a tedy

$$\delta . \Phi(y_1, y_2) = a_{22} y_1^2 - 2 a_{12} y_1 y_2 + a_{11} y_2^2.$$

Obecné výsledky jsou obdobné; uvedu je, aniž bych podával zevrubná jich odvození, jež v důsledku obecné věty odst. 225. jest snadné a jež mohu tudíž přenechati čtenáři.

Jest pak platna věta: Jestliže elementy diskriminantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ . & . & & . \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad a_{ik} = a_{ki}$$

tvoří matici hodnosti p-té, tu lze vybrati nejprve z matice jeden subdeterminant hlavní (t. j. takový, že hlavní diagonala má prvky vesměs z hlavní diagonaly v Δ, totiž prvky a_{ii}) stupně p-tého od nully různý. Budiž to determinant

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1p} \\ . & & . \\ a_{p1}, & \ldots, & a_{pp} \end{vmatrix} \lessgtr 0.$$

Pak jsou derivace dané kvadratické formy $y = \Sigma a_{ik} x_i x_k$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ dle $x_1, x_2, \ldots, x_p$, jež označíme dělivše je dvěma $y_1, y_2, \ldots y_p$, na sobě nezávislé a lze y pomocí jich vyjádřiti ve tvaru

$$\delta y = - \begin{vmatrix} 0, & y_1, & y_2, & \ldots, & y_p \\ y_1, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1p} \\ y_2, & a_{21} & a_{22}, & \ldots, & a_{2p} \\ . & . & . & & . \\ . & & & & . \\ y_p, & a_{p1}, & a_{p2}, & \ldots, & a_{pp} \end{vmatrix};$$

t. j. lze *danou kvadratickou formu vyjádřiti jako kvadratickou formu o p proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_p$ s diskriminantem od nully různým; proměnné $y_1, y_2, \ldots, y_p$ jsou pak lineárné formy proměnných $x_1, \ldots, x_n$*. Zvláště pak jest $y_k = a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \ldots + a_{kn} x_n$.

XI. Záměna proměnných.

Často jest užitečno a účelno ve výrazech a vztazích, ve kterých se vyskytují proměnné, nahraditi tyto novými proměnnými. Proměnné nové jsou pak s původními vázány rovnicemi, kterými jsou jedny pomocí druhých (a to i nové pomocí původních, i původní pomocí nových) stanoveny. Náhrada taková nazývá se *záměna proměnných* aneb *substituce proměnných* a také *zavedení nových proměnných*.

Vyskytují-li se ve výrazech resp. rovnicích, ve kterých má se provésti záměna proměnných, derivace dle těch proměnných, obdržíme výrazy v nových proměnných na základě pojmů a vět počtu differenciálního. V následujícím vyloženo, jak lze při tom postupovati, při čemž nejdůležitější případy, které se při zavádění nových proměnných vyskytovati mohou, zahrnuty ve čtyři skupiny a řešeny v důsledku toho čtyři úkoly obecné, při čemž prvé dva úkoly týkají se případů, v nichž se provádí toliko záměna neodvisle proměnných, zbývající pak dva případů, kde záměna vztahuje se na neodvisle i odvisle proměnné.

226. I. *Úkol.* Jest dána funkce y neodvisle proměnné x, jakož její derivace $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ **Zaveďme místo neodvislé proměnné** x **novou neodvislé proměnnou** t rovnicí $x = \varphi(t)$, při čemž o funkci $\varphi(t)$ budeme předpokládati, že má derivace všech řádů dle t. Pak y stane se funkcí proměnné t, mající derivace $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$ Jest odvoditi vztahy mezi derivacemi funkce y dle původní neodvislé proměnné x a derivacemi té funkce dle nové neodvisle proměnné t.

Pro derivace první dostaneme hledaný vztah v důsledku pravidla o derivování funkce funkce; funkci y totiž můžeme pojímati za funkci proměnné t tak, že jest y funkcí proměnné x, kteréž x zase jest funkcí proměnné t. Tímto pojetím dostáváme ihned

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\varphi'(t)$$

tedy

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}.} \tag{1}$$

Derivujme obě strany rovnice dle t, při čemž na levé straně opět budeme $\frac{dy}{dx}$ pokládati za funkci proměnné x, kteréž jest funkcí proměnné t. Obdržíme

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\varphi'(t) = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\varphi'(t)} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)^2}$$

a tudíž

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3}.} \tag{2}$$

Tento postup můžeme opakovati tolikráte, kolikráte třeba; při následujícím kroku dostaneme

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)^4} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{\varphi'''(t)\,\varphi'(t) - 3\,\varphi''(t)^2}{\varphi'(t)^5} \tag{3}$$

Výsledky tyto psáti lze s jistou výhodou zvláště při applikacích geometrických v označení differenciálním. Zaveďme differenciály se zřetelem k neodvisle proměnné t, kladouce $dx = \varphi'(t)\,dt$, $d^2x = \varphi''(t)\,dt^2, \ldots$ derivace funkce y dle proměnné x značme $y', y'' \ldots$ Pak lze posledním rovnicím dáti tvar

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

$$y'' = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^3}, \tag{4}$$

$$y''' = \frac{d^3y\,dx^2 - 3\,d^2y\,d^2x\,dx - dy\,(d^3x\,dx - 3\,(d^2x)^2)}{dx^5}.$$

$y^{(IV)}$ bychom vypočítali z rovnice poslední, kdybychom tvořili differenciál (dle proměnné t) pravé strany a výsledek dělili dx v důsledku vztahu

$$y^{(IV)}\,.\,dx = dy''' \quad \text{atd.}$$

Poznámka. Je li y funkcí t a mezi x a t relace $x = \varphi(t)$, pak postačitelná podmínka, abychom y mohli pokládati v okolí bodu $x_0 = \varphi(t_0)$ za funkci proměnné x jest (za předpokladu ovšem, že $\varphi(t)$ jest funkcí mající spojitou derivaci v okolí bodu t_0 a v bodě t_0). aby $\varphi'(t_0)$ bylo různo od nully, jak z vět o funkcích implicitních ihned vyplývá. Je-l však $\varphi'(t_0) = 0$, nelze obecně (t. j. při každé závislosti funkční mezi y a t) pokládati y za funkci proměnné x, mající derivaci (v užším smyslu) v bodě $x = x_0$. Z té příčiny, jelikož ve formulích právě odvozených jest pokládati jmenovatele, jenž jest právě $\varphi'(t)$, za různý od nully, máme formuli pro všecky případy připouštějící řešení obecné (t. j. řešení neodvislé od funkční závislosti mezi y a t).

Příklady. 1. Poloměr zakřivení se při rovinné křivce o rovnici $y = f(x)$ počítá dle vzorce

$$R = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Jaký výraz obdržíme pro křivku, jejíž rovnice jest dána ve tvaru $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$? Tu jest dle (1) a (2) dosadit

$$y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad y'' = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{\varphi'^3}$$

a tedy

$$R = \pm \frac{[\varphi'^2 + \psi'^2]^{\frac{3}{2}}}{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}.$$

2. Abychom odvodili rovnici differenciální, která vznikne z rovnice

$$(x-x^3)\frac{d^2y}{dx^2}+[A-(2A+1)x^2]\frac{dy}{dx}+Bxy=0,$$

zavedeme-li místo x proměnnou t rovnicí $x=\sqrt{1-t^2}$, stačí užiti rovnic (1) a (2), při čemž $\varphi(t)=\sqrt{1-t^2}$, $\varphi'(t)=\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\varphi''(t)=-\frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$. Dostaneme

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{\sqrt{1-t^2}}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1-t^2}{t^2}-\frac{dy}{dt}\frac{1}{t^3}$$

a rovnice hledaná po krácení výrazem $\sqrt{1-t^2}$ a násobení činitelem t obdrží tvar

$$(t-t^3)\frac{d^2y}{dt^2}+[A-(2A+1)t^2]\frac{dy}{dt}+Bty=0,$$

který se úplně shoduje s původním tvarem dané rovnice (nehledíme-li různému označení proměnných).

Splňuje-li tedy rovnici danou funkce $y=\varphi(x)$, splňuje ji také funkce $y=\varphi(\sqrt{1-x^2})$; anebo jinak řečeno: Je-li $y=\varphi(x)$ integrálem dané rovnice differenciální, jest jím také výraz $y=\varphi(\sqrt{1-x^2})$.

227. II. Úkol. Jest dána funkce z dvou neodvisle proměnných x, y, jakož i její derivace $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ..., jež jsou spojité funkce obou proměnných. **Zaveďme místo neodvisle proměnných** x, y, **nové neodvisle proměnné** u, v rovnicemi

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),$$

při čemž o funkcích $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ chceme předpokládati, že mají derivace jakéhokoliv řádu dle neodvisle proměnných u, v, jež jsou spojité funkce bodu $[u, v]$. Pak z stane se funkcí proměnných u, v mající derivace dle u a v; jest odvoditi vztahy mezi derivacemi funkce z dle starých neodvisle proměnných x, y a mezi derivacemi té funkce dle nových neodvisle proměnných.

Pro derivaci první dostaneme hledaný vztah zase použitím pravidel o derivování funkce funkcí. Dostaneme stejně jako svrchu

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\varphi'_u+\frac{\partial z}{\partial y}\psi'_u,\\ \frac{\partial z}{\partial v}&=\frac{\partial z}{\partial x}\varphi'_v+\frac{\partial z}{\partial y}\psi'_v.\end{aligned}\qquad(a)$$

Z těchto rovnic následuje výpočtem

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\psi'_v\frac{\partial z}{\partial u}-\psi'_u\frac{\partial z}{\partial v}}{D},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\varphi'_v\frac{\partial z}{\partial u}+\varphi'_u\frac{\partial z}{\partial v}}{D},\tag{1}$$

při čemž D jest funkcionální determinant

$$D=\frac{D(\varphi,\ \psi)}{D(u,\ v)}$$

a třeba o něm předpokládati, že jest od nully různý (v bodě, o nějž jde; viz také pozn. k předch. odst.).

Rovnice (1) jsou základní; opětovným jich použitím odvodíme snadno výrazy pro derivace vyšších řádů. Mohu do nich dosazovati za z jakoukoli funkci proměnných x, y. Tak ku př. dosadím-li tam místo z derivaci $\frac{\partial z}{\partial x}$, při čemž na pravé straně místo $\frac{\partial z}{\partial x}$ píši U, čímž pro krátkost značím pravou stranu prvé z rovnic (1), máme ihned*)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\psi'_v\frac{\partial U}{\partial u}-\psi'_u\frac{\partial U}{\partial v}}{D},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{-\varphi'_v\frac{\partial U}{\partial u}+\varphi'_u\frac{\partial U}{\partial v}}{D}.$$

A však

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial u}=&\frac{\psi'_v\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\psi'_u\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}}{D}+\\&+\frac{-\varphi''_{u^2}\psi'^2_v+\varphi''_{uv}\psi'_u\psi'_v+\psi''_{u^2}\varphi'_v\psi'_v-\psi''_{uv}\varphi'_v\psi'_u}{D^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\\&+\frac{\varphi''_{u^2}\psi'_u\psi'_v-\varphi''_{uv}\psi'^2_u-\psi''_u\varphi'_{u^2}\psi'_v+\psi''_{uv}\varphi'_u\psi'_u}{D^2}\frac{\partial z}{\partial v},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial v}=&\frac{\psi'_v\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}-\psi'_u\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}}{D}+\\&+\frac{-\varphi''_{uv}\psi'^2_v+\varphi''_{v^2}\psi'_u\psi'_v+\psi''_{uv}\varphi'_v\psi'_v-\psi''_{v^2}\varphi'_v\psi'_u}{D^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\\&+\frac{\varphi''_{uv}\psi'_u\psi'_v-\varphi''_{v^2}\psi'^2_u-\psi''_{uv}\varphi'_u\psi'_v+\psi''_{v^2}\varphi'_u\psi'_u}{D^2}\frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}$$

Označíme-li k vůli stručnosti

$$\{a;\ b,\ c\}=a''_{u^2}b'_v c'_v-a''_{uv}(b'_u c'_v+b'_v c'_u)+a''_{v^2}b'_u c'_u,$$

*) Postup tu použitý zevrubně bude opakován v př. 1.

můžeme tudíž psáti, dosadíme-li výrazy odvozené do rovnic předcházejících,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\psi'^2_v-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\psi'_u\psi'_v+\frac{\partial^2 z}{\partial^2 v}\psi'^2_u}{D^2}+$$
$$+\frac{-\{\varphi;\ \psi,\ \psi\}\psi'_v+\{\psi;\ \psi,\ \psi\}\varphi'_v}{D^3}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+$$
$$+\frac{\{\varphi;\ \psi,\ \psi\}\psi'_u-\{\psi;\ \psi,\ \psi\}\varphi'_u}{D^3}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},\qquad (2_1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{-\varphi'_v\psi'_v\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(\varphi'_u\psi'_v+\varphi'_v\psi'_u)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\varphi'_u\psi'_u\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}}{D^2}+$$
$$+\frac{\{\varphi;\ \varphi,\ \psi\}\psi'_v-\{\psi;\ \varphi,\ \psi\}\varphi'_v}{D^3}\frac{\partial z}{\partial u}+$$
$$+\frac{-\{\varphi;\ \varphi,\ \psi\}\psi'_u+\{\psi;\ \varphi,\ \psi\}\varphi'_u}{D^3}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.\qquad (2_2)$$

Zaměníme-li v předposlední rovnici φ s ψ, obdržíme ihned

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\varphi'^2_v\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\varphi'_u\varphi'_v\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\varphi'^2_u\frac{\partial^2 z}{dv^2}}{D^2}+$$
$$+\frac{+\{\varphi;\ \varphi,\ \varphi\}\psi'_v-\{\psi;\ \varphi,\ \varphi\}\varphi'_v}{D^3}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+$$
$$+\frac{-\{\varphi;\ \varphi,\ \varphi\}\psi'_u+\{\psi;\ \varphi,\ \varphi\}\varphi'_u}{D^3}\frac{\partial z}{\partial v}.\qquad (2_3)$$

Výrazy tyto však jsou dosti složité; následkem toho jeví se účelnějším počítati v jednoduchých případech příslušné výrazy pro druhé derivace přímo než na podkladě těchto formulí. Větší ještě měrou platí to pro derivace řádu třetího a pro případy, kdy počet neodvisle proměnných jest ještě větší než 2; v následujícím propočítám přímo v případě dvou a tří neodvisle proměnných několik příkladů, jež v applikacích mají důležitost.

Příklad 1. Do výrazů

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

jest zavésti za neodvisle proměnné veličiny u, v dané vztahy $x=u\cos v$, $y=u\sin v$ (polární souřadnice místo pravoúhlých). V důsledku rovnic (a) jest

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos v+\frac{\partial z}{\partial y}\sin v,\quad \frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{\partial z}{\partial x}u\sin v+\frac{\partial z}{\partial y}u\cos v.\qquad (a)$$

z nichž následuje snadno

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \tag{p}$$

což jest první výsledek.

Řešením dle $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ dostáváme z (o) dále

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cos v-\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\sin v,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\sin v+\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\cos v. \tag{q}$$

Dosadíme li do první z těchto rovnic $\frac{\partial z}{\partial x}$ místo z, při čemž na pravé straně místo $\frac{\partial z}{\partial x}$ klademe ihned $\frac{\partial z}{\partial u}\cos v-\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\sin v$, máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\cos v\,.\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial z}{\partial u}\cos v-\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\sin v\right]-\\&-\frac{\sin v}{u}\,.\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial z}{\partial u}\cos v-\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\sin v\right]=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cos^2 v-\frac{2}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\cos v\sin v+\\&+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\sin^2 v+\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial u}\sin^2 v+\frac{2}{u^2}\frac{\partial z}{\partial v}\sin v\cos v.\end{aligned}$$

Obdobně dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\sin v\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial z}{\partial u}\sin v+\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\cos v\right]+\frac{\cos v}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial z}{\partial u}\sin v+\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\cos v\right]=\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\sin^2 v+\frac{2}{u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\sin v\cos v+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cos^2 v+\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial u}\cos^2 v-\\&-\frac{2}{u^2}\frac{\partial z}{\partial v}\sin v\cos v,\end{aligned}$$

tak že jest

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial u}, \tag{r}$$

což jest druhý hledaný výsledek.

228. *Příklad* 2. Jest dána funkce V tří neodvisle proměnných x, y, z. Vyhledati se mají výrazy, které dostaneme z výrazů

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2},\quad \left(\frac{\partial V}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2, \tag{s}$$

zavedeme-li místo x, y, z proměnné r, φ, ψ rovnicemi

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi.$$

Substituce tato dá se vyjádřiti jako výsledek dvou substitucí po sobě provedených a to

$$x = u\cos\varphi, \quad y = u\sin\varphi, \quad z = z, \qquad \text{I}$$
$$u = r\cos\psi, \quad z = r\sin\psi, \quad \varphi = \varphi. \qquad \text{II.}$$

Jest pak v důsledku rovnice (r) předcházejícího příkladu, provádíme-li substituci I.,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial V}{\partial u}$$

a tedy

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial V}{\partial u}.$$

V důsledku pak téže rovnice jest, provádíme-li na tento výraz substituci II.,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Dále jest dle (q) (místo x, u, v jest klásti po řadě u, r, ψ)

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial r}\cos\psi - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \psi}\sin\psi, \quad \frac{1}{u}\cdot\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \psi}\, tg\, \psi.$$

Jest tedy celkem

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\psi}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \psi}\, tg\, \psi,$$

čímž provedena přeměna prvého z výrazu v (s) pro nové neodvisle proměnné.

Stejně obdržíme — používajíce toliko místo rovnice (r) rovnici (p) —

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\psi}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2.$$

229. *Příklad* 3. Vyhledati se má opětně, več změní se výrazy (s), zavedou-li se místo proměnných x, y, z, proměnné x', y', z' rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= ax' + a'y' + a''z' \\ y &= bx' + b'y' + b''z' \\ z &= cx' + c'y' + c''z' \end{aligned} \qquad (s)$$

Při tom jsou a, b, c, a', b', . . . konstanty takové, že identicky (t. j. pro každé x', y', z') jest

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2; \qquad (t.)$$

k tomu jest nutno a postačitelno, aby bylo splněno šest rovnic

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=1, & a'a''+b'b''+c'c''&=0,\\ a'^2+b'^2+c'^2&=1, & a''a+b''b+c''c&=0,\\ a''^2+b''^2+c''^2&=1, & aa'+bb'+cc'&=0 \end{aligned} \tag{u}$$

Substituce lineární (s) takovýchto vlastností sluje substituce **lineární orthogonální o třech proměnných**; substituce taková vyskytuje se ku př., zavádíme-li v prostoru trojrozměrném místo původních pravoúhlých os souřadnicových XYZ nové pravoúhlé osy $X'Y'Z'$ mající týž počátek.

Jelikož substituce orthogonální má v následujícím důležitost, odvodíme si další hlavní její vlastnosti beze zřetele k tomu, zda je k předloženému úkolu potřebujeme. Nejprve lze v důsledku rovnic (u) snadno řešiti rovnice (s) dle x', y', z'. Násobíme-li totiž první rovnici číslem a, druhou b a třetí c, rovnice pak takto vzniklé sečteme, dostaneme dle (u) ihned x'; obdobně získáme i y' a z' a máme jiný tvar pro substituci orthogonální

$$\begin{aligned} x'&=a\,x+b\,y+c\,z,\\ y'&=a'\,x+b'\,y+c'\,z,\\ z'&=a''x+b''y+c''z. \end{aligned} \tag{v}$$

Použijeme-li těchto výrazů v rovnici (l), dosazujíce tam za x', y', z', vidíme, že jest splněno dalších šest rovnic pro koefficienty, totiž

$$\begin{aligned} a^2+a'^2+a''^2&=1, & bc+b'c'+b''c''&=0,\\ b^2+b'^2+b''^2&=1, & ca+c'a'+c''a''&=0,\\ c^2+c'^2+c''^2&=1, & ab+a'b'+a''b''&=0, \end{aligned} \tag{u_1}$$

kteréžto rovnice lze však odvoditi jako důsledky rovnic (u). Rovněž jako důsledek rovnic (u) lze snadno dokázati, že determinant

$$\begin{vmatrix} a, & a', & a''\\ b, & b', & b''\\ c, & c', & c'' \end{vmatrix} = \varepsilon = \pm 1$$

a že minory v tomto determinantu patřící k jednotlivým elementům rovnají se těmto elementům násobeným ε. Tak ku př.

$$b'c''-b''c'=\varepsilon a,\quad b''c-bc''=\varepsilon a',\quad bc'-b'c=\varepsilon a'',\ \text{atd.}$$

230. Z rovnic (v) máme dle pravidla o derivování funkce funkcí (pokládajíce V za funkci proměnných x', y', z', jež jsou zase dle (v) funkcemi proměnných x, y, z)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}&=a\frac{\partial V}{\partial x'}+a'\frac{\partial V}{\partial y'}+a''\frac{\partial V}{\partial z'},\\ \frac{\partial V}{\partial y}&=b\frac{\partial V}{\partial x'}+b'\frac{\partial V}{\partial y'}+b''\frac{\partial V}{\partial z'},\\ \frac{\partial V}{\partial z}&=c\frac{\partial V}{\partial x'}+c'\frac{\partial V}{\partial y'}+c''\frac{\partial V}{\partial z'}. \end{aligned} \tag{w}$$

Z těchto tří rovnic plyne ihned (umocníme-li je na čtverec a sečteme) v důsledku rovnic (u)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2.$$

Derivujeme-li rovnici (w) dle x, y, z (zase týmž způsobem jako svrchu) dostáváme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial V}{\partial x'^2}+2aa'\frac{\partial^2 V}{\partial x'\partial y'}+2aa''\frac{\partial^2 V}{\partial x'\partial z'}+a'^2\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}+2a'a''\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial z'}+$$
$$+a''^2\frac{\partial^2 V}{\partial z'^2}$$

a obdobné dvě rovnice pro $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$; sčítáním všech těchto tří rovnic následuje zase v důsledku (u)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z'^2}.$$

231. *Příklad* 4. Funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hoví rovnici differenciální

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=\lambda f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{A}$$

Vyšetřiti jest rovnici diff., kterou z ní dostaneme. zavedeme-li nové neodvisle proměnné $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rovnicemi

$$x_1=y_1,\ x_2=y_1y_2,\ x_3=y_1y_3,\ \ldots,\ x_n=y_1y_n. \tag{z}$$

Rovnice tyto lze psáti též ve tvaru

$$y_1=x_1,\ y_2=\frac{x_2}{x_1},\quad y_3=\frac{x_3}{x_1},\ \ldots,\ y_n=\frac{x_n}{x_1}.$$

Funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nechť se transformuje danou substitucí ve funkci $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, tak, že jest v důsledku rovnic (z) identicky

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=g(y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{m}$$

Derivujme obě strany poslední rovnice dle $x_1, x_2, \ldots, x_n$; obdržíme (pokládajíce [y] na pravé straně za funkci [x])

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial g}{\partial y_1}-\frac{\partial g}{\partial y_2}\frac{x_2}{x_1^2}-\frac{\partial g}{\partial y_3}\cdot\frac{x_3}{x_1^2}-\ldots-\frac{\partial g}{\partial y_n}\frac{x_n}{x_1^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial g}{\partial y_2}\cdot\frac{1}{x_1},\quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=\frac{\partial g}{\partial y_3}\cdot\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}=\frac{\partial g}{\partial y_n}\cdot\frac{1}{x_1}.$$

Dosadíme-li vztahy tyto do dané rovnice differenciální, dostaneme ihned hledanou rovnici ve tvaru

$$x_1 \frac{\partial g}{\partial y_1} = \lambda f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

aneb zavedeme-li vesměs proměnné $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$y_1 \frac{\partial g}{\partial y_1} = \lambda g(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Jest snadno nalézti funkci, jež této rovnici differenciální hoví; vyskytuje se v ní derivace dle jediné z proměnných y_k, totiž dle y_1; můžeme tudíž při hledání té funkce pokládati za proměnnou jedině y_1, ostatní proměnné pak za konstanty. Máme pak v označení differenciálním za této supposice

$$y_1 . dg = \lambda g . dy_1 \quad \text{aneb} \quad \frac{dg}{g} = \lambda \frac{dy_1}{y_1}.$$

Na levé straně poslední rovnice jest differenciál výrazu $\log|g|$, na pravé differenciál výrazu $\lambda . \log|y_1| = \log|y_1|^\lambda$; jelikož oba differenciály jsou si rovny, jest rozdíl příslušných funkcí konstantou, t. j. v našem případě funkcí proměnných $y_2, y_3, \ldots, y_n$ a můžeme tedy psáti

$$\log|g| = \log|y_1|^\lambda + \text{funkce proměnných } y_2, \ldots, y_n;$$

aneb konečně

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = |y_1|^\lambda h(y_2, y_3, \ldots, y_n).$$

Vrátíme-li se k původní funkci a původním proměnným, jest

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |x_1|^\lambda h\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Píšeme-li v této rovnici $[tx_1, tx_2, \ldots, tx_n]$ místo $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, kde $t > 0$, jest dále

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^\lambda |x_1|^\lambda h\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right),$$

t. j.

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^\lambda f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

čímž dospíváme, používáme-li definice homogenní funkce a věty Eulerovy (odst. 207, příklad) k této větě: *Rovnice (A) splněná v oboru, ve kterém funkce f má zároveň totální differenciál, nám dává nutnou a postačující podmínku, aby ta funkce v tom oboru byla funkcí homogenní λ-tého stupně.*

Poznámka. V příkladě tomto neprovedli jsme záměnu odvislé proměnné; nýbrž jsme toliko změnili rovnicí (*m*) poněkud označení, abychom co nejzřetelněji vytkli, že jedna a táž veličina jest k původním proměnným a novým proměnným poutána různými vztahy funkčními. V příkladech následujících rovněž k vůli zřetelnosti změnu v označení odvisle proměnné (proměnných) zavedu, ačkoliv se proměnná ta (proměnné ty) nemění; v příkladech 1., 2., 3. jsem to neučinil.

232. *Příklad* 5. Jest dán funkcionální determinant funkcí $F_1, F_2, .., F_n$ proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vzhledem těmto proměnným. Več se změní determinant ten, zavedeme-li nové proměnné **lineární substitucí** (transformací)

$$x_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{in} y_n, \quad i = 1, 2, \ldots n? \qquad (\alpha)$$

Determinant

$$|a_{ik}| \quad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

— *determinant to lineární substituce* — označíme δ; δ pak jest vždy číslo od nully různé (neboť jinak by lineární výrazy, jež dosazujeme za *neodvisle* proměnné, nebyly neodvislé). Klademe

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G_i(y_1, y_2, \ldots, y_n); \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Derivujeme-li obě strany této rovnice dle y_k — pokládajíce na levé straně x_i za funkci y_k (dle (α)) — máme ihned

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1} a_{1k} + \frac{\partial F_i}{\partial x_2} a_{2k} + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial x_n} a_{nk} = \frac{\partial G^i}{\partial y_k}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n; \\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{matrix} \qquad (\beta)$$

Z toho vztahu, věty o násobení determinantů a definice determinantu funkcionálního následuje ihned

$$\frac{D(G_1, G_2, \ldots, G_n)}{D(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)} = \delta \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Odtud jest patrno, že determinant funkcionální funkcí G_i, vzniklých lineární substitucí z funkcí F_i, dle nových proměnných y_k, jest rovný determinantu funkcionálnímu původních funkcí F_i dle původních proměnných x_k, násobenému p r v o u mocninou determinantu lineární substituce. Aneb kratčeji: *Funkcionální determinant jest invariantem vůči lineární substituci a to invariantem váhy* p r v é. Lineární substituce vztahuje se při tom k proměnným, dle kterých funkcionální determinant jest počítán.

Poznámka. Věta tu odvozená jest v podstatě speciálním případem věty o funkcionálních determinantech (odst. 224., 1); i odvození tu podané neliší se od odvození v cit. odst. naznačeného.

233. *Příklad* 6. Uvažujme výraz — nechť $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest funkcí mající dle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prvý totální differenciál — :

$$P_{x,\xi} = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

a předpokládejme, že i proměnné x_i i proměnné ξ_i transformují se touž lineární substitucí (α); t. j. že místo proměnných x_i zavádějí se nové proměnné y_i rovnicemi (α), místo proměnných ξ_i pak proměnné η_i lineární substitucí se stejnými součiniteli, totiž rovnicemi

$$\xi_i = a_{i1}\eta_1 + a_{i2}\eta_2 + \ldots + a_{in}\eta_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (\alpha')$$

Več se změní výraz $P_{x\xi}$? Funkci substitucí vzniklou z f označíme g, t. j. klademe

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Pak stejně jako v (β) příkl. předch. dostaneme n rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} a_{1k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} a_{2k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} a_{nk} = \frac{\partial g}{\partial y_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

násobíme-li tyto rovnice po řadě čísly $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, máme ihned (užívajíce na levé straně (α'))

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\xi_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\xi_n = \frac{\partial g}{\partial y_1}\eta_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2}\eta_2 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y_n}\eta_n,$$

t. j. v označení svrchu zavedeném $P_{x\xi} = Q_{y\eta}$, při čemž $Q_{y\eta}$ má týž význam vzhledem k funkci g a proměnným $[y]$, $[\eta]$, jako $P_{x\xi}$ vzhledem ku f, $[x]$, $[\xi]$.

Funkce $P_{x\xi}$ sluje *polára funkce* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *dle proměnných* $[x]$ *s pólem* $[\xi]$. Výsledek $P_{x\xi} = Q_{y\eta}$ můžeme vyznačovati krátce tak (stejně jako v příkladě předcházejícím): *Polára jest invariantem vůči lineární substituci váhy* n u l l t é. (V rovnici $Q_{y\eta} = P_{x\xi}$ můžeme si na pravé straně přidati jako činitel n u l l t o u mocninu determinantu lineární substituce).

234. *Příklad* 7. Budiž $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funkcí mající druhý totální differenciál a uvažujme funkcionální determinant funkcí (definovaných v příkladě předch.)

$$P_{x\xi^{(1)}}, P_{x\xi^{(2)}}, \ldots, P_{x\xi^{(n)}}, \qquad (\gamma)$$

kde $\xi^{(k)}$ zastupuje n proměnných $\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}$, a nechť se proměnné $[x]$, $[\xi^{(k)}]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ transformují touž lineární substitucí (α) resp. (α'). Pak funkce substitucí vznikající z (γ) jsou

$$Q_{y\eta^{(1)}}, Q_{y\eta^{(2)}}, \ldots, Q_{y\eta^{(n)}}.$$

Tu jest nejprve dle příkladu 5.

$$\frac{D(Q_{y\eta^{(1)}}, \ldots, Q_{y\eta^{(n)}})}{D(y_1, \ldots\ldots, y_n)} = \delta \frac{D(P_{x\xi^{(1)}}, \ldots, P_{x\xi^{(n)}})}{D(x_1, \ldots\ldots, x_n)}. \tag{δ}$$

Avšak (determinant $|\xi_{ik}|$ označme A, determinant pak $|\eta_{ik}|$ značkou B)

$$\frac{D(P_{x\xi^{(1)}}, \ldots, P_{x\xi^{(n)}})}{D(x_1, \ldots\ldots, x_n)} = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right| . A$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{D(Q_{y\eta^{(1)}}, \ldots, Q_{y\eta^{(n)}})}{D(y_1, \ldots\ldots, y_n)} = \left|\frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_k}\right| . B.$$

Jelikož se zřetelem ku (α') jest $\delta B = A$, máme v důsledku posledních čtyř rovnic ihned

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_k}\right| = \delta^2 \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right|, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Determinant $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right|$ sluje *Hesseův determinant* (Hessien) funkce f dle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. I můžeme vysloviti větu:

Hesseův determinant funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest vůči lineární substituci invariantem váhy druhé.

Máme-li ku př. kvadratickou formu

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n, \quad a_{ik} = a_{ki},$$

pak Hessien její jest determinant

$$D = |a_{ik}|, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

nazývaný diskriminantem dané kvadratické formy. Transformujeme-li danou formu lineární substitucí (α), dostaneme kvadratickou formu o koefficientech b_{ik} a o diskriminantu $|b_{ik}|$; i jest mezi oběma diskriminanty vztah

$$|b_{ik}| = |a_{ik}| \delta^2.$$

Poznámka ku příkladům 5., 6., 7. Pojmy a věty v příkladech těchto zaváděné bývají z pravidla užívány při funkcích homogenních (formách) a nikoliv při funkcích libovolných o proměnných $[x]$. Zvláště pak se to týká pojmu poláry (př. 6.) a pojmu invariantu. Provedl jsem odvození vět podaných na obecnějším podkladě pouze proto, abych nezaváděl předpoklad, který k účelu tomu by byl zbytečný.

235. Obecné substituce orthogonální. Nechť jsou mezi neodvisle proměnnými $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a proměnnými novými $y_1, y_2, \ldots, y_n$ relace

$$x_i = \psi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n); \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

kteréžto relace buďtež ekvivalentní vztahům

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n);\quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Nechť pak jsou funkce ψ_i funkce mající druhý totální differenciál. Označíme

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = a_{ij},\quad \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = b_{ij};\quad i, j = 1, 2, \ldots n. \tag{3}$$

Pak jsou determinanty $|a_{ij}|$, $|b_{ij}|$ determinanty funkcionální, s nimiž jsme se již zabývali v odst. 224., 2., kde jsme odvodili vztah $|a_{ij}|.|b_{ij}| = 1$; značíme-li pro krátkost $P = |a_{ij}|$, $Q = |b_{ij}|$, jest tedy $PQ = 1$. Rovnice

$$\frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \begin{cases} 0 \text{ při } & i \neq j, \\ 1, \text{ když } & i = j, \end{cases}$$

jsou samozřejmy, pokládáme-li $y_1, y_2, \ldots y_n$ za neodvisle proměnné; pokládáme-li však dle (2) $[y]$ za funkce proměnných $[x]$ a $[x]$ dle (1) za funkce proměnných $[y]$, můžeme rovnicím těm na základě označení (3) a na základě pravidla o derivování funkce funkcí dáti tento tvar

$$a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} = \begin{cases} 0, & \text{když } i \neq j, \\ 1, & \text{když } i = j. \end{cases} \tag{4}$$

Stejně vyplývají vztahy (stačí zaměnit $[x]$ a $[y]$ v předcházejícím)

$$a_{1i} b_{j1} + a_{2i} b_{j2} + \ldots + a_{ni} b_{jn} = \begin{cases} 0, & \text{když } i \neq j, \\ 1, & \text{když } i = j. \end{cases} \tag{4'}$$

Řešením n rovnic, které dostaneme ze (4), když buď i zvolíme pevně a j necháme probíhati hodnoty $1, 2, \ldots, n$, anebo naopak, dostaneme, označíme-li minor v determinantu P, jenž patří ku a_{ik}, značkou α_{ik} a obdobně β_{ik} minor ku b_{ik} ve Q,

$$a_{ij} = \beta_{ji} \frac{1}{Q} = \beta_{ji} P,\quad b_{ij} = \alpha_{ji} Q;\quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Nechť jsou mezi a_{ij} platny vztahy (v počtu $\frac{1}{2}(n+1)n$)

$$\left.\begin{aligned} a_{i1} a_{j1} + a_{i2} a_{j2} + \ldots + a_{in} a_{jn} &= 0, \\ a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2 &= h_i^2, \end{aligned}\right\} \begin{aligned} i, j = 1, 2, \ldots, n; \\ i \neq j. \end{aligned} \tag{I}$$

Jsou-li splněny vztahy (I), *pak substituce, která do výrazů zavádí místo neodvisle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ neodvisle proměnné $y_1, y_2, \ldots, y_n$, sluje* **orthogonální.**

Jako jsme ze (3) řešením lineárních rovnic dostali (5), získáme zcela stejně z (I) vztah

$$a_{ij} = h_i^2 \alpha_{ij} Q,\quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

ze kterého vyplyne, použijeme-li druhé z rovnic (5), ihned

$$a_{ij} = h_i^2 b_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Máme tedy v důsledku (I) též relace

$$\left.\begin{aligned} b_{1i} b_{1j} + b_{2i} b_{2j} + \ldots + b_{ni} b_{nj} &= 0, \\ b_{1i}^2 + b_{2i}^2 \quad + \ldots + b_{ni}^2 &= h_i^{-2}, \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & i, j = 1, 2, \ldots, n \\ & i \neq j. \end{aligned} \tag{I'}$$

Jest očividno, že také naopak z (I′) následují (I) a že tudíž obě soustavy rovnic (I) a (I′) jsou si ekvivalentní. Vyšetříme v následujícím več se změní uvažovanou orthogonální substitucí výrazy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Při tom nechť jest u funkce proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mající dle těchto proměnných druhý totální differenciál. Výrazy předložené slují **prvý, resp. druhý differenciální parametr**. Substitucí (1) nechť se transformuje u ve funkci v, což obšírně píšeme ve tvaru

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Derivujeme-li obě strany této rovnice dle x_i, pokládajíce na pravé straně $[y]$ za funkci $[x]$, dostáváme n rovnic

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial y_1} a_{1i} + \frac{\partial v}{\partial y_2} a_{2i} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial y_n} a_{ni}, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{8}$$

Povýšíme-li rovnice ty na čtverec a sčítáme, dostaneme ihned se zřetelem ku (I)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 = h_1^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right)^2 + h_2^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right)^2 + \ldots + h_n^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y_n}\right)^2, \tag{II}$$

kteroužto rovnicí jest transformace prvého differenciálního parametru funkce u provedena. Derivujeme-li rovnici (8) ještě jedenkráte dle x_i, obdržíme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} a_{1i}^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} a_{1i} a_{2i} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial y_1} \frac{\partial a_{1i}}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial y_n} \frac{\partial a_{ni}}{\partial x_i}.$$

Utvoříme-li i nyní součet n rovnic, které vznikají z této pro $i = 1, 2, \ldots, n$, bude levá strana druhým differenciálním parametrem; na pravé straně vedle druhých derivací funkce v dle proměnných $[y]$ budou též členy s prvými derivacemi té funkce. Ku př. prvá derivace funkce v dle y_1

bude se tam vyskytovati násobena výrazem

$$\varrho_1 = \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{13}}{\partial x_3} + \ldots + \frac{\partial a_{1n}}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{1i}}{\partial x_i}.$$

Pro výraz tento obdržíme postupně (napřed dosadíme dle (7), pak provedeme derivování dle x_i podle vzoru rovnice (8))

$$\varrho_1 = \sum_i \frac{\partial (h_1^2 b_{i1})}{\partial x_i} = \sum_i \left(\frac{\partial (h_1^2 b_{i1})}{\partial y_1} \cdot a_{1i} + \frac{\partial (h_1^2 b_{i1})}{\partial y_2} a_{2i} + \ldots + \frac{\partial (h_1^2 b_{i1})}{\partial y_n} a_{ni} \right).$$

Užijeme-li pravidla pro derivaci součinu a identity (4), máme dále

$$\varrho_1 = \frac{\partial h_1^2}{\partial y_1} . 1 + h_1^2 \sum_{i,k} \frac{\partial b_{i1}}{\partial y_k} a_{ki} = \frac{\partial h_1^2}{\partial y_1} + h_1^2 \sum_{i,k} \frac{\partial b_{ik}}{\partial y_1} a_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

neboť dle významu čísel b_{ik} jest

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial y_k} = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y_1 \partial y_k} = \frac{\partial b_{ik}}{\partial y_1}.$$

Avšak dle (5) jest konečně*)

$$\varrho_1 = \frac{\partial h_1^2}{\partial y_1} + \frac{h_1^2}{Q} \sum_{ik} \frac{\partial b_{ik}}{\partial y_1} \beta_{ik} = \frac{\partial h_1^2}{\partial y_1} + \frac{h_1^2}{Q} \frac{\partial Q}{\partial y_1} = \frac{1}{Q} \frac{\partial (Q h_1^2)}{\partial y_1}.$$

Stejně vyplývají ostatní koefficienty ve výrazu vzniklém transformací uvažovanou z druhého diff. parametru a dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_i h_i^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + \frac{1}{Q} \sum_i \frac{\partial (Q h_i^2)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial y_i} \qquad \text{(III)}$$

aneb též

$$Q \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} \left[Q h_i^2 \frac{\partial v}{\partial y_i} \right], \qquad \text{(III')}$$

čímž i transformace druhého parametru provedena v jednoduchém tvaru.

Pro determinant Q dostaneme snadno (umocníme-li Q na čtverec známým způsobem a v determinantu tak vzniklém použijeme rovnice (I'))

$$Q = \pm \frac{1}{h_1 . h_2 \ldots h_n}.$$

*) Při tom používána jest věta o derivování determinantu; derivace determinantu Q se dostane (dle pravidel o derivování součtu), utvoříme-li součet n determinantů, jež po řadě vznikají z Q, nahradíme-li v Q elementy jednoho řádku derivacemi těch elementů. Následkem toho vyplývá ihned pro derivaci determinantu Q tento vztah

$$Q' = \sum_{ik} b'_{ik} \cdot \beta_{ik},$$

kterýž byl v textu použit

Poznámka 1. Již v příkladech 1., 2., 3. ku druhému úkolu odst. 227.—230. uvažovali jsme zvláštní případy substitucí orthogonálních a transformací differenciálních parametrů. Čtenář nechť odvodí výsledky tam odvozené pomocí obecných formulí (II) a (III).

Poznámka 2. Snadno jest postupem vyloženým odvoditi transformaci differenciálních parametrů i v případě substitucí obecných daných rovnicemi (1) a (2). Pro substituce obecné jsou platny rovnice (4), (4′) i (5). Zavedeme-li ještě funkce (v počtu $\frac{1}{2}n(n+1)$)

$$a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\ldots+a_{in}a_{jn}=h_{ij}=h_{ji},$$

můžeme opakujíce provedenou úvahu dospěti při druhém differenciálním parametru ku vztahu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=\frac{1}{Q}\sum_{ik}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(Qh_{ik}\frac{\partial v}{\partial y_k}\right),\quad i,\ k=1,\ 2,\ldots,n.$$

Pro prvý differenciální parametr jest bezprostředně

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2=\sum_{ik}h_{ik}\frac{\partial v}{\partial y_i}\frac{\partial v}{\partial y_k},\quad i,\ k=1,\ 2,\ldots,n.$$

236. Souřadnice elliptické. Nechť jsou $a_1, a_2, \ldots, a_n$ čísla kladná mezi sebou různá a předpokládejme, že

$$a_1>a_2>\ldots>a_n.$$

Pak rovnice

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda}-1=0 \tag{9}$$

o neznámé λ má vždy n různých reálných kořenů, ať $[x_1, x_2, \ldots x_n]$ jest kterýkoliv bod prostoru n- rozměrného o vesměs od nully různých x_i. Neboť, dosazujeme-li do levé strany rovnice (1) za λ postupně hodnoty obsažené ve dvojicích

$$[-a_1+\varepsilon,\ -a_2-\varepsilon],\quad [-a_2+\varepsilon,\ -a_3-\varepsilon],\ldots\quad [-a_n+\varepsilon,\infty], \tag{10}$$

kde ε jest číslo kladné dosti malé (jednak menší než polovice nejmenšího z rozdílů a_i-a_{i+1}, jednak tak malé, aby dosazujeme-li za λ číslo $-a_i\pm\varepsilon$, člen i-tý levé strany rovnice (9) v absolutní své hodnotě převyšoval součet ostatních členů té levé strany), vidíme ihned ze znamének čísel po dosazení vznikajících, že v každém z n intervalů, jichž koncové body jsou dány dvojicemi (10), jest jeden (a jenom jeden, jelikož kořenů má ta rovnice nejvýše n) kořen rovnice (9). Označíme kořeny ty po řadě $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, takže jest $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3\ldots<\lambda_n$.

Jest tedy — *omezme se k vůli stručnosti pouze na kladná* x_i — každému bodu $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ položenému uvnitř prvého kvadrantu (t. j.

pro který $x_1 > 0$, $x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$) přiřazen rovnicí (9) bod $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ pravoúhelníkového oboru $(-a_1+0,\ -a_2+0, \ldots,\ -a_n+0;\ -a_2-0,\ -a_3-0, \ldots, \infty)$. Číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ říkáme pak elliptické souřadnice bodu $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Dány-li jsou λ_i, snadno ustanovíme příslušná x_i prvého kvadrantu. Neboť, jelikož rovnice (9) má kořeny λ_i, jest pro její levou stranu identicky

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda}-1=-\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)}{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)\ldots(a_n+\lambda)}. \tag{11}$$

Násobíme-li obě strany této rovnice dvojčlenem $a_i+\lambda$ a pak klademe $\lambda=-a_i$, máme ihned

$$x_i^2=-\frac{\varphi(-a_i)}{\psi'(-a_i)},$$

kde $\varphi(\lambda)$ resp. $\psi(\lambda)$ jsou čitatel resp. jmenovatel zlomku na pravé straně rovnice (11) se nacházejícího. Z rovnice poslední následuje, derivujeme-li ji dle λ_j,

$$2x_i\frac{\partial x_i}{\partial\lambda_j}=\frac{1}{-a_i-\lambda_j}\cdot\frac{\varphi(-a_i)}{\psi'(-a_i)}=\frac{x_i^2}{a_i+\lambda_j},\ \text{tedy}\ \frac{\partial x_i}{\partial\lambda_j}=\frac{1}{2}\,\frac{x_i}{a_i+\lambda_j}.$$

Užíváme-li označení odst. předch., nahražujíce toliko bod $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, bodem $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, jest derivace částečná proměnné x_i jakožto funkce bodu $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ dle λ_j číslo b_{ij}, i jest

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ki}b_{kj}=\frac{1}{4}\left[\frac{x_1^2}{(a_1+\lambda_i)(a_1+\lambda_j)}+\ldots+\frac{x_n^2}{(a_n+\lambda_i)(a_n+\lambda_j)}\right]. \tag{12}$$

Avšak odečítáme-li $f(\lambda_j)$ od $f(\lambda_i)$, kde $f(\lambda)$ jest levá strana rovnice (9), dostaneme, že hranatá závorka na pravé straně poslední rovnice násobená $\lambda_j-\lambda_i$ jest rovna nulle (neboť i $f(\lambda_j)=0$, i $f(\lambda_i)=0$). Tedy jest i levá strana rovnice (12) rovna nulle, je-li $i\neq j$. Abychom pak dostali pravou stranu rovnice (12) pro $i=j$, to jest výraz

$$\frac{x_1^2}{(a_1+\lambda_i)^2}+\frac{x_2^2}{(a_2+\lambda_i)^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{(a_n+\lambda_i)^2}, \tag{13}$$

postačí derivovati identitu (11) dle λ na obou stranách a potom dosaditi $\lambda=\lambda_i$; vyplyne ihned hodnota pro výraz (13) rovná $\dfrac{\varphi'(\lambda_i)}{\psi(\lambda_i)}$. Tak máme z (12) pro $i=j$

$$b_{1i}^2+b_{2i}^2+\ldots+b_{ni}^2=\frac{1}{4}\,\frac{\varphi'(\lambda_i)}{\psi(\lambda_i)}\quad(=h_i^{-2}).$$

Jest tedy dosazení proměnných $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ za $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, t. j. souřadnic elliptických za obyčejné, substituce orthogonální splňující rovnice (I') a následkem toho i (I); známe pak zároveň veličiny h_i jakožto jednoduché funkce bodu $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$.

Na základě rovnic (II) a (III) máme pak tyto transformační vzorce pro differenciální parametry

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 =$$

$$= 4\left\{\frac{\psi(\lambda_1)}{\varphi'(\lambda_1)}\left(\frac{\partial v}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{\psi(\lambda_2)}{\varphi'(\lambda_2)}\left(\frac{\partial v}{\partial \lambda_2}\right)^2 + \ldots + \frac{\psi(\lambda_n)}{\varphi'(\lambda_n)}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial \lambda_n}\right)^2\right\},$$

$$Q\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 4\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left[Q\,\frac{\psi(\lambda_i)}{\varphi'(\lambda_i)}\frac{\partial v}{\partial \lambda_i}\right],$$

kdež

$$Q^2 = \frac{[\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)]^2}{2^{2n}\cdot\psi(\lambda_1)\,\psi(\lambda_2)\ldots\psi(\lambda_n)}, \quad \Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \prod_{j,k}(\lambda_j - \lambda_k),$$

$$j = 2, 3, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, j-1.$$

Rovnici poslední lze (dělíme-li obě strany rovnice determinantem Q) dáti tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 4\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{\psi(\lambda_i)}}{\varphi'(\lambda_i)}\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left[\sqrt{\psi(\lambda_i)}\,\frac{\partial v}{\partial \lambda_i}\right].$$

237. III. Úkol. *Jest dána funkce y neodvisle proměnné x, jakož i její derivace* $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ **Zaveďme místo obou proměnných** x, y (neodvisle i odvisle proměnné) **nové proměnné** ξ, η *rovnicemi*

$$x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta). \tag{1}$$

φ, ψ jsou funkce na sobě nezavislé (odst 225.).

Jelikož předpokládáme, že y jest funkcí proměnné x, t. j. ve značkách obvyklých $y = f(x)$, můžeme tvrditi, že i mezi ξ, η jest obdobný vztah (vyloučíme li z úvah svých zvláštní případy, ve kterých funkce φ, ψ v (1) se vyskytující jsou ve zvláštním vztahu ku $f(x)$); i budeme v důsledku toho pokládati v následujícím ξ za (novou) neodvisle proměnnou a η za její funkci, t. j. za (novou) odvisle proměnnou. Dále budeme předpokládati, že funkce φ, ψ jsou differencovatelny v libovolném řádu; rovněž, že η jako funkce proměnné ξ právě definovaná má derivace libovolných řádů dle ξ.

Je-li dána nyní Y jakožto funkce proměnné x — mající derivace dle x, jinak však libovolná — můžeme počítati její derivace také dle ξ

v důsledku (1) a dle věty o derivování funkce funkce. I dostaneme

$$\frac{dY}{d\xi}=\frac{dY}{dx}\cdot\frac{dx}{d\xi}=\frac{dY}{dx}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}\right).$$

Známe-li pak vyjádření funkce Y pomocí ξ, η, ku př. ve tvaru $Y=\Psi(\xi,\eta)$, jest

$$\frac{dY}{d\xi}=\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}.$$

Porovnáme-li oba výsledky poslední, máme ihned:

$$\frac{dY}{dx}=\frac{\dfrac{\partial\Psi}{\partial\xi}+\dfrac{\partial\Psi}{\partial\eta}\cdot\dfrac{d\eta}{d\xi}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}\dfrac{d\eta}{d\xi}}, \tag{I}$$

což jest základní rovnice řešící úplně náš úkol. Dosadíme-li do ni $Y=y$ a tedy $\Psi(\xi,\eta)=\psi(\xi,\eta)$, máme ihned vztah mezi prvními derivacemi odvisle proměnných

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'_\xi+\psi'_\eta\dfrac{d\eta}{d\xi}}{\varphi'_\xi+\varphi'_\eta\dfrac{d\eta}{d\xi}}; \tag{2}$$

klademe-li (I) do $Y=\dfrac{dy}{dx}$ a na pravé straně za Ψ pravou stranu rovnice (2), jest dále

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\varphi'_\xi\psi'_\eta-\varphi'_\eta\psi'_\xi)\dfrac{d^2\eta}{d\xi^2}+a_0+a_1\dfrac{d\eta}{d\xi}+a_2\left(\dfrac{d\eta}{d\xi}\right)^2+a_3\left(\dfrac{d\eta}{d\xi}\right)^3}{\left(\varphi'_\xi+\varphi'_\eta\dfrac{d\eta}{d\xi}\right)^3}, \tag{3}$$

kde

$$a_0=\psi''_{\xi^2}\varphi'_\xi-\varphi''_{\xi^2}\psi'_\xi,\quad a_1=2(\psi''_{\xi\eta}\varphi'_\xi-\varphi''_{\xi\eta}\psi'_\xi)+$$
$$+(\psi''_{\xi^2}\varphi'_\eta-\varphi''_{\xi^2}\psi'_\eta),$$
$$a_2=2(\psi''_{\xi\eta}\varphi'_\eta-\varphi''_{\xi\eta}\psi'_\eta)+(\psi''_{\eta^2}\varphi'_\xi-\varphi''_{\eta^2}\psi'_\xi),$$
$$a_3=\psi''_{\eta^2}\varphi'_\eta-\varphi'_{\eta^2}\psi''_\eta.$$

Z výrazu pro $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ mohli bychom opětovným použitím rovnice (I) získati třetí derivaci funkce y dle x atd.; jest však patrno, že výrazy tak získané jsou málo přehledné a tudíž málo užitečné a spokojuji se rovnicemi odvozenými

Příklad 1. Nechť jsou mezi starými a novými proměnnými relace

$$x = \eta, \quad y = \xi.$$

Nové proměnné shodují se v podstatě s původními proměnnými, jenom ta proměnná, jež původně byla neodvisle jest nyní odvisle proměnnou a naopak. (**Záměna odvisle a neodvisle proměnné**). Tu redukuje se (I) na

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\Psi'_\xi + \Psi'_\eta \frac{d\eta}{d\xi}}{\frac{d\eta}{d\xi}} = \Psi'_\eta + \frac{\Psi'_\xi}{\frac{d\eta}{d\xi}} \tag{4}$$

Dosadíme-li sem za $\Psi(\xi, \eta) = \xi$, $(Y = y)$, máme nejprve známou rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}}.$$

Klademe-li do (4) za Y levou a za Ψ pravou stranu této rovnice, jest

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}{\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^3}$$

a dále obdobně

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-\frac{d^3\eta}{d\xi^3}\frac{d\eta}{d\xi} + 3\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)^2}{\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^5} \quad \text{atd.}$$

Příklad 2. Zaveďme místo $[x, y]$ proměnné $[r, v]$ rovnicemi

$$x = r\cos v, \quad y = r\sin v.$$

(*Zavedení souřadnic polárních místo pravoúhlých*). Rovnice (2) bude míti tvar, pokládáme-li r za (novou) odvisle proměnnou,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r\cos v + \sin v \cdot \frac{dr}{dv}}{-r\sin v + \cos v \cdot \frac{dr}{dv}}.$$

Dále jest

$$\varphi'_v \psi'_r - \varphi'_r \psi'_v = -r, \quad a_0 = r^2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 0 \text{ a tedy dle (3)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-r\frac{d^2r}{dv^2} + r^2 + 2\left(\frac{dr}{dv}\right)^2}{\left(-r\sin v + \cos v\frac{dr}{dv}\right)^3}.$$

Poloměr zakřivení, jenž jest dán v souřadnicích pravoúhlých x, y výrazem

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

změní se, zavedeme-li souřadnice polární r, v dle těchto rovnic, ve výraz

$$R = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{dv}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-r\frac{d^2r}{dv^2} + r^2 + 2\left(\frac{dr}{dv}\right)^2}.$$

Výsledek tento ovšem lze snáze ještě odvoditi pomocí výsledku příkl. 1. odst. 226. (při užití toho výsledku jest třeba pokládati r za funkci proměnné v).

Poznámka. Pomocí označení differenciálního by výpočet derivací $y', y'', \ldots$ pomocí derivací $\frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2}, \ldots$ se prováděl takto. Nejprve jest, pokládáme-li v následujícím differencování za neodvisle proměnnou ξ, nikoliv x (y', y'', . . . však stále značí derivace funkce y dle x)

$$\begin{aligned} dy &= y'\,dx, \quad d^2y = y''dx^2 + y'd^2x, \\ d^3y &= y'''dx^3 + 3\,y''dx\,d^2x + y'd^3x, \ldots \end{aligned} \tag{α}$$

Avšak zároveň jest — značí-li $\eta', \eta'', \eta''', \ldots$ derivace funkce η dle neodvisle proměnné ξ a tedy $d\eta = \eta' d\xi$, $d^2\eta = \eta'' d\xi^2, \ldots$ —

$$\begin{aligned} dx &= (\varphi'_\xi + \varphi'_\eta \cdot \eta')\,d\xi, \quad dy = (\psi'_\xi + \psi'_\eta \cdot \eta')\,d\xi, \\ d^2x &= (\varphi''_{\xi^2} + 2\,\varphi''_{\xi\eta}\,\eta' + \varphi''_{\eta^2}\,\eta'^2 + \varphi'_\eta\,\eta'')\,d\xi^2, \\ d^2y &= (\psi''_{\xi^2} + \ldots + \psi'_\eta\,\eta'')\,d\xi^2, \quad d^3x = \ldots \end{aligned}$$

Výrazy tyto stačí dosadit do rovnic (α), abychom si získali ihned žádané relace. Dosadíme-li ku př. do druhé z rovnic (α), máme ihned

$$y'' = \frac{\psi''_{\xi^2} + 2\,\psi''_{\xi\eta}\,\eta' + \psi''_{\eta^2}\,\eta'^2 + \psi'_\eta\,\eta''}{(\varphi'_\xi + \varphi'_\eta\,\eta')^2} - y'\,\frac{\varphi''_{\xi^2} + 2\,\varphi'_{\xi\eta}\,\eta' + \varphi''_{\eta^2}\,\eta'^2 + \varphi'_\eta\,\eta''}{(\varphi'_\xi + \varphi'_\eta\,\eta')^2},$$

ve kteréžto rovnici by postačilo dosaditi dle (2) a upraviti, abychom dospěli ku (3).

238. IV. Úkol. Jest dána funkce z dvou neodvisle proměnných x, y, jakož i její derivace $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots$ **Zaveďme místo neodvisle**

proměnných x, y a zároveň místo odvisle proměnné z nové proměnné ξ, η, ζ rovnicemi

$$x=\varphi(\xi, \eta, \zeta), \quad y=\psi(\xi, \eta, \zeta), \quad z=\chi(\xi, \eta, \zeta) \tag{1}$$

při čemž o funkcích φ, ψ, χ chceme předpokládati, že mají spojité derivace všech řádů dle ξ, η, ζ a že jsou zároveň takové, že můžeme v důsledku vztahu mezi z a proměnnými x, y jednu z proměnných ξ, η, ζ — budiž to ζ — pokládati za funkci druhých dvou (t. j. proměnných ξ, η). Jest odvoditi vztahy mezi derivacemi funkce z dle starých neodvisle proměnných x, y a derivacemi funkce ζ dle proměnných ξ, η.

Budiž Z libovolná funkce proměnných x, y, z po případě i derivací z dle x, y, mající ovšem derivace spojité všech řádů; jelikož však pokládáme z a tedy i jeho derivace za funkce x, y, můžeme Z pokládati za funkci pouhých x, y. Označíme pak

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) \tag{p}$$

derivace funkce té dle x resp. dle y, při čemž z, jakož i derivace z dle x a y pokládáme za funkce neodvislých proměnných x, y. Je-li tedy ku př. $Z=F(x, y, z)$, jest

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}.$$

V důsledku rovnic (1) a okolnosti, že můžeme pokládati a také pokládáme ζ (jakož i jeho derivace) za funkce proměnných ξ, η, jest Z rovněž funkcí proměnných ξ, η a výrazy

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right), \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)$$

mají obdobný význam jako výrazy (p). Derivujme rovnici identickou $Z=Z$ dle ξ, při čemž na levé straně Z pokládáme za funkci x, y (svrchu vysloveným způsobem), na pravé straně pak za funkci proměnných ξ, η. Máme pak ihned

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)=\left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right)$$

a podobně

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)=\left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right),$$

odkudž

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)=\frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)-\left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)-\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)}, \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=\frac{-\left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)+\left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)-\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)}. \tag{I}$$

rovnice tyto, dosazujeme-li do nich postupně za Z výrazy z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ... řeší úplně předložený problém. Dosaďme do nich ku př. za Z výraz $z = \chi(\xi, \eta, \zeta)$.

K vůli stručnosti budeme tu a v následujícím značiti

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t;$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = p', \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = q', \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} = r', \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = s', \ldots$$

I jest dle (I)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} p', \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} q', \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) = \ldots$$

Dosadíme-li do (I) $z = \chi$ a provedeme-li na pravé straně, jak v posledních rovnicích naznačeno, derivování dle ξ, resp. dle η, dostáváme ihned

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = p = \frac{1}{J}\left[\frac{D(\chi, \psi)}{D(\xi, \eta)} + \frac{D(\chi, \psi)}{D(\zeta, \eta)} p' + \frac{D(\chi, \psi)}{D(\xi, \zeta)} q'\right], \\ \frac{\partial z}{\partial y} = q = \frac{1}{J}\left[\frac{D(\varphi, \chi)}{D(\xi, \eta)} + \frac{D(\varphi, \chi)}{D(\zeta, \eta)} p' + \frac{D(\varphi, \chi)}{D(\xi, \zeta)} q'\right], \end{aligned} \tag{2}$$

kde

$$J = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \eta)} + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\zeta, \eta)} p' + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \zeta)} q',$$

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \eta)} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \ldots$$

Kdybychom nyní do (I) dosadili za $Z = p$, při čemž na pravé straně bychom dosazovali výraz příslušný v ξ, η, ζ, p', q', veličině p dle (2) rovný, dostali bychom r, s vyjádřeno pomocí r', s', t', p', q' a proměnných ξ, η, ζ. Výsledek příslušný jest však tak složitý, že v následujícím jej ani neuvádím. Provedu pouze výpočet ten na příkladě.

239. *Příklad* 1. Zaveďme místo proměnných x, y, z proměnné ξ, η, ζ rovnicemi

$$x = \zeta, \quad y = \eta, \quad z = \xi.$$

Máme tudíž v podstatě za úkol provésti *záměnu odvisle proměnné s jednou neodvisle proměnnou.* V původních proměnných jest odvisle proměnná z a x, y jsou neodvisle proměnné; nyní však máme zavésti za odvisle proměnnou x a neodvisle prom. budou y, z. Při tom k vůli jasnosti užíváme nových označení pro proměnné.

Tu jest

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)=p', \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)=q', \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)=0, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)=1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)=1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0.$$

Dosadíme-li tedy do (I) $Z=z$, máme ihned

$$p=\frac{1}{p'}, \quad q=-\frac{q'}{p'}.$$

Klademe-li do (I) dále $Z=p=\frac{1}{p'}$, dostáváme

$$r=-\frac{r'}{p'^3}, \quad s=\frac{r'q'-s'p'}{p'^3}$$

a při $Z=q=-q':p'$ jest

$$s=\frac{r'q'-s'p'}{p'^3}, \quad t=\frac{-r'q'^2+2s'p'q'-t'p'^2}{p'^3}.$$

240. Jiná methoda ku řešení IV. úkolu. Při výkladu tohoto pozměněného postupu užijeme k vůli zjednodušení označení differenciálního. Jest nejprve pro differenciál dz tento vztah

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{3}$$

aneb dosadíme-li dle rovnic

$$dx=\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}d\zeta, \ldots, \quad dz=\frac{\partial \chi}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial \chi}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial \chi}{\partial \xi}d\zeta \tag{4}$$

a náležitě upravíme

$$d\zeta\cdot\left(\frac{\partial \chi}{\partial \zeta}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right)=d\xi\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial \xi}-\frac{\partial \chi}{\partial \xi}\right)+$$
$$+d\eta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}-\frac{\partial \chi}{\partial \eta}\right),$$

kterýžto vztah musí býti splněn identicky (t. j. pro každé $d\xi$, $d\eta$) zároveň se vztahem

$$d\zeta=\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}d\eta; \tag{3'}$$

t. j. jest nutně $\left(\text{zavedeme-li stejně jako svrchu označení } \frac{\partial z}{\partial x}=p,\right.$
$\left.\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}=p' \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}=\varphi'_\xi, \ldots\right)$

$$p'=-\frac{p\varphi'_\xi+q\psi'_\xi-\chi'_\xi}{p\varphi'_\zeta+q\psi'_\zeta-\chi'_\zeta}, \quad q'=-\frac{p\varphi'_\eta+q\psi'_\eta-\chi'_\eta}{p\varphi'_\zeta+q\psi'_\zeta-\chi'_\zeta}. \tag{2'}$$

Tak vedeni jsme byli ku vyjádření prvých derivací částečných v nových proměnných pomocí derivací v starých proměnných, rovnice (2) svrchu získané nám naopak dávají vyjádření derivací v starých proměnných pomocí derivací v nových proměnných a jsou v souhlasu s rovnicemi (2').

Tento postup lze rozšířiti na derivace vyšších řádů. Tak nejprve jest identicky (t. j. při každém přírůstku neodvisle proměnných), pokládáme-li za neodvisle proměnné ξ, η (viz pozn. 2., odst. 201.),

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x + q\,d^2y\,; \tag{5}$$

avšak zároveň v důsledku (1)

$$d^2z = \frac{\partial^2\chi}{\partial\xi^2}d\xi^2 + 2\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi\,\partial\eta}d\xi\,d\eta + \frac{\partial^2\chi}{\partial\eta^2}d\eta^2 + 2\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi\,\partial\zeta}d\xi\,d\zeta + 2\frac{\partial^2\chi}{\partial\eta\,\partial\zeta}d\eta\,d\zeta + \\ + \frac{\partial^2\chi}{\partial\zeta^2}d\zeta^2 + \frac{\partial\chi}{\partial\zeta}d^2\zeta \tag{6}$$

a

$$d^2x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}d\xi^2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}d^2\zeta,\quad d^2y = \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}d\xi^2 + \ldots \tag{6'}$$

Dosadíme-li do (5) za d^2z, d^2x, d^2y, dx, dy (dle (6), (6'), (4)) a za $d\zeta$, p', q' dle (3') a (2'), dostaneme po jednoduché úpravě rovnici tvaru

$$\varepsilon\,.\,d^2\zeta = A\,d\xi^2 + 2B\,d\xi\,d\eta + C\,d\eta^2,$$

z níž vyplývá (viz odst. 201., aneb 201. *a*)

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2} = \frac{A}{\varepsilon},\quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\,\partial\eta} = \frac{B}{\varepsilon},\quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2} = \frac{C}{\varepsilon}$$

a kde A, B, C, ε jsou mnohočleny v derivacích částečných funkcí φ, ψ, χ (až do druhého řádu) a derivací p, q, r, s, t (na posledních třech závisí toliko A, B, C a to lineárně). Pro ε ku př. lze psáti

$$\varepsilon = (p\varphi'_\zeta + q\psi'_\zeta - \chi'_\zeta)^3.$$

Příklad 2. Methodu naznačenou provedeme v případě, že proměnné x, y, z spjaty jsou s ξ, η, ζ substitucí orthogonální (viz odst. 229.). Jsou pak mezi těmito proměnnými tyto vztahy

$$\begin{array}{lcl} x = a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta & & \xi = ax + a'y + a''z \\ y = a'\xi + b'\eta + c'\zeta & \text{aneb jinak} & \eta = bx + b'y + b''z \\ z = a''\xi + b''\eta + c''\zeta & & \zeta = cx + c'y + c''z \end{array} \tag{m}$$

a současně jest identicky (t. j. buď pro každé x, y, z, aneb pro každé ξ, η, ζ)

$$x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

následkem čehož jest mezi koefficienty lineární substituce v úvahu brané 6 vztahů, jež můžeme psáti v dvojím tvaru (viz cit. příklad.)

Rovnice (2') nám dávají ihned

$$p' = -\frac{ap + a'q - a''}{cp + c'q - c''}, \quad q' = -\frac{bp + b'q - b''}{cp + c'q - c''}, \tag{n}$$

místo těchto rovnic mohli bychom psáti po vhodné záměně koefficientů (viz v (m) dvojí různý tvar dané orth. subst.)

$$p = -\frac{a\,p' + b\,q' - c}{a''p' + b''q' - c''}, \quad q = -\frac{a'\,p' + b'\,q' - c'}{a''p' + b''q' - c''}.$$

Rovnice (5) má tu snadné použití, neboť jest

$$d^2x = c\,d^2\zeta, \quad d^2y = c'd^2\zeta, \quad d^2z = c''d^2\zeta,$$

tedy

$$\begin{aligned} d^2\zeta(c'' \quad cp - c'q) = r[(a + cp')\,d\xi + (b + cq')\,d\eta]^2 + 2s[(a + cp')\,d\xi + \\ + (b + cq')\,d\eta]\,[(a' + c'p')\,d\xi + (b' + c'q')\,d\eta] + t[(a' + c'p')\,d\xi + \\ + (b' + c'q')\,d\eta]^2. \end{aligned} \tag{p}$$

Avšak dle (n)

$$a + cp' = \frac{(ac' - a'c)\,q - (ac'' - a''c)}{cp + c'q - c''} = -\varepsilon\frac{b''q + b'}{cp + c'q - c''}$$

kde $\varepsilon = \pm 1$ jest hodnota determinantu substituce (m); obdobné rovnice lze psáti pro $b + cq'$, $a' + c'p'$, $b' + c'q'$. Zavedeme-li výrazy tak získané do (p), máme

$$r' = \frac{-r(b' + b''q)^2 + 2s(b' + b''q)(b + b''p) - t(b + b''p)^2}{(cp + c'q - c'')^3},$$

$$s' = \frac{\begin{matrix} r(b' + b''q)(a' + a''q) - s[(b + b''p)(a' + a''q) + \\ + (b' + b''q)(a + a''p)] + t(b + b''p)(a + a''p) \end{matrix}}{(cp + c'q - c'')^3},$$

$$t' = \frac{-r(a' + a''q)^2 + 2s(a' + a''q)(a + a''p) - t(a + a''p)^2}{(cp + c'q - c'')^3}.$$

V těchto rovnicích bychom mohli zaměniti r', s', t' s r, s, t, kdyr bychom zároveň provedli svrchu naznačenou záměnu koefficientů (t. j. koefficienty a, a', a'', b, ... zaměnili bychom v a, b, c, a', ...); tím bychom obdrželi r, s, t vyjádřeny pomocí r', s', t', p', q'.

V případě zvláštním, že $c = 0$, $c' = 0$, jest v důsledku (u_1) odst. 229. nutně $c'' = \pm 1$ a také v důsledku (u) $a'' = 0$, $b'' = 0$. Volme $c'' = 1$ orthogonální substituce daná změní se (jak snadno, používáme-li rovnic citovaných, vyplývá) ve tvar

$$x = a\xi + b\eta, \quad \varepsilon y = -b\xi + a\eta, \quad z = \zeta, \text{ kde } a^2 + b^2 = 1 \text{ a } \varepsilon = \pm 1. \tag{r}$$

V tomto specielním případě jest dle obecných rovnic, jestliže $\varepsilon = +1$,

$$p' = ap - bq, \quad q' = bp + aq,$$
$$r' = a^2 r - 2abs + b^2 t, \quad s' = abr + (a^2 - b^2)s - abt,$$
$$t' = b^2 r + 2abs + a^2 t.$$

Obdobné rovnice plynou i při $\varepsilon = -1$: výrazy pro p', q', r'... dostaneme tu z výrazů právě napsaných, změníme-li znaménko u druhých členů v protivné; tedy ku př. $p' = ap + bq$ a t d.

241. Na základě výsledku příkladu v odstavci předcházejícím odvoditi můžeme t. zv. differenciální invarianty vzhledem k substituci orthogonální (m) jakož stručně naznačíme. Budeme pod tímto pojmenováním vyrozumívati funkce derivací p, q, r, s, t,.., jež hoví rovnici

$$\Phi(p', q', r', s', t', \ldots) = k \,.\, \Phi(p, q, r, s, t, \ldots); \; k \text{ jest konst.}$$

při každé orthogonální substituci. Omezíme se však toliko na takové funkce Φ, jež závisí na derivacích prvého a druhého řádu. Mohli bychom při vyhledávání těchto funkcí vycházeti od obecných formulí získaných v odstavci předch., počet příslušný by byl však složitý. Úkol svůj si podstatně zjednodušíme, uvědomíme-li si, že každá orthogonální substituce dá se složiti ze substitucí tvaru (r) o $\varepsilon = 1$ a ze substituce

$$x = \zeta, \quad y = \eta, \quad z = \xi \tag{α}$$

vyšetřované v příkladě 1. (odst. 239.), kteréžto obě substituce jsou zase specielními případy substituce orthogonální. Najdeme tudíž všecky hledané invarianty, najdeme-li všecky invarianty vzhledem k těmto dvěma speciálním substitucím.

Zabývejme se nejprve substitucí (r). Tu jest po snadném počtu (z části bezprostředně) patrno, že, jsou-li mezi x, y, z a ξ, η, ζ relace (r), jest

$$x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad px + qy = p'\xi + q'\eta,$$
$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = r'\xi^2 + 2s'\xi\eta + t'\eta^2,$$

odkud jest jasno, že najdeme všecky differenciální invarianty vzhledem ku substituci (r) a obsahující nejvýše druhé derivace, najdeme-li všecky invarianty tří *algebraických* forem

$$x^2 + y^2, \quad px + qy, \quad rx^2 + 2sxy + ty^2$$

vzhledem ku libovolné lineární substituci (při čemž x, y jsou proměnné; p, q, r, s, t pak koefficienty forem). Invarianty tyto jsou

$$I_0 = 1, \quad I_2 = rt - s^2, \quad I_1 = r + t \qquad \text{(váha 2)}$$

(první dva jsou diskriminanty první a třetí formy, druhý jest invariant z koefficientů 1. a 3. formy tvořený dle formule $A_0 B_2 + A_2 B_0 - 2 A_1 B_1$).

Dále jsou invarianty obě resultanty lineárné a obou kvadratických forem, t. j. výrazy

$$J_0 = p^2 + q^2, \quad J_1 = rq^2 - 2spq + tp^2 \qquad \text{(váha 2)}.$$

Vedle invariantů vytčených jest již jen jediný, totiž

$$K = (r-t)pq - s(p^2 - q^2).$$

Všecky invarianty hledané jsou nutně racionálné funkce invariantů $I_0, I_1, I_2, J_0, J_1, K$. Vyšetřme, jak se invarianty tyto mění substitucí (α). Označíme li hodnotu invariantů $I_0, I_1, \ldots, K$ po provedení substituce té $\overline{I}_0, \overline{I}_1, \ldots \overline{K}$; máme, používajíce formulí příkladu 1., po krátkém počtu

$$\overline{I}_0 = I_0, \quad \overline{I}_1 = \frac{-J_1 - r}{p^3}, \quad \overline{I}_2 = \frac{I_2}{p^4}$$

$$\overline{J}_0 = \frac{J_0 + I_0}{p^2} - I_0, \quad \overline{J}_1 = \frac{-t}{p^3}$$

$$\overline{K} = \frac{s(1+q^2) - tpq}{p^4}.$$

Z těchto rovnic vyplývá ihned

$$\overline{I}_0 + \overline{J}_0 = \frac{I_0 + J_0}{p^2}, \quad \overline{I}_1 + \overline{J}_1 = -\frac{I_1 + J_1}{p^3}, \quad \overline{I}_2 = \frac{I_2}{p^4}$$

a jsou tedy

$$\frac{I_2}{(I_0 + J_0)^2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

$$\frac{I_1 + J_1}{(I_0 + J_0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r(q^2+1) - 2spq + t(p^2+1)}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

invarianty differenciální vzhledem k orthogonální transformaci. Všecky invarianty, v nichž vyskytují se derivace nejvýše druhého řádu, dají se pomocí těchto dvou racionálně vyjádřit. Při tom jest konstanta k, kterou se prvý invariant násobí (viz horní rovnici pro definici invariantu), rovna 1. Invariant druhý násobí se, provedeme-li postupně obě transformace (r), (α), buď -1 (je-li p' kladné) aneb $+1$ (je-li p' záporné).

XII. O maximech a minimech funkcí o několika proměnných.

242. Definice absolutních maxim (resp. minim), jakož i relativních maxim (resp. minim), podané v odst. 170., 171. pro funkce o jedné proměnné, rozšiřují se bez jakékoliv potíže i pro funkce o několika proměnných.