1}^1(0)=0$. Dospíváme tudíž k výrazu $\psi^1(y, x)$, jenž jest úplně obdobný k tomu, ze kterého jsme vycházeli (viz odst. 257.) a který označen $\psi(y, x)$. O čísle n_1 můžeme tvrditi, že $n_1 \leqq n$, kde n jest stupeň výrazu $\psi(y, x)$ v y; rovnost mezi n a n_1 může býti a jest jenom tenkráte splněna, když polygonální čára Newtonova náležející ku $\psi(y, x)$ skládá se z jediné přímky (následkem čehož $\psi(y, x)$ se redukuje na výraz $\psi(y, x)$ v odst. 259. uvažovaný a tedy $m=n$) a když zároveň výraz ($\mathfrak{b}$) odst. 259. jest úplnou n-tou mocninou lineárného výrazu v y (což mimo jiné vyžaduje $\mathfrak{b}=1$). Ve všech ostatních případech, kdy podmínky právě vytčené splněny nejsou, jest vždy $n_1<n$.

Tak jsme od rovnice $\psi(y, x)=0$ stupně n-tého v y dospěli ku rovnici (resp. rovnicím, je-li kořenů mnohonásobných — příslušných různým stranám polygon. čáry Newtonovy — více) tvaru $\psi^1(y_1, x_1)=0$ stupně n_1 v y_1, kde $n_1 \leqq n$. S touto rovnicí (resp. rovnicemi) počínáme si stejně jako s původní (sestrojíme k ní polyg. čáru Newtonovu, rozložíme levou stranu atd.)**) a dospějeme jednak ku řešením této rovnice tvaru (8), (8'), jednak — má-li ovšem některá z rovnic obdobných ku rovnici (9) kořeny mnohonásobné — ku rovnici (resp. rovnicím) $\psi^2(y_2, x_2)=0$ stupně n_2 kde $n_2 \leqq n_1$; atd. Při provádění tohoto postupu může nastati dvojí:

1. Postup po konečném počtu kroků se ukončí. Končí-li se ku př. po dvou krocích tím, že rovnice (9) přináležející ku jednotlivým stranám polygonální čáry Newtonovy pro vztah $\psi^2(x_2, y_2)=0$ sestrojené mají sice reálné kořeny avšak pouze jednoduché, pak máme pro funkci y hovící rovnici $\psi(y, x)=0$ se zřetelem k tomu, že mezi y, y_1, y_2 jsou vztahy (viz pozn. pod č.)

$$y=(\varepsilon+y_1)x_1, \quad x=\pm x_1^{\mathfrak{b}}; \quad y_1=(\varepsilon^{(1)}+y_2)x_2^{\mathfrak{a}'}, \quad x_1=\pm x_2^{\mathfrak{b}'} \qquad (l)$$

*) Jsou tedy mezi x, y a x_1, y_1 vztahy $y=(y_1+\varepsilon)x_1^{\mathfrak{a}}$, $x=\pm x_1^{\mathfrak{b}}$ (znaménko dolní přichází v úvahu pouze při $\mathfrak{b}$ sudém).

**) Jelikož $\psi^1(y_1, x_1)$ jest jeden z činitelů, v jichž součin bylo rozloženo $\psi(y, x)$, dává nám rozklad výrazu $\psi^1(y_1, x_1)$ zároveň nový rozklad $\psi(y, x)$ (t. j. rozklad v činitele, jež jsou nižšího stupně v y než byli činitelé při prvním rozkladu $\psi(y, x)$).

rovnici

$$y = \varepsilon x_1^{\mathfrak{a}} + \varepsilon^{(1)} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{a}'} + x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{a}'} y_2\,,$$

kde y_2 jest jedna z funkcí splňujících vztah $\psi^2(x_2, y_2) = 0$.

Je li nyní vztah $\psi^2(y_2, x_2) = 0$ splněn, klademe-li za y_2 funkci v x_2 obdobnou ku funkci proměnné x na pravé straně rovnice (8), t. j. je-li onen vztah splněn, jestliže ku př.

$$y_2 = x_2^{\frac{\mathfrak{a}''}{\mathfrak{b}''}} (\varepsilon^{(2)} + a_1 x_2^{\frac{1}{\mathfrak{b}''}} + a_2 x_2^{\frac{2}{\mathfrak{b}''}} + \ldots),$$

pak jest rovnice $\psi(y, x) = 0$ splněna, když

$$y = \varepsilon x_1^{\mathfrak{a}} + \varepsilon^{(1)} x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{a}'} + x_1^{\mathfrak{a}} x_2^{\mathfrak{a}' + \frac{\mathfrak{a}''}{\mathfrak{b}''}} (\varepsilon^{(2)} + a_1 x_2^{\frac{1}{\mathfrak{b}''}} + a_2 x_2^{\frac{2}{\mathfrak{b}''}} + \ldots)$$

aneb zavedeme-li na pravé straně vesměs proměnnou x, za předpokladu, že v (l) jsou v platnosti ku př. znaménka horní,

$$y = \varepsilon x^{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}} + \varepsilon^{(1)} x^{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} + \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}} + x^{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} + \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} + \frac{\mathfrak{a}''}{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''}} (\varepsilon^{(2)} + a_1 x^{\frac{1}{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''}} + a_2 x^{\frac{2}{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''}} + \ldots) \quad (10)$$

Jak by se tvar (10) upravil, kdyby některé z čísel $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ bylo sudé a kdyby nastala pak nutnost v některé z rovností $x = \pm x_1^{\mathfrak{b}}$, $x_1 = \pm x_2^{\mathfrak{b}'}, \ldots$ voliti znaménko dolní, jest na snadě; nastaly by obdobné změny vzhledem ku (10) jako jsou v (8′) vzhledem ku (8).

Za předpokladu učiněného (že postup se po konečném počtu kroků končí) najdeme tímto způsobem všecky možné funkce y proměnné x hovící rovnici $\psi(y, x) = 0$ a dány jsou těmito funkcemi všecka řešení této rovnice, v nichž hodnoty y, x se nacházejí v okolí $O(0, 0; \varepsilon)$ při ε dosti malém.

2. Postup po konečném počtu kroků se neukončí. Pak od jistého indexu i počínajíc jest stále $n_i = n_{i+1} = n_{i+2} = \ldots$ a tak dále do nekonečna*); od tohoto indexu počínajíc jest tedy stále číslo $\mathfrak{b} = 1$ a substituce mezi neodvisle proměnnými x_i, $x_{i+1}, \ldots$ se mění prostě na vztah (viz pozn. pod čarou, str. 457.): $x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots$, t. j. neodvisle proměnná se vůbec nemění. Abychom se vyhnuli zbytečné komplikaci při indexech, předpokládejme, že hned od původní rovnice $\psi(y, x)$ okolnost vytčená začíná; t. j. že $n = n_1 = n_2 = \ldots$ do nekonečna. Postupné substituce mezi odvisle proměnnými (neodvisle proměnnou i v označení necháme beze změny) budou míti tvar (viz cit. pozn. pod čarou; označení poněkud změněno)

$$y = (\varepsilon^{(1)} + y_1) x^{\mathfrak{a}_1}, \quad y_1 = (\varepsilon^{(2)} + y_2) x^{\mathfrak{a}_2}, \quad y_2 = (\varepsilon^{(3)} + y_3) x^{\mathfrak{a}_3}, \ldots, \quad (m)$$

*) Takových indexů může býti ovšem několik, neboť zmíněná okolnost může nastati při každém faktoru výrazů $\psi(y, x)$, $\psi^1(y_1, x_1), \ldots$, který jest vyššího stupně než prvého v y, $y_1 \ldots$

takže vypočteme-li z tohoto řetězu rovnic vztah mezi y a y_m, obdržíme

$$y = \varepsilon^{(1)} x^{\varrho_1} + \varepsilon^{(2)} x^{\varrho_2} + \ldots + \varepsilon^{(m)} x^{\varrho_m} + y_m x^{\varrho_m}, \tag{11}$$

v něm jest $\varrho_1 = \alpha_1$, $\varrho_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\varrho_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \ldots$ a jsou tedy ϱ_k čísla celá, kladná, s k rostoucí.

Provedeme-li první substituci z (m), obdržíme ze $\psi(y, x)$ výraz $x^{n\alpha_1}\psi^1(y, x)$ (viz odst. 259.; substituce prováděná jest vlastně sled substitucí dvou: $y = \eta x^{\alpha_1}$, $\eta = y_1 + \varepsilon^{(1)}$); provedeme-li druhou na $\psi^1(y_1, x)$, dostaneme z této funkce výraz $x^{n\alpha_2}\psi^2(y_2, x)$ a tudíž, nahradíme-li y v $\psi(y, x)$ proměnnou y_2, vznikne z $\psi(y, x)$ ihned $x^{n(\alpha_2+\alpha_1)}\psi^2(y_2, x) = x^{n\varrho_2}\psi^2(y_2, x)$. Obecně pak v důsledku (11) jest

$$\psi(y, x) = x^{n\varrho_m}\psi^m(y_m, x). \tag{12}$$

Vztah tento jest v důsledku (11) splněn identicky, t. j. pro každý $[x, y_m]$ jistého okolí bodu $[0, 0]$. Můžeme tedy obě strany derivovati dle y_m, pokládajíce při tom y za funkci proměnné y_m (definovanou v (11)) a ovšem x za konstantu. Označíme-li k-té částečné derivace funkce $\psi(y, x)$ resp. $\psi^m(y_m, x)$ dle y resp. dle y_m znakem $\psi_{y^k}(y, x)$ resp. $\psi^m_{y_m^k}(y_m, x)$, máme, derivujeme-li rovnici (12) dle y_m — jak svrchu naznačeno — jednou, dvakrát, ... n-1-krát, tyto rovnice (krátivše vždy vhodnou mocninou čísla x)

$$\begin{aligned} \psi_{y}(y, x) &= x^{(n-1)\varrho_m}\psi^m_{y_m^1}(y_m, x) \\ \psi_{y^2}(y, x) &= x^{(n-2)\varrho_m}\psi^m_{y_m^2}(y_m, x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{y^{n-1}}(y, x) &= x^{\varrho_m}\psi^m_{y_m^{n-1}}(y_m, x). \end{aligned} \tag{13}$$

Všechny tyto rovnice jsou identity v důsledku (11). $\psi_{y^{n-1}}(y, x)$ jest mnohočlen v y prvého stupně rovný $n!\, y + (n-1)!\, v_1(x)$ a stejně $\psi^m_{y_m^{n-1}}(y_m, x)$ jest rovno $n!\, y_m + (n-1)!\, v_1^m(x)$. Dosadíme-li tedy do poslední rovnice za y dle (11), obdržíme ihned po snadné úpravě vztah identicky platný (t. j. pro každé x v okolí bodu $x = 0$)

$$\varepsilon^{(1)}x^{\varrho_1} + \varepsilon^{(2)}x^{\varrho_2} + \ldots + \varepsilon^{(m)}x^{\varrho_m} = -\frac{v_1(x)}{n} + x^{\varrho_m}\frac{v_1^m(x)}{n}. \tag{n}$$

Avšak $v_1(x)$ i $v_1^m(x)$ jsou potenční řady proměnné x a $v_1^m(0) = 0$ $(v_1^m(x) = \varepsilon^{(m+1)}x^{\alpha_m} + \ldots)$; i jest patrno, že levá strana rovnice (n) jest prvých m členů (od nully různých) řady $-\frac{v_1(x)}{n}$. Nekonečná řada tedy

$$\varepsilon^{(1)}x^{\varrho_1} + \varepsilon^{(2)}x^{\varrho_2} + \ldots \tag{p}$$

se shoduje s potenční řadou $-\frac{1}{n}v_1(x)$ konvergentní v okolí bodu $x=0$. Jest tudíž i (p) konvergentní v jistém okolí bodu $x=0$ a rovno v tom okolí výrazu $-\frac{v_1(x)}{n}$.

Dosadíme-li za y do $\psi_{y^{n-1}}(y, x)=n!\,(y+\frac{v_1(x)}{n})$ řadu (p), dostaneme následkem toho nullu; avšak nullu také dostaneme když dosazení to provedeme v mnohočlenech $\psi(y, x)$, $\psi_y(y, x)$, ..., $\psi_{y^{n-2}}(y, x)$. Neboť dosadíme-li ku př. do $\psi(y, x)$ za y mnohočlen obsahující prvých m členů řady (p), obdržíme řadu mocninou v x, ze které se dá vytknouti mocnina x o mocniteli aspoň $n\varrho_m$, jakož poučuje nás rovnice (12), ve které na pravé straně v důsledku (11) jest klásti $y_m=0$. Vymizí tedy po tom dosazení všecky členy obsahující x na mocninu nižší než $n\varrho_m$; dosadíme-li tudíž za y řadu (p) celou, dostaneme identicky nullu ($\lim\limits_{m=\infty} \varrho_m=\infty$).

Naznačeným postupem dospíváme tudíž k řadě (p) *konvergentní, která dosazena byvši za* y *splňuje rovnici* $\psi(y, x)=0$, *avšak také rovnice, které z této vzniknou, derivujeme-li ji dle* y *a to až do řádu* $n-1$. Můžeme tedy i tvrditi, že jest identicky (t. j. pro každé y, x v jistém okolí bodu $[0, 0]$)

$$\psi(y, x)=(y-\varepsilon_1 x^{\varrho_1}-\varepsilon_2 x^{\varrho_2}-\dots)^n;$$

neboť rovnice $\psi(y, x)=0$ má, pokládáme-li y za neznámou, kořen daný řadou (p) jakožto kořen n-násobný.

Kdyby teprve od indexu i počínajíc (a ne, jak jsme právě předpokládali, hned od počátku) bylo $n_i=n_{i+1}=\dots$ in inf., pak jediný rozdíl, jenž by proti předcházejícímu nastal, byl by ten že mnohočlen $\psi^i(y_i, x_i)$ by byl n_i-tou mocninou polynomu prvního stupně y_i a rovnice $\psi(y, x)=0$, pokládáme-li y za neznámou, by měla (vedle jiných kořenů) n_i-násobný kořen daný tvarem (10)*).

262. Přehlédněme v celku postup, jakož i výsledky, k nimž jsme dospěli. Hledali jsme funkce y proměnné x, jež hoví rovnici $F(x, y)=0$, kdež (odchyluji se poněkud v označení dříve užívaném)

$$F(x, y)=u_0(x)+yu_1(x)+y^2u_2(x)+\dots+y^nu_n(x)+\dots$$

Při tom jsou $u_k(x)$ potenční řady proměnné x a jest $u_i(0)=0$ pro $i=0, 1, 2, \dots, n-1$, avšak $u_n(0)\neq 0$; hledaná funkce y má býti rovna nulle pro $x=0$ a v něm a jeho okolí spojitá

*) V tomto tvaru jest předpokládáno ovšem $i=2$.

Ukázáno pak bylo, že $F(x, y)$ lze postupně rozložiti v součin:

1.) Činitele, který v okolí bodu $[0, 0]$ dosti malém a v bodě $[0, 0]$ jest různý od nully. Činitel tento v odst. 255. značen byl $F_1(x, y)$ a existuje vždy takový činitel, jestliže v rozvoji pro $F(x, y)$ nevymizí mocniny y o exponentu vyšším než n. V případě, že by mocniny právě zmíněné vymizely, nastupuje místo $F_1(x, y)$ prostě faktor $a_n(x)$.

2.) Činitelů, jež v okolí bodu $[0, 0]$ dosti malém jsou různy od nully, v bodě $[0, 0]$ pak rovnají se nulle. Takový jeden činitel bychom ku př. dostali, kdybychom ve výraze z odst 260. $\eta^{m-m_1} + P_1(t)\eta^{m-m_1-1} + \ldots + P_{m-m_1}(t)$, násobeném vhodnou mocninou čísla t, zavedli původní proměnné y, x. Činitel poslední jest charakterisován tím, že rovnice $\eta^{m-m_1} + P_1(0)\eta^{m-m_1-1} + \ldots + P_{m-m_1}(0) = 0$ stupně $m - m_1$ v y nemá kořenů reálných.

3.) Činitelů lineárních v y po případě povýšených na jistou celistvou mocninu ν, takže dostáváme činitele tvaru $[y - p(x^{\frac{1}{N}})]^{\nu}$, kde $p(t)$ jest potenční řada argumentu t, $p(0) = 0$, a N jest číslo celé

Může ovšem nastati, že při určitém $F(x, y)$ žádní z činitelů pod 3) neexistují Pak nejsou funkce y proměnné x, jež by splňovaly rovnice $F(x, y) = 0$ a jež by se rovnaly nulle pro $x = 0$; rovnice pak $F(x, y) = 0$ není vůbec splněna v žádném bodě $[x, y]$ okolí $O(0, 0; \varepsilon)$, je-li ε dosti malé.

Může však též nastati, že nejsou žádní činitelé pod 2) uvedení. *V tomto případě jest celkem n funkcí y tvaru $p(x^{\frac{1}{N}})$ majících žádané vlastnosti* (že splňují rovnici $F(x, y) = 0$ atd.). Při tom ovšem jest funkci $y = p(x^{\frac{1}{N}})$ počítati ν-kráte, vyskytuje-li se činitel $y - p(x^{\frac{1}{N}})$ v rozkladu funkce $F(x, y)$ svrchu popsaném povýšen na mocninu ν-tou; funkce $y = p(x^{\frac{1}{N}})$ nám pak představuje *řešení ν-násobné (řádu ν-tého)*.

Mohou však býti současně činitelé pod 2) i činitelé pod 3). Pak jsou funkce splňující rovnici $F(x, y) = 0$ tvaru $y = p(x^{\frac{1}{N}})$ a počet jich (počítáme-li každou tolikrát, kolik obnáší její řád) jest menší než n.

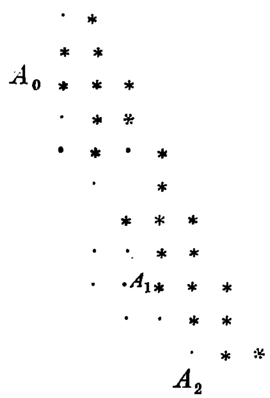
Rovnice $F(x, y) = 0$ není splněna v žádném bodě $[x, y]$ z okolí $O(0, 0; \varepsilon)$, jeli ε dosti malé, ve kterém by zároveň se nestával nullou jeden z činitelů pod 3) uvedených.

Příklad. Hledejme funkce y proměnné x hovící rovnici

$$0 = (6x^5 + a_6 x^6 + ..) + (-x^4 + b_5 x^5 + ..)y + (-x^3 - 14x^4 + c_5 x^5 + ..)y^2 + (2x^3 + d_4 x^4 + \ldots)y^3 + (3x^2 + 18x^3 + e_4 x^4 + \ldots)y^4 + (f_3 x^3 + \ldots)y^5 + (-3x + g_3 x^3 + ..)y^6 + (-2x + h_2 x^2 + ..)y^7 + (1 - 2x + k_2 x^2 + ..)y^8 + (1 + l_1 x + ..)y^9 + (m_1 x + ..)y^{10} + \ldots$$

a takové, jež pro $x=0$ jsou rovny nulle. V závorkách daného výrazu nechť jsou potenční řady proměnné x, jichž počáteční členy jsou v závorce uvedeny, pokud pro vyšetření hledaných funkcí jsou nutny. Číslům a_6, b_5, c_5 ... můžeme přisuzovati hodnoty libovolné, aniž by to mělo vliv na ty vlástnosti funkcí hledaných, o něž především nám jde.

Sestrojíme nejprve polygonální čáru Newtonovu. V diagramu vedle naznačeném jsou body odpovídající členům ve výraze daném uvedeným vyznačeny hvězdičkou, body $[p, q]$, jimž odpovídající členy $x^p y^q$ ve výraze daném vůbec nejsou, tečkou. Dostáváme lomenou čáru $A_0 A_1 A_2$ o dvou stranách. Prvé straně $A_0 A_1$ odpovídají členové



$$y^8 - 3xy^6 + 3x^2 y^4 - y^2 x^3 = y^2 (y^2 - x)^3;$$

druhé pak straně výraz

$$-y^2x^3 - yx^4 + 6x^5 = -x^3 (y - 2x)(y + 3x).$$

Na první straně jsou členy nejnižšího řádu tenkráte, jestliže y jest v x řádu $\frac{1}{2}$; příslušná rovnice pro η (viz odst 260., (g)) jest stupně 6. a má dva reálné trojnásobné kořeny $+1$, -1. Při druhé straně jest y v x řádu 1. a rovnice v η má dva jednoduché reálné kořeny 2, -3. Rozvoje jim přináležející lze ihned vypsat ve tvaru

$$y = 2x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \dots \tag{α}$$

$$y = -3x + \lambda'_2 x^2 + \lambda'_3 x^3 + \dots \tag{β}$$

při čemž součinitele λ_2, λ'_2, λ_3, .. lze určiti dosazením do dané rovnice methodou neurčitých součinitelů.

Abychom získali i tvar pro rozvoje odpovídající prvé straně polygonu Newt. a trojnásobnému kořenu $+1$, učiníme substituci $x = x_1^2$, $y = x_1 (1 + y_1)$, kdež y_1 jest funkce proměnné x_1 stávající se nullou pro $x_1 = 0$ Abychom neprováděli zbytečné dosazování, vybereme si ze členů dané rovnice členy nejnižšího stupně za předpokladu daného tvarem substituce prováděné (že y v x jest stupně $\frac{1}{2}$). Jsou to především členové na straně $A_0 A_1$, pak členové na přímce s $A_0 A_1$ rovnoběžné a co nejblíže ku $A_0 A_1$ položené, potom členové na další rovnoběžce s $A_0 A_1$ atd., pokud jest potřeba. Ukáže se během počtu, že vystačíme se dvěma rovnoběžkami, t. j. s výrazem

$$y^2 (y^2 - x)^3 + y (y^8 - 2y^6 x + 2y^2 x^3 - x^4) +$$
$$+ (-2xy^8 + 18x^3 y^4 - 14x^4 y^2 + 6x^5) + (\dots) + \dots$$

V každém členu výrazu právě napsaného jsou obsaženy všechny členy položené na jedné rovnoběžce s $A_0 A_1$ v diagrammu Newtonově. Proveďme nyní substituci; postačí pro naše účele (t. j. ke konstrukci dalšího polygonu Newtonova), počítáme-li z každého ze tří členů člen nejnižšího řádu v y_1, jenž dle tvaru prováděné substituce bude nejnižšího stupně v proměnných x_1, y_1, ať jest řád y_1 v x_1 jakýkoliv. Obdržíme však z dané rovnice po substituci rovnici

$$0 = x_1^8(8y_1^3 + ..) + x_1^9(16y_1^3 + ..) + x_1^{10}(8 + ..) + x_1^{11}(...) + ... \quad (\gamma)$$

Všichni ostatní členové (nevypisovaní, jenom tečkami naznačení) jsou jistě řádu vyššího než vypsaní. Diagramm příslušný ku vypsaným členům bude obsahovati tři body a to body (krátíme dříve x_1^8 celou rovnici): [0, 3], [1, 3], [2, 0]. Polygonální čára Newtonova bude toliko z jedné přímky a budou na ní dva body [0, 3], [2, 0]. Příslušné členy z rovnice uvažované jsou $8y_1^3 + 8x_1^2$; rovnice v η k těmto členům patřící jest $8\eta^3 + 8 = 0$ a má jediný reálný kořen jednoduchý, totiž -1; tak existuje jedno a jen jedno řešení rovnice (γ), které pro x_1 jest rovno nulle, a to má tvar

$$y_1 = -x_1^{\frac{2}{3}} + u_3 x_1^{\frac{3}{3}} + u_4 x_1^{\frac{4}{3}} + \ldots .$$

Z tohoto řešení plyne pro rovnici původně danou (vrátíme-li se k původním proměnným) řešení tvaru

$$y = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{5}{6}} + u_3 x^{\frac{6}{6}} + u_4 x^{\frac{7}{6}} + u_5 x^{\frac{8}{6}} + \ldots, \quad (\delta)$$

kdež u_3, u_4, ... lze vypočítati opět methodou neurčitých součinitelů. Stejně lze nalézti rozvoj příslušící druhému trojnásobnému kořenu rovnice pro stranu $A_0 A_1$ (ku -1); rozvoj tento ostatně obdržíme z (δ), dosadíme-li tam $-x^{\frac{1}{2}}$ místo $x^{\frac{1}{2}}$; máme ihned řešení

$$y = -x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{6}} + u_3 x^{\frac{6}{6}} - u_4 x^{\frac{7}{6}} + u_5 x^{\frac{8}{6}} - \ldots . \quad (\delta')$$

Dospíváme tudíž k výsledku, že funkce y proměnné x hovící rovnici dané, jež pro $x = 0$ jsou rovny nulle a jež jsou spojity v bodě $x = 0$ a okolí, jsou čtyři a to (α), (β), (δ), (δ'); dále pak, že všecka řešení dané rovnice, pro něž $[x, y]$ jest v okolí bodu [0, 0] dosti malém, splňují jeden ze čtyř vztahů (α), (β), (δ), (δ').

263. Případ semidefinitní *při vyšetřování extrémů u funkcí dvou proměnných*, jež rozvinouti se dají v okolí bodu vyšetřovaného v řadu Taylorovu. Stačí, ukážeme-li v následujícím, kdy nastává u funkcí bodu $[x, y]$, rozvinutelných v řadu mocninnou argumentů x, y (tedy v řadu Taylorovu v okolí bodu [0, 0]) extrém v bodě [0, 0]. Jak by se vyšetřovala existence extrému v bodě libovolném $[x_0, y_0]$, jest na snadě (viz k tomu pozn. v odst. 255.).

Budiž tedy dána funkce $f(x, y)$ rozvinutelná v potenční řadu čísel x, y. Pak, má-li tato funkce extrém v bodě [0, 0], má rozdíl

$$F(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) \quad \text{(odst. 242, (1))}$$

v $O(0, 0; \eta)$ stále totéž znaménko (zvolíme-li si ovšem η dosti malé) t. j. funkce $F(x, y)$ v tom okolí nestává se nullou.

Následkem toho můžeme vysloviti větu: *Nutná a postačující podmínka, aby funkce dvou proměnných x, y, rozvinutelná v řadu Taylorovu v okolí bodu* [0, 0], *měla v bodě* [0, 0] *extrém, jest, aby při rozkladu rozdílu $f(x, y) - f(0, 0)$ v činitele, jak byli popsáni v odst. 262., nevyskytovali se žádní činitelé uvedení pod 3).*

Obyčejně však není nutno prováděti rozklad naznačený v odst. 262., abychom rozhodli, zda nastává extrém dané funkce. Stačí totiž ve velké většině případů vyšetřiti rovnice algebraické, jež patří ku jednotlivým stranám polygonální čáry Newtonovy, příslušné v bodě [0, 0] ku funkci $F(x, y) = f(x, y) - f(0, 0)$. Rovnice ty v označení odst. 259.*) lze psáti ve tvaru

$$\xi^r + l_1\xi^{r-1} + l_2\xi^{r-2} + \ldots + l_r = 0.$$

Mají-li všecky takovéto rovnice kořeny vesměs komplexní, má funkce $f(x, y)$ v bodě [0, 0] *extrém. Má-li některá z těch rovnic kořen reálný jednoduchý aneb obecněji násobnosti liché, nemá funkce $f(x, y)$ v bodě* [0, 0] *extrém.*

Z toho jest patrno, že čísla r musí býti sudá, má-li $f(x, y)$ v bodě [0, 0] extrém. A dále, že, *má-li $f(x, y)$ v* [0, 0] *extrém, souřadnice vrcholů polygonální čáry Newtonovy $A_0 A_1 \ldots A_\nu$* — kteréžto souřadnice při vrcholu A_k jsme v odst. 256. označili p_k, q_k, při čemž $p_0 = 0$, $q_0 = n$, $q_\nu = 0$ — *jsou vesměs čísla sudá,* což plyne ostatně také i z té okolnosti, že člen

$$c_{p_k}^{(n-q_k)} y^{q_k} x^{p_k} \quad \text{(viz odst. 258.)}$$

jest řádu nižšího než všecky ostatní členové Taylorova rozvoje funkce $f(x, y) - f(0, 0)$, je-li y v x řádu λ, kde $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$. Nejsou-li však obě čísla p_k, q_k čísla sudá, člen tento mění své znaménko v okolí bodu [0, 0].

---

*) V odst. tom ponejvíce užívá se rovnic, jichž neznámá značena jest η; mezi η a ξ jest však relace $\xi = \eta^b$.

Příklad 1. Výraz vyšetřovaný v odst. předch. nemá v bodě [0, 0] extrému. Neboť, jak z výsledků docílených tam ihned následuje, nabývá výraz ten v okolí bodu [0, 0], ať jest to okolí jakoliv malé, hodnot kladných i záporných.

Příklad 2. Výraz

$$F(x, y) = y^4 + 2y^2x^2 - 5yx^4 + 4x^6$$

nabývá v [0, 0] hodnoty 0. Na stranách polygonu Newtonova nacházejí se body [0, 4], [2, 2], [4, 1], [6, 0]. Polygonální čára ta pak skládá se ze dvou stran; na prvé jsou body [0, 4] [2, 2] a rovnice k ní příslušná jest $\xi^2 + 2 = 0$; na druhé jsou body [2, 2], [4, 1], [6, 0] a rovnice pro ξ jest $2\xi^2 - 5\xi + 4 = 0$. Jelikož obě rovnice mají jenom kořeny komplexní, má daný výraz v bodě [0, 0] relativní extrém a to minimum.

Příklad 3. Výraz

$$F_1(x, y) = y^4 + y^2x^2 - 4yx^4 + 4x^6$$

má tutéž polygonální čáru Newtonovu, jako výraz uvažovaný v příkl. předch. Rovnice však k jejím stranám příslušné jsou $\xi^2 + 1 = 0$, $\xi^2 - 4\xi + 4 = 0$. Druhá z těchto rovnic má kořen reálný a to 2, který však jest kořenem dvojnásobným. Jest tedy třeba (členové odpovídající druhé straně dávají celkem $(y - 2x^2)^2 \cdot x^2$) zavésti místo proměnné y proměnnou y_1 rovnicí $y = (2 + y_1)\, x^2$ a k výrazu tak vzniklému sestrojiti polygon Newt. Substitucí uvedenou však se změní $F_1(x, y)$ ve výraz (po krácení činitelem x^6)

$$x^2(16 + 32y_1 + \ldots) + y_1^2.$$

Polygon Newtonův k tomuto výrazu obsahuje pouze body [0, 2], [2, 0], odpovídající členům $y_1^2 + 16x^2$; rovnice ve ξ jest $\xi^2 + 16 = 0$ a má kořeny komplexní. Má tudíž i $F_1(x, y)$ v [0, 0] relativní extrém (minimum).

Poznámka. Na základě výsledků odst. 262. jest také snadno odvoditi podmínky nutné a postačující pro existenci *nevlastního extrému* v bodě [0, 0] u funkcí $F(x, y)$, jež tu uvažujeme. Od zevrubného vyslovení příslušné věty však tu upouštím.
