dem zhuštění množství E — oscillace funkce na E větší ($\geqq$) než ε. (Což se mělo dokázati.)

Jestliže však body B_k jsou totožny s konečným počtem bodů, označíme jeden z těch bodů, které se v řadě $B_1, B_2, \ldots$ vyskytují nekonečněkráte, opět znakem b a můžeme o něm stejná tvrzení učiniti jako v předcházejícím případě.

Z věty právě dokázané plyne jako snadný důsledek věta: *Jestliže jest funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dána na množství E ohraničeném a uzavřeném a jest funkcí na E spojitou, pak lze ke každému kladnému číslu ε udati kladné číslo η tak, že oscillace funkce f na E ve všech možných $O(\overline{B}, \eta)$ jest menší než ε_2.* Věta tato jest očividně zobecněním věty 2. odst. 191., čímž tato věta základní pro nauku o funkcích spojitých poznovu dokázána.

Poznámka. Jelikož množství E v obou posledních větách jest množství ohraničené, spadá toto množství do jistého oboru pravoúhelníkového n- rozměrného. Při bodu B můžeme se tudíž omeziti také jenom na ten obor pravoúhelníkový se zřetelem ku významu oscillace funkce f na E v $O(\overline{B}, \varepsilon)$.

IX. Derivace a differenciály funkcí o několika proměnných.

192. Derivace parcielní funkcí o dvou proměnných. Budiž dána funkce $u = f(x, y)$ jakožto spojitá funkce proměnných x, y v jistém oboru. Přisuďme proměnné y pevnou hodnotu y_0, takže x zůstane jedinou proměnnou. Tím stane se u funkcí spojitou jedné proměnné x, $u = f(x, y_0)$; má li pak ta funkce jedné proměnné x derivaci dle x, v bodě $x = x_0$, sluje tato derivace **částečná (parcielní) derivace** *funkce $u = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ dle proměnné x* a značí se tato derivace značkou $f_x'(x_0, y_0)$. Jest tedy

$$f_x'(x_0, y_0) = \lim_{h=0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{I}$$

Obdobně jest částečná derivace funkce u v bodě $[x_0, y_0]$ dle proměnné y dána vztahem (za předpokladu, že příslušná limita existuje)

$$f_y'(x_0, y_0) = \lim_{k=0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}. \tag{I'}$$

V těchto výrazech mlčky se předpokládá, že $[x_0, y_0]$, $[x_0 + h, y_0]$ resp. $[x_0, y_0 + k]$ jsou body daného oboru.

Existují-li limity v (I) a v (I'), když $[x_0, y_0]$ jest v určitém oboru, představují nám v tom oboru obě parcielní derivace jisté funkce bodu

$[x, y]$, jež značíme $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$. Jiná označení jsou dána symboly

$$f'_x(x, y) = D_x f(x, y),\quad D_x u,\quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$f'_y(x, y) = D_y f(x, y),\quad D_y u,\quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Pomocí těchto symbolů bychom mohli vyznačiti limitu (I) obšírně takto (uvádím vyznačení pouze při posledním symbolu)

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \quad \text{anebo stručněji} \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{(x_0, y_0)}.$$

Poznámka. Neexistuje-li limita v (I), říkáme, že funkce $f(x, y)$ nemá derivace částečné dle x v $[x_0, y_0]$. Existuje-li limita v (I) v širším smyslu, říkáme, že $f(x, y)$ má v $[x_0, y_0]$ derivaci částečnou dle x v širším smyslu. V následujících vývodech, pokud není nic zvláště vytčeno, máme však na zřeteli derivace v užším smyslu. Obdobné poznámky jest učiniti i při (I').

193. Differenciály parcielní (částečné) Násobíme-li derivaci částečnou funkce u v bodě $[x_0, y_0]$ dle x přírůstkem proměnné x, dostaneme **differenciál částečný (parcielní)** *funkce u v bodě $[x_0, y_0]$ dle x*; jest tedy tento differenciál dán výrazem

$$f'_x(x_0, y_0)\,h \text{ aneb } f'_x(x_0, y_0)\Delta x_0$$

dle toho, jak značíme přírůstek proměnné x (v prvém výrazu jest přírůstek označen písmenem h, v druhém značkou Δx_0). Obdobně jest částečný differenciál funkce u v bodě $[x_0, y_0]$ dle y dán jedním z výrazů

$$f'_y(x_0, y_0)\,k,\quad f'_y(x_0, y_0)\Delta y_0$$

(k, Δy_0 jsou přírůstky proměnné y).

Funkce dvou proměnných $u = f(x, y)$ má vždy v bodě $[x_0\ y_0]$ částečný differenciál dle x, resp. dle y, má-li v tom bodě částečnou derivaci dle x, resp. dle y (jakož následuje z definice differenciálu částečného).

194. Differenciál totální *funkce o dvou proměnných.* Buďiž dána v bodě $[x_0, y_0]$ a v jistém okolí toho bodu $O\,(x_0, y_0;\ r)$ funkce $u = f(x, y)$. Buďiž dále $[x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y]$ libovolný bod toho okolí. Budeme nazývati rozdíl $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ *přírůstkem funkce u z bodu $[x_0, y_0]$ pro přírůstky Δx, Δy neodvisle proměnných* a značiti jej budeme značkou Δu, t. j. budeme psáti

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \tag{1}$$

Lze-li dáti při libovolně zvolených přírůstcích proměnných Δx, Δy tomuto přírůstku vždy tvar

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + \tau(|\Delta x| + |\Delta y|), \tag{2}$$

kde A, B nezávisí na Δx, Δy a kde τ závisí sice na Δx, Δy, avšak tak, že

$$\lim \tau = 0 \text{ pro } \lim \Delta x = 0,\ \lim \Delta y = 0,$$

říkáme, že funkce $u = f(x, y)$ **má totální differenciál** *v bodě $[x_0, y_0]$; aneb také, že funkce $u = f(x, y)$* jest v bodě $[x_0, y_0]$ **differencovatelna**. *Totálním differenciálem pak jest výraz $A\Delta x + B\Delta y$.*

Klademe-li v (2) $\Delta y = 0$ a dělíme-li zároveň celou rovnici Δx, máme (užívajíce vztahu (1) a píšíce místo τ, ve kterém jsme dosadili $\Delta y = 0$, buď $+\tau'$ aneb $-\tau'$ dle toho, je-li Δx kladné či záporné)

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \tau';$$

přejdeme-li pak k limitě pro $\lim \Delta x = 0$, jest ihned (limita pravé a tedy i levé strany existuje)

$$A = f'_x(x_0, y_0) \text{ a stejně } B = f'_y(x_0, y_0),$$

odkudž jest nejprve patrno, že, *kdykoliv funkce $f(x, y)$ má v bodě $[x_0, y_0]$ differenciál (totální), má funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ derivace parciální dle x, y*; dále pak následuje, že totální differenciál funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ jest rovný součtu částečných differenciálů v bodě $[x_0, y_0]$.

Aby nebylo třeba zaváděti složitá a málo obvyklá označení, budu vynechávati index 0 při x_0, y_0 a budu uvažovati přírůstek funkce z bodu $[x, y]$, jakož i příslušný totální differenciál. Přírůstek funkce u značiti budu i dále symbolem Δu, pro totální differenciál funkce $u = f(x, y)$ v bodě $[x, y]$ pak užívati znaku du aneb $df(x, y)$. Má-li tedy $u = f(x, y)$ v bodě $[x, y]$ totální differenciál, jsou mezi zavedenými symboly tyto vztahy

$$du = A\Delta x + B\Delta y \text{ aneb též } du = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \tag{II}$$

Místo Δx, Δy lze užívati (obdobně jako při jedné proměnné) i jiných značek; ku př. h, k aneb, což jest nejčastější, dx, dy; význam posledních značek jest na snadě, jsou to differenciály totální funkcí rovných x resp. y. Dosadíme-li pak ku př. do druhé rovnice (II) $u = x$, máme ihned $dx = \Delta x$, odkudž následuje oprávněnost zavedeného označení. Následkem toho slují často dx, dy *differenciály neodvisle proměnných.*

Rovnici druhé ve (II) lze tedy dáti při zavedeném označení tvary

$$du = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy \text{ aneb } du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{II'}$$

nejčastěji užívané a mající (jak později seznáme) význam i tenkráte, když x, y nejsou neodvisle proměnné, nýbrž funkce jedné anebo více neodvisle proměnných.

Vztahu (2) konečně lze dáti tvar

$$\Delta u = du + \varepsilon(|\Delta x| + |\Delta y|). \tag{2'}$$

Ze vztahu (2) následuje bezprostředně věta (neboť v jeho důsledku jest $\lim \Delta u = 0$, je-li zároveň $\lim \Delta x = 0$ a $\lim \Delta y = 0$): *Má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ differenciál (totální), jest v tom bodě spojitou funkcí proměnných $[x, y]$.*

195. *Podmínky postačující, aby funkce měla (totální) differenciál.* Shledali jsme v odst. předcházejícím, že funkce mající differenciál totální má i částečné derivace dle jednotlivých proměnných. Avšak naopak funkce mající částečné derivace dle jednotlivých proměnných v bodě $[x_0, y_0]$ nemusí míti v tomto bodě totální differenciál. Tak ku př. funkce definovaná vztahy

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0], \quad f(0, 0) = 0$$

má v bodě $[0, 0]$ derivace částečné dle x, y. Obě jsou rovny nulle. Totální differenciál však míti nemůže, neboť pak by to byla funkce v bodě $[0, 0]$ spojitá (viz závěrečnou větu předch. odst.). Avšak klademe-li $x = t$, $y = \alpha t$, a necháváme-li t konvergovati k nulle, dostaneme

$$\lim_{t=0} f(t, \alpha t) = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}, \quad \text{což jest různo od nully, když } \alpha \neq 0,$$

odkudž jest patrno, že funkce daná není v $[0, 0]$ spojitou funkcí obou proměnných. A nemá tedy také v $[0, 0]$ totální differenciál.

Jest však snadno udati podmínky postačující ku existenci totálního differenciálu při obecné funkci $f(x, y)$. Nejprve jest (identicky)

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] + \\ &+ [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)]. \end{aligned}$$

Zavedeme-li pro krátkost označení $\Delta_x \varphi(x, y) = \varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)$, $\Delta_y \varphi(x, y) = \varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)$, můžeme pravou stranu poslední rovnice psáti ve tvaru $\Delta_x f(x, y) + \Delta_y f(x, y) + \Delta_x \Delta_y f(x, y)$. Z předcházejícího odstavce nám jest známo, že, má-li $f(x, y)$ totální differenciál, má jistě i derivace částečné dle x a dle y. Avšak dle definice derivace funkce o jedné proměnné jest

$$\Delta_x f(x, y) = f'_x(x, y)\Delta x + \varepsilon'\Delta x, \quad \Delta_y f(x, y) = f'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon''\Delta y,$$

kde ε', ε'' jsou veličiny konvergující k nulle, když Δx, Δy konvergují k nulle. Tedy jest

$$\Delta u = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + (\varepsilon'\Delta x + \varepsilon''\Delta y) + \Delta_x\Delta_y f(x, y),$$

na základě kteréžto rovnice můžeme vysloviti větu: *Nutná a postačující podmínka, aby funkce $f(x, y)$, mající v bodě $[x, y]$ derivace částečné dle x, y, měla v tom bodě totální differenciál, jest, aby výraz $\Delta_x\Delta_y f(x, y)$, dělený součtem $|\Delta x| + |\Delta y|$, měl za limitu nullu, když* $\lim \Delta x = 0$ *a* $\lim \Delta y = 0$, *anebo (což jest totéž), když* $\lim(|\Delta x| + |\Delta y|) = 0$.

Pro výraz $\Delta_x\Delta_y f(x, y)$ máme dále dle věty o střední hodnotě ku př.

$$\Delta_x\Delta_y f(x, y) = [f'_y(x + \Delta x, y + \Theta_1 \Delta y) - f'_y(x, y + \Theta_1\Delta y)]\Delta y,$$

ze kteréžto rovnice jest patrno, že limita podílu ve větě uvedená jest rovna nulle, existuje-li derivace částečná funkce $f(x, y)$ dle y v bodě $[x, y]$ a jeho okolí a je-li derivace ta v bodě $[x, y]$ funkcí spojitou. Obdobný výrok lze činiti i vzhledem ku derivaci částečné dle x. Tak lze tvrditi: *Funkce $f(x, y)$ má totální differenciál v bodě $[x, y]$, má-li částečné derivace v $[x, y]$ dle obou proměnných a vedle toho částečnou derivaci buď dle x aneb dle y v okolí bodu $[x, y]$, jež jest spojitá v $[x, y]$.**)

Má-li tedy funkce $f(x, y)$ v jistém oboru Ω derivace částečné dle x, y, jež jsou spojitými funkcemi v tom oboru, má tato funkce v každém bodě vnitřním oboru Ω totální differenciál.

Jak by bylo lze definovati totální differenciál pro hraniční body oboru Ω a v důsledku toho upraviti věty dokázané, jest na snadě a neposkytne čtenáři obtíží.

Podmínky uvedené jsou zároveň postačujícími podmínkami, aby mezi přírůstkem funkce a příslušným differenciálem byla platna jedna z relací

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varrho\Delta x + \sigma\Delta y \qquad \text{(III)}$$

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \tau(|\Delta x| + |\Delta y|) \qquad \text{(III')}$$

*) Čtenář dokáže tuto větu snadno přímo, užívá-li pro přírůstek funkce rovnice identické:

$$\Delta u = [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] + [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)]$$

jakož i na každou závorku hranatou věty o střední hodnotě.

kde ϱ, σ, τ jsou funkce, jichž limity jsou rovny nulle, když zároveň $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$. Obě ty relace v podstatě se neliší. Neboť lze psáti

$$\varrho \Delta x + \sigma \Delta y = \left[\frac{\varrho \Delta x}{|\Delta x| + |\Delta y|} + \frac{\sigma \Delta y}{|\Delta x| + |\Delta y|}\right](|\Delta x| + |\Delta y|),$$

což jest tvaru $\tau(|\Delta x| + |\Delta y|)$.

Poznámka. V odstavci tomto činěn byl mlčky předpoklad (zavedený již v odst. předch.), že funkce $f(x, y)$ jest definována v bodě $[x, y]$ a v jistém okolí toho bodu, ve kterémžto okolí pak nachází se stále bod $[x + \Delta x, y + \Delta y]$.

Dále lze vytknouti, že rovnice identické tu uváděné dovolují nám snadno rozšířiti větu o spojitosti funkce $u = f(x, y)$ vyslovenou ke konci předcházejícího odst. Z identity pro Δu vypsané v poznámce pod čárou a věty o střední hodnotě plyne totiž nejprve, existují-li derivace částečné dané funkce v okolí bodu $[x, y]$,

$$\Delta u = f'_x(x + \Theta \Delta x, y)\Delta x + f'_y(x + \Delta x, y + \Theta_1 \Delta y)\Delta y.$$

Na základě této rovnice můžeme vysloviti větu: *Existují-li ve spojitém oboru (dvojrozměrném), ve kterémž jest definována funkce $f(x, y)$, částečné derivace té funkce a jsou-li ty derivace konečné funkce bodu $[x, y]$ v tom oboru tak, že jest pro všecky body toho oboru $|f'_x(x, y)| < A$, $|f'_y(x, y)| < B$, pak jest funkce $f(x, y)$ v oboru tom funkcí spojitou bodu $[x, y]$.*

Neboť potom pro přírůstek Δu lze psáti vztah

$$|\Delta u| < A\,|\Delta x| + B\,|\Delta y|,$$

odkudž tvrzení to ihned následuje.

196. Derivace a differenciály funkcí složených. Budiž v tomto a násl. odst. $f(x, y)$ funkcí mající v oboru přicházejícím v úvahu differenciál (totální). Pak jest platna rovnice (III), jíž použijeme nejprve na odvození věty týkající se funkcí jedné proměnné a podávající nám zevšeobecnění pravidla o derivování funkce ~~funkce~~. Rovnice (III) totiž byla odvozena, když x, y jsou neodvisle proměnné, a tím spíše zůstává nezměněně v platnosti, jsou-li x, y funkce jedné proměnné t; pak ovšem jest $u = f(x, y)$ rovněž funkcí té jedné proměnné a můžeme psáti, dělíce celou rovnici Δt (t. j. přírůstkem veličiny proměnné t, jemuž odpovídají při x, y právě přírůstky Δx, Δy; místo $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ zavedeno k vůli větší jasnosti $f_x'(x, y)$, $f_y'(x, y)$),

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = f_x'(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y'(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\varrho\frac{\Delta x}{\Delta t} + \sigma\frac{\Delta y}{\Delta t}\right).$$

Konverguje-li Δt k nulle a s ním též Δx, Δy, pak i ϱ, σ konvergují k nulle; existují-li tedy derivace funkcí x, y dle t, konverguje poslední závorka k nulle a z rovnice napsané vyplývá, že existuje i derivace funkce u dle t, t. j. plyne

$$\frac{du}{dt}=f_x'(x,\, y)\frac{dx}{dt}+f_y'(x,\, y)\frac{dy}{dt}, \tag{IV}$$

rovnice to dávající nám pravidlo pro derivování funkce dvou funkcí jedné neodvisle proměnné dle této proměnné.

Rovnici tuto mohli bychom psáti ve tvaru (násobíme-li dt a zavedeme-li differenciály funkcí u, x, y (funkcí to proměnné t)

$$du=f_x'(x,\, y)\, dx+f_y'(x,\, y)\, dy \tag{IIa}$$

a dostáváme tak rovnici shodnou s rovnicí (II'); vidíme tak, že (II') má význam širší než v jakém jsme ji odvodili, zůstávajíc v platnosti i když x, y nejsou neodvisle proměnné, nýbrž jsou funkce (a s nimi ovšem i u) jediné proměnné a to funkce mající derivaci. V tom spočívá právě její jedna výhoda.

Kdybychom v (IV) dosadili místo u, x, y, t po řadě w, u, v, x (abychom přišli k formulím známým v označení nám obvyklém) a použili té formule předpokládajíce, že $w=u+v$, potom $w=u.v$ a na konec $w=\frac{u}{v}$, dostali bychom z (IV) tato známá pravidla pro derivování součtu, součinu a podílu

$$d(u+v)=du+dv, \quad d(uv)=v\, du+u\, dv, \quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\, du-u\, dv}{v^2}.$$

Podobně následuje snadno vztah

$$d(u^v)=v\, u^{v-1}\, du+u^v \log u\, dv$$

a j. v. *Vztah* (IV) *pak vůbec — a jeho zobecnění pro více než* 2 *proměnné — nám dává důležitou a užitečnou pomůcku pro počítání derivací funkcí.*

Poznámka. Není snad zbytečno i při těchto zcela specielních případech znovu zdůrazniti, že rovnice poslední platny jsou jenom v těch bodech, ve kterých pravá strana těch rovnic nám vskutku dává totální differenciál příslušné funkce (vzhledem k proměnným u, v). Tak rovnice pro differenciál funkce $\frac{u}{v}$ není platna v bodech, ve kterých $v \doteq 0$. Rovněž pravidlo pro differencování funkce u^v předpokládá, že běží o body, ve kterých $u > 0$.

197. Rovnice (III) zůstane však očividně v platnosti, i když x, y jsou funkce několika neodvisle proměnných. Můžeme na základě předcházejícího provésti příslušné počty zatím jenom za předpokladu, že x, y jsou funkce dvou neodvisle proměnných ξ, η a budeme tedy psáti

$$x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta).$$

Při tom budeme předpokládati, že funkce $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ jsou funkce differencovatelné dle $[\xi, \eta]$. Pak jest ovšem i u funkcí (složenou) dvou neodvisle proměnných ξ, η a, abychom si odvodili parcielní derivace funkce u dle těchto proměnných, budeme používati právě rovn. (III). Tam dosadíme za u, x, y nejprve x, ξ, η a potom y, ξ, η, čímž obdržíme

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial \xi}\Delta\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\Delta\eta + (\varrho_1\Delta\xi + \sigma_1\Delta\eta),$$

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial \xi}\Delta\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\Delta\eta + (\varrho_2\Delta\xi + \sigma_2\Delta\eta),$$

kde ϱ_1, σ_1, ϱ_2, σ_2 jsou veličiny konvergující k nulle, když zároveň $\lim \Delta\xi = 0$, $\lim \Delta\eta = 0$. Dostaneme, dosadivše tyto výrazy pro přírůstky veličin Δx, Δy do (III),

$$\Delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\Delta\xi + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\Delta\eta + (\varrho'\Delta\xi + \sigma'\Delta\eta). \quad (\gamma)$$

Výrazy pro ϱ', σ' neuvádím, avšak čtenáři jest jistě patrno (se zřetelem ku příslušným vlastnostem veličin $\varrho, \sigma, \varrho_1, \ldots$), že ϱ', σ' konvergují k nulle zároveň s $\Delta\xi$, $\Delta\eta$. I jsou tedy dle základních vět odst. 194. koefficienty při $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ v prvních dvou členech rovnice (γ) derivacemi funkce u dle ξ, η, takže můžeme psáti vztahy

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad \text{(IV')}$$

jakožto pravidla pro počítání derivací parciálních funkce funkcí. Rovnice tyto můžeme ostatně pokládati za důsledek rovnice (IV) předch. odst.

Kdybychom v (γ) zavedli si differenciály dx, dy — differenciály to funkcí x, y proměnných ξ, η — rovnicemi

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta, \quad dy = \ldots,$$

obdrželi bychom ihned rovnici (γ) ve tvaru, ze kterého následuje pro differenciál funkce u tento výraz

$$du = f_x'(x, y)\,dx + f_y'(x, y)\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \qquad \text{(II}b\text{)}$$

což jest opět rovnice shodná úplně s (II'), kteráž zůstává nezměněně v platnosti i když x, y nejsou neodvisle proměnné, nýbrž jsou funkcemi dvou neodvisle proměnných, majícími ovšem totální differenciál.

Poznámka. Jako specielní případy rovnic odvozených lze psáti vztahy

$$d(u+v)=du+dv, \quad d(u.v)=v\,du+u\,dv, \ldots$$

platné tedy i když u, v jsou funkce dvou neodvisle proměnných mající differenciály. Viz však pozn. ku předch. odst.

198. Derivace parcielní druhého řádu. (*Druhé derivace parc.*) Derivace parcielní $f_x'(x, y)$, $f_y'(x, y)$ funkce u jsou, existují-li v jistém oboru, v tom oboru funkce proměnných x, y a mohou míti opět derivace parcielní dle x a dle y, jimž pak se říká derivace parcielní *druhého řádu* (derivacím pak $f_x'(x, y)$, $f_y'(x, y)$ der. parc. *prvního řádu*) funkce $f(x, y)$. Jsou pak celkem tyto derivace:

1. Derivace funkce $f_x'(x, y)$ dle $x = f_{xx}''(x, y)$

aneb v jiných označeních $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

2. Derivace funkce $f_x'(x, y)$ dle $y = f_{xy}''(x, y)$

aneb $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

3. Derivace funkce $f_y'(x, y)$ dle $x = f_{yx}''(x, y)$

aneb $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

4. Derivace funkce $f_y'(x, y)$ dle $y = f_{yy}''(x, y)$

aneb $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Tedy celkem 4 druhé derivace, jež však v případech funkcí nejčastěji v analysi se vyskytujících zpravidla se redukují na tři; jest platna totiž věta:

Jestliže funkce $f(x, y)$ má derivace $f_x'(x, y)$, $f_y'(x, y)$, $f_{xy}''(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ a v okolí toho bodu, jestliže dále $f_{xy}''(x, y)$ jest funkcí spojitou v onom bodě proměnných x, y, pak existuje i $f_{yx}''(x_0, y_0)$ a jest

$$f_{xy}''(x_0\ y_0) = f_{yx}''(x_0\ y_0).$$

Dle definice derivace dostaneme totiž $f_{yx}''(x_0, y_0)$, provedeme-li postupně dvě limitní operace naznačené výrazem

$$\lim_{h=0}\left\{\lim_{k=0}\frac{[f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)]-[f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)]}{hk}\right\} \quad (p)$$

a jest tudíž v prvé řadě vyšetřiti, zda limita výrazem tímto vytčená vskutku existuje. Avšak dle věty o střední hodnotě dvakráte po sobě užité jest

$$[f(x_0+h,\ y_0+k) - f(x_0+h,\ y_0)] - [f(x_0,\ y_0+k) - f(x_0,\ y_0)] =$$
$$[f(x_0+h,\ y_0+k) - f(x_0,\ y_0+k)] - [f(x_0+h,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)] =$$
$$h[f_x'(x_0+\Theta h,\ y_0+k) - f_x'(x_0+\Theta h,\ y_0)] = hkf_{xy}''(x_0+\Theta h,\ y_0+\Theta_1 k)$$
$$0<\Theta<1,\quad 0<\Theta_1<1.$$

Jest tedy výraz v (p) rovný (dosadíme nejdříve právě odvozený výraz a potom užijeme předpokladu o spojitosti f_{xy}'' v $[x_0,\ y_0]$):

$$\lim_{h=0}\left\{\lim_{k=0} f_{xy}''(x_0+\Theta h,\ y_0+\Theta_1 k)\right\} = f_{xy}''(x_0,\ y_0). \tag{q}$$

Dokázali jsme tím, že limita v (p), která existuje li, jest $f_{yx}''(x_0,\ y_0)$, existuje a že jest rovna $f_{xy}''(x_0,\ y_0)$, čímž věta dokázána.

Jsou-li tedy předpoklady učiněné ve větě o f_x', f_y', f_{xy}'' splněny ve všech bodech jistého oboru Ω, vyplývá z toho, že v Ω existuje i f_{yx}'' a že jest stále rovna derivaci f_{xy}''. Budeme v následujícím vždy předpokládati mlčky i existenci i spojitost derivací přicházejících právě v úvahu, pokud jiné předpoklady nejsou výslovně uvedeny; pak ovšem z dokázaného následuje, že operace derivační D_x, D_y jsou záměnné, t. j. že jest

$$D_x(D_y U) = D_y(D_x U)$$

o obdobně i při jiných proměnných.

Příklad. Uvažujme funkci danou rovnicemi

$$f(x,\ y) = x^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} \quad \text{pro } x \neq 0,\ y \neq 0,$$
$$f(0,\ y) = f(x,\ 0) = 0.$$

Jest to funkce spojitá. Utvořme f_{xy}'' v bodě $[x,\ y]$, je-li $[x,\ y]$ různo od $[0,\ 0]$. Jest

$$f_{xy}''(x,\ y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad x \neq 0,\ y \neq 0. \tag{m}$$

Jestliže $x=0$, jest nejprve pro $y \neq 0$

$$f_x'(0,\ y) = \lim_{h=0}\left[h \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{h} - y^2 \cdot \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{y}\right] = -y$$

a tedy $f_{xy}''(0,\ y) = -1$, což jest výraz, který vyplývá z (m), dosadíme-li tam $x=0$. Výsledek odvozený pro $f_x'(0,\ y)$ jest platný i pro $y=0$ (neboť $f(h,\ 0)=0$, $f(0,\ 0)=0$ a tedy $f_x'(0,\ 0)=0$) a jes tedy i $f_{xy}''(0,\ 0) = -1$. Podobně následuje z rovnic definujících danou funkci: $f_x'(x,\ 0)=0$ a dále (rovněž z těch rovnic)

$$f_{xy}''(x,\ 0) = \lim_{k=0} \frac{1}{k}\left(2x \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{x} - k\right) = 1, \tag{n}$$

což jest opět výsledek vyplývající z (m), dosadíme-li za $y = 0$, a kterýž není platný pro $x = 0$.*) Předpoklady ve větě učiněné jsou splněny pro všecky body různé od bodu [0, 0], jest tedy ve všech bodech různých od [0, 0] $f_{xy}''(x, y) = f_{yx}''(x, y)$. V bodě [0, 0] není splněn předpoklad o spojitosti funkce $f_{xy}''(x, y)$, jak patrno již z toho, že na ose X má tato funkce (nehledíme-li k počátku) hodnotu 1, na ose Y hodnotu -1. Abychom vypočetli $f_{yx}''(0, 0)$, stačí stanoviti limitu v (q), t. j. limitu

$$f_{yx}''(0, 0) = \lim_{h=0}\left\{\lim_{k=0}\frac{\Theta^2h^2 - \Theta_1^2k^2}{\Theta^2h^2 + \Theta_1^2k^2}\right\} = 1,$$

což jest vskutku různé od $f_{xy}''(0, 0) = -1$ přímo vypočtěného.

Poznámka 1. Příklad tu propočítaný jest příklad Schwarzův (Ges. math. Abh., II., str. 280.). Doporučuji čtenáři, aby obdobné šetření provedl s funkcemi

$$xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad y^2 \sin\frac{x}{y},$$

při čemž prvé funkci v bodě [0, 0] přisuzujeme hodnotu $= 0$; u druhé funkce pak stanovíme, že, je-li $y = 0$, jest její hodnota rovna nulle. Oba tyto příklady vyskytují se rovněž v literatuře, není však nesnadno jich počet libovolně rozmnožit. Ostatně příklad Schwarzův a prvý příklad právě uvedený jsou zvláštní případy funkce dané vztahy

$$f(x, y) = ax^2\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + by^2\varphi\left(\frac{x}{y}\right), \quad f(0, y) = f(x, 0) = 0,$$

ve které $\varphi(\xi)$ jest funkce v $(-\infty, \infty)$ konečná, jež v bodě $\xi = 0$ jest rovna nulle a má derivaci různou od nully. Ukažte, že pro funkci $f(x, y)$ jest

$$f_{xy}''(0, 0) = b\varphi'(0), \quad f_{yx}''(0, 0) = a\varphi'(0).$$

Poznámka 2. Větu o záměnnosti derivačních operací dle x a y v bodě $[x_0, y_0]$ lze poněkud rozšířiti. Místo, abychom požadovali spojitost funkce $f_{xy}''(x, y)$ dvou proměnných x, y v bodě $[x_0, y_0]$, stačí patrně požadovati:

1. spojitost funkce $f_{xy}''(x, y)$ *jedné* proměnné y v bodě y_0 a to při každém x jistého okolí bodu x_0,

2. spojitost funkce $f_{xy}''(x, y_0)$ jedné proměnné x v bodě x_0. Neboť jsou-li obě tyto podmínky splněny, jest rovnice (q) platna.

---

*) Pro $x = 0$ následuje místo (n) vztah $f_{xy}''(0, 0) = -1$, jak už bylo svrchu odůvodněno.

199. Druhá věta udávající podmínky pro platnost rovnice $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$. Předpokládejme, že existují prvé derivace $f_x'(x, y)$, $f_y'(x, y)$ v bodě $[x, y]$ a jeho okolí a že každá z těchto derivací má v bodě $[x, y]$ differenciál (totální). Má v důsledku toho $f(x, y)$ v bodě $[x, y]$ i druhé derivace částečné f_{xx}'', f_{xy}'', f_{yx}'', f_{yy}'' a nad to jsou splněny jisté podmínky, o nichž byla řeč v odst. 195. Uvažujme výraz

$$f(x+h,\, y+h) - f(x+h,\, y) - f(x,\, y+h) + f(x,\, y). \qquad (u)$$

Výraz tento lze psáti, klademe-li $f(x+h, y) - f(x, y) = \varphi(x, y)$, ve tvaru $\varphi(x, y+h) - \varphi(x, y)$, což dle věty o střední hodnotě jest rovno $h\varphi_y'(x, y + \Theta h)$ neb rovno (se zřetelem ku významu funkce $\varphi(x, y)$)

$$hf_y'(x+h,\, y+\Theta h) - hf_y'(x,\, y+\Theta h), \qquad 0 < \Theta < 1. \qquad (u')$$

Avšak, poněvadž $f_y'(x+h, y+\Theta h)$ má (totální) differenciál, jest $f_y'(x+h, y+\Theta h) = hf_{yx}''(x, y) + \Theta h f_{yy}''(x, y) + h\varepsilon'$ a $f_y'(x, y+\Theta h) = \Theta h f_{yy}''(x, y) + h\varepsilon''$, kde $\lim \varepsilon' = \lim \varepsilon'' = 0$, když $\lim h = 0$, a tudíž (u) resp. (u') jest rovno výrazu

$$h^2 f_{yx}''(x, y) + h^2(\varepsilon' - \varepsilon''). \qquad (u'')$$

Kdybychom místo funkce $\varphi(x, y)$ byli zavedli do (u) funkci $\psi(x, y) = f(x, y+h) - f(x, y)$ a jinak postupovali podobně, obdrželi bychom tento výsledek pro (u)

$$h^2 f_{xy}''(x, y) + h^2(\varepsilon_1' - \varepsilon_1''). \qquad (u''')$$

Porovnáme-li (u''), (u'''), máme, dělivše obě strany rovnice h^2, pro $\lim h = 0$ konečně $f_{xy}''(x, y) = f_{yx}''(x, y)$ a tudíž větu:

Existují-li při funkci $f(x, y)$ prvé derivace dle x a dle y v bodě $[x, y]$ a jeho okolí a mají-li tyto prvé derivace obě totální differenciál v $[x, y]$, pak (existují i druhé derivace funkce dle x, y a) *jest $f_{xy}''(x, y) = f_{yx}''(x, y)$.*

Ve větě této se nepožaduje (explicitně) existence druhých derivací f_{xy}'', f_{yx}'' a *ovšem také ne jich spojitost v $[x, y]$ a jeho okolí.*

200. Derivace vyšších řádů. Derivujíce druhé derivace funkce u dle x a y (existují-li ovšem derivace funkcí daných druhými derivacemi) dospějeme ke třetím derivacím aneb obšírněji k *derivacím třetího řádu* a jsou — za jistých předpokladů vyplývajících z věty odst. předch. o záměnnosti v pořadu derivací D_x, D_y — celkem čtyři třetí derivace funkce u, totiž

$$f'''_{x^3}(x, y), \quad f'''_{x^2 y}(x, y), \quad f'''_{xy^2}(x, y), \quad f'''_{y^3}(x, y)$$

aneb v jiném označení

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}.$$

Obecně lze bráti v úvahu za předpokladů na snadě ležících derivace n-té. jichž jest celkem $n+1$

$$f^{(n)}_{x^k y^{n-k}}(x, y) = \frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^{n-k}}, \quad k = n, \ n-1, \ n-2 \ldots 2, \ 1, \ 0.$$

201. Totální differenciály vyšších řádů. Totální differenciál funkce $f(x, y)$ proměnných x, y

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k \tag{r}$$

jest opět funkcí proměnných x, y (a konstant h, k) a může míti jakožto funkce proměnných x, y opět differenciál (totální), jsou-li ovšem splněny jisté předpoklady. Stačí k tomu ku př. existence a spojitost druhých derivací funkce $u = f(x, y)$ v bodě x, y a jeho okolí. Differenciál totální totálního differenciálu funkce u sluje totální differenciál druhého řádu, při čemž se používá pro přírůstky proměnných stále týchž veličin. Místo pojmenování „totální differenciál druhého řádu" můžeme říkati, není li třeba obávati se nedorozumění, krátce „druhý totální differenciál"; differenciál totální funkce u (daný v (r)) nazývá se pak též obšírněji buď differenciál totální prvého řádu aneb prvý totální differenciál.

Značíme pak druhý totální differenciál symbolem $d^2u = d\,(du)$. Vycházejíce z rovnice (r), máme pro druhý differenciál (existuje-li):

$$d^2u = d\,(du) = hd\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + kd\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} k\right) + k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} h + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} k\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} k^2. \quad \text{(odst. 199.)}$$

Z differenciálu totálního druhého řádu dojdeme — za předpokladů k tomu potřebných — k differenciálu třetího řádu, čtvrtého, ... na základě rovnic differenciály ty definujících:

$$d(d^2u) = d^3u, \quad d(d^3u) = d^4u, \ \ldots, \quad d(d^{n-1}u) = d^n u.$$

Používajíce těchto rovnic, odvodíme snadno výrazy pro třetí, čtvrtý, ... totální differenciál. Můžeme také operaci, jíž dospíváme k differenciálům vyšších řádů, psáti symbolicky, kladouce

$$d = \frac{\partial}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial}{\partial y} \cdot k,$$

a dostaneme pomocí tohoto symbolu pro první, druhý, třetí, . . . n-tý differenciál tyto výrazy

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right) u, \quad d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^2 u, \quad d^3 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^3 u, \ldots$$

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^n u, \tag{s}$$

při čemž po umocňování jest nahraditi mocniny dle rovnice

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} h\right)^\lambda \left(\frac{\partial}{\partial y} k\right)^\mu \cdot u = \frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda} \cdot \frac{\partial^\mu}{\partial y^\mu} \cdot u \cdot h^\lambda k^\mu = \frac{\partial^{\lambda+\mu} u}{\partial x^\lambda \partial y^\mu} h^\lambda k^\mu.$$

Lze tedy třetímu differenciálu funkce u (existuje-li v bodě $[x, y]$) dáti tento tvar

$$d^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} h^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} h^2 k + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} h k^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} k^3$$

a podobně při vyšších differenciálech.

Že symbolické označení v *(s)* nám příslušné differenciály určuje jednoznačně a jest tedy přípustné, má svoji příčinu v tom, že parcielní derivace funkce u dle proměných x, y vyskytují se ve výrazech pro differenciály lineárně. Při výrazech kvadratických (anebo dokonce stupňů vyšších) v derivacích parcielních bychom nemohli používati symbolů v *(s)* naznačených.

Má-li funkce u druhý totální differenciál v bodě $[x_0, y_0]$, říkáme, že jest **differencovatelna do řádu druhého** *v bodě* $[x_0, y_0]$ — aneb stručněji, že jest dvakráte differencovatelna v $[x_0, y_0]$ — . Obdobný význam má rčení: funkce u jest v bodě $[x_0, y_0]$ **differencovatelna do řádu** n-*tého* (n-kráte).

Přirozeně bychom mohli místo h a k užívati značek dx, dy více obvyklých, takže druhý differenciál funkce u při neodvisle proměnných x, y by se objevil ve tvaru

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 \tag{t}$$

a obdobně ostatní differenciály.

Poznámka 1. Pro první a druhý differenciál funkce z dvou proměnných x, y, kteréžto differenciály velmi často se naskytají v geometrii differenciální, se zhusta užívá těchto zkrácených označení

$$dz = p dx + q\, dy\ , \ d^2 z = r dx^2 + 2\, s\, dx dy + t dy^2,$$

v důsledku kteréhož označení jest

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Poznámka 2. Jestliže je $u=f(x, y)$, avšak x, y nejsou neodvisle proměnné, nýbrž funkce neodvisle proměnných ξ, η — jak předpokládáno v odst. 197. — pak výraz na pravé straně rovnice (t) není druhým differenciálem funkce u; první differenciál jest sice dán výrazem (IIb)

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy, \text{ kde } dx=\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta, \ldots$$

avšak ku odvození druhého differenciálu jest třeba provésti na rovnici dávající du operaci $d=\frac{\partial}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial}{\partial \eta}d\eta$ (kdež přírůstky neodv. prom. $d\xi$, $d\eta$ jsou konst.) a dostáváme ku př.

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot dx+\frac{\partial u}{\partial x}d(dx)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dy\right)dx+\frac{\partial u}{\partial x}d^2 x$$

A tedy

$$d^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial u}{\partial x}d^2 x+\frac{\partial u}{\partial y}d^2 y. \quad (\alpha)$$

Výraz tento shoduje se s (t) jenom tenkráte (při libovolné funkci u), když $d^2x=0$, $d^2y=0$, t. j. když dx, dy jsou vzhledem k operaci d konstanty (nezávislé na ξ, η), což nastává ku př. tenkráte, když $x=\xi$, $y=\eta$, (totiž když x, y jsou vlastně neodvisle proměnné samy, jakož v (t) jest předpokládáno). Obecněji to nastává tenkráte (a jenom tenkráte), když $x=\alpha\xi+\beta\eta+\gamma$, $y=\delta\xi+\varkappa\eta+\lambda$, kde $\alpha, \beta, \ldots$ jsou konstanty.

201a. Můžeme však také jiným způsobem definovati differenciály druhého řádu. Uvažujme přírůstek funkce u při přírůstcích h, k neodvisle proměnných $\Delta u=f(x+h, y+k)-f(x, y)$; vypočteme si přírůstek přírůstku, t. j. přírůstek druhého řádu, při čemž při druhém kroku volíme pro přírůstky neodvisle proměnných čísla h', k'. Označíme-li ten přírůstek druhého řádu $\Delta'\Delta u$, jest

$$\Delta'\Delta u=f(x+h+h', y+k+k')-f(x+h, y+k)-$$
$$f(x+h', y+k')+f(x, y).$$

Kdybychom napřed byli volili pro přírůstky neodvisle proměnných čísla h', k' a pak čísla h, k, dospěli bychom k témuž výrazu, kterýž se tedy nemění výměnou dvojic $[h, k]$, $[h', k']$; lze tedy také psáti $\Delta'\Delta u=\Delta\Delta' u$. *Je-li možno dáti přírůstku druhého řádu funkce u z bodu $[x, y]$ při libovolných $[h, k]$, $[h', k']$ jistého okolí bodu $[0, 0]$ tvar*

$$\Delta'\Delta u=\Delta\Delta' u=A h h'+B(h k'+h' k)+C k k'+\tau(|h|+|k|)(|h'|+|k'|), \quad (w)$$

— při čemž A, B, C jsou čísla na h, k, h', k' nezávislá a pro τ pak jest $\lim \tau=0$, když napřed $\lim(|h|+|k|)=0$ a potom $\lim(|h'|+|k'|)=0$, (anebo naopak) — *pravíme, že funkce u připouští totální differenciál druhého řádu v bodě* $[x, y]$. *Tento totální differenciál druhého řádu jest pak dán výrazem* (klademe-li v prvých třech členech pravé strany $h=h'$, $k=k'$)

$$d^2u = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

(Trojčlen na pravé straně rovnice (w) se nacházející volen hned tak, aby se neměnil záměnou dvojic $[h, k]$, $[h', k']$). Pro A, B, C odvodíme snadno (dvě ze čtyř čísel h, k, h', k' a to jedno čárkované, druhé nečárkované položíme rovny nulle, zbývajícími dvěma dělíme a vypočteme limitu na obou stranách rovnice tak vzniklé pro případ, že napřed jedno a potom druhé ze zbývajících těch čísel konverguje k nulle):

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Definice právě podaná pro totální differenciál druhého řádu jest úplně obdobná k definici druhé derivace pomocí limitního výrazu (odst 128., rovnice (a)) a lze ji bez překážky rozšířiti i na totální differenciály řádu třetího a vyšších. Definice tato však v podstatě se neliší od definice dřívější, což nechť čtenář sám zevrubněji odůvodní.

Z definice podané vyplývá též věta: Kdykoliv funkce u má v bodě $[x, y]$ totální differenciál druhého řádu, (pak existují druhé derivace funkce u dle obou proměnných a) jest v bodě $[x, y]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

což jest nový tvar podmínky postačitelné ku splnění této rovnice. V podstatě se však tato podmínka neliší od podmínky odvozené v odst. 199.

202. O rovnicích mezi differenciály. Při tvoření differenciálů vyskytly se veličiny, jež jsme označili jako přírůstky proměnných (také differenciály proměnných) a jež bylo možno voliti v jistém rozsahu zcela libovolně. Tak při funkcích o *dvou neodvisle* proměnných $[x, y]$ vyskytovaly se dva přírůstky h, k (aneb též dx, dy), jež vázány byly toliko podmínkou, že bod $[x+h, y+k]$ má přináležeti oboru, ve kterém funkce, o niž právě jde, jest definována a má zároveň vlastnosti požadované. Existuje-li při takové funkci totální differenciál v oboru Ω a je-li $[x, y]$ bod vnitřní oboru Ω, jest $[h, k]$ zcela libovolný bod jistého okolí bodu $[0, 0]$; veličiny h, k nejsou tedy vázány žádnou podmínkou a ať jim přisuzujeme jakékoliv hodnoty, příslušný výraz jest stále totálním differenciálem dané funkce. Nenapadá nám tudíž nikdy ve výrazech těch dávati číslům h, k resp. dx, dy nějaké numerické hodnoty, i když běží o differenciál v bodě pevném $[x_0, y_0]$, nýbrž *vyznačujeme je vždy obecnými symboly* a to, jak již bylo podotknuto, nejčastěji symboly dx, dy. Jsou tedy veličiny dx, dy ve skutečnosti nové proměnné na sobě nezávislé (jsou-li ovšem x, y na sobě nezávislé), nezávislé (povšechně) i od proměnných základních x, y. Že jsme je hned při zavedení jich do počtu neuvedli jakožto veličiny proměnné, mělo svoji příčinu právě v tom, že jsme chtěli zdůrazniti jich nezávislost na x, y; rozhodovala při tom také snaha usnadniti čtenářům pochopení příslušných nových pojmů.

Okolnosti, že differenciály neodvisle proměnných jsou veličiny proměnné na sobě neodvislé, se ve značné míře v počítání s totálními differenciály používá. Totální differenciály jsou ostatně velmi jednoduché funkce differenciálů neodvisle proměnných; jsou to polynomy homogenní téhož stupně, kolik obnáší řád totálního differenciálu. Při počítání pak s totálními differenciály největší užitek poskytne *věta o neurčitých součinitelích* ve svém nejjednodušším tvaru (použita totiž na polynomy). Osvětlím to na dvou příkladech.

Příklad 1. Budiž totální differenciál funkce u dvou neodvisle proměnných x, y v jistém spojitém dvojrozměrném oboru stále roven nulle. Jest tedy

$$du = 0 \text{ aneb } \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0.$$

Z věty o neurčitých součinitelích (pokládáme-li v tomto výrazu jenom ku př. dx za proměnnou) následuje ihned

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

t. j. funkce u nemění se v daném oboru ani s x, ani s y; funkce u jest v daném oboru konstantní. Můžeme tudíž vysloviti větu:

Nutná a postačující podmínka, aby funkce u bodu $[x, y]$ ve spojitém dvojrozměrném oboru byla konstantní (t. j. stále rovna pevné hodnotě C), jest, že totální differenciál funkce u v tomto oboru existuje a jest roven nulle.

Příklad 2. Dejme tomu, že z nějaké úvahy vyplývá pro třetí differenciál funkce u bodu $[x, y]$ ve spojitém dvojrozměrném oboru výraz

$$d^3 u = A_0\, dx^3 + 3 A_1\, dx^2 dy + 3 A_2\, dx\, dy^2 + A_3\, dy^3.$$

Avšak pro třetí differenciál, existuje-li, následuje z definice

$$d^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3.$$

Porovnáme-li oba výrazy, máme ihned v důsledku věty o neurč. souč.:

$$A_0 = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad A_1 = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \ldots \tag{α}$$

Poznámka. Z uvedeného jest patrno, že rovnice mezi totálními differenciály funkcí o dvou neodvisle proměnných zastupuje několik rovnic mezi funkcemi, jež jsou koefficienty v příslušných mnohočlenech differenciálních. Tak ku př. dle 2. příkladu výraz dávající třetí differenciál totální obsahuje čtyři funkce a zastupuje tedy čtyři vztahy (α). V této okolnosti, jež zjednává značné zjednodušení při vypisování vztahů, tkví právě jedna a to hlavní z výhod označení a symboliky differenciální. Zmínka o tom učiněna již v odst. 129. pozn.

Avšak to není jediná výhoda pojmu a označení differenciálu totálního. Předpokladem existence totálních differenciálů u funkce s dvěma neodvisle proměnnými zavádějí se pro tuto funkci jisté podmínky, které není snadno nahraditi jiným způsobem. Ty podmínky ovšem jsou splněny, jsou-li příslušné derivace částečné funkce spojité v obou proměnných, případ to, který v úvahách týkajících se použití nejčastěji ba téměř výhradně se vyskytuje a ve kterém jakožto hlavní výhoda pojmu a symboliky totálního differenciálu jest svrchu zmíněné stručné a přehledné vypisování vztahů, takže, kdybychom na tuto věc nekladli váhu, vystačili bychom tu plně s derivacemi parcielními a differenciály totální by byly pro nás zbytečným pojmem. Avšak ze stanoviska theorie poskytuje pojem totálních differenciálů (různých řádů) a funkcí, při nichž existují differenciály totální, zvláštní zájem a již ze stručných zmínek, které o této věci byly učiněny v předcházejícím, jest patrna jednak obdoba totálních differenciálů různých řádů funkcí o dvou neodv. prom. s derivacemi funkce o jedné proměnné, jednak úzká souvislost záměnnosti v pořadu derivací dle různých proměnných a existence totálního differenciálu příslušného řádu (odst. 194., 201., 201a).

203. Derivace parcielní funkcí o více proměnných. Vývody v odst. předcházejících provedené pro funkce o dvou proměnných se bez potíže jakékoliv rozšiřují na tři a více proměnných, rovněž i příslušná označení Nebude snad nutno podrobně všecko znova opakovati a postačí úplně, když vytknu nejdůležitější definice, označení a věty.

Budiž dána funkce $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots x_n$ a to v jistém oboru Ω. Pokládáme-li $x_2, x_3, \ldots x_n$ za konstantní, pak se stává u funkcí jediné proměnné x_1; má-li tato funkce jediné proměnné derivaci (dle x_1), sluje ta derivace **derivací parcielní funkce** $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ **dle** x_1 a značí se zpravidla jedním z výrazů

$$f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad D_{x_1} f.$$

Výhody označení prvého vyloženy obšírně v odst. 192., rovněž tak, jak by se vyznačila hodnota této derivace v některém určitém bodě $[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$ oboru Ω. Nejsou-li hodnoty x_k^0 dány numericky, mohli bychom vedle označení tam uvedených užívati též znaku

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]_{x_k=x_k^0} \quad \text{anebo prostě} \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]_0, \quad [D_{x_1} f]_0.$$

204. Totální differenciál funkce o několika proměnných. Je-li $[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$ libovolný bod vnitřní oboru Ω a rovněž bod $[x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n]$, sluje

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

přírůstkem funkce u z bodu $[x_1^0, \ldots, x_n^0]$ pro přírůstky $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ nezávisle proměnných. Lze-li *dáti při libovolně volených přírůstcích neodv. proměnných tomuto přírůstku vždy tvar*

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n + \tau(|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \ldots + |\Delta x_n|), \quad \text{(I)}$$

kde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *nezávisí na* $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ *a kde pro* τ, *jež závisí sice na* $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, *jest*

$$\lim \tau = 0, \quad \textit{jestliže současně} \quad \lim \Delta x_1 = \lim \Delta x_2 = \ldots = \lim \Delta x_n = 0,$$

říkáme, že funkce $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *má* **totální differenciál** *v bodě* $[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$, aneb též, že *funkce ta jest v bodě* $[x_1^0, \ldots]$ **differencovatelna.** *Totálním differenciálem pak jest výraz*

$$du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n.$$

Stejně jako při dvou proměnných odvodí se i nyní

$$A_1 = f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \ldots, A_n = f'_{x_n}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

Má tudíž funkce u, v bodě $[x_1^0, \ldots, x_n^0]$ differencovatelná, v tom bodě všecky derivace částečné dle jednotlivých proměnných a dále následuje, že totální differenciál funkce u v bodě $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ lze napsati ve tvaru

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n, \quad \text{(II)}$$

kdež symboly $dx_1, dx_2, \ldots$ (differenciály to totální neodvisle proměnných) lze zavésti stejným obratem jako při 2 proměnných.

Předpoklady postačitelné k tomu, aby funkce u v bodě $[x^0]$ měla totální differenciál, lze snadno udati postupem, který byl užit při dvou proměnných. Zvláště snadno lze dokázati věty:

Má-li funkce u v bodě $[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$ *a jeho okolí všecky první derivace částečné* (dle všech n proměnných) *a jsou-li ty derivace ja-*

kožto funkce n proměnných spojity v bodě $[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$, *má funkce v tomto bodě totální differenciál* (jest differencovatelna).

Má-li funkce u v bodě $[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$ *totální differenciál* (je-li v tom bodě differencovatelna), *jest funkcí n proměnných* $x_1, \ldots, x_n$ *v bodě tom spojitou.*

205. Pod **částečným** (*parcielním*) **differenciálem** funkce u vyrozumíváme totální differenciál funkce v, jež jest funkcí vznikající z u, přisoudíme-li p proměnným $(0 < p < n)$ hodnoty konstantní. Jest tedy v funkcí o $n-p$ proměnných. Tak ku př. dosaďme v u za $x_1, x_2, \ldots, x_p$ pevné hodnoty $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0$, obdržíme funkci v proměnných $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$. Má-li tato funkce totální differenciál v bodě $[x_{p+1}^0, x_{p+2}^0, \ldots, x_n^0]$, který jest pak tvaru

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_{p+1}}\right)_0 dx_{p+1} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_{p+2}}\right)_0 dx_{p+2} + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)_0 dx_n$$

říkáme, že funkce u má v bodě $[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$ částečný differenciál dle proměnných $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ (jest differencovatelna částečně dle proměnných $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$).

Jako příklady differenciálů částečných při $n \geq 3$ buďtež uvedeny tyto výrazy (pro bod $[x_1, x_2, \ldots]$)

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3;$$

ty jsou differenciály částečné: prvý dle proměnné x_1; druhý dle x_1, x_2; třetí dle x_2, x_3.

Jest očividno, že, má-li funkce u n proměnných v bodě $[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0]$ differenciál totální, má v tom bodě všecky možné differenciály částečné. Opak této věty není platný. Funkce u může v bodě $[x_1^0, \ldots]$ míti všecky možné differenciály částečné, avšak differenciál totální v tom bodě přece míti nemusí.

205a. Existuje-li differenciál totální resp. částečný v bodě $[x_1, x_2, \ldots x_n]$, jest hodnota toho differenciálu při pevně volených hodnotách přírůstků neodvisle proměnných závisla na bodu $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a jsou tudíž differenciály ty funkcemi n neodvisle proměnných. Opírajíce se o tuto okolnost, můžeme si odvoditi snadno rozmanité podmínky postačující k tomu, aby funkce u měla totální differenciál. Uvažujme ku př. k vůli jednoduchosti funkci $u = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ o čtyřech neodvisle proměnných, danou v bodě $[x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0]$ a jeho okolí. Přírůstek Δu z toho bodu můžeme psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} \Delta u = & [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0, x_4^0) - f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)] + \\ & + [f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3, x_4^0 + \Delta x_4) - \\ & - f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0, x_4^0)]. \end{aligned}$$

Každou z hranatých závorek můžeme vyjádřiti pomocí částečného differenciálu dle dvou proměnných — aneb, což jest totéž, pomocí totálního differenciálu funkce o dvou proměnných. Provedeme-li snadnou úvahu, dospějeme ku větě: Funkce u má v bodě $[x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0]$ totální differenciál, má-li

1. differenciál částečný v tom bodě dle proměnných x_1, x_2.

2. differenciál částečný dle proměnných x_3, x_4 v tom bodě a jeho okolí, jestliže tento differenciál jest spojitou funkcí v $[x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0]$ proměnných x_1, x_2, x_3, x_4 a jestliže veličina τ, vyskytující se ve vyjádření přírůstku funkce pomocí totálního differenciálu (viz ku př. odst. 203.) a konvergující tu k nulle pro $\lim(|\Delta x_3| + |\Delta x_4|) = 0$, konverguje k nulle stejnoměrně vzhledem ku všem $[x_1, x_2]$ nacházejícím se v jistém okolí bodu $[x_1^0, x_2^0]$.

206. Derivace parcielní a rovněž **totální differenciály vyšších řádů** funkce $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zavádějí se stejným způsobem jako při dvou neodvisle proměnných. Rovněž pojem částečných differenciálů vyšších řádů jest tu na snadě; tak ku př. částečný differenciál druhého řádu funkce u dle proměnných x_1, x_2 jest totální differenciál funkce u druhého řádu, pokládáme-li $x_3, x_4, \ldots, x_n$ za konstantní a toliko x_1, x_2 za proměnné.

Pro N-tou derivaci funkce u dle proměnných x_k jest označení nejčastěji používané dáno výrazem

$$\frac{\partial^N u}{\partial x_1^{\nu_1} . \partial x_2^{\nu_2} \ldots \partial x_n^{\nu_n}}, \quad \text{kde } \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n = N;$$

označení toto již předpokládá záměnnost derivačních operací dle různých proměnných. Záměnnost ta jest vždy prokázána, existuje-li N-tý totální differenciál funkce u dle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$; specielně pak zejména tehdy, jsou-li funkce dané derivacemi řádů N-tého spojité funkce n proměnných x_k.

Existuje-li N-tý totální differenciál funkce $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, říkáme též, že *funkce u jest dle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ differencovatelna v řádu N-tém (n-krát).*

N-tý differenciál totální funkce u můžeme — stejně jako při dvou proměnných — psáti symbolicky ve tvaru

$$d^N u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n\right)^N u,$$

kdež místo konstant $h_1, h_2, \ldots, h_n$ můžeme zavésti znaky $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

Tak ku př. pro $N = 3$ jest

$$d^3u = \sum_k \frac{\partial^3 u}{\partial x_k^3} dx_k^3 + 3\sum_{i,k} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_k} dx_i^2 dx_k + 6\sum_{j,r,s} \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_r \partial x_s} dx_j dx_r dx_s,$$

$$i, k = 1, 2, 3, \ldots, n;\ i \neq k;\ j, r, s = 1, 2, 3, \ldots, n;\ j < r < s,$$

význam znamének součtových jest na snadě.

207. Rovnici pro přírůstek funkce u z bodu $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ lze vypisovati též takto:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \Delta x_n + \varrho_1 \Delta x_1 + \ldots + \varrho_n \Delta x_n, \quad \text{(III)}$$

kde při $k = 1, 2, \ldots, n$ jest

$$\lim \varrho_k = 0, \text{ když současně } \lim \Delta x_1 = \lim \Delta x_2 = \ldots = \lim \Delta x_n = 0.$$

Rovnice tato jest platna, ať přírůstky $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ nabývají jakýchkoliv hodnot (ovšem s tím omezením, že bod $[x_1 + \Delta x_1, \ldots]$ nevybočuje z oboru Ω, ve kterém funkce u jest definována). Můžeme ku př. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pokládati za funkce nových neodvisle proměnných a to proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_q$ v počtu q; ale pak lze přírůstky Δx_k — jsou-li x_k funkce proměnných y_l differencovatelné v oborech přicházejících v úvahu — psáti ve tvaru

$$\Delta x_k = dx_k + \sigma_k(|\Delta y_1| + |\Delta y_2| + \ldots + |\Delta y_q|), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\lim \sigma_k = 0 \quad \text{pro} \lim (|\Delta y_1| + \ldots + |\Delta y_q|) = 0.$$

Dosadíme-li tyto výrazy do (III), máme ihned

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n + \varrho'(|\Delta y_1| + \ldots + |\Delta y_q|),$$

$$\lim \varrho' = 0 \quad \text{pro} \lim(|\Delta y_1| + \ldots + |\Delta y_q|) = 0,$$

odkudž jest patrno, že differenciál funkce u, jež jest prostřednictvím proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, funkcí to proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_q$, funkcí proměnných $y_1, y_2, \ldots y_q$, lze vyjádřiti ve tvaru

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n, \quad \text{(III')}$$

což jest tvar úplně shodný s (II); ve (II) však jsou $dx_1, dx_2, \ldots$ konstanty, v (III′) $dx_1, dx_2, \ldots$ jsou funkce proměnných $y_1, y_2, \ldots, y$ (a konstant $dy_1, dy_2, \ldots dy_q$). Dosadíme-li do (III′)

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_1}{\partial y_2} dy_2 + \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial y_q} dy \quad , \ldots$$

a označíme-li částečné derivace funkce u, jakožto funkce proměnných y_l, $y_2, \ldots, y_q$ (na kterýchž závisí výhradně prostřednictvím veličin $x_1, x_2, \ldots, x_n$), dle těchto proměnných symboly

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\right), \left(\frac{\partial u}{\partial y_2}\right), \ldots, \left(\frac{\partial u}{\partial y_n}\right),$$

máme ihned rovnice

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y_l}\right)=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_l}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_l}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial y_l}, \qquad \text{(IV)}$$
$$l=1, 2, \ldots, q,$$

což jsou nejobecnější **rovnice pro počítání derivace funkce funkcí**. *Rovnice tyto odvozeny za předpokladů:*

1. *funkce* x_k *jsou differencovatelny v bodě* $[y_1, y_2, \ldots, y_q]$;

2. *funkce* u *jest differencovatelna v bodě* $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, *při čemž* $x_k=\varphi_k(y_1, y_2, \ldots, y_q)$.

Specielně jsou rovnice odvozené platny, existují-li derivace částečné $\frac{\partial x_k}{\partial y_e}$ a jsou li zároveň spojitými funkcemi bodu $[y_1, y_2, \ldots y_q]$ a zároveň existují derivace částečné $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ a jsou spojitými funkcemi bodu $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$; obojí v oborech přicházejících v úvahu.

Poznámka. Má-li funkce u m-tý differenciál totální — pokládáme-li ji za funkci proměnných x_k — a mají-li rovněž x_k jakožto funkce proměnných y_l m-tý differenciál totální, pak můžeme postupným použitím pravidla právě dokázaného vypočísti snadno totální m-tý differenciál funkce u dle y_l a tudíž i m-té částečné derivace funkce u dle proměnných y_l. Viz odst. 201., pozn. 2., kde vypočten ve specielním případě druhý totální differenciál funkce u dle proměnných ξ, η. Z rovnice (α) tam odvozené následuje pak ku př.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi\, \partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\, \partial \eta}.$$

Zvlášť jednoduše se provádí počet, jsou-li proměnné x_k lineární funkce jedné proměnné; budiž $x_k=a_k+b_k t$, $k=1, 2, \ldots n$; pak jest, je-li opět $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a má-li u m-tý differenciál totální (dle proměnných x_k) ihned dle (IV) pro první derivaci u dle t

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial u}{\partial x_1}b_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}b_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}b_n$$

aneb symbolicky

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}b_1+\frac{\partial}{\partial x_2}b_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}b_n\right)u$$

a pro m-tou derivaci u dle t máme prostě (neb vyšší derivace než řádu prvého funkcí x_k dle t tu mizí)

$$\left(\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}b_1+\frac{\partial}{\partial x_2}b_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}b_n\right)^m u.$$

Příklad. **Věta Eulerova pro homogenní funkce** Funkce $f(x_1, x_2, .., x_n)$ sluje **homogenní funkcí** *stupně λ-tého,* platí-li identicky

$$f(t.x_1,\ t.x_2,\ t.x_3, \ldots,\ t.x_n)=t^\lambda f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n). \qquad (\alpha)$$

„Identicky“ znamená v definici podané, že rovnost vytčená platna jest pro všecka t, jistého okolí bodu $t=1$. Okolí to můžeme vymeziti ku př. požadavkem, aby i bod $[x_1,\ x_2, .., x_n]$ i bod $[tx_1,\ tx_2, .., tx_n]$ byl v oboru, ve kterém zároveň f jest definována a rovnice (α) platna. Za $[x_1,\ x_2, \ldots, x_n]$ možno konečně v (α) voliti kterýkoli bod tohoto oboru.

Pokládejme v rovnici (α) $[x_1,\ x_2, .., x_n]$ za pevný bod, t za proměnnou a derivujeme obě strany rovnice podle t. Označíme k to cíli $tx_1=z_1,\ tx_2=z_2, \ldots,\ tx_n=z_n$, čímž (α) se změní ve

$$f(z_1,\ z_2, \ldots,\ z_n)=t^\lambda f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n).$$

Pokládáme-li $x_1, .., x_n$ za konstanty a t za proměnnou, jsou $z_1, .., z_n$ veličiny proměnné a to jednoduché funkce proměnné t. Derivování dle t provedeme snadno jako důsledek rovnice (IV). Obdržíme (derivace funkcí $z_1, .., z_n$ dle t jsou $x_1, .., x_n$):

$$x_1 f'_{y_1}(z_1,\ z_2, .., z_n)+x_2 f'_{y_2}(z_1,\ z_2, .., z_n)+\ldots$$
$$+x_n f'_{y_n}(z_1,\ z_2, .., z_n)=\lambda t^{\lambda-1} f(x_1,\ x_2, .., x_n).$$

Klademe-li v této rovnici $t=1$ (a tedy $z_1=x_1,\ z_2=x_2, \ldots$), změní se rovnice tato ve vztah, jemuž lze dáti tvar;

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=\lambda f(x_1,\ x_2, .., x_n).$$

Vztah tento platný v tom oboru n-rozměrném, v němž jest platna rovnice (α), a nazývá se *větou Eulerovou pro homogenní funkce stupně λ.*

Ku př.

$$\frac{xy}{x^2+y^2},\quad \sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

jsou homogenní funkce (prvá a třetí stupně 0, druhá stupně 1) proměnných x, y. Čtenář snadno verifikuje větu Eulerovu v těchto třech případech.

208 Formule Taylorova pro funkce o n neodvisle proměnných. Z formule Taylorovy pro funkce o jedné proměnné lze odvoditi snadno obdobnou formuli pro funkce o několika proměnných. Budiž dána ku př. funkce $f(x, y, z)$ o třech neodvisle proměnných, jež jest differencovatelna ve všech bodech úsečky spojující body $[x_0, y_0, z_0]$, $[x_0+h, y_0+k, z_0+l]$ až do řádu n-tého. Pak má funkce proměnné t $f(x_0+ht, y_0+kt, z_0+lt)$ v intervalu $(0, 1)$ všecky derivace (dle t) až do řádu n-tého (odst. 207.). Užijeme-li na tuto funkci, již označíme pro krátkost $\Phi(t)$, řady Maclaurinovy (odst. 133., (VI)) se zbytkem ve tvaru Lagrangeově, máme

$$\Phi(t)=\Phi(0)+\frac{t}{1!}\Phi'(0)+\frac{t^2}{2!}\Phi''(0)+\ldots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\Phi^{(n-1)}(0)+$$
$$+\frac{t^n}{n!}\Phi^{(n)}(\Theta t),$$

kde Θ jest číslo mezi 0 a 1. Avšak $\Phi(t)=f(x, y, z)$, při čemž jsme pro krátkost kladli $x=x_0+ht$, $y=y_0+kt$, $z=z_0+lt$ a tedy dle pravidla o derivaci funkce funkcí (viz odst. předch., poznámku)

$$\Phi^{(\lambda)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\lambda} f(x, y, z).$$

Dosadíme-li v tomto výrazu za t nullu, t. j. za $[x, y, z]$ bod $[x_0, y_0, z_0]$, máme ihned $\Phi^{(\lambda)}(0)$. Avšak jest patrno, že $\Phi^{(\lambda)}(0)$ jest k-tým differenciálem funkce $f(x, y, z)$ v bodě $[x_0, y_0, z_0]$, volíme-li za přírůstky proměnných veličiny h, k, l. Můžeme tudíž poslední rovnici psáti

$$\Phi(t)=(f)_0+\frac{t}{1!}(df)_0+\frac{t^2}{2!}(d^2f)_0+\ldots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(d^{n-1}f)_0+$$
$$+\frac{t^n}{n!}(d^nf)_{x_0+\Theta ht,\, y_0+\Theta kt,\, z_0+\Theta lt},$$

kde index 0 za závorkou značí, že za $[x, y, z]$ se má v differenciálu příslušném dosaditi $[x_0, y_0, z_0]$. Obdobný význam má i index v posledním členu.

Klademe-li v poslední rovnici ještě $t=1$, máme konečně *Taylorovu formuli pro funkce o třech proměnných* ve tvaru

$$f(x_0+h, y_0+k, z_0+l)=(f)_0+\frac{(df)_0}{1!}+\frac{(d^2f)_0}{2!}+\ldots+\frac{(d^{n-1}f)_0}{(n-1)!}+R_n; \quad (A)$$
$$R_n=\frac{1}{n!}(d^nf)_{x_0+\Theta h,\, y_0+\Theta k,\, z_0+\Theta l}; \quad 0<\Theta<1.$$

Chceme-li řadu tu obšírněji vypisovati, stačí nahraditi $(d^\lambda f)_0$ dle rovnice

$$(d^\lambda f)_0=\left(h\frac{\partial}{\partial x_0}+k\frac{\partial}{\partial y_0}+l\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^{\lambda} f(x_0, y_0, z_0).$$

K této formuli lze přičiniti obdobné poznámky jako ku formuli Taylorově pro funkce o jedné proměnné. Tak nejprve lze, jestliže $\lim_{n=\infty} R_n = 0$, psáti pro $f(x_0+h, y_0+k, z_0+l)$ nekonečnou *řadu Taylorovu*

$$f(x_0+h,\ y_0+k,\ z_0+l)=(f)_0+\frac{(df)_0}{1!}+\frac{(d^2f)_0}{2!}+\frac{(d^3f)_0}{3!}+\ldots \quad (B)$$

Řadě této můžeme, rozvineme-li $(d^r f)_0$ dle vzorce

$$\frac{(d^r f)_0}{r!}=\sum_{\lambda,\mu,\nu}\frac{h^\lambda k^\mu l^\nu}{\lambda!\mu!\nu!}\left[\frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu} f(x,y,z)}{\partial x^\lambda \partial y^\mu \partial z^\nu}\right]_0,$$

$$\text{kde } \lambda+\mu+\nu=r \text{ a } \lambda,\ \mu,\ \nu \text{ celé } \geqq 0,$$

dáti tento tvar řady trojné

$$f(x_0+h,\ y_0+k,\ z_0+l)=\sum_{\lambda,\mu,\nu}\frac{h^\lambda}{\lambda!}\cdot\frac{k^\mu}{\mu!}\cdot\frac{l^\nu}{\nu!}\left[\frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu} f(x,y,z)}{\partial x^\lambda \partial y^\mu \partial z^\nu}\right]_0. \quad (C)$$

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Ovšem jest nutno přidati podmínku, nutnou ku správnosti (a vůbec k tomu, aby rovnice tato měla význam) a jež jest, že trojná řada právě napsaná má býti absolutně konvergentní. Neboť podmínka $\lim_{n=\infty} R_n = 0$ svrchu zavedená stačí sice ku správnosti rovnice (B) a tudíž ke konvergenci řady na pravé straně této rovnice; nahradíme-li však jednoduchou řadu v (B) řadou trojnou, jakož jsme to učinili, nepostačí již podmínka o R_n, nýbrž jest třeba ještě přibrati podmínku vyslovenou. Obory konvergence řady v (B) a řady v (C) mohou býti podstatně různy, jak na příkladech v odstavcích násl. obšírně ukážeme.

Uvádím konečně tento tvar řady Taylorovy

$$f(x,y,z)=\sum_{\lambda,\mu,\nu}\frac{(x-x_0)^\lambda}{\lambda!}\cdot\frac{(y-y_0)^\mu}{\mu!}\cdot\frac{(z-z_0)^\nu}{\nu!}\cdot\left[\frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu} f(x,y,z)}{\partial x^\lambda \partial y^\mu \partial z^\nu}\right]_0 \quad (C')$$

jenž vzniká, dosadíme-li $x-x_0=h,\ y-y_0=k,\ z-z_0=l.$

Poznámka 1. Jakožto nejčastěji užívaný případ formule (A) uvádím vztah

$$f(x+h,\ y+k,\ z+l)-f(x,\ y,\ z)=hf'_x(x_1,\ y_1,\ z_1)+$$
$$+kf'_y(x_1,\ y_1,\ z_1)+lf'_z(x_1,\ y_1,\ z_1),$$

kde $\quad [x_1,\ y_1,\ z_1]=[x+\Theta h,\ y+\Theta k,\ z+\Theta l],\quad 0<\Theta<1.$

Rovnici tuto lze pokládati za jakési zevšeobecnění věty o střední hodnotě (odst. 104.).

Poznámka 2. Stejně, jako při jedné proměnné vedeni jsme byli řadou Taylorovou ku vyšetřování řad mocninných o jedné proměnné, tak i při řadě Taylorově tu odvozené zaváděny jsou řady mocninné o několika proměnných. Se zřetelem k významu jednak věty Taylorovy, jednak samotných řad mocninných o několika proměnných, jakožto nejjednoduššího prostředku k definici funkcí o několika proměnných, bude v následujícím o řadách mocninných s několika proměnnými stručně pojednáno a budou odvozeny nejdůležitější vět jich se týkající.

Řady mocninné o dvou a několika proměnných.

209. Pod **řadou mocninnou o dvou proměnných** vyrozumíváme řadu dvojnou tvaru

$$\sum_{i,k} a_{ik}x^iy^k, \quad i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots \quad \text{(odst. 53.)} \tag{1}$$

Čísla a_{ik} slují koefficienty řady. Součet této řady může definovati jenom tenkráte funkci bodu $[x, y]$, když řada jest konvergentní a to, jelikož pořádek sčítání není stanoven, *když jest absolutně konvergentní.* Budeme tudíž vyšetřovati obory $[x, y]$, v nichž taková konvergence může nastávati.

K vůli stručnosti zavedeme si označení

$$|a_{ik}| = A_{ik}, \quad |x| = X, \quad |y| = Y$$

a budeme tedy hledati věty pro konvergenci dvojné řady

$$\Sigma A_{ik}X^iY^k; \quad i, k = 0, 1, 2, \ldots; \quad X \geqq 0,\ Y \geqq 0,\ A_{ik} \geqq 0. \tag{2}$$

Z obecných vět pro konvergenci nekonečných řad jest nejprve bezprostředně patrno, že, *je-li tuto řada konvergentní pro bod* $[X_0, Y_0]$, *jest také konvergentní pro všecky* $[X, Y]$, *pro něž* $0 \leqq X \leqq X_0$, $0 \leqq Y \leqq Y_0$; *a naopak, je-li divergentní pro bod* $[X_0, Y_0]$, *že jest též divergentní pro všecky* $[X, Y]$, *pro něž* $X \geqq X_0$, $Y \geqq Y_0$. **(Věta prvá.)**

Jestliže řada (2) jest konvergentní pro každé X, Y ($\geqq 0$), říkáme, že obor konvergence řady (1) jest celá rovina bodů $[x, y]$ aneb též celý obor; konverguje-li řada (2) pouze v bodě $[0, 0]$, konverguje i řada (1) rovněž toliko v bodě $[0, 0]$*) a obor konvergence této řady se redukuje na pouhý bod. Obecněji jest možno, že řada (2) konverguje, když X jest uvnitř intervalu $(0, a)$ a $Y = 0$, a dále, když $X = 0$ a Y jest uvnitř $(0, b)$, pro všecka ostatní $[X, Y]$ pak, kde buď $X > 0$, $Y > 0$ anebo $X > a$, $Y = 0$ anebo konečně $X = 0$, $Y > b$, jest pak (2) divergentní. Tu obor konvergence řady (1) sestává z bodů dvou úseček a to úsečky

*) Řada (1) nemůže v jiném bodě konvergovati ani relativně, neboť v tom případě pro každý bod $[X, Y]$ různý od $[0, 0]$ tvoří členové řady (2) — a tudíž i řady (1) — množství číselné, jež není svrchu (u řady (1) případně i zdola) ohraničeno, jak čtenář snadno prokáže a jak vyplyne ostatně z věty druhé dole dokázané.

$(-a, a)$ na ose **X** a z bodů úsečky $(-b; b)$ osy **Y**, při čemž krajní body úseček těch mohou, avšak nemusí, patřiti k oboru konvergence.

210. Vyšetřujme, jaké ještě jiné případy oborů konvergenčních mohou nastati u řady (2) resp. (1). *Předpokládejme tudíž v následujícím, že nenastává ani jeden ze tří právě uvedených jednoduchých případů*, a vezměme v úvahu body $[X, Y]$, pro něž $Y = \lambda X$, kde λ jest pevné číslo kladné; t. j. vezmeme v úvahu body $[X, Y]$ položené na polopaprsku vycházejícím z bodu $[0, 0]$ a procházejícím prvním kvadrantem, o směrnici λ. Pro každý bod toho polopaprsku jest řada (2) buď konvergentní aneb divergentní a rozdělují se tudíž všecky body toho polopaprsku na dvě skupiny horní a dolní (neboť v důsledku věty prvé, nastává-li konvergence pro určitý bod toho paprsku, nastává konvergence i pro každý bod polopaprsku bližší k bodu $[0, 0]$ a obdobně při bodech, ve kterých nastává divergence), při čemž v důsledku předpokladu, jímž jsme vyloučili tři nejjednodušší případy a v důsledku věty prvé bude dolní skupina obsahovati též body různé od $[0, 0]$. Obě ty skupiny jsou rozhraničeny bodem $[\xi, \eta = \lambda\xi]$, tak, že dolní skupina obsahuje body polopaprsku o menším X než ξ (a pro něž řada (2) konverguje), a obdobně body, při nichž $X > \xi$, patří ku horní skupině. Z věty prvé následuje pak téměř ihned, že pro všecky body *uvnitř* pravoúhelníka $P(0, 0; \xi, \eta)$, t. j. pro všecky $[X, Y]$, pro něž $0 < X < \xi$, $0 < Y < \eta$, nastává konvergence řady (2) a pro všecky body oboru Q, daného nerovninami $X > \xi$, $Y > \eta$, nastává její divergence.

Na jiném polopaprsku o směrnici $\lambda' > 0$ existuje obdobně bod $[\xi', \eta']$ tvořící rozhraní mezi body na paprsku položenými, pro něž nastává konvergence řady (2), a mezi body, pro něž nastává divergence řady (2). Bod $[\xi', \eta']$ není položen ani uvnitř pravoúhelníku P, ani v oboru Q. Neboť kdyby ku př. byl uvnitř P, bylo by $\xi' < \xi$, $\eta' < \eta$ a bylo by lze nalézti bod $[\xi'_1, \eta'_1]$ ležící na paprsku o směrnici λ' tak, že $\xi' < \xi'_1 < \xi$, $\eta' < \eta'_1 < \eta$ (takových bodů jest nesčíslné množství). Pro bod $[\xi'_1, \eta'_1]$ nastává však dle důsledku svrchu uvedeného konvergence řady (2); avšak, poněvadž $\xi'_1 > \xi'$, má nastati divergence. Nemůže tedy býti $[\xi', \eta']$ uvnitř P a stejně následuje, že není ve Q. Jsou tudíž pro $[\xi', \eta']$ platny nerovniny

$$\text{buď} \quad \xi' \geqq \xi, \ \eta' \leqq \eta \quad \text{aneb} \quad \xi' \leqq \xi, \ \eta' \geqq \eta,$$

jež se změní, nahradíme-li η' resp. η výrazy $\lambda'\xi'$ resp. $\lambda\xi$,

$$\text{ve} \quad \xi \leqq \xi' \leqq \frac{\lambda}{\lambda'}\,\xi \quad \text{resp. ve} \quad \xi \geqq \xi' \geqq \frac{\lambda}{\lambda'}\,\xi.$$

Z těchto nerovnin jedině možných následuje, že, konverguje-li λ' ku λ, ξ' konverguje ku ξ a bod $[\xi', \eta']$ ku bodu $[\xi, \eta]$. Dále vyplývá, že, je-li $\lambda' > \lambda$ (ve kterémžto případě pouze druhý ze systémů nerovnin může býti správný), $\xi' \leqq \xi$. Jelikož pak můžeme pokládati ξ za funkci čísla λ definovanou v intervalu $(0+0, \infty)$ a klásti

$$\xi = \varphi(\lambda), \quad \eta = \lambda\varphi(\lambda), \tag{I}$$

lze výsledek docílený vysloviti takto: „Funkce $\varphi(\lambda)$ jest funkcí spojitou a nerostoucí proměnné λ". Obdobný výrok lze činiti ovšem i pro $\eta = \lambda\varphi(\lambda)$ a říci zejména: Funkce $\lambda\varphi(\lambda)$ jest funkcí neklesající v intervalu $(0+0, \infty)$.

Tak jsme získali spojitou čáru o rovnicích (I), vymezující spolu s osami **X**, **Y** v prvém kvadrantu jistý obor, jejž označíme Ω_1 a o němž můžeme tvrditi (neboť každý bod prvého kvadrantu jest položen na jednom polopaprsku vycházejícím z $[0, 0]$): *Řada* (2) *jest konvergentní v každém bodě vnitřním oboru* Ω_1 *a divergentní v každém bodě prvého kvadrantu položeným vně oboru* Ω_1 *a neležícím na osách* **X**, **Y**.

Zda nastává konvergence či divergence řady (2) pro body čáry (I), nelze rozhodnouti obecně; můžeme snadno konstruovati řady, které konvergují pro body čáry (I), a rovněž řady, které divergují pro ty body. Body čáry (I) v prvém kvadrantu, pro které konverguje řada (2), budeme čítati k oboru Ω_1, ostatní body té čáry nechť nepatří ku Ω_1.

Pro body uvnitř úseků vytvořených na osách **X**, **Y** čarou (I) — aneb zevrubněji řečeno pro body osy **X** uvnitř intervalu $(0, \lim\limits_{\lambda=0} \varphi(\lambda))$ a obdobně při **Y** — nastává dle věty prvé konvergence; avšak může nastati konvergence i pro body osy **X** resp. **Y** položené vně těch úseků, neboť úvahy předchozí předpokládaly stále $\lambda > 0$, $\lambda' > 0$. Úsek osy **X**, resp. **Y** obsažený v intervale $(0, \lim\limits_{\lambda=0} \varphi(\lambda))$, resp. $(0, \lim\limits_{\lambda=\infty} \lambda\varphi(\lambda))$ budeme čítati rovněž k oboru Ω_1 (bod $[\lim\limits_{\lambda=0} \varphi(\lambda), 0]$ a obdobný bod na ose **Y** však jenom tenkráte, nastává-li v nich konvergence řady (2)).

Postupným zrcadlením dle jednotlivých os dostáváme z oboru Ω_1 postupně obory Ω_2, Ω_3, Ω_4 položené v druhém, třetím a čtvrtém kvadrantu. Obory ty dohromady tvoří obor Ω, o němž lze tvrditi: *Řada* (1) *konverguje absolutně pro všecky body oboru* Ω. *Pro všecky body nepatřící ku* Ω *a neležící na osách* **X**, **Y** *jest řada* (1) *divergentní.*

Jest patrno, že existují-li limity $\lim\limits_{\lambda=0} \varphi(\lambda)$, $\lim\limits_{\lambda=\infty} \lambda\varphi(\lambda)$ (v širším smyslu odst. 28., pozn. 1., existují ty limity vždy), že obor Ω jest oborem konečným a omezeným spojitou čarou skládající se ze čtyř kongruentních částí.

Poznámka. Vedle oboru Ω uvažovati budeme ještě obor $\overline{\Omega}$, který skládá se z oboru Ω, a úseků **X**, **Y**, jež dávají intervaly konvergenční řad $f(x, 0)$, $f(0, y)$ a jichž hraniční body čítáme k oboru Ω, nastává-li pro ně konvergence řady (1). Obor $\overline{\Omega}$ pak jest *oborem konvergenčním řady* (1); pro všecky body tohoto oboru jest řada (1) konvergentní, pro všecky body nepatřící k oboru $\overline{\Omega}$ jest divergentní.

211. *Jestliže množství číselné*

$$A_{ik}X_0^iY_0^k;\ i, k = 0, 1, 2, 3, \ldots;\ X_0 = |x_0|,\ Y_0 = |y_0|,\ A_{ik} = |a_{ik}| \quad (3)$$

jest shora ohraničeno, jest bod $[x_0, y_0]$ *buď bodem oboru* $\overline{\Omega}$ *aneb jest aspoň hraničním bodem toho oboru.* **(Věta druhá.)**

Budiž tedy, abychom to dokázali, horní hranicí množství (3) číslo kladné M. Řadě (2) můžeme dáti tento tvar (vylučujíce při tom triviální případ, že by jedno z čísel X_0, Y_0 bylo rovno nulle)

$$\sum_{i,k} A_{ik}X^iY^k = \sum_{i,k} A_{ik}X_0^iY_0^k\left(\frac{X}{X_0}\right)^i\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^k.$$

Pokládáme-li řadu na pravé straně za řadu mocninnou proměnných $\frac{X}{X_0}$, $\frac{Y}{Y_0}$, vidíme nejprve, že koefficienty té řady v důsledku učiněného předpokladu jsou vesměs menší ($\leq$) než číslo M a že členové řady (2) jsou menší než stejnolehlé koefficienty řady

$$\sum_{i,k} M\left(\frac{X}{X_0}\right)^i\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^k,$$

kteráž jest konvergentní, když $X < X_0$, $Y < Y_0$ a má za součet

$$\frac{M}{\left(1-\frac{X}{X_0}\right)\left(1-\frac{Y}{Y_0}\right)}. \quad (A)$$

Tím spíše jest řada (2) konvergentní pro $X < X_0$, $Y < Y_0$ a jsou tudíž v okolí bodu $[X_0, Y_0]$, t. j. v $O(X_0, Y_0, \varepsilon)$, ať si ε zvolíme jakkoliv malé, body X, Y, pro něž řada (2) jest konvergentní a bod $[X_0, Y_0]$ jest buď uvnitř aneb na hranici oboru Ω_1, čímž věta jest dokázána.

Důsledek. Z věty právě dokázané následuje pro řadu (1): Je-li bod $[x, y]$ bodem vnějším k oboru $\overline{\Omega}$ (konvergenčnímu oboru řady (1)), není množství číselné $|a_{ik}x^iy^k|$ shora ohraničeno.

Jelikož pak pro všecky body $[x, y]$ oboru $\overline{\Omega}$ jest množství číselné $|a_{ik}x^iy^k|$ shora ohraničeno (neboť, je-li řada (1) konvergentní, členové $a_{ik}x^iy^k$ s rostoucím i resp. k konvergují k nulle), vidíme, že, sestrojime-li obor obsahující body $[x, y]$, pro něž množství čísel $| a_{ik} x^i y^k |$ jest shora ohraničeno, dostaneme obor, kterýž, nehledíme-li k bodům hraničním, shoduje se s oborem $\overline{\Omega}$.

Úvahou touto získali jsme prostředek ku vyšetřování oborů konvergenčních u řad mocninných o dvou proměnných. Objasním příslušný postup na několika jednoduchých příkladech, při kterých však podrobné provedení příslušných úvah, ostatně velmi snadných, ponechávám čtenáři.

Příklad 1. Řada

$$1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + \ldots; \quad a_{ik} = 1$$

jest konvergentní pro body uvnitř pravoúhelníka $(-1, -1; 1, 1)$; pro body na hranici pravoúhelníka, jakož i pro body vně pravoúhelníka jest řada divergentní.

Obecněji řada

$$\sum_{i,k} a_{ik} x^i y^k, \quad \text{kde} \quad 0 < \alpha < | a_{ik} | < \beta,$$
$$i, k = 0, 1, 2, \ldots$$

má tentýž obor konvergence; řada pak, pro kterou

$$\frac{\alpha}{R^i S^k} < | a_{ik} | < \frac{\beta}{R^i S^k}$$

má za obor konvergence vnitřek pravoúhelníka $(-R, -S; R, S)$.

Příklad 2. Řada

$$1 + (x + y) + (x + y)^2 + (x + y)^3 + \ldots,$$

pokládáme-li ji za řadu mocninnou argumentu $x + y$, jest konvergentní, když $| x + y | < 1$, což jest nitro pásu omezeného rovnoběžkami $x + y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$. Umocníme-li v jednotlivých členech a odstraníme-li závorky, dostaneme řadu mocninnou o dvou proměnných x, y, jejíž koefficienty jsou

$$a_{ik} = \binom{i + k}{i}$$

a jejíž obor konvergence jest vnitřek čtverce daný vztahem $|x| + |y| < 1$, t. j. vnitřek čtverce omezeného přímkami $x + y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

Příklad 3. Nechť řada potenční jedné proměnné z

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots$$

má za poloměr konvergence $R > 0$. Dosaďme do této řady $z = x + iy$, kde $i^2 = -1$. Umocníme-li v jednotlivých členech a roznásobíme-li, nahražujíce mocniny i buď čísly ± 1 aneb $\pm i$ (dle vztahů $i^{4k} = +1$, $i^{4k+1} = i, \ldots$), obdržíme, podržíme-li jenom členy neobsahující za činitele symbol i, řadu mocninnou o dvou proměnných

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 - b_2 y^2 + b_3 x^3 - 3 b_3 x y^2 + b_4 x^4 - 6 b_4 x^2 y^2 + b_4 y^4 + \ldots$$

Řada tak vzniklá má za obor konvergence čtverec, jehož strany mají rovnice

$$x + y - R = 0,\ x - y - R = 0,\ x + y + R = 0,\ x - y + R = 0.$$

Poznámka. I v tomto odstavci – stejně jako v předcházejícím — jsme předpokládali, že obor konvergence $\overline{\Omega}$ řady (1) obsahuje body $[x, y]$ takové, že žádné z čísel x, y není rovno nulle. *Předpoklad tento podržíme při řadách mocninných o dvou proměnných i v úvahách následujících odstavců* (odst. 212.—216.).

212. Derivace parcielní mocninných řad o dvou proměnných. Řadu (2) můžeme, je-li $[X, Y]$ v oboru Ω_1, uspořádati ku př. takto

$$\sum_i (A_{i0} + A_{i1} Y + A_{i2} Y^2 + \ldots) X^i,\quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Vznikne tak mocninná řada proměnné X, jejížto koefficienty jsou mocninné řady proměnné Y. Dosaďme za Y pevnou hodnotu $Y_0 > 0$; obdržíme řadu proměnné X

$$B_0 + B_1 X + B_2 X^2 + \ldots, \tag{4}$$

kde

$$B_i = A_{i0} + A_{i1} Y_0 + A_{i2} Y_0^2 + \ldots$$

Interval konvergenční řady (4) dostaneme, stanovíme-li průsečíky přímky $Y = Y_0$ s hranicí oboru Ω; mají-li tyto průsečíky souřadnice (X_0, Y_0), $(-X_0, Y_0)$, jest řada (4) jistě konvergentní pro všecka X, pro něž $0 \leqq X < X_0$, po případě ještě pro $X = X_0$. Má tedy (4) derivaci dle X ve všech bodech uvnitř intervalu $(-X_0, X_0)$ a jest ta derivace dána řadou

$$B_1 + 2 B_2 X + 3 B_3 X^2 + \ldots, \tag{5}$$

jež má týž interval konvergenční jako (4). Řadu tuto můžeme psáti opět jako řadu o dvou proměnných X, Y_0. U Y_0 pak můžeme vynechávati index 0. Má tudíž nekonečná řada, již dostaneme z řady (2) derivujíce veškeré členy dle X, tentýž obor konvergence jako řada (2), nehledě ovšem ku hranicím, a jest součet té řady, derivované dle X, derivací dle X součtu řady (2).

Veškeré vývody, provedené právě s řadou (2), přenášejí se téměř beze změny na řadu (1). Jenom jest míti na paměti, že interval konvergenční při řadě, která vznikne z (1) týmž postupem jako (4) ze (2), může býti větší než $(-X_0, X_0)$ a stejně při řadě obdobné ku (5), avšak tato okolnost nemá významu se zřetelem k tomu, že ve výsledku od řad o jedné proměnné přecházíme zase ku řadám o dvou proměnných. Ostatně z úvah předch. odst. jest přímo patrno, že řady dvojné, jež jsou k sobě v témž vztahu jako řady (1) a (2), mají vždy týž obor konvergence. Tak máme větu:

Označíme-li součet řady (1) krátce $f(x, y)$, jest

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sum_{i,k} i a_{ik} x^{i-1} y^k; \quad i=1,2,3,\ldots; \quad k=0,1,2,\ldots \tag{6}$$

a obdobně

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\sum_{i,k} k a_{ik} x^{i} y^{k-1}; \quad i=0,1,2,\ldots; \quad k=1,2,3,\ldots \tag{6'}$$

Obory konvergenční řad tak vzniklých shodují se — nehledě ku bodům na hranicích oboru Ω a intervalů konvergenčních na osách **X, Y** *— s oborem $\overline{\Omega}$, konvergenčním to oborem řady* (1).

Poznámka. Při vývodech předcházejících byla vyloučena hodnota $Y_0=0$ (a tudíž i $y=0$). Avšak pro $y=0$ (resp. $Y_0=0$) se řady (1) a (2) mění na řady o jedné proměnné a v tomto specielním případě jest bezprostředně patrna správnost věty dokázané.

213. Řadu vzniklou derivováním dle x resp. dle y řady (1) můžeme opět derivovati dle x i dle y a tak neomezeně a dostaneme řady pro funkce

$$\frac{\partial^{j+l} f}{\partial x^j \partial y^l}; \quad j, l=0,1,2,\ldots,$$

jichž obory konvergence — nehledíme-li ku bodům svrchu vyňatým — shodují se s $\overline{\Omega}$.

Zvláště pak dostáváme, značíme-li $(\varphi)_0$ hodnotu funkce $\varphi(x, y)$ v bodě [0, 0]

$$a_{00}=(f)_0, \quad a_{10}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \quad a_{01}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$$

a obecně

$$a_{ik}=\frac{1}{i!\,k!}\left(\frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \partial y^k}\right)_0 \tag{B}$$

a řadu (1) lze tedy vypisovati též takto

$$f(x, y)=\sum_{i,k}\frac{x^i y^k}{i!\,k!}\left(\frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \partial y^k}\right)_0, \quad i, k=0,1,2,\ldots \tag{7}$$

Poznámka 1. Můžeme s ohledem na výraz (*A*) odst. 211. psáti

$$|f(x, y)-f(0,0)|=|f(x, y)-a_{00}|<\frac{M}{\left(1-\frac{X}{X_0}\right)\left(1-\frac{Y}{Y_0}\right)}-M,$$

při čemž M, X_0, Y_0 podržují význam vyložený v odst. 211. a $X = |x|$, $Y = |y|$, a při čemž se předpokládá, že $[x, y]$ se nachází uvnitř $(-X_0, -Y_0, X_0; Y_0)$. Z této nerovniny vyplývá ihned věta, že *funkce* $f(x, y)$ *jest v bodě* $[0, 0]$ *spojitou funkcí bodu* $[x, y]$. Neboť následuje z ní

$$\lim_{[x,y]=[0,0]} | f(x, y) - f(0, 0) | \leqq \lim_{[X,Y]=[0,0]} \left\{ \frac{M}{\left(1 - \frac{X}{X_0}\right)\left(1 - \frac{Y}{Y_0}\right)} - M \right\} = 0.$$

Jelikož však každá derivace jest opět řada potenční dvou proměnných s oborem konvergence buď stejným aneb odlišným toliko v hraničných bodech, můžeme tvrditi, že i *každá parcielní derivace funkce* $f(x, y)$ *jest v bodě* $[0, 0]$ *funkcí spojitou bodu* $[x, y]$.

Poznámka 2. Z vyjádření (7) následuje, že součinitelé řady mocniné o dvou proměnných, definující svým součtem v oboru konvergenčním Ω a tedy i v jistém okolí bodu $[0, 0]$ funkci $f(x, y)$, jsou jednoznačně stanoveny hodnotami té funkce a všech jejích derivací v bodě $[0, 0]$. Můžeme tudíž vysloviti tuto větu pro řady potenční o dvou proměnných (**větu o neurčitých součinitelích při dvou proměnných**). Mají-li dvě mocninné řady proměnných x, y ve všech bodech okolí $O(0, 0, \varepsilon)$, kde ε jest libovolné (kladné) číslo, stejné součty, jsou mocninné ty řady identicky sobě rovny.

Můžeme ostatně píšíce řadu dvojnou ve tvaru součtu řady jednoduché

$$\sum_i (a_{i0} + a_{i1}y + a_{i2}y^2 + \ldots) x^i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

a používajíce postupně dvakráte věty o neurčitých součinitelích pro řady řady mocninné o jedné proměnné, snadno dokázati, že dvě řady mocninné o dvou proměnných se identicky shodují, jsou-li jich součty sobě rovny ve všech bodech

$$[x_j, y_k], \quad j, k = 1, 2, 3, \ldots; \tag{α}$$

při tom jenom předpokládáme, že jednak hodnoty v řadě $x_1, x_2, x_3, \ldots$, jednak v řadě $y_1, y_2, y_3, \ldots$ jsou mezi sebou různy (obě řady pak mají nekonečné množství členů), a dále předpokládáme, že body zhuštění množství bodového (α) nespadají na hranice oborů konvergenčních. Z této věty pak následuje bezprostředně následující věta o neurčitých součinitelích pro mocninné řady o dvou proměnných: *Mají-li dvě mocninné řady proměnných* x, y *ve všech bodech okolí* $O(x_0, y_0; \varepsilon)$ *stejné součty, jsou mocninné ty řady sobě identicky rovny*; ε jest libovolné číslo kladné. Jestliže bod $[x_0, y_0]$ ješt hraničním bodem oboru Ω (odst. 210.) pak jest postačitelno požadovati rovnost součtu v té části okolí $O(x_0, y_0; \varepsilon)$, jež spadá do Ω.

214. Výsledek (7) lze zevšeobecniti a odvoditi tak **větu Taylorovu pro mocninné řady o dvou proměnných.** Za tím účelem klaďme do (1) za x, y hodnoty x_0+h, y_0+k. Obdržíme, je-li bod $[x_0+h,\ y_0+k]$ uvnitř oboru Ω, řadu, jejížto součet jest $f(x_0+h,\ y_0+k)$. Proveďme umocnění v jednotlivých členech, pak vykonejme roznásobení součiniteli a uspořádejme dle mocnin čísel h, k. Dostaneme mocninnou řadu proměnných h, k, která bude míti jistě týž součet (rovný $f(x_0+h,\ y_0+k)$), je-li řada vzniklá po roznásobení absolutně konvergentní. Abychom to aspoň v hlavních případech mohli rozhodnouti, proveďme obdobné operace s řadou (2), kladouce tam $X=X_0+H$, $Y=Y_0+K$, kde $X_0=|x_0|$, $Y_0=|y_0|$, $H=|h|$, $K=|k|$, a předpokládejme, že žádné z čísel X, Y není rovno nulle. Aby touto substitucí vznikla řada konvergentní, musí $[X_0+H,\ Y_0+K]$ býti v oboru Ω_1 (po případě na jeho hranicích); v řadě tak vzniklé se roznásobení a uspořádání dle mocnin čísel H, K dá provésti, aniž by se měnila konvergence a součet řady, neboť roznásobením v jednotlivých členech rozpadá se každý starý člen v součet kladných členů nových a jest řada po roznásobení vzniklá jistě konvergentní a ovšem absolutně. Tím spíše bude i řada mocninná proměnných h, k, již jsme svrchu obdrželi, konvergentní a dávati za součet $f(x_0+h,\ y_0+k)$, pokud ovšem $[X_0+H,\ Y_0+K]$ jest v oboru Ω_1, t. j. jinak řečeno, pokud $[|x_0|+|h|,\ |y_0|+|k|]$ jest v oboru Ω_1.

Za předpokladu tedy, že bod $[|x_0|+|h|,\ |y_0+k|]$ jest uvnitř Ω_1, jest možno $f(x_0+h,\ y_0+k)$ psáti jako potenční řadu proměnných h, k. Užijeme-li na ni rozvoje (7), při čemž ovšem místo x, y nastupují h, k a při čemž zároveň užíváme evidentní rovnosti

$$\left[\frac{\partial^{i+j} f(x_0+h,\ y_0+k)}{\partial h^i\, dk^j}\right]_{\substack{h=0\\ k=0}} = \left[\frac{\partial^{i+j} f(x,\ y)}{\partial x^i\, \partial y^j}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},$$

dostaneme obecný Taylorův rozvoj pro potenční řady o dvou proměnných

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=\sum_{i,j}\frac{h^i\, k^j}{i!\, j!}\cdot\left[\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i\, \partial y^j}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}. \tag{8}$$

Klademe-li v něm $h=x-x_0$, $k=y-y_0$, máme též

$$f(x,\ y)=\sum_{i,j}\frac{(x-x_0)^i\,(y-y_0)^j}{i!\ j!}\cdot\left[\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i\, \partial y^j}\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}. \tag{9}$$

Větu pro obor konvergence řady (8) anebo, což jest totéž, řady (9) dostaneme snadno v důsledku úvahy svrchu provedené. Předpokládáme-li, že $[x_0,\ y_0]$ jest bodem prvého kvadrantu, t. j. že $x_0 \geqq 0$, $y_0 \geqq 0$, postačí vést rovnoběžky **X′**, **Y′** s osami **X**, **Y**. Rovnoběžky **X′**, **Y′** vytnou z oboru Ω_1

jistý obor Ω'_1, ze kterého zrcadlením na **X'**, **Y'** získáváme obor Ω' (obdobně jako v odst 210. jsme získali obor Ω), kterýžto obor se zřetelem ku systému souřadnicovému danému osami **X'**, **Y'** bude dávati obor takový, že jsou li $[h, k]$ resp $[x - x_0, y - y_0]$ vnitřní body toho oboru, nastane konvergence řady (8) resp. (9). Obdobně by se sestrojil obor Ω', kdyby $[x_0, y_0]$ byl bodem kvadrantu jiného než prvého.

Avšak obor konvergence řady (8) resp. (9) může přesahovati obor Ω' právě popsaný. V tomto případě nám dává (9) určitý součet i v části roviny **X**, **Y**, jež jest položena vně oboru $\overline{\Omega}$, t. j. dává rozvoj (9) **pokračování funkce** $f(x, y)$ dané původně rozvojem (1) v oboru $\overline{\Omega}$. (Viz obdobné úvahy při potenčních řadách o jedné proměnné, odst. 147.).

Řadu (9) mohli bychom psáti ve tvaru řady jednoduché (obdobně ku řadě (B) odst. 208.) takto

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial r_0} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y_0}\right)^n f(x_0, y_0).$$

kde symboly užité mají význam na snadě ležící. Řada tato (jakož na příkladě bylo již svrchu vytčeno. př. 3., odst. 211.) může míti přirozeně větší obor konvergence než řada dvojná (9).

Poznámka. Užijeme li na řadu (8) řadu to potenční proměnných h, k, poznámky odst. předch., vidíme nejprve, že, je-li $[x_0; y_0]$ bod vnitřní oboru $\overline{\Omega}$, jest

$$\lim_{h=0,\, k=0} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0).$$

t. j. že součet řady (1) jest spojitou funkcí bodu $[x, y]$ v každém bodě vnitřním oboru $\overline{\Omega}$. Totéž jest platno i pro každou částečnou derivaci unkce $f(x, y)$.

Se zřetelem ku větám o totálních differenciálech můžeme tudíž vysloviti větu: *Součet řady potenční o dvou proměnných* $[x, y]$, jejíž obor konvergenční $\overline{\Omega}$ neomezuje se pouze na úseky os **X**, **Y**, *definuje v oboru konvergenčním funkci, která v každém bodě vnitřním toho oboru má totální differenciály všech řádů.*

215. Stejně jako při mocninných řadách o jedné proměnné zavádíme i při mocninných řadách o dvou proměných **majorantní funkce**. Tak pravíme, že ku řadě (1) jest majorantní funkcí (řadou) řada

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x^i y^j, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots,$$

jestliže pro všecka připustná i, j jest splněna rovnost

$$|a_{ij}| \leq \alpha_{ij}.$$

Jest snadno sestrojiti majorantní funkci dosti jednoduchou ku řadě (1) na základě úvah odst. 211. Je-li množství číselné (3) svrchu ohraničeno majíc za horní hranici M, jest patrně

$$A_{ij} X_0^i Y_0^j \leqq M, \text{ t. j. } A_{ij} \leqq M X_0^{-i} Y_0^{-j}$$

aneb

$$|a_{ij}| \leqq \frac{M}{X_0^i Y_0^j} \text{ a můžeme tedy klásti } \alpha_{ij} = \frac{M}{X_0^i Y_0^j}, \tag{10}$$

čímž obdržíme majorantní funkci (provedeme-li sčítání příslušné dvojné řady, jakož vlastně již v odst. 211. bylo provedeno) rovnou výrazu

$$\varphi(x, y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{X_0}\right)\left(1 - \frac{y}{Y_0}\right)}. \tag{11}$$

Rovněž funkci

$$\psi(x, y) = \frac{M}{1 - \left(\frac{x}{X_0} + \frac{y}{Y_0}\right)} \tag{12}$$

bychom za stejných předpokladů o číslech M, X_0, Y_0 mohli voliti za majorantní ku (1), neboť koefficienty v rozvoji této funkce v řadu mocninnou proměnných x, y jsou také kladné a ještě větší než při funkci $\varphi(x, y)$.

Existují tedy ke každé řadě dvojné, jejíž obor konvergenční obsahuje také body neležící na osách **X**, **Y**, funkce majorantní tvaru (11), (12), v nichž $X_0 > 0$, $Y_0 > 0$; zejmena pak lze vždy vhodnou volbou kladných čísel M, X_0, Y_0 docíliti, aby splněny byly nerovnosti (10).

216. Majorantních funkcí použijeme ku rozšíření věty odst. 153 pro řady mocninné o dvou proměnných. Budiž dána řada mocninná postupující dle mocností rozdílů $v - v_0$, $w - w_0$

$$F(v, w) = \sum_{i,j} a_{i,j} (v - v_0)^i (w - w_0)^j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{13}$$

a jež má obor konvergence Ω obsahující též body $[v, w]$ takové, že oba rozdíly $v - v_0$, $w - w_0$ jsou různy od nully. Dosaďme do této řady definující v Ω funkci $F(v, w)$ za v, w dle rovnic $v = f(x, y)$, $w = g(x, y)$ za předpokladu, že funkce f, g lze rozvinouti v jistém okolí bodu $[x_0, y_0]$ v řady mocninné konvergentní, tak, že lze psáti v tom okolí

$$\begin{aligned} v - v_0 &= \sum_{r,s}' b_{r,s} (x - x_0)^r (y - y_0)^s, \\ w - w_0 &= \sum_{r,s}' c_{r,s} (x - x_0)^r (y - y_0)^s, \end{aligned} \quad r, s = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{14}$$

při čem čárka u znaménka součtového Σ znamená, že vyloučen jest případ, kde současně r i s jsou rovny nulle. Provedeme-li dosazení, umocnění, roznásobení a uspořádání výsledku dle mocnin rozdílů $x - x_0$,

$y - y_0$, vznikne řada potenční postupující dle mocností těchto rozdílů i tážeme se, zda řada mocninná tak vzniklá jest konvergentní, když $[x, y]$ jest v některém okolí bodu $[x_0, y_0]$, a zda dává tam za součet $F(f(x, y), g(x, y))$. Tyto otázky rozhodneme snadno pomocí majorantních funkcí. Jest totiž patrno, že bude li u majorantních funkcí odpověď kladná, tím spíše bude i při daných funkcích odpověď kladná. Příslušná úvaha zevrubně byla provedena v odst. 153. při řadách mocninných o jedné proměnné; opakovati ji tu netřeba. U majorantních funkcí však stačí prostá konvergence řady po dosazení vzniklé, abychom mohli dáti odpověď kladnou; neboť umocněním a roznásobením rozpadne se každý člen (který jest kladný za předpokladu, že proměnné jsou kladné) v součet nekonečného množství kladných členů; vznikne tedy řada množná, konvergentní, avšak o členech vesměs kladných — tudíž absolutně konvergentní — a libovolné přeskupení a sloučení jest možno aniž by byla dotčena konvergence a součet řady. K tomuto cíli vhodné majorantní funkce lze voliti takto. Nejprve ku $F(v, w)$ jest majorantní funkcí výraz

$$\sum_{i,j} A_{i,j}(v-v_0)^i(w-w_0)^j, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

kde stejně jako svrchu jest $A_{i,j} = |a_{i,j}|$. Výraz tento má týž obor konvergence jako řada pro $F(v, w)$. Ku řadám pro $v - v_0$, $w - w_0$ dostaneme, vycházejíce od bodu $[\xi_0, \eta_0]$, kde $\xi_0 > 0$, $\eta_0 > 0$ a kde nad to ξ_0, η_0 jsou voleny tak, aby obě řady pro $x - x_0 = \xi_0$ $y - y_0 = \eta_0$ konvergovaly absolutně, dle návodu odst. 215. tyto majorantní funkce

$$v - v_0 \ll \frac{M}{1 - \left(\frac{x-x_0}{\xi_0} + \frac{y-y_0}{\eta_0}\right)} - M,$$

$$w - w_0 \ll \frac{N}{1 - \left(\frac{x-x_0}{\xi_0} + \frac{y-y_0}{\eta_0}\right)} - N,$$

$M > 0$, $N > 0$; běží pak o to rozhodnouti, kdy dosazením výrazů na pravých stranách těchto vztahů do (15) vznikne absolutně konvergentní řada. Ponechávaje podrobné provedení výpočtu čtenáři napíši jenom výsledky. K absolutní konvergenci žádané postačí, když

$$\frac{|x-x_0|}{\xi_0} + \frac{|y-y_0|}{\eta_0} < \frac{\varphi\left(\frac{N}{M}\right)}{M + \varphi\left(\frac{N}{M}\right)}. \tag{16}$$

Při tom jest předpokládáno, že obor konvergence řady (13) a tudíž i (15) jest ohraničen křivkou o rovnicích $v - v_0 = \varphi(\lambda)$, $w - w_0 = \lambda\varphi(\lambda)$ (viz odst. 210.) Obor v (16) vymezený jest čtyřúhelník symmetrický dle rovnoběžek s osami **X**, **Y** procházejících bodem $[x_0, y_0]$ a máme tak tento výsledek: *Provedeme-li dosazení řad* (14) *do řady* (13), *vznikne řada, která jest absolutně konvergentní aspoň v oboru vymezeném nerovninou* (16).

Poznámka. Jednodušší by bylo vyšetření řady, jež vznikne, dosadíme-li do řady mocninné o jedné proměnné u za u řadu mocninnou o dvou proměnných, po případě vyšetření řady, ku které dospějeme od řady mocninné o dvou proměnných u, v, dosadíme-li za u, v řady mocninné o jedné proměnné. Ostatně lze úvahy příslušné pokládati za specielní případy úvahy v odstavci tomto provedené.

Rovněž netřeba tu dokazovati větu: Podíl $f(x, y) : g(x, y)$ dvou řad mocninných

$$f(x, y) = \sum_{i, k} a_{ik} x^i y^k, \quad g(x, y) = \sum b_{ik} x^i y^k$$
$$i, k = 0, 1, 2, \ldots$$

takových, že jednak obory konvergenční obou těchto řad obsahují body $[x, y]$, v nichž žádné z čísel x, y není rovno nulle, jednak $b_{00} \neq 0$, lze rozvinouti v řadu mocninnou proměnných x, y, jejíž obor konvergenční obsahovati bude body $[x, y]$, v nichž žádné z čísel x, y není rovno nulle.

Důkaz této věty jest úplně týž jako důkaz věty pro podíl potenčních řad o jedné proměnné (odst. 154.).

217. Veškeré vývody podané v předch. odstavcích (odst. 20. —216.) pro řady mocninné rozšiřují se téměř beze změny i pro řady mocninné o třech, resp. obecně o n proměnných a není třeba podrobně příslušné úvahy podávati. Užívajíce znaménka součtového, můžeme takovou řadu o n proměnných vyznačovati takto

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots i_n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots\ldots x_n^{i_n} \quad i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

I součet této řady definuje v oboru konvergenčním (kterýžto obor konvergenční obsahuje jakožto hlavní součást jistý obor spojitý n-rozměrný, jestliže obsahuje aspoň jeden bod $[x_1, x_2, \ldots x_n]$, kde žádné z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ není rovno nulle) funkci n proměnných mající ve všech bodech vnitřních oboru konvergenčního differenciály totální všech řádů.

Rovněž lze rozšířiti pro tyto řady pojem funkce (řady) majorantní. Různé jednoduché tvary pro majorantní funkci při řadách mocninných o třech proměnných jsou ku př. tyto

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x}{R}\right)\left(1 - \frac{y}{S}\right)\left(1 - \frac{z}{T}\right)}, \quad \frac{M}{1 - \left(\frac{x}{R} + \frac{y}{S} + \frac{z}{T}\right)},$$

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x}{R}\right)\left(1 - \left(\frac{y}{S} + \frac{z}{T}\right)\right)}$$

při čemž R, S, T jsou čísla kladná a taková, že $[R, S, T]$ jest bodem vnitřním oboru konvergenčního. M pak jest číslo vhodně volené. Kdyby v dané řadě mocninné součinitel a_{000} byl rovný nulle, mohli bychom od každého ze tří právě uvedených výrazů pro majorantní funkce odčítati M a výrazy by zůstaly i po odečtení majorantními funkcemi. A obdobně tomu jest i při n proměnných.

X. Funkce implicitní. Funkcionální determinanty.

218. Hodnoty funkce neodvisle proměnné mohou býti stanoveny pomocí rovnice dávající nám vztah mezi funkcí a neodvisle proměnnou, při čemž ovšem k úplné definici funkce zpravidla jest třeba ještě vedlejších podmínek. Tak ku př. rovnice

$$y^2 + x^2 = 1 \quad \text{s podmínkou } y \geqq 0$$

nám stanoví úplně y jakožto funkci proměnné x v intervalu $(-1, 1)$. Funkcím takovým říká se obyčejně **implicitní funkce**. V následujícím si odvodíme základní věty, které nám dávají ve velmi obecných případech možnost rozhodovati o existenci implicitních funkcí.

219. Implicitní funkce o jedné neodvisle proměnné. *Budiž $F(x, y)$ funkcí dvou proměnných x, y definovanou v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Předpokládejme dále*

1. *že* $F(x_0, y_0) = 0$.

2. *že funkce $F(x, y)$ má derivace v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a v tomto bodě dle proměných x, y a že derivace ty jsou funkce spojité (v bodě a okolí). Označíme je $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$.*

3. *že* $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje jedna jediná spojitá funkce $\varphi(x)$ proměnné x, jež pro $x = x_0$ stává se rovnou y_0 a jež jest definována také pro všecky body jistého okolí bodu x_0, taková, že pro body tohoto okolí jest

$$F(x, \varphi(x)) = 0.$$

Funkce tato má derivaci (stále ve zmíněném okolí bodu x_0 a v bodě x_0) danou rovnicí

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))},$$

kteráž jest spojitou funkcí proměnné x.

Přirozeně můžeme tuto funkci $\varphi(x)$ pokládati za řešení rovnice $F(x, y) = 0$ dle y a sice to řešení, které dává y, když x jest v x_0 a jeho okolí, jakožto funkci spojitou a které se redukuje na y_0 pro $x = x_0$,