Část druhá.

Počet differenciální pro funkci o jedné proměnné.

VI. Derivace funkce jedné proměnné.

1. Základní definice.

95. Definice derivace. Budiž dána funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) a nechť jest x některá hodnota uvnitř toho intervalu. Uvažujme pak poměr

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{I}$$

ve kterémž h jest číslo takové, že $x+h$ jest také v intervalu (a, b) Poměr tento může míti limitu, když h se blíží k nulle; limitě této pak říkáme *derivace funkce* $f(x)$ *v bodě* x *a značíme ji* $f'(x)$. Jest tedy

$$f'(x)=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{II}$$

Tak ku př. je-li $f(x)=x^2$, jest derivace této funkce dána limitou

$$\lim_{h=0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h=0}(2x+h)=2x.$$

Výsledek tento píšeme tímto způsobem snadno srozumitelným

$$(x^2)'=2x \tag{α}$$

a podobně nám značí $(e^x)'$ derivaci funkce e^x dle proměnné x. Označení ve (II) použité poskytuje tu výhodu, že při něm můžeme udati zevrubně i zvláštní hodnotu neodvisle proměnné, pro kterou jest vypočtena derivace; tak ku př. značky $f'(c)$, $f'(2)$ značí derivace funkce $f(x)$ a to prvá značka derivaci v bodě $x=c$, druhá derivaci v bodě $x=2$.

Poznámka. Vedle označení vytčených ustálila se v počtu differenciálním ještě jiná označení, z nichž některá budeme užívati v následujícím, následkem čehož jest třeba je seznati.

Nejstručnější značkou pro derivaci funkce $y = f(x)$ jest y', při ní není však vytčen znak neodvisle proměnné, dle které se derivuje; značky této lze užívati ovšem jenom tenkráte, když není třeba obávati se nedorozumění.

Obšírněji lze derivaci funkce y dle x značiti výrazy $D_x y$, $D_x f(x)$.

Další velmi často užívané označení vzniklo v důsledku definice derivace (a v důsledku zavedení t. zv. differenciálů, o nichž později bude řeč). Čitatel výrazu (I) jest vlastně přírůstek funkce $f(x)$ vzniklý, když proměnná x vzroste o h; tedy h — t. j. jmenovatel výrazu (I) — jest přírůstkem proměnné x. Značíme pak přírůstky funkce $y = f(x)$ resp. neodvisle proměnné x pomocí řeckého Δ píšíce pro ně Δy, $\Delta f(x)$ resp. Δx. Píšeme tedy

$$y + \Delta y = f(x + h), \quad f(x + h) - f(x) = \Delta y, \quad h = \Delta x, \tag{β}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

V souvislosti s posledním výrazem píše se pro $f'(x)$ též

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Jsou tedy celkem pro derivaci funkce $y = f(x)$ dle x v následujícím používány tyto značky

$$f'(x), \quad [f(x)]', \quad y', \quad D_x f(x), \quad D_x y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx};$$

stejná označení s náležitou změnou ovšem zavádějí se i při jiných neodvisle proměnných.

96. *Má-li funkce $f(x)$ v bodě x derivaci, jest v bodě tom spojitá.* Neboť můžeme psáti

$$f(x + h) - f(x) = h \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

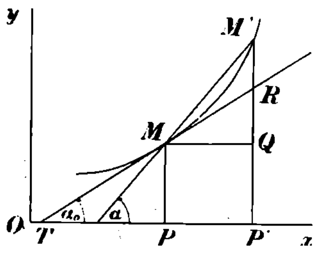
a přejdeme-li k limitě pro $\lim h = 0$, (pravá strana má limitu rovnou nulle, jelikož druhý činitel na pravé straně má limitu $f'(x)$, první nullu)

$$\lim_{h = 0} (f(x + h) - f(x)) = 0, \quad \lim_{h = 0} f(x + h) = f(x),$$

čímž tvrzení dokázáno.

Poznámka. Užíváme-li symbolů Δy, Δx, můžeme tvrditi, že $\lim\limits_{\Delta x = 0} \Delta y = 0$, existuje-li y' (v bodě x).

97. Geometrický význam derivace. Znázorníme-li si graficky funkci $y = f(x)$ tím, že v pravoúhlém systému souřadnicovém XY nakreslíme křivku, jejíž rovnice jest $y = f(x)$, můžeme dáti pojmu derivace zvláštní geometrický význam. Zvolme na dané křivce bod M o souřadnicích (x, y), při čemž ovšem $y = f(x)$; zvolme si pak na ní ještě jiný bod M' o souřadnicích $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, při čemž $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Přímka MM' spojující oba body M, M' sluje *sečná* dané křivky. Směrnice té sečné jest patrně (viz obr. 1.)



Obr. 1.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{QM'}{MQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Má-li tento výraz limitu pro $\lim \Delta x = 0$ — t. j. má-li $f(x)$ derivaci v bodě x —, má i $\operatorname{tg} \alpha$ jistou limitu $\operatorname{tg} \alpha_0$ (když $\lim \Delta x = 0$) a to takovou, že

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Když Δx blíží se k nulle, pak M' se blíží ku M a sečná MM' se blíží přímce TM procházející bodem M a svírající s osou X úhel α_0, až v limitě s touto přímkou splývá. Přímce té říká se **tečná křivky** $y = f(x)$ v bodě M a *derivace* $f'(x)$ *jest směrnicí* té tečné.

Poznámka. O vlastnostech funkcí $f(x)$, jež jsou přístupny geometrickému znázornění zde použitému, odvodíme teprve později věty příslušné. Poznáme, že křivky ty jsou druhu velmi specielního a nemůže tedy tvořiti geometrický názor podklad pro odvozování vět platných obecně pro funkce spojité. Z této příčiny používáno jest v této knize geometrického znázornění jenom jako podpory k objasnění výkladu, nikdy však jako prostředku anebo pomůcky důkazu.

98. Pravidla pro počítání derivací. 1. Je-li $f(x)$ v intervalu (a, b) rovna stále téže konstantě, jest derivace té funkce v každém bodě uvnitř intervalu (a, b) rovna nulle; neboť je-li $f(x) = C$, $f(x + h) = C$, jest výraz (I) rovný nulle a tedy i limita jeho pro $\lim h = 0$ jest rovna nulle.

2. Buďtež $u, v, w, \ldots$ funkce proměnné x mající derivace v bodě x; ty jsou dány limitami (při tom jest $u + \Delta u$ hodnota funkce u, když neodvisle proměnná má hodnotu $x + \Delta x$, viz (β))

$$u' = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad v' = \lim \frac{\Delta v}{\Delta x}, \quad w' = \lim \frac{\Delta w}{\Delta x}, \ldots \quad \text{pro } \lim \Delta x = 0.$$

Stanovme derivaci funkce $y = u + v - w + \ldots$ Přírůstek funkce y, t. j. $\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w + \ldots$ a tudíž

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} + \ldots$$

Poněvadž limity členů na pravé straně, když $\lim \Delta x = 0$, existují, existuje i limita levé strany a jest tudíž

$$y' = u' + v' - w' + \ldots, \qquad (1)$$

kterýžto vztah nám dává pravidlo pro **derivaci součtu** (resp. rozdílu).

3. Budiž $y = uv$ za týchž předpokladů o u a v jako v předcházející úvaze. Tu jest

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x.$$

Přejdeme-li k limitě pro $\lim \Delta x = 0$, jest ihned (poslední člen pravé strany má limitu rovnou nulle)

$$y' = uv' + vu', \qquad (2)$$

což dává pravidlo pro **derivaci součinu** *dvou funkcí.*

4. Nechť jest dále (stále za předpokladu, že existují u', v') $y = \frac{u}{v}$. Pak jest

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Při tom předpokládáme, že v jest různo od nully v bodě, o nějž jde, a že Δx jest již tak malé, aby i $v + \Delta v$ bylo stále různo od nully. Přechodem limitním máme z poslední rovnice ihned

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \qquad (3)$$

pravidlo to pro **derivaci podílu** *dvou funkcí.*

5. **Derivace funkcí inversních**. Nechť funkce $f(x)$ jest taková, že rovnice $y = f(x)$ definuje také x jako funkci y, tak že rovnice $x = \varphi(y)$ jest předcházející rovnici ekvivalentní (viz zevrubně o tom v odst. 82.). *Má-li funkce $f(x)$ derivaci v bodě x různou od nully, má funkce inversní $\varphi(y)$ rovněž derivaci v bodě y* (příslušném ku x na základě vztahu $y = f(x)$) *a derivaci tu můžeme snadno vypočísti pomocí derivace funkce $f(x)$.*

Neboť jest (jestliže $\lim \Delta x = 0$, jest $\lim \Delta y = 0$ a naopak, viz odst. 96. a 82.)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \varphi'(y) = \lim_{\Delta y = 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Rovnici poslední můžeme dáti tvar

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'(f(x))} \tag{4}$$

na základě jehož můžeme vypočísti derivaci funkce $f(x)$, známe-li derivaci funkce inversní $\varphi(x)$ a naopak.

6. **Derivace funkce funkce.** Budiž $y = F(u)$, kde $u = f(x)$; značme zase $u + \Delta u = f(x + \Delta x)$. Pak jest

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta x} = \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{m}$$

Nechť má u derivaci dle x v bodě x a $F(u)$ derivaci dle u v bodě $u = f(x)$ (již označíme $F'(u)$). Přejděme k limitám v poslední rovnici pro $\lim \Delta x = 0$ (pak i $\lim \Delta u = 0$), i dostaneme

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u = 0} \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{n}$$

aneb

$$y' = F'(u) \,.\, u' \tag{5}$$

čímž dáno pravidlo pro derivaci funkce funkce.

Poznámka 1. Rovnice (m) jest v odvození podaném v platnosti jenom tenkráte, když Δu není rovno nulle pro příslušné Δx. Jestliže však $\Delta u = 0$, postačí k zachování platnosti rovnice (m) klásti místo podílu

$$\frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u},$$

který ztrácí význam, když $\Delta u = 0$, vždy v tomto případě $(\Delta u = 0)$ hned $F'(u)$. Správnosť rovnice (n) touto substitucí nebude rovněž dotčena a výsledek docílený tím nijak nebude porušen. Touto úvahou získává rovnice (5) platnost i tenkráte, když Δu pro nekonečné množství Δx, konvergujících k nulle, stává se nullou. V tomto případě ovšem derivace funkcí $F(u)$, u dle x, existují-li vůbec, jsou rovny nulle, jak snadno patrno, čímž pro ten případ na novo potvrzena správnost rovnice (5).

Poznámka 2. Jako zvláštní případy často se vyskytující uvádím rovnice

$$(F(a \,.\, x))' = a\, F'(a \,.\, x), \quad (F(a\, x + b))' = a\, F'(a\, x + b). \tag{6}$$

Příklady. 1. *Nejprve jest, je-li* $y = x$, $y' = 1$ (plyne přímo z definice derivace).

2. *Jestliže jest* $y = C x$, *jest* $y' = C$ (rovněž důsledek definice).

3. Je-li $y = a\, f(x)$, kde a konstanta, jest $y' = a\, f'(x)$ (z definice).

4. Větu pro derivování součinu můžeme poněkud zevšeobecniti. Nejprve můžeme ji psáti ve tvaru

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ aneb } \frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

Máme-li tři faktory u_1, u_2, u_3, položme v poslední rovnici $u = u_1$, $v = u_2 u_3$ a užijme k výpočtu derivace v opět poslední rovnice; dostaneme postupně

$$\frac{(u_1 u_2 u_3)'}{u_1 u_2 u_3} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{(u_2 u_3)'}{u_2 u_3} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \frac{u'_3}{u_3}.$$

Tak vyplývá obecně

$$\frac{(u_1 u_2 u_3 \ldots u_n)'}{u_1 u_2 u_3 \ldots u_n} = \frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \frac{u'_3}{u_3} + \ldots + \frac{u'_n}{u_n}. \qquad (\alpha)$$

5. Rovnice (α) můžeme použíti na výpočet derivace funkce $y = x^n$, kde n celé kladné. Klademe nejprve $u_1 = u_2 = u_3 = \ldots = u_n = u$ a dostaneme

$$\frac{(u^n)'}{u^n} = n\,\frac{u'}{u},\ (u^n)' = n\,u'u^{n-1}, \qquad (\beta)$$

a pro $u = x$

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}, \qquad (\gamma)$$

kterýžto výsledek bychom mohli ovšem získati též pomocí binomické věty.

6. K výpočtu derivace funkce $y = \sqrt[n]{x}$ postačí uvážiti, že tato funkce jest inversní ku funkci $x = y^n$, že tedy dle (4) a (γ) jest

$$\left[f(x) = x^{\frac{1}{n}},\ \varphi(y) = y^n,\ \varphi'(y) = n\,y^{n-1}\right]$$

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\,x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1} \qquad (\delta)$$

7. Derivaci funkce $y = x^{\frac{p}{q}}$ stanovíme, použijeme-li vztahu (β) a (δ) $\left[\text{v prvém kladouce } n = p,\ u = x^{\frac{1}{q}}\right]$; obdržíme

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = p\,.\,\frac{1}{q}\,x^{\frac{1}{q}-1}\cdot\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}$$

Jest tedy rovnice (γ) platná pro každé n racionálné kladné; rovněž snadno jest ku př. dle pravidla o derivování podílu rozšířiti platnost její i pro n racionálná záporná.

8. Derivace mnohočlenu $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ jest

$$y' = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}$$

(dle pravidla o derivování součtu a dle příkladu 3. a 5.).

99. Derivace elementárních funkcí. 1. *Derivace logarithmu.* Počítejme nejprve derivaci přirozeného logarithmu. Jest dle definice logarithmu

$$(\log x)' = \lim_{h=0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \cdot \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h=0} \frac{x}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right).$$

V rovnicích těchto jest x jistá kladná hodnota; klaďme v nich δ místo $\frac{h}{x}$, pak bude δ veličinou současně s h konvergující k nulle a dostaneme

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \lim_{\delta=0} \frac{\log(1+\delta)}{\delta} = \frac{1}{x}. \quad \text{(odst. 70.)} \tag{7}$$

Abychom získali derivaci logarithmu při obecném základě, stačí vzpomenouti na vztah

$$\log_A x = \frac{\log x}{\log A} \quad \text{a tedy} \quad (\log_A x)' = \frac{1}{x \log A} = \frac{\log_A e}{x}. \tag{7'}$$

2. *Derivace exponenciální funkce.* Exponenciální funkce e^x jest inversní funkcí ku logarithmu. Užijeme-li tedy rovnice (4), kladouce tam $y = f(x) = e^x$, $\varphi(y) = \log y$, $\varphi'(y) = \frac{1}{y}$, máme ihned

$$y' = y \quad \text{aneb} \quad (e^x)' = e^x. \tag{8}$$

Derivace obecné exponenciální funkce získáváme tímto postupem

$$(a^x)' = (e^{x \log a})' = \log a \,.\, e^{x \log a} = a^x \log a. \quad \text{(rovnice (6.)} \tag{8'}$$

Derivaci exponenciální funkce e^x mohli bychom však také odvoditi takto postupem přímým

$$(e^x)' = \lim_{h=0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h=0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x. \quad \text{(odst. 70.)}$$

3. *Derivace obecné mocniny.* Abychom vypočetli derivaci funkce $y = x^\alpha$, můžeme postupovati takto

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \log x})' = (\alpha \log x)' \,.\, e^{\alpha \log x} = \frac{\alpha}{x} \,.\, x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Při tom použili jsme rovnice (5), kde jsme volili $u = \alpha \log x$, $F(u) = e^u$.

Kdybychom chtěli přímý výpočet této derivace, psali bychom

$$(x^\alpha)' = \lim_{h=0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^{\alpha-1} \lim_{h=0} \frac{x}{h} \cdot \left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1\right),$$

aneb

$$(x^\alpha)' = x^{\alpha-1} \lim_{\delta=0} \frac{(1+\delta)^\alpha - 1}{\delta} = \alpha x^{\alpha-1}. \quad \text{(odst. 70.)}$$

4. *Derivace funkcí goniometrických.* K odvození derivací pro sinus a kosinus vyjdeme z rovnic odst. 90. pro tyto funkce platných. Jest

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2}{h} \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{2}{h} \sin \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Přejdeme-li k limitě na pravé straně pro $\lim h = 0$, dostaneme jednak

$$\lim_{h=0} \frac{2}{h} \sin \frac{h}{2} = \lim_{h=0} \frac{\sin \frac{1}{2} h}{\frac{1}{2} h} = \lim_{h'=0} \frac{\sin h'}{h'} = 1,$$

jednak (jelikož kosinus a sinus jsou funkce spojité)

$$\lim_{h=0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x, \quad \lim_{h=0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = \sin x$$

a tedy

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Pro $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ vyplývá užitím rovnice (3)

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5. *Derivace funkcí cyklometrických.* Derivaci funkcí cyklometrických můžeme vypočítati buď přímým počtem aneb na základě věty o derivaci inversních funkcí. Tímto způsobem vypočteme ku př. derivaci funkce $\arcsin x$, oním derivaci $\operatorname{arc\,tg} x$.

V rovnici (4) klademe $x = \sin y$, $f(x) = \arcsin x$, $\varphi(y) = \sin y$ i dostaneme

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y};$$

avšak jelikož $-\frac{\pi}{2} \leqq y < \frac{\pi}{2}$ (dle definice funkce $y = \arcsin x$), jest

$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ a tedy

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Z rovnice (5) odst. 94. plyne

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Abychom vypočetli derivaci funkce $\operatorname{arc\,tg} x$, vycházejme z rovnice (13″) odst. 94. Jest

$$\frac{\operatorname{arc\,tg}(x+h) - \operatorname{arc\,tg} x}{h} = \frac{1}{h} \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{1 + x(x+h)} =$$

$$\frac{1 + x(x+h)}{h} \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{1 + x(x+h)} \cdot \frac{1}{1 + x(x+h)}.$$

Klademe-li pro krátkost

$$h' = \frac{h}{1 + x(x+h)},$$

a přejdeme-li k limitě pro $\lim h = 0$, z čehož následuje též $\lim h' = 0$, obdržíme

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \lim_{h'=0} \frac{\operatorname{arc\,tg} h'}{h'} \cdot \lim_{h=0} \frac{1}{1 + x(x+h)} = \frac{1}{1 + x^2},$$

čímž jest hledaná derivace vypočtěna. Z tohoto výsledku následuje zároveň (podobně jako svrchu)

$$(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

100. Některá rozšíření pojmu derivace. Nemá-li výraz (I) limitu pro $\lim h = 0$, pak neexistuje derivace v bodě x. Nastati pak mohou některé případy, z nichž nejdůležitější ihned vezmeme v úvahu, s případem pak nejobecnějším teprve později se budeme zabývati.

1. Nejprve jest možno, že výraz (I) má limitu, když h pouze zápornými hodnotami probíhajíc blíží se k nulle; t. j. jest možno, že existuje limita

$$\lim_{h=-0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Této limitě říkati budeme **derivace z leva**. Podobně pod **derivací z prava** budeme vyrozumívati limitu

$$\lim_{h=+0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

ve které h konverguje k nulle probíhajíc hodnotami kladnými.

Značiti budeme derivaci z leva funkce $f(x)$ v bodě x_0 symbolem $f^{-}(x_0)$, *obdobně derivaci z prava* funkce $f(x)$ v bodě x_0 symbolem $f^{+}(x_0)$. Též možno užívati symbolů snadno srozumitelných $D_x^{-}f(x_0)$, $D_x^{+}f(x_0)$.

Má-li funkce derivaci v bodě x, má ovšem i derivaci z leva v tom bodě i derivaci z prava a obě jsou si rovny.

2. Může se pak dále státi, že výraz (I), když h konverguje k nulle, roste nad každé číslo kladné, t. j. že, bereme-li limitu v širším smyslu, jest

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = +\infty. \qquad (r)$$

V tomto případě sice derivace funkce $f(x)$ v bodě x neexistuje v tom smyslu, v jakém jsme ji definovali. Můžeme však pojem derivace poněkud rozšířiti obdobně, jak jsme to učinili při limitách, a mluviti v případě, že splněna rovnice (r), o **derivaci v širším smyslu** funkce $f(x)$ v bodě x, jež jest nekonečnou kladně. Psáti pak budeme stručně tento vztah (r) ve tvaru $f'(x) = \infty$. Budeme tedy pod *derivací funkce $f(x)$ v širším smyslu vyrozumívati limitu výrazu*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

pro lim $h = 0$ *uvažovanou v širším smyslu* (odst. 28., pozn. 1.). Neexistuje-li tato limita ani v širším smyslu, nemá $f(x)$ derivaci ani v širším smyslu. Mluvíme-li o derivaci funkce $f(x)$, máme na mysli zpravidla derivaci v dosavadním, t. j. **v užším smyslu**; připouštíme-li však pro hodnoty derivace $f(x)$ symboly $+\infty$, $-\infty$, $\pm\infty$, máme samozřejmě na mysli derivaci v širším smyslu.

Obdobně lze rozšířiti pojmy derivace z prava resp. z leva, takže ku př. výrok: derivace z prava funkce $f(x)$ v bodě x jest $+\infty$, jest srozumitelný.

3. Na obrázcích 2., 3., 4., 5. jsou znázorněny graficky vyložené případy.

Na obrázku 2. nemá znázorněná křivka v bodě A tečnu; existují spíše tečny dvě, z nichž At_1 dává směrnicí svojí derivaci z leva, At_2 pak derivaci z prava.

Na obr. 3. a 4. má křivka v bodě A tečnu kolmou k ose X; v případě prvém jest derivace $-\infty$, v druhém $+\infty$, jak snadno čtenář nahlédne.

V obr. 5. jest opět tečna t_1t_2 v bodě A kolma k ose X, tu však jest derivace z leva $-\infty$, derivace z prava $+\infty$.

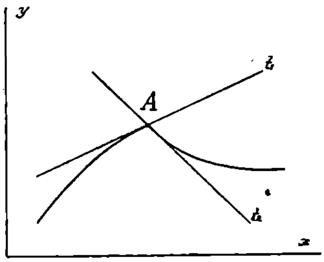
4. Jako příklad k derivaci z prava i z leva uvádím funkci danou rovnicemi

$$f(x) = \frac{x}{e^{\frac{1}{x}} + 1} \quad \text{pro } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

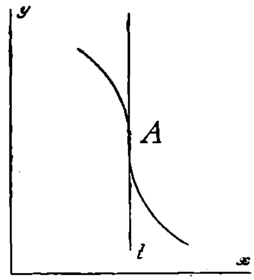
Pro derivaci z prava v bodě $x = 0$ uvažujeme výraz

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{e^{\frac{1}{h}} + 1}, \text{ když } h > 0.$$

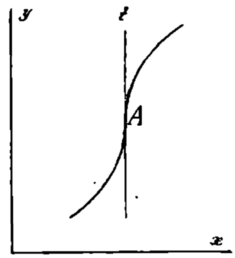
Výraz tento má pro $\lim h = +0$ za limitu 0; derivace z prava jest nulla. Podobně vyplývá, že derivace z leva toho výrazu jest 1.



Obr. 2.

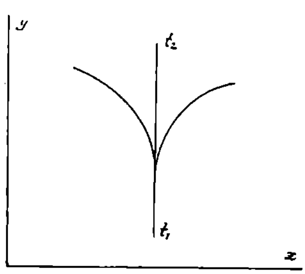


Obr. 3.



Obr. 4.

Funkce daná rovnicí $y = x^{\frac{2}{3}}$ nemá v bodě 0 ani derivaci z leva ani z prava, v širším smyslu však derivaci z leva $= -\infty$, derivaci z prava $= +\infty$.



Obr. 5.

5. *Má-li funkce $f(x)$ v bodě x derivaci z leva, jest funkce $f(x)$ v tom bodě z leva spojita.* Obdobný výrok jest i v případě, když má funkce derivaci z prava v bodě x. Důkaz je týž jako při větě odst. 96.

Je-li derivace funkce $f(x)$ v bodě x buď $+\infty$ anebo $-\infty$, nemusí býti $f(x)$ v bodě x spojita, neboť důkaz odst. 96. tu pozbývá platnosti. Obdobné výroky lze učiniti i v případě, když derivace z prava resp. z leva jsou $\pm\infty$.

Poznámka. Zavedením pojmu derivace z prava a z leva definovali jsme limitu výrazu (I) i pro případ, že x jest hraničním bodem intervalu (a, b), ve kterém $f(x)$ jest definována. Je-li $a < b$, jest limita výrazu (I) pro $x = a$ číslo $f'^{+}(a)$, pro $x = b$ pak číslo $f'^{-}(b)$.

101. Budiž $f(x)$ funkce definovaná v intervalu (a, b) a mající derivace ve všech bodech intervalu (a, b) — v bodě a derivaci z prava, v b derivaci z leva (při $a < b$) —. Pak hodnoty těchto derivací tvoří novou funkci definovanou v intervalu (a, b), jíž říkáme *funkce derivovaná* z $f(x)$ anebo krátce **derivace funkce** $f(x)$ **v intervalu** (a, b) a značíme právě $f'(x)$. A naopak funkce $f(x)$, jejíž derivace v intervalu (a, b) jest rovna jisté funkci $\varphi(x)$ v tom intervalu definované, sluje **primitivní funkcí ku $\varphi(x)$ v intervalu (a, b).**

Ku př. $\cos x$ jest derivací funkce $\sin x$ v každém intervalu a naopak $\sin x$ jest primitivní funkcí ku $\cos x$ v každém intervalu. Funkce $\frac{1}{1+x^2}$ jest derivací funkce $\operatorname{arctg} x$ a tato naopak jest primitivní funkcí k oné rovněž v každém intervalu. Funkce $\log x$ jest primitivní funkcí ku x^{-1} v každém intervalu obsahujícím toliko kladná x.

Můžeme však mluviti o derivaci $f'(x)$ funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) i, když neexistuje derivace funkce $f(x)$ ve všech bodech toho intervalu; pak v těch bodech, ve kterých $f'(x)$ neexistuje, není $f'(x)$ definováno. Specielně v bodech, ve kterých $f'(x) = \infty$, anebo, ve kterých $= -\infty$, aneb konečně, ve kterých jest derivace z prava různa od derivace z leva, není $f'(x)$ definováno.

Poznámka 1. Obecněji, existují-li při funkci $f(x)$ definované v (a, b) v jednotlivých bodech derivace z leva a derivace z prava, definují tyto hodnoty nové funkce $f'^{-}(x)$ resp. $f'^{+}(x)$, jež nazýváme derivace funkce $f(x)$ z leva resp. z prava v intervalu (a, b). Lze pak přičiniti obdobné poznámky, jako svrchu ve specielnějším případě.

Poznámka 2. V odst. 100. jsme vytkli význam rčení: derivace $f'(x)$ jest **v bodě** x nekonečnou (kladně). Jiný význam má výrok, že derivace $f'(x)$ jisté funkce jest **nekonečnou v intervalu** (a, b); pojem ten osvětlíme na příkladě. Ku př. uvažujme funkci $f(x)$ definovanou rovnicemi

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} \sin \frac{1}{x} \text{ pro všecka } x \text{ intervalu } (-1, 1) \text{ vyjma pro } x = 0,$$

$$f(0) = 0.$$

Tato funkce má derivaci v každém bodě intervalu $(-1, 1)$. Je-li x různo od 0, jest derivace té funkce dána rovnicí

$$f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} \sin \frac{1}{x} - x^{-\frac{2}{3}} \cos \frac{1}{x},$$

v bodě $x = 0$ jest pak derivace dána limitou

$$\lim_{h=0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h=0} h^{\frac{1}{3}} \sin \frac{1}{h} = 0$$

a jest rovna nulle. Derivace jest tedy v každém bodě úplně stanovena, dána určitým číslem; jest však funkcí, která není v $(-1, 1)$ ani zdola ani shora ohraničena a tudíž v intervalu $(-1, 1)$ nekonečnou. Vůbec jest derivace dané funkce v každém intervalu obsahujícím bod 0 nekonečna, ačkoliv v bodě $x = 0$ derivace v užším smyslu existuje a jest rovna nulle.

2. Věty obecné o derivaci.

102. Funkce rostoucí (klesající) v bodě. Na základě definice dané pro derivaci můžeme psáti

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon_h.$$

kde ε_h jest číslo závislé na x a na h (jak indexem vyznačeno) takové, že za předpokladu o existenci derivace v bodě x jest $\lim \varepsilon_h = 0$ pro $\lim h = 0$. Budiž nyní pro určité $x = c$ nacházející se uvnitř intervalu, v němž funkce jest definována, derivace kladná, t. j. budiž $f'(c) > 0$. Pak lze nalézti číslo kladné η tak, aby pro všecka h, jichž absolutní hodnota jest menší než η, pro příslušné ε_h bylo splněno $|\varepsilon_h| < f'(c)$, jest tedy i

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0 \quad \text{pro všecka } h\text{, pro něž } |h|<\eta.$$

Tuto nerovninu můžeme, vynásobíme-li jmenovatelem, psáti ve dvou různých tvarech (dle toho, zda h jest kladné či záporné, klademe buď $h = \varrho$ aneb $h = -\varrho$, při čemž ϱ jest kladné)

$$f(c+\varrho)-f(c)>0, \qquad f(c-\varrho)-f(c)<0$$

aneb

$$f(c-\varrho)<f(c)<f(c+\varrho) \quad \text{pro } \textit{všecka kladná } \varrho<\eta. \tag{I}$$

Funkci, jež splňuje tyto nerovniny, říkáme **funkce rostoucí v bodě** c; tak máme větu: *Má-li funkce $f(x)$ v bodě c derivaci kladnou, jest funkcí v tomto bodě rostoucí.* A podobně: *Má-li funkce $f(x)$ v bodě c derivaci zápornou, jest funkcí v tomto bodě klesající*; při tom jest pojem funkce v bodě c klesající definován obdobně jako pojem funkce rostoucí.

Zároveň jest patrno z této úvahy, že v okolí bodu c, pro který derivace $f'(c)$ není rovna nulle, nacházejí se vždy body, v nichž funkce nabývá hodnot větších než v bodě c, a body, v nichž funkce nabývá hodnot menších než v c. Je-li ku př. $f'(c) > 0$, nabývá $f(x)$ v okolí bodu c v levo hodnot menších, v okolí v pravo větších.

Konečně vyplývá z předcházejícího, že, má li funkce $f(x)$ v bodě c derivaci $f'(c)$ (v užším smyslu) a *je-li $f(c)$ zároveň horní hranicí funkce $f(x)$ — aneb* **maximem** *funkce $f(x)$ — v intervalu $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, kde ε jest jisté číslo kladné, že $f'(c)=0$*; neboť nemůže býti ani $f'(c) > 0$, ani $f'(c) < 0$. Obdobný výrok jest platný, *je-li $f(c)$* **minimem funkce** *$f(x)$ v intervalu $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$.*

Poznámka 1. Věta dokázaná jest platna i v tom případě, když $f'(c) = \infty$ anebo když $f'(c) = -\infty$. Specielně, když $f'(c) = +\infty$, jsou v platnosti nerovniny (I), jak čtenář snadno z příslušných pojmů odvodí.

Poznámka 2. Existuje-li v bodě c *derivace z leva* a *je-li tato kladná, jest funkce* $f(x)$ *v bodě* c *v levo* rostoucí; t. j. *jest splněna nerovnina*

$$f(c-\varrho) < f(c) \quad \textit{pro všecka kladná } \varrho < \eta.$$

Obdobné výroky platí pro derivaci z prava a t. d.

Poznámka 3. Nabývá-li $f(x)$ v bodě c horní hranice hodnot, jichž tato funkce nabývá v intervalu $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, a má-li $f(x)$ v bodě c derivaci z leva i derivaci z prava obojí různé od nully (a obojí v širším smyslu), pak jest nutně

$$f'^{-}(c) > 0, \quad f'^{+}(c) < 0,$$

při čemž ovšem, je-li $f'^{-}(c) = +\infty$, pokládáme za splněnou nerovninu $f'^{-}(c) > 0$ a obdobně v jiných případech. Věta tato vyplývá z poznámky předcházející.

103. Věta Rolleova. *Jestliže funkce* $f(x)$ *spojitá v intervalu* (a, b) *jest rovna nulle v krajních bodech toho intervalu a jestliže ta funkce má derivaci v každém bodě* ***uvnitř*** *toho intervalu, jest tato derivace aspoň v jednom bodě ležícím uvnitř intervalu* (a, b) *rovna nulle.*

Dle předpokladu jest $f(a) = 0$, $f(b) = 0$; kdyby také pro všecky ostatní body intervalu (a, b) byla $f(x) = 0$, byla by i derivace $f'(x)$ ve všech bodech intervalu (a, b) rovna nulle a věta Rolleova platna. Předpokládejme tudíž hned, že není $f(x)$ stále rovno nulle, a že nabývá ku př. v (a, b) také hodnot kladných. Jest tedy (za tohoto předpokladu) horní hranice M funkčních hodnot pro interval (a, b) číslo kladné $(M > 0)$ a jest M dle věty o spojitých funkcích zároveň maximální hodnotou $f(x)$ v intervalu (a, b). Této hodnoty M nabývá $f(x)$ pro jistý bod c ležící *uvnitř* intervalu (a, b) — neboť jest $f(a) = f(b) = 0$ — a, jelikož jest $f(c)$ zároveň maximem funkce $f(x)$ v intervalu $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, jest nutně dle úvah předcházejícího odstavce $f'(c) = 0$, čímž tvrzení větou Rolleovou vyslovené dokázáno. Obdobně by se postupovalo, kdyby $f(x)$ v (a, b) nabývalo jenom hodnot $\leqq 0$.

Poznámka. Věta Rolleova zůstává v platnosti, i když jsou v (a, b) body, ve kterých derivace v užším smyslu neexistuje, je-li jenom v těchto bodech buď $f'(x) = +\infty$ aneb $f'(x) = -\infty$ a je-li ovšem $f(x)$ v (a, b) funkcí spojitou; viz odst. předch. pozn. 1.

Jak by bylo nutno doplniti Rolleovu větu, kdyby pro některé body intervalu (a, b) derivace sice neexistovala, avšak v těch bodech existovaly derivace z leva i z prava, rozhodnouti lze snadnou úvahou (viz pozn. 3. předch. odst.).

104. Věta o střední hodnotě. Jedním z důsledků Rolleovy věty (a zároveň jejím zobecněním) jest tak zv. věta o střední hodnotě. Abychom ji odvodili, uvažujme funkci

$$\Phi(x) = (b-a)(f(x)-f(a)) - (x-a)(f(b)-f(a)).$$

Při tom jest $f(x)$ funkce definovaná v intervalu (a, b), v něm spojitá a mající pro všecky body uvnitř (a, b) derivaci. Tytéž vlastnosti má následkem poslední rovnice i $\Phi(x)$, mimo to jest $\Phi(a) = 0$, $\Phi(b) = 0$, jak bezprostředně patrno. Existuje tedy jistě aspoň jedna hodnota ξ uvnitř (a, b), pro kterou $\Phi'(\xi) = 0$, t. j. pro kterou výraz

$$\Phi'(x) = (b-a)f'(x) - (f(b)-f(a))$$

jest rovný nulle. Dosadíme-li tedy do pravé strany ξ za x a položíme-li výsledek roven nulle, máme

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(\xi), \quad a < \xi < b, \tag{I}$$

což jest hledaný vztah. Klademe-li v něm $b = a+h$, pak ξ můžeme nahraditi výrazem $a+\Theta h$, kde Θ musí býti číslem mezi 0 a 1 (má-li býti splněna nerovnina $a < a+\Theta h < a+h$). Rovnice pak obdrží tvar

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\Theta h); \quad 0 < \Theta < 1. \tag{I'}$$

Tentýž tvar bychom dostali, kdybychom místo a, b, ξ do (I) po řadě dosadili $a+h$, a, $a+\Theta h$. Rozdíl spočívá pouze v tom, že nyní jest h záporné, kdežto dříve bylo kladné. *Rovnice* (I') *jest tedy platna pro h kladné i záporné za jediného předpokladu, že funkce $f(x)$ jest v intervalu $(a, a+h)$ spojitou, majíc ve všech bodech uvnitř toho intervalu položených derivaci.*

Formuli (I) resp. (I') budeme nazývati **větou o střední hodnotě pro funkci $f(x)$ a pro interval (a, b), resp. $(a, a+h)$.**

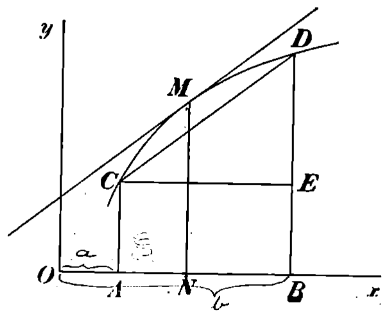
Že v rovnici (I) jest obsažena věta Rolleova jako zvláštní případ, jest na snadě. Neboť položíme li v (I) $f(b) = f(a)$, dostaneme ihned $(b-a)f'(\xi) = 0$ aneb $f'(\xi) = 0$ pro jisté ξ mezi a a b.

Poznámka. Věta o střední hodnotě jest platna i, když $f'(x)$ v některých bodech intervalu (a, b) neexistuje, jestliže jenom v těchto bodech jest buď $f'(x) = +\infty$ aneb $f'(x) = -\infty$ a když $f(x)$ jest v (a, b) spojitou. Viz obdobnou poznámku v předch. odst.

105. Větu (I) možno učiniti názoru přístupnou pomocí geometrického zobrazení. Budiž v obr. 6. CMD obrazem křivky o rovnici $y = f(x)$, dále $OA = a$, $OB = b$; pak jest $AC = f(a)$, $BD = f(b)$ a

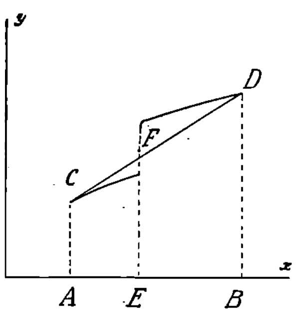
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{ED}{AB} = \text{směrnici sečné } CD.$$

Věta (I) nám pak praví, že mezi a, b jest položen bod ξ, pro který $f'(\xi)$ jest rovno napsanému právě výrazu; t. j. jinak řečeno na oblouku CMD křivky $y = f(x)$ existuje bod, jehož tečná jest rovnoběžna se sečnou CD. Tento bod (jakož i jeho tečná) jest na obrázku znázorněn v bodě M $(ON = \xi)$.

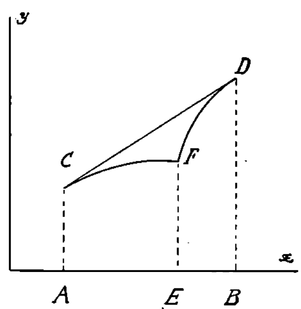


Obr. 6.

Na obrázcích 7. a 8. jsou znázorněny dva příklady funkcí, ve kterých předpoklady učiněné o funkci ve větě o střední hodnotě nejsou splněny a kde také neplatí věta o střední hodnotě. Křivky $y = f(x)$ jsou v obou případech znázorněny čarami silně vytaženými; úsečce OE jest přiřa-



Obr. 7.



Obr. 8.

zena jimi pořadnice EF. $OA = a, OB = b$, $OE = e$; $EF = f(e)$. V případě prvém jest sice $f'(e) = +\infty$, avšak funkce $y = f(x)$ má pro $x = e$ diskontinuitu; v případě druhém neexistuje pro $x = e$ derivace (jest toliko derivace z leva a derivace z prava).

106. Zobecnění věty o střední hodnotě. (*Formule Cauchyova*). Uvažujme výraz

$$[f(x) - f(a)]\,[\varphi(b) - \varphi(a)] - [\varphi(x) - \varphi(a)]\,[f(b) - f(a)].$$

Tento výraz jest rovný nulle pro $x = a$ a pro $x = b$. Mají-li tedy $f(x)$ a $\varphi(x)$ derivace v intervalu $(a + 0,\ b - 0)$ a jsou-li zároveň v (a, b) spojité, jest derivace výrazu napsaného rovna nulle aspoň pro jednu hodnotu ξ položenou mezi a a b (dle Rolleovy věty).

Lze tudíž psáti

$$f'(\xi)\,[\varphi(b) - \varphi(a)] - \varphi'(\xi)\,[f(b) - f(a)] = 0 \qquad (r)$$

Z rovnice této následuje dělením

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},\quad a<\xi<b; \tag{II}$$

Dělení však jest jenom tenkráte oprávněno, není li $\varphi(b)-\varphi(a)=0$ a není-li $\varphi'(\xi)=0$. Můžeme tudíž vysloviti větu: *Vztah* (II), *kde* ξ *jest jistá hodnota uvnitř intervalu* (a, b), *jest platný za předpokladů:*

1. *Funkce* $f(x), \varphi(x)$ *jsou spojité v* (a, b) *a mají pro všechny body uvnitř intervalu* (a, b) *derivaci.*

2. *Není ani* $\varphi(b)=\varphi(a)$, *ani funkce* $\varphi'(x)$, $f'(x)$ *nejsou pro jednu a touž hodnotu uvnitř intervalu* (a, b) *položenou rovny nulle.*

Neboť z rovnice (r) následuje, že, je-li $\varphi'(\xi)=0$ a $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$, jest nutně $f'(\xi)=0$.

Podmínky pod 2. uvedené budou jistě splněny, není li $\varphi'(x)$ pro žádnou hodnotu uvnitř intervalu (a, b) nullou. Potom totiž ani $\varphi(b)-\varphi(a)$ nemůže býti rovno nulle, jelikož dle věty o střední hodnotě použité na výraz $\varphi(b)-\varphi(a)$ vyplývá, že při $\varphi(b)-\varphi(a)=0$ jest pro jednu hodnotu ξ též $\varphi'(\xi)=0$.

Poznámka. Větu o střední hodnotě (odst. 104.) můžeme prohlásiti za zvláštní případ věty právě dokázané; neboť klademe li $\varphi(x)=x$, obdržíme z této onu.

107. Z věty o střední hodnotě (I) lze učiniti snadno některé důležité důsledky. Předpokládejme, že existuje derivace funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) a budiž x hodnota v tomto intervalu. Pak lze psáti (I) též ve tvaru (píšeme-li tam x místo b)

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi),\quad a<\xi<x\leqq b. \tag{α}$$

Předpokládejme nejprve, že pro všecka x *v* (a, b) *jest stále* $A\leqq f'(x)\leqq B$. Pak ovšem jest i $A\leqq f'(\xi)\leqq B$, kde ξ jest hodnota rovnicí (α) stanovená a máme ihned z (α)

$$(x-a)A\leqq f(x)-f(a)\leqq (x-a)\cdot B,$$

aneb též

$$f(a)+(x-a)A\leqq f(x)\leqq f(a)+(x-a)B,$$

kteréžto nerovniny při vyšetřování funkcí bývají často užitečny.

Jestliže pro všecka x v (a, b) jest stále $f'(x)=A$, následuje z (α) obdobně

$$f(x)=f(a)+(x-a)A=Ax+m,$$

při čemž pro stručnost jsme kladli $m=f(a)-aA$.

Rovnici tuto lze vysloviti takto: *Funkce proměnné* x, *jejíž derivace v intervalu* (a, b) *ve všech jeho bodech existující jest rovna kon-*

stantě A, jest dána výrazem $Ax + m$, kde m jest rovněž konstanta. Zvláště pak, je-li $A = 0$, lze říci: *Funkce $f(x)$, která má derivaci ve všech bodech intervalu (a, b) a to rovnou nulle, jest konstanta v tom intervalu.*

Z věty poslední, užijeme-li ji na rozdíl dvou funkcí majících v (a, b) stále derivace, plyne: *Dvě funkce $f(x)$, $g(x)$ mající v každém bodě intervalu (a, b) derivace a to derivace sobě rovné, mají v (a, b) za rozdíl konstantu* (anebo jinak řečeno: liší se v (a, b) o additivní konstantu, což znamená, že jest mezi nimi vztah

$$f(x) = g(x) + m, \quad (m \text{ nezávislo od } x).$$

Druhé a třetí větě tohoto odstavce lze dáti snadno též tento tvar: *Nutná a postačující podmínka, aby spojitá funkce $f(x)$ se v intervalu (a, b) rovnala lineárnímu výrazu $Ax + m$ jest, aby ta funkce měla v (a, b) derivaci a to derivaci stále rovnou konstantě A.*

Nutná a postačující podmínka, aby funkce $f(x)$ spojitá v intervalu (a, b) byla tam konstantou, jest, aby měla v (a, b) derivaci a to derivaci stále rovnou nulle.

Poznámka. Z (α) následuje též téměř bezprostředně: Jestliže v (a, b) jest stále $|f'(x)| < \varepsilon$, pak jest $|f(x) - f(a)| < (b - a)\,\varepsilon$ pro všecka x v (a, b).

108. *Jestliže funkce $f(x)$ má v intervalu (a, b) ve všech bodech derivaci a to derivaci kladnou anebo rovnou nulle — ne však rovnou nulle pro všecky body intervalu —, jest $f(b) > f(a)$.* Neboť dle věty o střední hodnotě jest

$$\left.\begin{aligned} f(x) - f(a) &= (x - a) f'(\xi_1) \geqq 0, \\ f(b) - f(x) &= (b - x) f'(\xi_2) \geqq 0, \end{aligned}\right\} \quad a < \xi_1 < x < \xi_2 < b. \qquad (p)$$

Číslo x v těchto nerovninách se vyskytující můžeme si zvoliti tak, abychom aspoň v jedné z těchto nerovnin mohli vynechati znaménko rovnosti pod znaménkem $>$; neboť jinak by $f(x)$ bylo pro všecka x konstantou a derivace $f'(x)$ v (a, b) byla by rovna nulle pro všecky body intervalu (a, b), což odporuje předpokladu. Volíme-li tak x, máme sčítáním obou nerovnin ihned

$$f(b) - f(a) > 0 \quad \text{aneb} \quad f(b) > f(a).$$

Z této věty následuje: *Má-li $f(x)$ pro všecky body intervalu (a, b) derivaci, která není v žádném bodě záporná, jest $f(x)$ v (a, b) funkcí neklesající. Jest* **funkcí stále rostoucí** *v tom intervalu, není-li zároveň $f'(x)$ nullou pro všecky body nějakého intervalu tvořícího část intervalu (a, b).* K tomu tedy, aby funkce $f(x)$, mající v (a, b) derivaci, byla funkcí stále rostoucí v (a, b), jest nutno a postačitelno dle předcházejících vět, aby pro všecka x v (a, b) bylo $f'(x) \geqq 0$ a aby body, ve kterých $f'(x) = 0$, nevyplňovaly žádný interval (α, β), kde $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$.

Obdobné věty lze vysloviti pro funkce *nerostoucí*, resp. pro *funkce stále klesající.*

Poznámka. Věty tyto lze snadno poněkud rozšířiti. Tak ku př. můžeme o funkci $f(x)$ tvrditi, že jest funkcí stále rostoucí, i když nemá ve všech bodech intervalu derivaci, v těch bodech však, ve kterých derivace neexistuje, má buď $f(x)$ derivaci z prava a derivaci z leva obojí $\geqq 0$ aneb jest v těch bodech $f'(x) = +\infty$. V bodech pak, ve kterých derivace existuje, jsou splněny podmínky věty svrchu dokázané. Důkaz tohoto tvrzení jest snadný.

109. Nechť má funkce $f(x)$ v bodě c diskontinuitu; ta budiž taková, že neexistuje $\lim f(x)$ pro $\lim x = c - 0$. Pak ovšem $f(x)$ nemá derivaci v bodě c (odst. 96.). *Má-li však derivaci ve všech bodech jistého okolí bodu c v levo, jest derivace $f'(x)$ v okolí tom nekonečná.* Neboť, jelikož neexistuje limita vytčená, lze udati (dle věty Bolzano-Cauchyovy, odst. 75.) vždy číslo kladné ε, že jest splněna nerovnina

$$\begin{aligned} &|f(x') - f(x'')| > \varepsilon \text{ pro některá } x', x'', \\ \text{pro něž}\quad &0 < c - x' < \eta, \quad 0 < c - x'' < \eta, \end{aligned} \tag{q}$$

ať si η zvolíme jakkoliv malé. Zvolíme si η především tak, aby v intervalu $(c - \eta, c - 0)$ existovala derivace ve všech bodech. Pak lze (q) psáti dle věty o střední hodnotě ve tvaru

$|x' - x''| \,.\, |f'(\xi)| > \varepsilon$; ξ jest číslo v (x', x'') a tedy $0 < c - \xi < \eta$,

odkudž

$$|f'(\xi)| > \frac{\varepsilon}{\eta}, \quad \text{neboť} \quad |x' - x''| < \eta,$$

t. j. jsou body ξ v okolí c v levo, pro něž derivace $f'(\xi)$ jest v abs. hodnotě větší než číslo kladné libovolně veliké (η totiž můžeme si při pevném ε zvoliti tak malé, jak chceme) a věta jest dokázána.

Příklady. 1. Funkce

$$f(x) = \frac{1}{x - c} \text{ pro } x \neq c, \ f(c) = 0$$

má diskontinuitu vytčeného druhu v bodě c. Derivace

$$f'(x) = \frac{-1}{(x - c)^2} \text{ pro } x \neq c$$

jest vskutku nekonečnou v okolí bodu c (v levo i v pravo).

2. Funkce

$$f(x)=\sin\frac{1}{x} \text{ pro } x \neq 0,\ f(0)=0$$

má diskontinuitu v bodě $x=0$ rovněž vytčeného druhu. Derivace v okolí bodu 0 existuje a jest

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x},$$

což jest funkce nekonečná v okolí bodu 0 (v levo i v pravo).

110. Budiž $f(x)$ funkce mající v intervalu (a, b) derivaci $f'(x)$ a budiž x libovolná hodnota tohoto intervalu. Lze-li udati ke každému kladnému číslu ε číslo kladné δ tak, aby

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon \text{ pro všecka } h, \text{ pro něž } |h|<\delta \qquad (s)$$

a pro něž zároveň $x+h$ jest bodem intervalu (a, b) a lze-li to číslo δ udati neodvisle od x, říkáme, že

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (t)$$

konverguje ku $f'(x)$ **stejnoměrně v intervalu** (a, b). Číslo δ tedy při určité funkci $f(x)$ závisí toliko na ε, a, b (nikoliv na x).

Příklad 1. Uvažujme funkci $f(x)=x^2$, kde $f'(x)=2x$. Pak jest

$$\left|\frac{(x+h)^2-x^2}{h}-2x\right|<\varepsilon \text{ pro všecka } h, \text{ pro něž } |h|<\varepsilon.$$

V příkladě tomto $\delta=\varepsilon$ a lze je voliti nezávisle i na intervalu (a, b). Při této funkci nastává stejnoměrná konvergence výrazu (t) v každém intervalu.

Příklad 2. Nechť $f(x)=e^x$. Pak podmínka (s) jest

$$e^x\left|\frac{e^h-1}{h}-1\right|<\varepsilon$$

aneb nahradíme-li e^h nekonečnou řadou

$$|h|\cdot\left|\frac{1}{2!}+\frac{h}{3!}+\frac{h^2}{4!}+\dots\right|<\varepsilon e^{-x},$$

kteréžto nerovnině bude jistě vyhověno za předpokladu, že $|h|<1$ a že x jest v intervalu (a, b), $a<b$, když bude splněna nerovnina

$$\frac{1}{2}|h|(1+|h|+|h|^2+\dots)<\varepsilon e^{-b},$$

z níž vyplývá

$$\frac{|h|}{1-|h|}<2\varepsilon e^{-b},\ |h|<\frac{2\varepsilon e^{-b}}{1+2\varepsilon e^{-b}}$$

Stačí tedy za δ zvoliti menší z obou čísel $1, \frac{2\varepsilon e^{-b}}{1+2\varepsilon e^{-b}}$ a podmínka (s) pro funkci e^x a interval (a, b) bude splněna. Nastává tudíž i při $f(x)=e^x$ stejnoměrná konvergence výrazu (t) v každém intervalu.

III. *Jestliže $f'(x)$ jest funkcí spojitou v intervalu (a, b), konverguje výraz (t) stejnoměrně v intervalu (a, b) ku $f'(x)$.* Neboť jelikož $f'(x)$ jest spojitou v intervalu (a, b), lze dle základní věty odst. 78. k číslu kladnému ε udati číslo η tak, že

$$|f'(x')-f'(x)|<\varepsilon \text{ pro všecka } x', x \text{ intervalu } (a, b), \text{ pro něž } |x-x'|<\eta. \quad (u)$$

Nerovninu (s) však lze psáti v důsledku věty o střední hodnotě

$$|f'(x+\Theta h)-f'(x)|<\varepsilon.$$

Nerovnině této jistě bude vyhověno, bude-li $|h|<\eta$, t. j. podmínce (s) bude vyhověno, položíme-li $\delta=\eta$, kde η jest stanoveno v (u). Tím jest věta dokázána.

Platí však také opak: *Konverguje-li výraz (t) ku $f'(x)$ stejnoměrně v intervalu (a, b), jest $f'(x)$ funkce spojitá v intervalu (a, b).*

Buďtež x, x' dvě hodnoty intervalu (a, b) a volme si určité h tak, aby bylo vyhověno podmínce (s) a aby také body $x+h$, $x'+h$ byly v intervalu (a, b). Nerovninu (s) můžeme psáti ve tvaru

$$f'(x)-\varepsilon<\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<f'(x)+\varepsilon.$$

Pišme obdobnou nerovninu pro x'

$$f'(x')-\varepsilon<\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}<f'(x')+\varepsilon.$$

Odčítáním vyplývá z posledních dvou vztahů

$$f'(x')-f'(x)-2\varepsilon<\frac{f(x'+h)-f(x+h)}{h}-\frac{f(x')-f(x)}{h}<$$
$$<f'(x')-f'(x)+2\varepsilon.$$

Přejděme k limitám v této nerovnině pro $\lim x'=x$ (neměníce h). Obdržíme předpokládajíce, že x' jest stále v levo od x

$$\overline{f'(x-0)}-f'(x)-2\varepsilon<0<\underline{f'(x-0)}-f'(x)+2\varepsilon. \quad (v)$$

Odtud nejprve následuje

$$\overline{f'(x-0)}-\underline{f'(x-0)}<4\varepsilon.$$

Avšak levá strana této nerovniny jest buď kladné číslo anebo nulla; jelikož pak ε (a tudíž i 4ε) si můžeme zvoliti tak malé, jak chceme, (nezávisle od x), jest nutně

$$\overline{f'(x-0)} - \underline{f'(x-0)} = 0,\ \overline{f'(x-0)} = \underline{f'(x-0)} = f'(x-0).$$

Použijeme-li tohoto výsledku ve (v), máme

$$-2\varepsilon < f'(x-0) - f'(x) < 2\varepsilon,$$

odkudž podobnou úvahou, jako právě byla provedena, následuje $f'(x-0) = f'(x)$. Stejně vyplývá $f'(x+0) = f'(x)$ a tedy $f'(x \pm 0) = f'(x)$, čímž spojitost funkce $f'(x)$ dokázána. Jak by se postup tento upravil, kdyby x splývalo s a nebo s b, jest na snadě.

112. *Má-li $f(x)$ v intervalu (a, b) derivaci a jsou-li derivace v krajních bodech intervalu protivného znaménka, pak jest v intervalu (a, b) jedna hodnota, pro kterou derivace $f'(x)$ jest rovna nulle.* Předpoklad, který činíme, spočívá jednak v tom, že v každém bodě interv. (a, b) existuje $f'(x)$, jednak že čísla $f'(a)$, $f'(b)$ jsou protivného znaménka. (Je-li $a < b$, postačí předpokládati — v náhradu druhé části předpokladu —, že derivace z prava v bodě a jest protivného znaménka než derivace z leva v bodě b.)

Budiž ku př. $f'(a)$ číslo záporné, $f'(b)$ pak kladné. Potom $f(x)$ jest (dle odst. 102.) v b rostoucí, v a klesající a jest tudíž dolní hranicí m funkčních hodnot $f(x)$ v (a, b) číslo menší než obě čísla $f(a)$, $f(b)$. Funkce $f(x)$ jest v (a, b) spojitou funkcí a tedy jest jisté číslo c uvnitř (a, b), pro které $f(c) = m$; v bodě c nabývá však $f(x)$ hodnotu minimální v okolí toho bodu a tudíž $f'(c) = 0$ (viz odst. 102.). Tím jest věta dokázána.

Má-li $f(x)$ v intervalu (a, b) derivaci a je-li $f'(a) = A$, $f'(b) = B$, pak, ať jest L jakékoliv číslo mezi A a B, existuje v (a, b) hodnota c, pro kterou $f'(c) = L$. Věta tato následuje z předcházející. Neboť, je-li ku př. $A < B$ a tedy $A < L < B$, pak funkce

$$\varphi(x) = f(x) - Lx$$

má derivaci ve všech bodech (a, b) rovnou $f'(x) - L$; pro krajní body intervalu má derivace hodnoty $A - L$, $B - L$, jež jsou protivného znaménka. I jest dle věty dokázané jistý bod c, pro který derivace funkce $\varphi(x)$ jest rovna nulle, t. j. pro který $f'(c) - L = 0$, čímž tvrzení dokázáno.

Z věty právě dokázané vyplývá se zřetelem ku větě odst. 81., že v intervalech, ve kterých $f'(x)$ jest monotonní funkcí, jest $f'(x)$ — existuje-li tato funkce ve všech bodech těch intervalů — funkcí spojitou.

Příklad. Uvažujme funkci

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} \cos \frac{1}{x} \quad \text{pro } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Funkce tato má derivaci v každém bodě a jest

$$f'(x) = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} \cos \frac{1}{x} + x^{-\frac{2}{3}} \sin \frac{1}{x} \quad \text{pro } x \neq 0, \ f'(0) = 0.$$

Derivace jest spojitou funkcí v každém bodě různém od $x = 0$; vskutku lze každý interval, který neobsahuje bod $x = 0$, rozděliti na intervaly menší, ve kterých funkce $f'(x)$ jest monotonní. V okolí bodu $x = 0$ však takové rozdělení na intervaly menší té vlastnosti provésti nelze. Tuto okolnost zkrátka vyjadřujeme slovy, že *$f'(x)$ má v okolí bodu $x = 0$ nekonečné množství maxim a minim.* Jest pak vždy takové maximum resp. minimum mezi body $\frac{1}{k\pi}$, $\frac{1}{(k+1)\pi}$, kde k jest celé (jak čtenáři snadno vysvitne, vypočte-li hodnoty funkce $f'(x)$ pro ty dva body a pro hodnotu $\frac{1}{(k+\frac{1}{2})\pi}$). Rovněž jest bezprostředně patrno, že $f'(x)$ jest v každém okolí bodu 0 nekonečnou (a není tedy spojitou); avšak snadno verifikuje čtenář větu dokázanou v tomto odstavci pro každé dvě hodnoty a, b a to i když jedna z nich jest rovna nulle.

113. O funkcích graficky zobrazitelných (*o čarách názoru přístupných*). Při funkci $f(x)$ spojité v intervalu (a, b) můžeme se pokusiti o její grafické znázornění tím, že se snažíme nakresliti v rovině o osách X, Y čáru, jejíž rovnice jest $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$. Avšak hned předem jest jasno, že znázornění takové se nám může podařiti jenom za předpokladů velmi omezujících obecnost funkce $f(x)$. První předpoklad, který o funkci $f(x)$ jest nutno učiniti, jest, že čára $y = f(x)$ protíná každou přímku v konečném počtu bodů — nesplývá-li ovšem příslušná přímka z části nebo zcela s čarou $y = f(x)$. Neboť jest sice možno si představiti, že na přímce jest nekonečné množství bodů, avšak není možno na přímce graficky nekonečné množství bodů jednotlivě vytknouti (jak by to činila čára v žádném intervalu s přímkou nesplývající, avšak protínající ji v nekonečném množství bodů). K vůli zjednodušení úvah učiníme však ještě užší předpoklad o *funkcích $f(x)$ graficky zobrazitelných*; *budeme totiž při nich požadovati, aby čára o rovnici $y = f(x)$ dala se rozložiti v konečný počet částí takových, že jednotlivé části* (říkejme též krátce oblouky) *její, pokud nejsou přímočaré, protínají každou přímku nejvýše ve dvou bodech* (protínají tedy každou přímku buď ve dvou bodech, aneb v jednom, aneb konečně vůbec ji neprotínají).

Mějmež takový oblouk a tedy funkci $f(x)$ spojitou v (a, b) a takovou, že *křivka* $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$ *jest protínána každou přímkou nejvýše ve dvou bodech.* K vůli stručnosti budu značiti $\overline{x_1 x_2}$ úsečku spojující body*) $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$; symbol $\widehat{x_1 x_2}$ pak onu část křivky $y = f(x)$, jež nachází se mezi body $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$. Při tom jsou x_1, x_2 hodnoty intervalu (a, b).

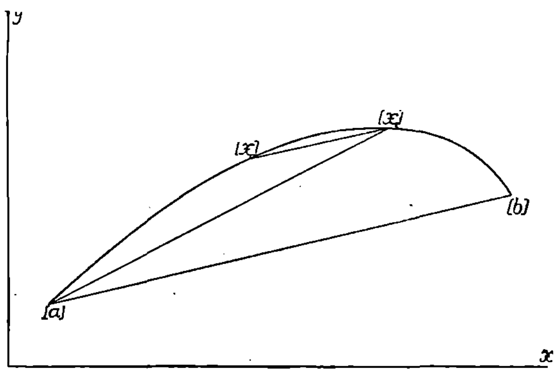
Uvažujme podíl

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda(x), \quad x_0 \text{ v } (a, b). \tag{λ}$$

Podíl tento se mění spojitě, když x se mění spojitě v intervalu $(x_0 + 0, b)$, $a < b$; podíl ten pak jest směrnicí přímky $\overline{x_0 x}$. Můžeme však tvrditi, že podíl $\lambda(x)$ jest funkcí monotonní, klesá-li x od b ku x_0, neboť kdyby se neměnil monotonně, byly by uvnitř (x_0, b) body x_1, x_2, x_3, kde buď $x_1 < x_2 < x_3$ anebo $x_1 > x_2 > x_3$ a kde by bylo současně

$$\lambda(x_1) > \lambda(x_2), \quad \lambda(x_2) < \lambda(x_3);$$

v důsledku pak známých vlastností funkcí spojitých by byl mezi x_1 a x_2 bod ξ' a mezi x_2 a x_3 bod ξ'', pro něž by bylo $\lambda(\xi') = \lambda(\xi'')$. (Takových dvojic ξ',



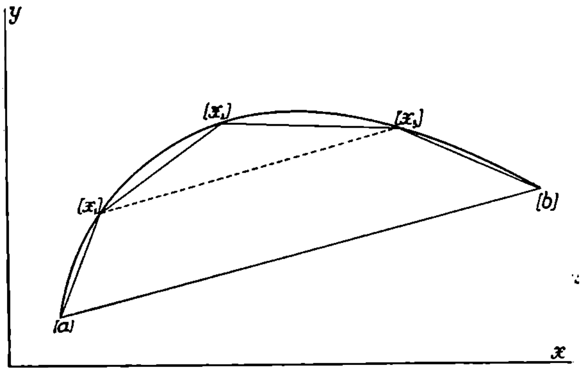
Obr. 9.

ξ'' by bylo ovšem nesčíslné množství.) Jinak řečeno: Směrnice $\overline{x_0 \xi'}$, $\overline{x_0 \xi''}$ by byly stejné a body $[x_0, f(x_0)]$, $[\xi', f(\xi')]$, $[\xi'', f(\xi'')]$ by ležely na jedné přímce, což však odporuje předpokladu o křivce $y = f(x)$. Protože $\lambda(x)$ mění se monotonně, když x se blíží ku x_0 z prava, má $\lambda(x)$ limitu v širším smyslu pro $\lim x = x_0 + 0$, kteráž jest derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 z prava (v širším smyslu). Podobnou úvahu lze provésti i v tom případě, že x jest v $(a, x_0 - 0)$. Jako výsledek úvahy podané

*) $[c, d]$ nechť značí bod, jehož souřadnice v rovině o osách X, Y jsou c, d.

můžeme vysloviti větu: *Spojité funkce graficky zobrazitelné v intervalu* (A, B) *mají v každém bodě vnitřním derivaci z prava a derivaci z leva* (obojí v širším smyslu). V bodě A pak derivaci z prava, v B z leva.

Z okolnosti, že výraz $\lambda(x)$ se s x mění monotonně, ať jest x_0 kterákoliv hodnota v (a, b), dospíváme, volíme-li x_0 buď rovno a aneb rovno b, bezprostředně k dalšímu výsledku, že všecky body oblouku $\widehat{ab}$ se nacházejí buď nad úsečkou $\overline{ab}$ aneb pod $\overline{ab}$. Při tom nám jako obyčejně kladný směr osy Y značí směr nahoru, záporný pak dolů. Předpokládejme v následující úvaze, abychom určitý případ měli na mysli, že *všecky body oblouku* $\widehat{ab}$ *jsou nad* $\overline{ab}$. Z tohoto předpokladu a svrchu



Obr. 10.

zmíněné okolnosti pak plyne postupně, že také všecky body obouku $\widehat{ax_2}$, jsou nad $\overline{ax_2}$, a dále že body oblouku $\widehat{x_1x_2}$ jsou nad $\overline{x_1x_2}$; x_2 jest libovolná hodnota uvnitř (a, b), x_1 uvnitř (a, x_2). (Viz obr. (9), v obr. tom jakož i v obr. (10) jednotlivé body $[x, f(x)]$ jsou značeny krátce symbolem $[x]$.)

Z toho však následuje ihned, že vybereme-li na $\widehat{ab}$ libovolný počet bodů $[x_k, f(x_k)]$, při čemž $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < b$ a spojíme-li vždy dva sousední $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$, $[x_k, f(x_k)]$ úsečkou, polygonální čára tak vzniklá mající m stran ($a = x_0$, $b = x_m$) bude rovněž nad $\overline{ab}$; také každá část této čáry polygonální bude nad přímkou koncové body té části spojující. Tak ku př. čára sestávající z úseček $\overline{x_1x_2}$, $\overline{x_2x_3}$ jest nad $\overline{x_1x_3}$ (obr. 10.). Tomu lze dáti výraz nerovninou

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \qquad (\mu)$$

pravící nám, že směrnice přímky $\overline{x_1x_2}$ jest větší než směrnice přímky $\overline{x_2x_3}$. Při tom x_1, x_2, x_3 v této nerovnině jsou libovolná čísla intervalu (a, b)

vázaná toliko podmínkou $x_1 < x_2 < x_3$. Necháme-li v této nerovnině x_1 konvergovati ku x_2 a rovněž x_3 ku x_2, dostáváme z ní ihned

$$f'^{-}(x_2) \geqq f'^{+}(x_2).$$

Obdobně z nerovniny

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4} \tag{μ'}$$

následuje při $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ a při $\lim x_1 = x_2$, $\lim x_3 = x_4$

$$f'^{-}(x_2) \geqq f'^{-}(x_4) \tag{ν}$$

a stejně by následovaly nerovniny

$$f'^{+}(x_1) \geqq f'^{-}(x_4),\quad f'^{+}(x_1) \geqq f'^{+}(x_3),\quad f'^{-}(x_2) \geqq f'^{+}(x_3). \tag{ν'}$$

Z nerovnin těchto vyplývá, že funkce $f'^{-}(x)$ jakož i funkce $f'^{+}(x)$, (kteréžto funkce jsou definovány prvá v intervalu $(a+0, b)$, druhá v $(a, b-0)$) jsou funkce za předpokladu svrchu učiněného o bodech oblouku $\widehat{ab}$ nerostoucí a zároveň, že jest $f'^{-}(x) \geqq f'^{+}(x)$, $f'^{+}(x) \geqq f'^{-}(y)$, když $x < y$ a x, y jsou hodnoty z intervalu (a, b). Můžeme však ještě dále usuzovati (opírajíce se o předpoklad, že žádná část oblouku $\widehat{ab}$ není přímočárá), že znaménko $\geqq$ v těch nerovninách, které se týkají dvou různých bodů, lze nahraditi prostě znaménkem $>$. Neboť kdyby ku př.

$$f'^{+}(\alpha) = f'^{-}(\beta) \text{ při } a \leqq \alpha < \beta \leqq b$$

bylo by též nutně dle nerovnin (ν), (γ')

$$f'^{+}(\alpha) = f'^{-}(x) = f'^{+}(x) = f'^{-}(\beta) \text{ pro } x \text{ v } (\alpha+0, \beta-0),$$

t. j. funkce $f(x)$ by měla ve všech bodech uvnitř intervalu (α, β) derivaci rovnou stále témuž číslu $f'^{+}(\alpha) = f'^{-}(\beta)$ a v důsledku toho by v intervalu (α, β) bylo $f(x) = \lambda x + \mu$, kde λ, μ jsou konstanty, a oblouk křivky $y = f(x)$ by v intervalu (α, β) se redukoval na přímku $\overline{\alpha\beta}$ (odst. 107.). Jsou tedy $f'^{+}(x)$ i $f'^{-}(x)$ funkce klesající (s rostoucím x) v (a, b).

Dále jest patrno, že pouze v bodech a, b může $f'^{+}(x)$ resp. $f'^{-}(x)$ býti $\pm\infty$. Neboť je-li nějaký bod x uvnitř (a, b) a $a < x < x+h < x' < b$ (h jest tedy kladné), jest dle (μ), (μ')

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} > \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > \frac{f(x')-f(b)}{x'-b}.$$

Odtud jest patrno. že prostřední článek v tomto řetězu nerovnin (o kterém článku jest nám známo, že má limitu v širším smyslu pro $\lim h = +0$), má limitu $f'^{+}(x)$ v užším smyslu. Stejně odvodíme obdobný důsledek pro $f'^{-}(x)$.

Úvahy shodné bychom mohli provésti za předpokladu, že všecky body oblouku $\widehat{ab}$ jsou pod $\overline{ab}$. Pak by ovšem v nerovninách (μ), (μ'), (ν), (ν') místo znaménka $>$ nastoupilo znaménko $<$.

Jest však možno ještě dále zúžit předpoklady o čarách názoru přístupných. V každém bodě x, ve kterém $f'^{+}(x)$ jest různo od $f'^{-}(x)$, má čára $y = f(x)$ různé tečny z prava a z leva; říkáme v tomto případě, že čára jest v bodě x lomena. Tímto lomením jest však onen bod na čáře, lze-li ji graficky znázorniti, vyznačen jednotlivě. Avšak nejenom na přímce, i na každé jiné čáře jest možno jenom konečný počet bodů jednotlivě vyznačiti resp. jednotlivě si představiti. Z toho jest patrno, že jenom takové čáry $y = f(x)$, kde x jest v (A, B), mohou býti graficky zobrazitelné, při kterých toliko v konečném počtu bodů intervalu (A, B) derivace z prava funkce $f(x)$ se liší od derivace z leva.

Shrneme-li veškeré výsledky předcházejích úvah, můžeme vysloviti větu: Požadujeme-li od křivky spojité, graficky zobrazitelné jednak, aby bylo lze ji rozděliti v konečný počet částí, z nichž každá, pokud není přímočará, protíná každou přímku nejvýše ve dvou bodech, jednak, aby průběhem křivky bylo na ní vyznačeno jednotlivě jenom konečné množství bodů, pak křivka ta, má-li rovnici $y = f(x)$ kde x jest v (A, B), má tyto vlastnosti.

1. Lze ji rozložiti v konečný počet částí $\widehat{A\alpha_1}$, $\widehat{\alpha_1\alpha_2}$, $\widehat{\alpha_2\alpha_3}, \ldots$, $\widehat{\alpha_{n-1}B}$ tak, že uvnitř každého z intervalů (α_{k-1}, α_k), $k = 1, 2 \ldots n$ (při čemž $\alpha_0 = A$, $\alpha_n = B$) má $f(x)$ v každém bodě derivaci (v užším smyslu) a tedy křivka tečnu, jež není kolma k ose X. Derivace tato se v intervalu tom mění monotonně a tudíž spojitě (odst. 111.) a to buď stále roste (při čemž $\widehat{\alpha_{k-1}\alpha_k}$ jest pod $\overline{\alpha_{k-1}\alpha_k}$) aneb stále klesá ($\widehat{\alpha_{k-1}\alpha_k}$ jest nad $\overline{\alpha_{k-1}\alpha_k}$) aneb konečně se nemění ($\widehat{\alpha_{k-1}\alpha_k}$ splývá s $\overline{\alpha_{k-1}\alpha_k}$).

2. V bodech α_k pak nastává pouze jeden z těchto případů:

a) v bodě α_k má $f(x)$ derivaci z prava a derivaci z leva (obojí v širším smyslu) od sebe různé. Pak jest čára $y = f(x)$ v bodě α_k lomená, α_k bodem lomení. Pouze v tom případě, že jedna z derivací těch jest $+\infty$, druhá $-\infty$, sluje bod α_k obyčejně bodem úvratu (o tečné kolmé k ose X).

b) v bodě α_k má $f(x)$ derivaci (v širším smyslu), pak buď na pravo od α_k derivace funkce $f(x)$ rostou, na levo ubývají — v obou případech s rostoucím x — anebo naopak na pravo ubývají a na levo od α_k rostou. Bod α_k sluje obyčejně bodem obratu — inflexním — (v případě, že derivace funkce $f(x)$ jest v α_k buď $+\infty$ aneb $-\infty$, o tečné kolmé k ose X).

114. O funkcích spojitých nemajících derivace. V odst. 96. bylo ukázáno, že funkce, jež má derivaci v bodě x_0, jest v tomto bodě spojitá. V odst. 100., 5. byla pak věta tato rozšířena i pro případ, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci z prava resp. z leva. K zavedení pojmu derivace (a differenciálu) byl dán popud z veliké části úkoly geometrickými; jest tedy pochopitelno, že při vybudování differenciálního počtu veliký vliv měl názor geometrický. Následek toho pak byl, že mnozí mathematikové pokládali za samozřejmé, že funkce spojité v intervalu (a, b) mají ve všech bodech toho intervalu derivace s výjimkou konečného počtu bodů (v nichž pak buď existuje derivace z prava aneb z leva aneb derivace jest nekonečná). Ba dokonce jsou i důkazy tohoto tvrzení, ovšem nejasné a chybné. (Viz ku př. Lacroix, Traité du calcul diff. et du calc. intégr., svazek 1, r. 1810, str. 241.). Poskytuje tedy jistý zájem konstrukce funkcí spojitých, nemajících derivace (ani derivace z prava resp. z leva, ani derivace $= \pm \infty$) v žádném bodě. Ovšem předem jest již jasno, že konstrukce taková bude dosti umělá, nebo funkce, jež geometrie, mechanika a jiné vědy nám k vyšetřování předkládají, jsou snadno názoru přístupné; a také analysa mathematická může definovati funkce jenom konečným počtem výroků, při čemž pokud výsledkem definice jsou funkce spojité, mají tyto funkce obyčejně i derivaci (resp. derivaci z prava nebo z leva nebo $= \pm \infty$). Avšak z jiného stanoviska jest bezprostředně patrno, že v oboru funkcí spojitých v intervalu (a, b) tvoří funkce mající v každém bodě toho intervalu derivace jenom velmi speciální případ.

V následujícím sestaveny čtyři příklady funkcí, nemajících vždy derivace v bodech, v nichž jsou spojité. V příkladu třetím, jenž teprve během tisku byl připojen, pokusil jsem se čtenáři učiniti snadno přístupnou cestu, po níž Bolzano dospěl ke konstrukci funkce, jež jsouc spojita v (a, b) nemá v žádném bodě toho intervalu derivaci.*)

Příklad 1. Budiž dána v intervalu $(-1, 1)$ funkce $f(x)$ těmito vztahy

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} \,.\, \sin \frac{1}{x} \text{ pro } x \neq 0 \,, f(0) = 0.$$

*) Že již Bolzano — kolem roku 1830 — měl přesné představy o tom, že mohou býti funkce spojité v (a, b) a nemající v žádném bodě derivaci, a, že dokonce takovou funkci ve tvaru dosti názorném sestrojil, bylo zjištěno teprve v době nejnovější p. *M. Jaškem*, professorem v Plzni který se podjal úkolu probádati rukopisy pozůstalé po Bolzanovi. Z jeho úspěšné a záslužné práce, jež jest mi však dosud známa pouze z dopisů, v nichž podal zprávu o některých svých výsledcích, vyplývá zcela jasně, že Bolzano daleko předstihoval svoji dobu v konstrukci a přesném pojetí pojmů, nyní fundamentálních pro mathematickou analysu.

Funkce tato nemá derivaci v bodě $x=0$, ačkoliv jest v tomto bodě spojitá. Neboť derivace v bodě $x=0$ by byla rovna limitě výrazu

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=h^{-\frac{1}{3}}\sin\frac{1}{h} \text{ pro } \lim h=0,$$

kterážto limita neexistuje (ani v širším smyslu), jak čtenář snadno sezná.

Pomocí funkce $f(x)$, právě definované, můžeme v intervalu $(-1,1)$ definovati funkci $g(x)$ rovnicemi

$$g(x)=f\left(x\sin\frac{1}{x}\right) \text{ pro } x\neq 0, g(0)=0;$$

i tato funkce jest spojitá v $(-1, 1)$; nemá však, jak patrno, derivace v bodech, pro něž

$$x\sin\frac{1}{x}=0\text{; t. j. v bodech } x=\frac{1}{k\pi}, x=0, \text{ kde } k=\pm 1, \pm 2, \pm 3\ldots;$$

tedy v nekonečně mnoha bodech.

Příklad 2. Definujeme funkci $f(x)$ opět v intervalu $(-1,1)$. Každou hodnotu x tohoto intervalu vyjádříme zlomkem desetinným ve tvaru

$$x=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\ldots\ldots+\frac{a_k}{10^k}+\ldots \qquad (\alpha)$$

kde a_k jsou čísla celá intervalu $(0,9)$. Hodnotě x takto vyjádřené přiřadíme y výrazem

$$y=\frac{b_1}{2}\pm\frac{b_2}{2^2}\pm\frac{b_3}{2^3}\pm\ldots\ldots\pm\frac{b_k}{2^k}\pm\ldots, \qquad (\beta)$$

kde b_k, jakož i znaménka $\pm$ jsou určena dle těchto předpisů:

1. Je-li a_k sudé, jest $b_k=0$; je-li a_k liché, jest $b_k=1$.

2. Jestliže $b_k=1$, pak znaménko po členu k-tém (obsahujícím b_k) jest voliti protivné znaménku před členem k-tým, vyjma v tom případě, kdy b_k jest přiřazeno číslu $a_k=9$ a kdy jest voliti znaménko následující stejně jako předcházející. Rovněž, když $b_k=0$, buďtež obě ta znaménka po sobě následující táž.

Jest tedy ku př.

$$f(0{\cdot}23578297)=\frac{0}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{0}{2^5}-\frac{0}{2^6}-\frac{1}{2^7}-\frac{1}{2^8},$$

$$f(0{\cdot}15)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4},$$

$$f(0{\cdot}14\dot{9}\dot{9}\ldots)=\frac{1}{2}-\frac{0}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\ldots=\frac{1}{4}.$$

Na posledních dvou hodnotách definované funkce jest viděti, že patří-li ku číslu x dvojí různá vyjádření zlomkem desetinným (jak tomu jest pouze u čísel, jež se dají vyjádřiti konečným zlomkem desetinným), příslušná hodnota funkční jest vždy táž, ať si ji počítáme na podkladě jednoho nebo druhého vyjádření čísla x. Tuto okolnost dokáže čtenář obecně bez nesnází.

Funkce tak definovaná jest spojitá. Neboť z definice plyne snadno, že

$$|f(x) - f(x')| < \frac{1}{2^k}, \quad \text{jestliže} \quad |x - x'| < \frac{1}{10^{k+1}},$$

x, x' jsou dvě čísla intervalu (0, 1). Dále následuje z definice, že funkce nemá derivaci v žádném bodě intervalu (0, 1); dokážeme si k vůli stručnosti pouze, že funkce nemá derivaci v žádném bodě x, kde x se dá vyjádřiti konečným desetinným zlomkem. Mějž tento des. zlomek celkem ϱ desetinných míst; jest tedy pro takové x v (α) $a_{\varrho+1} = a_{\varrho+2} = = a_{\varrho+3} = \ldots = 0$. Dle ($\beta$) však jest pro to x

$$f\left(x \pm \frac{1}{10^k}\right) = f(x) \pm \frac{1}{2^k}, \quad f\left(x + \frac{2}{10^k}\right) = f(x) \text{ při všech } k > \varrho.$$

Klademe-li $h_k = \pm 1 . 10^{-k}$, jest tudíž (stále pro vytknuté x)

$$\lim_{k=\infty} \frac{f(x + h_k) - f(x)}{h_k} = \pm \lim_{k=\infty} \frac{10^k}{2^k} = \pm \infty;$$

volíme-li však $h_k = + 2 . 10^{-k}$, jest

$$\lim_{k=\infty} \frac{f(x + h_k) - f(x)}{h_k} = 0;$$

z obou rovnic posledních jest pak patrno, že $f(x)$ nemá v bodech x v úvahu vzatých derivace.*)

Získáváme tudíž ve funkci $f(x)$ funkci spojitou v intervalu (0, 1) a nemající v žádném bodě intervalu (0, 1) derivaci.

Příklad 3. (Bolzanův**)). Buďtež nejprve v rovině XY dány dva body $[a, A]$, $[b, B]$, při čemž předpokládáme $b > a$, $A \neq B$. Úsečka body ty spojující má rovnici

$y = f_0(x)$, při čemž $f_0(x)$ jest v (a, b) dáno výrazem $A + \dfrac{B-A}{b-a}(x-a)$. (1)

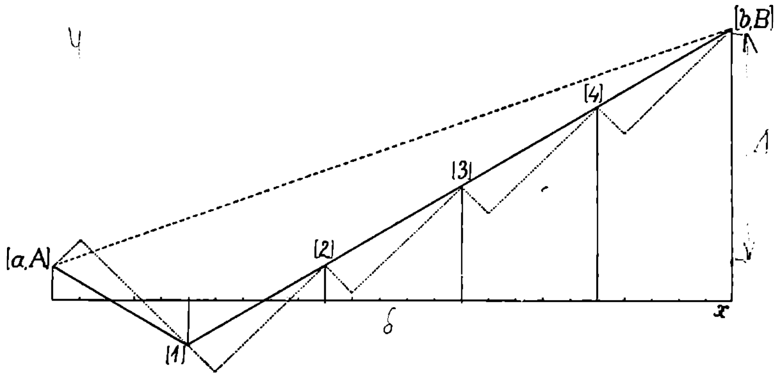
*) Obšírněji jest funkce $f(x)$ vyšetřována v »Časopise pro pěst. math. a fys.« r. 49., str. 25. a násl. Tam též definice tu podaná poněkud zevšeobecněna.

**) Aby se zamezilo nedorozumění, podotýkám, že příklad tu podaný a označený jmenem Bolzanovým pouze v podstatných věcech se shoduje s příkladem nacházejícím se v pozůstalosti Bolzanově.

Rozdělme interval (a, b) na pět stejných dílů a sestrojme úsečky spojující vždy dva sousední ze šesti bodů (při tom jest $\delta = b - a$, $\varDelta = B - A$):

$$\begin{gathered}[a, A],\ [a + \tfrac{1}{5}\delta,\ A - \tfrac{1}{3}\varDelta],\ [a + \tfrac{2}{5}\delta,\ A],\ [a + \tfrac{3}{5}\delta,\ A + \tfrac{1}{3}\varDelta],\\ [a + \tfrac{4}{5}\delta,\ A + \tfrac{2}{3}\varDelta],\ [b, B].\end{gathered} \tag{2}$$

Jednotlivé úsečky budou definovati v každé z pětin intervalu (a, b) funkce stejně sestrojené jako svrchu jest $f_0(x)$. Souhrn pak těchto funkcí stanoví v intervalu (a, b) funkci novou, již označíme $f_1(x)$; ostatně výrazy definující $f_1(x)$ v posledních čtyřech pětinách int. (a, b) jsou stejné. Graficky



Obr. 11.

znázorněna jest rovnice $y = f_1(x)$ čarou jedenkráte lomenou; viz obr. 11., ve kterém body (2) jsou vyznačeny symboly $[a, A]$, [1], [2], [3], [4], $[b, B]$. Čára $y = f_0(x)$ jest na obr. vytažena čárkovaně, čára pak $y = f_1(x)$ silně.

Oscillace funkce $f_0(x)$ v (a, b) jest $|B - A|$; oscillace funkce $f_1(x)$ v každé svrchu vytknuté pětině interv. (a, b) jest $\frac{1}{3}|B - A|$, oscillace její pak v celém intervalu (a, b) jest $\frac{4}{3}|B - A| = |B - A| + \frac{1}{3}|B - A|$. Směrnice přímky, na níž položena úsečka o rovnici $y = f_0(x)$, jest

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{B - A}{b - a}.$$

Směrnice úseček, z nichž skládá se čára lomená $y = f_1(x)$, jsou

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \pm \frac{5}{3} \frac{B - A}{b - a} = \pm \frac{5}{3} \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Tak, jako jsme ku úsečce o rovnici $y = f_0(x)$ sestrojili lomenou čáru o rovnici $y = f_1(x)$, můžeme úplně stejným způsobem v každé z pětin intervalu (a, b) v úvahu braných ku úsečce tam definující funkci

$f_1(x)$ sestrojiti lomenou čáru (tím, že tu pětinu rozdělíme na pět stejných částí a ostatně postupujeme zcela shodně jako svrchu s tím jedině rozdílem, že ku př. v prvé pětině int. (a, b) místo bodů $[a, A]$, $[b, B]$ nastoupí body $[a, A]$, $[a+\frac{1}{5}\delta, A-\frac{1}{3}\Delta]$ a tedy místo δ, Δ čísla $\frac{1}{5}\delta$, $-\frac{1}{3}\Delta$ a podobně v ostatních čtyřech pětinách). Tím dostáváme pro celý interval (a, b) čáru lomenou (osmkráte) a jejíž rovnice jest tvaru $y = f_2(x)$, kde $f_2(x)$ v každé tak získané pětadvacetině intervalu (a, b) jest vyjádřeno obdobným výrazem jako $f_0(x)$ v (1). Čára $y = f_2(x)$ jest na obr. tečkována. Oscillace funkce $f_2(x)$ v každé té pětadvacetině jest $\frac{1}{3^2} \mid B - A \mid$, oscillace její v (a, b) jest $\mid B - A \mid + \frac{1}{3} \mid B - A \mid + \frac{1}{3^2} \mid B - A \mid$. Směrnice úseček, z nichž se skládá čára $y = f_2(x)$, jsou vesměs dány vztahem

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \pm \left(\frac{5}{3}\right)^2 \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Ke každé z 25 úseček, jež tvoří dohromady lomenou čáru $y = f_2(x)$, sestrojiti můžeme opět lomenou čáru stejným postupem, jaký nás vedl od $y = f_0(x)$ ku $y = f_1(x)$. Získáme pak souhrnem těchto 25 lomených čar pro interval (a, b) funkci $y = f_3(x)$, kdež $f_3(x)$ v každé tak vzniklé stopětadvacetině intervalu (a, b) jest dáno výrazem obdobným ku $f_0(x)$, a t. d., až obecně dospějeme po n krocích takových ku lomené čáře o rovnici $y = f_n(x)$, kdež $f_n(x)$ jest definováno v (a, b). Lomená čára tato má vlastnosti:

1. V každém intervalu, jenž vznikl rozdělením intervalu (a, b) na 5^n stejných částí, jest rovnice $y = f_n(x)$ rovnicí přímky o směrnici

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \pm \left(\frac{5}{3}\right)^n \frac{B-A}{b-a} = \pm \left(\frac{5}{3}\right)^n \operatorname{tg} \alpha_0; \tag{3}$$

oscillace funkce $f_n(x)$ jest v tomto intervalu délky $\frac{1}{5^n}(b-a)$ dána číslem $\frac{1}{3^n} \mid B - A \mid$.

2. Oscillace funkce $f_n(x)$ v (a, b) jest dána výrazem

$$\mid B-A \mid \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2} \mid B-A \mid - \frac{1}{2 \cdot 3^n} \mid B - A \mid. \tag{4}$$

3. Délka čáry $y = f_n(x)$ jest

$$\frac{b-a}{\cos \alpha_n}. \tag{5}$$

Toto předeslavše přistoupíme ku definici Bolzanovy funkce $f(x)$ v intervalu (a, b). Nejprve ji stanovíme pro všecka x, jež tvoří hranice intervalů, které vznikly dělením intervalu (a, b) na 5^n stejných dílů $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$; klademe

$$f(x)=f_n(x) \text{ pro } x=a+\frac{k}{5^n}(b-a), \; k \text{ jest celé a } 0 \leqq k \leqq 5^n.$$
$$n=0, 1, 2, 3 \ldots$$

Tím jest $f(x)$ definována pro množství číselné všude husté a to jako funkce tam spojitá*); jest dokonce v tom oboru stejnoměrně spojitá. Neboť oscillace její v každém z intervalů, jež vznikly rozdělením (a, b) na 5^n stejných dílů, jest rovna dle (4) oscillaci funkce $f_n(x)$ v tom intervalu násobené součtem nekonečné řady $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots$, t. j. ta oscillace jest

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{|B-A|}{3^n}$$

a tedy oscillace v každém libovolném intervalu délky $(b-a) \cdot 5^{-n}$ jest menší než $|B-A| \cdot 3^{-n+1}$ (a větší než — po př. rovna — $\frac{1}{2}|B-A| \cdot 3^{-n}$, neboť do libovolného intervalu o délce $(b-a) \cdot 5^{-n}$ zapadá jistě jeden celý interval vzniklý rozdělením interv. (a, b) na 5^{n+1} stejných dílů).

Označíme-li hodnoty neodvisle proměnné u funkce $f(x)$, pro které tato funkce dosud byla definována, značkou ξ, můžeme $f(x)$ definovati pro každé x v (a, b), různé od ξ, rovnicí

$$f(x)=\lim_{\xi=x} f(\xi),$$

kterážto limita existuje (dle věty Bolzano-Cauchyovy odst. 75.).**) Funkce $f(x)$ takto definovaná pro všecka x v (a, b) jest v (a, b) spojitá; neboť veškerá tvrzení o oscillaci té funkce, pokud byla učiněna se zřetelem k oboru čísel ξ, rozšiřují se beze změny i pro $f(x)$ definovanou právě v každém bodě interv. (a, b).

Zvláště pak jest pro nás důležit výrok, že oscillace funkce $f(x)$ v každém intervalu o délce $(b-a) \cdot 5^{-n}$ jest $\geqq \frac{1}{2}|B-A| \cdot 3^{-n}$. Z tohoto výroku však zase následuje, že v žádném bodě x intervalu (a, b) nemá $f(x)$ derivaci ve vlastním smyslu. Neboť požadujeme-li, aby v podílu

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

*) Pojem spojité funkce $f(x)$ definované v oboru číselném všude hustém jest na snadě; viz další poznámku pod čarou.

**) Definice a věty o limitách funkcí v odst. 70.—75. zůstávají, jak bez potíže patrno, platny pro obor, obsahující množství číselné všude husté.

bylo $h \leqq (b-a) . 5^{-n}$, můžeme vždy takové h si vybrat, aby $| f(x+h) - - f(x) | \geqq \frac{1}{4 . 3^n} | B-A |$ a tedy jest pro toto h

$$\frac{| f(x+h) - f(x) |}{h} \geqq \frac{1}{4} \frac{| B-A |}{b-a} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

Číslo na pravé straně roste, roste-li n nade všecky meze, nade všecky meze (při čemž pak zároveň h konverguje k nulle) a odtud učiněné tvrzení, že $f(x)$ nemá derivaci pro žádné x intervalu (a, b), vskutku následuje.

Poznámka. 1. Čára $y = f(x)$ má ještě jinou zajímavou vlastnost. Lomenou čáru $y = f_n'(x)$ můžeme pokládati za čáru polygonální vepsanou do čáry $y = f(x)$; jednotlivé úsečky, z nichž se lomená čára skládá (a jichž koncové body jsou též body čáry $y = f(x)$), mají délku konvergující k nulle, když lim $n = \infty$. Avšak celková délka čáry $y = f_n(x)$ daná v (5) roste nade všechny meze pro lim $n = \infty$, neboť dle (3) jest

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2} - 0 \text{ aneb } = -\frac{\pi}{2} + 0 \quad \text{a tedy} \lim_{n=\infty} \frac{b-a}{\cos \alpha_n} = \infty.$$

Tuto okolnost vyjadřujeme, říkajíce, že čára $y = f(x)$ není *rektifikace schopna.*

Poznámka 2. Kdybychom funkci $f(x)$ v tomto příkladě definovanou vyjádřili analytickým výrazem, což neposkytuje obtíží, seznali bychom, že funkce ta jest specielním případem funkcí, sestrojených na základě methody, která vedla též ke konstrukci příkladu předch. (Viz poznámku pod čarou k předch. př.). Rovněž není obtížno příkladu předcházejícímu dáti geometrickou definici úplně obdobnou té, jež užita v příkladu právě uvažovaném. Jsou tedy základní myšlenky, vedoucí ke konstrukci obou příkladů, ve své vnitřní podstatě stejné. Nicméně pokládal jsem za užitečno i tento příklad ve stručném výkladu zde podati a to hlavně proto, že čáry $y = f_n(x)$, které s rostoucím n svým průběhem stále více se blíží čáře $y = f(x)$, nám dávají jakýsi náběh ku znázornění si jedné skupiny čar spojitých nemajících derivaci.

Příklad 4. Funkce $\chi(x)$, definovaná v př. 4. odst. 66., jest spojitou ve všech bodech, vyjma ty body x, při nichž x dá se vyjádřiti konečným zlomkem desetinným o sudém počtu desetinných míst. Tak jest ku př.

$$\chi(3{\cdot}14) = 3{\cdot}1 \text{ a dále } \chi(3{\cdot}14 + 0) = 3{\cdot}1, \ \chi(3{\cdot}14 - 0) = 3{\cdot}2,$$

odkudž nespojitost patrna. V žádném bodě, ve kterém jest funkce daná spojitá, nemá derivaci; limita výrazu totiž

$$\frac{\chi(x+h_n)-\chi(x)}{h_n} \quad \text{pro} \lim n = \infty$$

závisí od volby řady čísel $h_1, h_2, h_3, \ldots$ konvergujících s rostoucím n k nulle; jsou pak možny dle toho, jak tuto řadu volíme, pro každé přípustné x (t. j. pro x, jež se nedá vyjádřiti konečným zlomkem desetinným o sudém počtu desetinných míst) vždy tyto případy: 1. Limita ta vůbec neexistuje. 2. Limita jest rovna $+\infty$. 3. Limita se rovná číslu kladnému ($\geqq 0$) libovolně předem zvolenému. Důkaz těchto tvrzení jest na snadě a netřeba jej tu podávati.

Mnohý čtenář ovšem namítne: Že funkce $\chi(x)$ nemá derivaci v bodech, ve kterých jest spojitá, jest zcela přirozeno a nijak nepřekvapuje, jelikož jest to funkce mající diskontinuity a to v bodech, jež tvoří množství bodové všude husté. K této námitce lze však poznamenati, že lze snadno sestrojiti funkce, jež mají diskontinuitý v bodech množství číselného všude hustého a přece mají derivace v každém jiném bodě. Tak ku př. kdybychom číslu x příkladu 4. odst. 66. přiřadili číslo

$$\psi(x) = A + \frac{a_1}{10^2} + \frac{a_3}{10^6} + \frac{a_5}{10^{10}} + \ldots + \frac{a_{2k-1}}{10^{4k-2}} + \ldots$$

dostali bychom funkci, jež má diskontinuitu v každém x, jež se dá vyjádřiti konečným zlomkem desetinným. V každém jiném bodě jest funkce $\psi(x)$ spojitá a má derivaci a to derivaci rovnou nulle, jak čtenář snadno dokáže.

115. Čtyři čísla derivovaná. Sestrojíme-li pro funkci $f(x)$, jež jest v bodě x_0 a jeho okolí definována a v tom bodě spojitá, výraz

$$\lambda(h, x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

kterýžto výraz jest funkcí proměnné h definovanou v okolí bodu $h = 0$ (pro všecka h, pro něž také $f(x_0+h)$ jest definováno), můžeme, užívajíce pojmů a označení odst. 73., tvrditi, že existují čtyři limity v širším smyslu

$$\overline{\lambda(0+0, x_0)}, \quad \underline{\lambda(0+0, x_0)}, \quad \overline{\lambda(0-0, x_0)}, \quad \underline{\lambda(0-0, x_0)}.$$

Tyto čtyři limity slují *čísla derivovaná funkce $f(x)$ v bodě x_0* a nazývají se po řadě *horní derivace z prava, dolní derivace z prava, horní derivace z leva, dolní derivace z leva* a to vesměs *funkce $f(x)$ v bodě $x = x_0$ a širším smyslu.*

Můžeme je značiti symboly buď

$$\overline{f'^{+}}(x_0), \quad \underline{f'^{+}(x_0)}, \quad \overline{f'^{-}}(x_0), \quad \underline{f'^{-}(x_0)},$$

aneb

$$\overline{D^+ f(x_0)},\quad \underline{D^+ f(x_0)},\quad \overline{D^- f(x_0)},\quad \underline{D^- f(x_0)}.$$

Často užívá se pro ně označení (Dinim zavedené) Λ_{x_0}, λ_{x_0}, Λ'_{x_0}, λ'_{x_0}. Můžeme také definici ku př. horní derivace z prava vypisovati způsobem snadno srozumitelným takto:

$$\overline{\lambda(0+0,\ x_0)} = \overline{D^+ f(x_0)} = \overline{\lim_{h=+0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

a obdobně při ostatních třech číslech.

V důsledku pojmu derivace, derivace z prava a z leva jsou samozřejmy tyto výroky:

1. Jsou-li čtyři čísla derivovaná funkce $f(x)$ v bodě x_0 sobě vesměs rovna, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci (v širším smyslu) rovnou těm čtyřem číslům derivovaným.

2. Jsou-li prvá dvě čísla derivovaná (t. j. čísla $\overline{D^+ f(x_0)}$, $\underline{D^+ f(x_0)}$) sobě rovna, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci z prava (v širším smyslu) rovnou těm dvěma číslům.

Dále následují z definice ještě tyto výroky:

3. Jestliže $f(x)$ jest v bodě c v levo rostoucí (odst. 102., pozn. 2.), obě derivace z leva v bodě c jsou $\geqq 0$.*) Rovněž pro funkci v c v levo neklesající jsou ty derivace $\geqq 0$. Obdobná tvrzení lze učiniti pro funkce v bodě c klesající resp. nerostoucí, pro funkce v bodě c v pravo rostoucí, atd.

4. Má-li $g(x)$ derivaci rovnou $g'(x)$, jest $\overline{D^+(f(x)+g(x))} = \overline{D^+ f(x)} + g'(x)$. Stejné vztahy jsou platny i pro ostatní tři čísla derivovaná.

Postupem, kterým jsme při funkcích majících derivace dospěli ku větě Rolleově a větě o střední hodnotě, odvodíme i pro čísla derivovaná obdobné věty.

Máme-li funkci $f(x)$ spojitou v $(a,\ b)$, různou od nully a pro níž $f(a)=f(b)=0$, musí při této funkci nastati jeden z těchto dvou případů:

a) Funkce nabývá v $(a,\ b)$ hodnot kladných i záporných. Pak má funkce v jednom (aspoň) bodě intervalu $(a,\ b)$ kladnou hodnotu maximální a v jednom (aspoň) bodě int. $(a,\ b)$ zápornou hodnotu minimální. Nechť těchto hodnot (max. resp. min.) nabývá v bodech c resp. c'; $f(c)>0$, $f(c')<0$. Pak jest funkce $f(x)$ v bodě c v levo neklesající,

---

*) K vůli stručnosti budeme derivace $=+\infty$ čítati mezi derivace kladné. Rovněž budeme v tomto odstavci pokládati derivace a horní hranice rovné $+\infty$ za větší nežli každé reálné číslo. Obdobná stanovení jsou ovšem platna i vzhledem k symbolu $-\infty$.

v bodě c' v levo nerostoucí a obě derivace z leva v c jsou $\geqq 0$, v c' pak jsou $\leqq 0$; podobně i pro obě derivace z prava. Nabývá tedy každé ze čtyř derivovaných čísel funkce $f(x)$, nestává-li se v (a, b) nullou, hodnot kladných i záporných.

b) Funkce nenabývá v (a, b) hodnot o různých znaménkách; jest ku př. v (a, b) stále $f(x) \geqq 0$. Pak má opět v jednom (aspoň) bodě c hodnotu maximální. Obě derivace z leva v c jsou $\geqq 0$; obě derivace z leva v b však jsou $\leqq 0$ (neboť $f(b) = 0$, $f(x) \geqq 0$, $a < b$); dospíváme tudíž ku stejnému důsledku, jako v případě předcházejícím.

Tak odvodili jsme větu (obdobu ku větě Rolleově): Každé ze čtyř čísel derivovaných funkce $f(x)$ spojité v intervalu (a, b) a takové, že $f(a) = f(b) = 0$, nabývá v intervalu (a, b) hodnot kladných i záporných, nestává-li se v (a, b) nullou.

Uvažujme nyní funkci

$$\varphi(x) = (f(x) - f(a)) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$$

za předpokladu, že $f(x)$ jest spojitá v (a, b). Pak jest i $\varphi(x)$ v (a, b) spojitá a nad to jest $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Můžeme tudíž užiti při $\varphi(x)$ věty právě dokázané; vypočteme-li čísla derivovaná dle výroku 4. svrchu uvedeného, dostaneme ihned ku př.

$$\overline{D^+ f(e')} - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \geqq 0, \quad \overline{D^+ f(e'')} - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leqq 0,$$

kde e', e'' jsou dvě hodnoty intervalu (a, b). Označíme-li horní hranici čísel $\overline{D^+ f(x)}$, když x probíhá interval (a, b), znakem L_1, dolní hranici pak l_1, můžeme tvrditi v důsledku právě napsaných nerovnin, že menšitel z levých stran těch nerovnin jest číslo intervalu (l_1, L_1). Jelikož stejné důsledky vyplývají i pro ostatní čísla derivovaná funkce $f(x)$, můžeme vysloviti větu (*obdobu ku větě o střední hodnotě*): *Jsou-li L_i a l_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ horní a dolní hranice čtyř čísel derivovaných funkce $f(x)$ v intervalu (a, b), kterážto funkce jest spojitá v (a, b), jest*

$$l_i \leqq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leqq L_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Z této věty plyne, že, jsou-li a', b' dvě libovolná čísla intervalu (a, b), také

$$l_i \leqq \frac{f(b') - f(a')}{b' - a'} \leqq L_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Avšak čtyři čísla derivovaná funkce $f(x)$ v (a, b) — jichž horní (dolní) hranice jsou čísla L_i (l_i) — jsou horní a dolní limity funkcí daných prostředním článkem v poslední nerovnině, když buď b' konverguje ku a'

aneb a' ku b', a jsou tudíž čísla L_i a l_i zároveň horní a dolní hranicí čísel vyjádřených prostředním článkem, probíhá-li a', b' všecky hodnoty intervalu (a, b), při čemž současně $a' \neq b'$. Jelikož horní hranice toho množství jest určité číslo (po případě $+\infty$) a stejně i dolní hranice, *následuje ihned věta:*

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4, \quad l_1 = l_2 = l_3 = l_4,$$

pravící nám, že všecka čtyři čísla derivovaná funkce $f(x)$ spojité v (a, b) mají v (a, b) touž horní a touž dolní hranicí. (Věta Diniova.)

Z věty Diniovy vyplývají jako důsledek věty: Jestliže jedno ze čtyř čísel derivovaných funkce $f(x)$ spojité v (a, b) jest funkcí spojitou v bodě c resp. v intervale (a, b), jsou spojita všecka a sobě v bodě c resp. v intervale (a, b) rovna; funkce $f(x)$ pak má v bodě c resp. v intervale (a, b) derivaci.

Je-li jedno ze čtyř čísel derivovaných funkce $f(x)$ spojité v (a, b) funkcí stále rostoucí v intervalu (a, b), jsou všecka čtyři čísla derivovaná sobě rovna a funkce $f(x)$ má derivaci v (a, b).

3. Příklady pro užití věty o střední hodnotě.

116. *Příklad.* Uvažujme funkci

$$\varphi(x) = \operatorname{arc\,tg} x - \left[\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right].$$

Derivace této funkce jest

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \left(1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{2(n-1)}\right) \\ &= \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Je-li n sudé, jest $\varphi'(x)$ kladné pro každé x a tedy $\varphi(x)$ funkcí rostoucí; je li n liché, jest $\varphi(x)$ funkcí klesající. Jelikož $\varphi(0) = 0$, jest $\varphi(x) > 0$ pro $x > 0$ a n sudé; naproti tomu $\varphi(x) < 0$ pro $x > 0$ a n liché. Lze tedy psáti nerovninu

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{x^{4\nu+1}}{4\nu+1} > \operatorname{arc\,tg} x > \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots - \frac{x^{4\nu-1}}{4\nu-1}$$

platnou pro $x > 0$. Z této nerovniny při $0 < x \leqq 1$ vyplývá snadno rovnost

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

dávající nám hodnotu $\operatorname{arc\,tg} x$ nekonečnou řadou konvergentní. Rovnost tato platí (jelikož $\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$) vůbec pro $|x| \leqq 1$.

Toutéž úvahou lze pro každé $x > 0$ dokázati

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{x^{2\nu-1}}{2\nu-1} > \log(1+x) > \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2\nu}}{2\nu}$$

a příslušný rozvoj pro $\log(1+x)$ v nekonečnou řadu.

117. Jakožto *další příklad* pro užití věty o střední hodnotě podám vyšetření dvou funkcí neodvisle proměnné x, jež označíme krátce y, z a jež hoví rovnicím

$$y' = z, \quad z' = -y \tag{1}$$

a to pro všecka x intervalu $(-\infty, \infty)$. Funkce y, z jsou funkce spojité v celém intervalu (neboť mají pro všecka x dle předpokladu derivace). Hoví-li rovnicím (1) dvě určité funkce y, z, hoví jim též funkce Cy, Cz, kde C jest konstanta; této okolnosti použijeme ihned, abychom úkol svůj poněkud zjednodušili. Jest totiž pro derivaci výrazu $y^2 + z^2$ dle x platen vztah (v důsledku (1))

$$(y^2 + z^2)' = 2yy' + 2zz' = 2yz - 2yz = 0$$

a jest tedy $y^2 + z^2$ v celém intervalu rovno konstantě (odst. 111.); té však, volíme-li vhodně číslo C svrchu vytčené, můžeme dáti jakoukoli hodnotu (od nully různou); zvolíme ji rovnou 1, můžeme tudíž k rovnicím (1) připojiti podmínku

$$y^2 + z^2 = 1. \tag{2}$$

Jest nyní dvojí možnost: Buď funkce y, z stávají se nullou anebo se nestávají nullou pro žádnou hodnotu neodvisle proměnné x. Nestává-li se ku př. y nullou, pak má y (jakožto spojitá funkce) stále totéž znaménko, budiž ku př. $y > 0$. Potom také $z' = -y$ jest stále téhož znaménka, totiž záporné a funkce z klesající. Je-li tedy ku př. $z(a)$ záporné a rovno $-m$, kde $m > 0$, pak $z(x) < -m$ pro $x > a$.*) Dle věty o střední hodnotě jest však (za znaménky funkčními vypisuji v násl. k vůli zřetelnosti příslušné argumenty)

$$y(x) - y(a) = y'(\xi)(x-a), \quad y(x) - y(a) = z(\xi)(x-a)$$
$$y(x) - y(a) < -m(x-a) \quad \text{pro } x > a.$$

Zvolíme-li v poslední nerovnině x dosti veliké, následuje z ní, že $|y(x)|$ může nabýti hodnot libovolně velikých, což jest nemožno, jelikož dle (2)

*) Kdyby $z(a)$ bylo kladné $= m$, uvažovali bychom obdobně $x < a$, pro které $z(x) > m$, a dospěli bychom v následujícím k témuž důsledku.

jest $|y| < 1$. Musí tedy y a stejně i z v intervalu $(-\infty, \infty)$ stávati se nullou. Zvolme si neodvisle proměnnou x tak, aby y pro $x=0$ bylo rovno 0;*) tu dle (2) jest $z(0)=\pm 1$, volme k vůli určitosti $z(0)=+1$. Pak máme pro $x>0$

$$z(x) \leqq 1 \text{ dle (2)}; \quad y'=z; \quad y' \leqq 1, \quad y'-1 \leqq 0, \ (y-x)' \leqq 0,$$
$$y-x < y(0)-0 \text{ aneb } y-x<0, \quad y<x$$

a podobně (stále pro $x>0$)

$$z'=-y, \ z'>-x \text{ (v důsl. posl. nerovniny)}, \ z'+x>0, \ (z+\tfrac{1}{2}x^2)'>0,$$
$$z+\tfrac{1}{2}x^2 > z(0)+\tfrac{1}{2}.0^2, \quad z>1-\tfrac{1}{2}x^2$$

a dále

$$y'=z, \quad y'>1-\tfrac{1}{2}x^2, \quad y'-1+\tfrac{1}{2}x^2>0, \quad \left(y-\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}\right)'>0,$$
$$y>\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}.$$

Takovýmto způsobem pokračujíce zjednáme si konečně tyto nerovniny (po případě můžeme použiti úplné indukce platné pro $x>0$)

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{x^{4\nu+1}}{(4\nu+1)!}>y>\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+$$
$$+\frac{x^5}{5!}-\ldots-\frac{x^{4\nu-1}}{(4\nu-1)!}$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{x^{4\nu}}{(4\nu)!}>z>1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots-\frac{x^{4\nu-2}}{(4\nu-2)!},$$

t. j. jinými slovy: daným rovnicím hoví (při vhodné volbě čísla C a při vhodné volbě neodvisle proměnné) funkce dané nekonečnými řadami (konvergentními pro každé x)

$$\begin{aligned} y&=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots, \\ z&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

což jsou funkce nám známé a to $y=\sin x$, $z=\cos x$. Že tyto funkce hoví rovnicím (1), jest ostatně snadno patrno; ve výkladu právě podaném obsažen jest tudíž zároveň jeden ze způsobů, jak lze definovati funkce $\cos x$, $\sin x$ a zároveň odvoditi vyjádření jich nekonečnými řadami.

Nejobecnější funkce hovící rovnicím (1) jsou dány, jak z předchozího vyplývá, rovnicemi

$$y=C\sin(x-x_0), \quad z=C\cos(x-x_0); \quad C,\ x_0 \text{ libovolné konstanty.} \tag{4}$$

---

*) Stává-li se y nullou pro $x=x_0$, stačí klásti $x=x_0+x'$ a y stane se funkcí proměnné x' a takovou, že pro $x'=0$ jest $y=0$.

Úkol. Z rovnic (1) odvoditi jest addiční theorémy pro $\sin x$ a $\cos x$.

Poznámka. Rovnice (1) určující dvě neznámé funkce y, z obsahují vedle y, z též derivace těchto funkcí. Takovýmto rovnicím říká se **differenciální**. Vývody podanými dáno ve (4) nejobecnější řešení těchto rovnic.

118. Budiž dána funkce $F(x)$ mající v intervalu (a, ∞) ve všech bodech za derivaci funkci $f(x)$, *jež jest v tom intervalu kladnou a funkcí stále klesající.* (Jest tedy zároveň $F(x)$ primitivní funkcí ku $f(x)$, viz odst. 101.) Uvažujme pak výrazy

$$u_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) - F(n),$$
$$v_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) - F(n+1).$$

Dokážeme si, že řada čísel $u_1, u_2, u_3, \ldots$ jest řadou klesající, řada pak $v_1, v_2, v_3, \ldots$ řadou rostoucí a to počínaje od indexů větších než a. Neboť jest pro $n > a$ dle věty o střední hodnotě

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - (F(n+1) - F(n)) = f(n+1) - f(n+\Theta) < 0,$$
$$v_{n+1} - v_n = f(n+1) - (F(n+2) - F(n+1)) = f(n+1) - f(n+1+\Theta') > 0$$

(Při tom jest $0 < \Theta < 1$, $0 < \Theta' < 1$). Nad to jest

$$u_n - v_n = F(n+1) - F(n) = f(n+\Theta) > 0. \tag{1}$$

Existují tedy — dle známých vět o limitách (odst. 27.) — $\lim f(n)$, $\lim u_n$, $\lim v_n$ vesměs pro $\lim n = \infty$ a jest v důsledku (1)

$$\lim_{n=\infty} u_n - \lim_{n=\infty} v_n = \lim_{n=\infty} f(n). \tag{1'}$$

Jelikož $F(x)$ maje derivaci stále kladnou, jest funkcí stále rostoucí, mohou nastati vzhledem ku $F(x)$ toliko dva případy:

1. $\lim F(n) = \infty$ pro $\lim n = \infty$. Pak poněvadž existuje $\lim v_n$ a $F(n)$ roste nade všecky meze, roste i s_n v řadě nekonečné

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots \tag{2}$$

s rostoucím n nade všecky meze a řada jest divergentní.

2. $\lim F(n) = C$ pro $\lim n = \infty$. Potom jest nutně dle (1) $\lim f(n) = 0$ a dle (1') dále

$$\lim_{n=\infty} u_n = \lim_{n=\infty} v_n = -C + f(1) + f(2) + f(3) + \ldots$$

a řada (2) je konvergentní. Máme tak **kriterium Cauchyovo** pro konvergenci řad: *Řada*

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(k) + \ldots \tag{2}$$

jest konvergentní, jestliže funkce $f(x)$, která jest v intervalu (a, ∞) funkcí kladnou a klesající, má za primitivní funkci funkci $F(x)$, pro kterou existuje $\lim\limits_{x=\infty} F(x)$; *je-li* $\lim\limits_{x=\infty} F(x) = \infty$, *jest řada divergentní.*

Příklad 1. Řada

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\dots$$

jest konvergentní pro $\alpha > 1$, divergentní pro $\alpha \leqq 1$; neboť primitivní funkce ku $x^{-\alpha}$ jest $-\frac{1}{\alpha-1}x^{1-\alpha}$ resp. $\log x$ pro $\alpha = 1$. Obdobně na na základě vztahů

$$(\log^{1-\alpha} x)' = -(\alpha-1)\frac{1}{x\log^\alpha x},\ (\log(\log x))' = \frac{1}{x\log x}$$

se vyšetří konvergence řady, jejíž obecný člen jest

$$\frac{1}{n\log^\alpha n}$$

atd.

Příklad 2. Dle vývodů předcházejících existují limity

$$\left.\begin{aligned} C &= \lim\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\log n\right),\\ C' &= \lim\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\right),\\ C'' &= \lim\left(\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\dots+\frac{1}{n\log n}-\log(\log n)\right)\end{aligned}\right\}\ \text{pro} \lim n = \infty$$

a pod. S první z těchto limit (s t. zv. Eulerovou konstantou) jsme se obšírněji zabývali již v odst. 38.

119. Stanovení zbytku řady. Funkce $F(x)$ v předcházejícím odst. zavedená jest užitečna nejenom při rozhodnutí, zda řada (2) jest konvergentní, nýbrž i při numerickém výpočtu té řady poskytuje výhody. Učiňme tytéž předpoklady o $f(x)$ jako v předch. odst. a o $F(x)$ hned předpokládejme, že $\lim F(x) = 0$ pro $\lim x = \infty$. (Tomu lze vždy vyhověti, když existuje $\lim F(x)$; neboť $F(x)$ a $F(x)+C$ jsou současně primitivní funkce ku $f(x)$. Pak jest v důsledku počátečních úvah odst. předch.

$$u_n > s > v_n,\quad s \text{ součet řady (2)},$$

aneb v důsledku výrazů pro u_n, v_n

$$-F(n) > s - s_n > -F(n+1)\quad s - s_n = r_n = \text{zbytku po } n\text{-tém členu}$$

odtud (viz odst. 57.)

$$s = s_n - \frac{F(n)+F(n+1)}{2} + \Theta\frac{F(n)-F(n+1)}{2},$$

kde Θ jest číslo, jehož absolutní hodnota jest menší než 1.

Měli-li bychom ku př. počítati součet s nekonečné řady

$$\frac{1}{1^9}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}+\ldots+\frac{1}{k^9}+\ldots,$$

mohli bychom dle posledního výsledku psáti (kladouce $n=10$)

$$s=\frac{1}{1^9}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}+\ldots\;+\frac{1}{10^9}+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{10^8}+\frac{1}{11^8}\right)+\frac{\Theta}{16}\left(\frac{1}{10^8}-\frac{1}{11^8}\right),$$

při čemž poslední člen nám dává míru přesnosti, jakou lze za předpokladu $n=10$ naznačeným způsobem dosíci; snadným počtem násl.

$$\left|\frac{\Theta}{16}\left(\frac{1}{10^8}-\frac{1}{11^8}\right)\right|<4{\cdot}34\,.\,10^{-10},$$

z čehož jest patrno, že používajíce vypsaných členů, můžeme vypočísti s s chybou menší než $4{\cdot}34\,.\,10^{-10}$.

Jako jiný příklad uvádím stanovení Eulerovy konstanty. Vycházíme-li od definice poněkud změněné, dle níž

$$C=\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\log n\right),$$

můžeme pokládati C za součet nekonečné řady, jejíž k-tý člen jest

$$f(k)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}\right)-\log\frac{k}{k-1},\; k>1\,;\; f(1)=\frac{1}{2}.$$

Dostaneme tu snadným počtem

$$F(n)=-\left(n-\frac{1}{2}\right)\log\frac{n}{n-1}+1.$$

S použitím tohoto výsledku nám dává hořejší obecná formule po krátkém počtu tento výsledek:

$$C=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{2n}-\log n+\frac{1}{3\,.\,4n^2}+\frac{3}{5\,.\,8\,.\,n^4}+$$
$$+\frac{5}{7\,.\,12\,.\,n^6}+\ldots+\frac{\Theta'}{12\,n\,(n^2-1)},\quad |\,\Theta'\,|<1.$$

4. O nekonečných řadách, jichž členové jsou funkce proměnné veličiny.

120. Stejnoměrná konvergence nekonečných řad. Jelikož v následujícím budeme se často zabývati řadami nekonečnými, jichž členy jsou funkce proměnné veličiny, jest účelno již nyní zavésti pojem t. zv. stejnoměrné konvergence nekonečné řady.

Budiž dána nekonečná řada

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots, \tag{1}$$

jejíž členové $u_k(x)$, jak jsme označením vytkli, jsou funkce proměnné x a budiž tato řada konvergentní, když x nabývá hodnot oboru Ω (daného jistým množstvím číselným). Součet té řady označme $s(x)$; $s(x)$ pak jest funkce proměnné x definovaná v Ω. Je-li x jedna z hodnot oboru Ω, pak lze udati k číslu kladnému ε číslo N tak, aby byla splněna nerovnina

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon \text{ pro všechna } n > N, \tag{2}$$

($s_n(x)$ jest součet prvých n členů řady (1)), jakož plyne z definice konvergence nekonečných řad. Číslo N jest závislo na ε a vedle toho na x. *Lze-li však zvoliti N nezávisle na x tak, že nerovnina* (2) *jest splněna pro všecka x daného oboru Ω (a ovšem pro všecka $n > N$), říkáme, že řada* (1) *konverguje stejnoměrně v oboru Ω.*

Výraz $s(x) - s_n(x)$, který se tu vyskytuje, nazvali jsme **zbytek** *řady* (1) *po n-tém členu a značí se krátce $r_n(x)$.* (Viz odst. 57.)

Příklad 1. Uvažujme řadu

$$\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots + \frac{x^k}{k^2} + \ldots \tag{3}$$

Je li $|x| \leqq 1$, jest tato řada konvergentní, neboť pak členové té řady jsou menší v absolutní hodnotě než členové konvergentní řady s kladnými členy

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \ldots; \tag{4}$$

pro $|x| > 1$ jest řada daná divergentní. I tvrdím, že *řada* (3) *jest stejnoměrně konvergentní* pro všecka x v intervalu $(-1, 1)$ anebo krátce *v intervalu* $(-1, 1)$. Neboť, poněvadž (4) jest konvergentní, lze udati k ε číslo N_0 tak, aby

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots < \varepsilon \text{ pro všecka } n > N_0;$$

tím spíše bude *pro tatáž n* a pro všecka x v $(-1, 1)$ při řadě (3)

$$|r_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| < \varepsilon \text{ pro všechna } n > N_0.$$

(jest tedy číslo N definicí požadované v tomto případě rovno N_0).

Z příkladu projednaného vyplývá věta: *Řada* (1) *konverguje stejnoměrně v oboru Ω, jestliže členové její jsou pro všecka x oboru Ω v absolutní hodnotě menší ($\leqq$) než stejnolehlí členové řady absolutně konvergentní $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, kde a_k nezávisí vůbec na x.*

Z věty této následuje ku př. též, že řada

$$\frac{1}{1^2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2^2}\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{1}{3^2}\frac{x^3}{1+x^6}+\ldots \tag{5}$$

konverguje stejnoměrně pro všechna x (v intervalu $-\infty$, ∞). Rovněž snadno z věty uvedené čtenář sezná, že řady pro cos x a sin x konvergují stejnoměrně v každém intervalu (a, b), kde a, b jsou určitá čísla; nelze však říci, že by ty řady byly stejnoměrně konvergentní v intervalu $(-\infty, \infty)$ jako řada (5).

Příklad 2. Uvažujme řadu pro $x \geqq 0$

$$\frac{x}{1.(1+1x)}+\frac{x}{(1+1x)(1+2x)}+\frac{x}{(1+2x)(1+3x)}+\ldots \tag{6}$$

Jelikož pro obecný člen její jest

$$u_k=\frac{x}{(1+\overline{k-1}\,x)(1+kx)}=\frac{1}{1+(k-1)x}-\frac{1}{1+kx},$$

jest pro x různé od nully

$$s_n(x)=1-\frac{1}{1+nx},\ r_n(x)=\frac{1}{1+nx},$$

pro $x=0$ jest $s_n(0)=0$. Předpokládejme k vůli jednoduchosti $x>0$ Má li býti řada stejnoměrně konvergentní v jistém oboru Ω obsahujícím kladná x, musí

$$|\,r_n(x)\,|=\frac{1}{1+nx}<\varepsilon \text{ pro všecka } x \text{ oboru } \Omega \tag{7}$$

a pro všecka n větší než jisté číslo N. Avšak z nerovniny právě napsané vyplývá

$$1<\varepsilon(1+nx),\ n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x},\ \text{ať } x \text{ jest jakékoliv číslo oboru } \Omega.$$

Značme dolní hranici čísel oboru Ω písmenem m; pak je-li $m>0$, bude

$$|\,r_n(x)\,|<\varepsilon \text{ pro všecka } n>N, \text{ kde } N=\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon m}.$$

Je-li $m=0$, nelze patrně N stanoviti tak, aby bylo splněno (7) při $\varepsilon<1$ pro všecka $n>N$. Jestliže tedy dolní hranicí čísel oboru Ω jest 0, není řada (6) v Ω stejnoměrně konvergentní; jestliže $m>0$, jest řada (6) v oboru Ω stejnoměrně konvergentní. Specielně jest řada (6) konvergentní stejnoměrně v intervalu (a, b), kde $a>0$, $b>0$ a není stejnoměrně konvergentní v intervalu $(0, a)$. Řada nám představuje funkci nespojitou v intervalu $(0, a)$; neboť součet její jest 0 pro $x=0$ pro $x>0$ pak jest součet 1. Funkce součtem daná má diskontinuitu v bodě 0. Naproti tomu řada

$$\frac{x^2}{1(1+1x)}+\frac{x^2}{(1+1x)(1+2x)}+\frac{x^2}{(1+2x)(1+3x)}+\dots$$

jest řada stejnoměrně konvergentní v každém oboru, obsahujícím x, jež jsou ≥ 0, tedy i v intervalu $(0, a)$, jak čtenář obdobným počtem prokáže, a součet její nám dává v tom intervalu funkci spojitou $s = x$.

Poznámka. Nutná a postačující podmínka, aby řada (1) konvergovala stejnoměrně v oboru Ω jest, aby ke každému kladnému číslu ε_1 bylo lze udati číslo N tak, že jest splněna nerovnina

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| < \varepsilon_1 \text{ pro všecka } n > N, \text{ pro všecka } p > 0 \qquad (8)$$

a pro všecka x oboru Ω.

Věta tato téměř bezprostředně vyplývá z definice, jakož čtenář snadno může dokázati. Ostatně podmínku tuto lze vysloviti ještě v poněkud jiném tvaru. (Viz obdobné věty v odst. 28., vztahy (I.) a (II.)).

121. Užijeme pojmu řady stejnoměrně konvergentní ku odvození věty, pomocí níž výsledky docílené ve příkladech odst. 116. (rozvoje pro arctg x, log $(1 + x)$) se dají zevšeobecnit. Budiž řada nekonečná

$$u'_1(x) + u'_2(x) + u'_3(x) + \dots \qquad (9)$$

konvergentní a to stejnoměrně v intervalu (a, b); členové této řady buďtež derivace členů řady $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, ...; součet pak řady (9) nechť jest rovněž derivací jisté funkce $s(x)$ a značme jej tudíž $s'(x)$. Součet prvých n členů řady jest derivací výrazu $s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$; označíme-li zbytek po n-tém členu řady dané ještě $\varrho_n(x)$, můžeme psáti

$$s'(x) - s'_n(x) = \varrho_n(x).$$

Budiž dále $n > N$, kde N jest tak voleno, aby $|\varrho_n(x)| < \varepsilon$ pro všecka x intervalu (a, b) a pro všecka $n > N$, pak v důsledku věty odst. 107. pozn. můžeme psáti

$$|(s(x) - s_n(x)) - (s(a) - s_n(a))| < \varepsilon_1 \qquad \varepsilon_1 = |b-a|\,\varepsilon$$

aneb

$$|(s(x) - s(a)) - (s_n(x) - s_n(a))| < \varepsilon_1$$

pro všecka $n > N$ a pro všecka x v (a, b), kterýžto výsledek nám praví, že lim $(s_n(x) - s_n(a))$ pro lim $n = \infty$ jest $s(x) - s(a)$ aneb

$$s(x) - s(a) = (u_1(x) - u_1(a)) + (u_2(x) - u_2(a)) + (u_3(x) - u_3(a)) + \dots, \quad (A)$$

a zároveň, že tato řada (A) jest stejnoměrně konvergentní v (a, b). *Rovnici (A), která jest platna, když x jest v (a, b), můžeme tudíž pokládati jako důsledek rovnice*

$$s'(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + u'_3(x) + \dots \qquad (B)$$

a předpokladu, že řada v (B) jest v (a, b) stejnoměrně konvergentní.

Příklad 1. Z rovnice

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots \tag{λ}$$

následuje z předcházejícího výsledku, bereme-li $a=0$

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots \quad \text{pro} \quad |x|<1,$$

neboť řada (λ) jest v intervalu $(0, 1-\varepsilon)$ i v $(-1+\varepsilon, 0)$ stejnoměrně konvergentní, jak lze bez potíží dokázati. (Viz odst. 120.).

Příklad 2. Pro $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ máme dle binomické věty odst. 87. rozvoj

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^6+\ldots$$

Jelikož levá strana jest derivací arc sin x a pravá jest i v intervalu $(0, 1-\varepsilon)$ i v intervalu $(0, -1+\varepsilon)$ stejnoměrně konvergentní, můžeme dle (A) ihned psáti (berouce $a=0$)

$$\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots \quad \text{pro} \quad |x|<1.$$

122. Větu odstavce předcházejícího lze obrátiti a zároveň poněkud zevšeobecniti. Za tím účelem odvodíme si nejprve obecnou větu o řadách stejnoměrně konvergentních. Budiž dána nekonečná řada $u_1(x)+u_2(x)+$ $+u_3(x)+\ldots$, která jest stejnoměrně konvergentní v oboru Ω. Jedním z bodů zhuštění čísel v Ω budiž x_0, kteréžto číslo k vůli zjednodušení následujících výkladů nechť nepřináleží oboru Ω, a nechť jest dále

$$\lim_{x=x_0} u_k(x)=\alpha_k, \quad k=1, 2, 3, \ldots, \tag{10}$$

ať x jakkoliv konverguje ku x_0, probíhajíc ovšem jenom hodnoty oboru Ω. Pak za předpokladů právě vytčených lze tvrditi: *Jestliže řada $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots$ jest stejnoměrně konvergentní v oboru Ω majíc za součet $s(x)$, tu jest i řada*

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots \tag{11}$$

konvergentní a jest — značíme-li součet poslední řady σ

$$\lim_{x=x_0} s(x)=\sigma \tag{12}$$

ať x jakkoliv konverguje ku x_0, probíhajíc hodnoty oboru Ω.

Z předpokladu, že řada (1) konverguje stejnoměrně, následuje nejprve, že k číslu kladnému ε lze udati číslo N tak, že v oboru Ω jest stále

$$|s_{n+p}(x)-s_n(x)|<\varepsilon \quad \text{pro všecka } n>N \text{ a všecka } p>0. \tag{13}$$

Odtud následuje (přejdeme-li k limitě při $\lim x = x_0$ a značíme-li zároveň součet prvých n členů řady (11) σ_n

$$| \sigma_{n+p} - \sigma_n | \leqq \varepsilon \text{ pro všecka } n > N \text{ a všecka } p, \tag{14}$$

čímž jest dokázáno tvrzení, že řada (11) jest konvergentní. Přejdeme-li však v (13) a (14) k limitě pro $\lim p = \infty$, obdržíme

$$| s(x) - s_n(x) | \leqq \varepsilon, \quad | \sigma - \sigma_n | \leqq \varepsilon \text{ pro všecka } n > N. \tag{15}$$

Zvolme si jedno $n > N$; pak z předpokladu (10) plyne, že k číslu ε přináleží kladné číslo η takové, že

$$| s_n(x) - \sigma_n | < \varepsilon \text{ pro všecka } x \text{ v } \Omega, \text{ pro něž } | x - x_0 | < \eta \tag{16}$$

Ze vztahů (15) a (16) následuje ihned (odst. 18.)

$$| s(x) - \sigma | \leqq | s(x) - s_n(x) | + | s_n(x) - \sigma_n | + | \sigma_n - \sigma | < 3\varepsilon$$

pro všecka x v oboru Ω, pro něž $| x - x_0 | < \eta$, čímž i tvrzení (12) jest plně dokázáno.

Důsledek 1. Jsou-li $u_k(x)$ funkce spojité v bodě x_0 a je-li řada (1) stejnoměrně konvergentní pro všecka x, pro něž $0 < | x - x_0 | < \delta$, jest stejnoměrně konvergentní vůbec v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a součet její $s(x)$ jest spojitou funkcí v bodě x_0.

Je li řada (1) *řadou stejnoměrně konvergentní v intervalu* (a, b) *a funkce* $u_k(x)$ *jsou v intervalu tom spojity, jest i součet* $s(x)$ *spojitou funkcí v intervalu* (a, b).

Důsledek 2. **Derivace nekonečné řady v bodě** x_0. Mají-li funkce $u_k(x)$ derivace v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, je-li řada $u'_1(x) + u'_2(x) + u_3'(x) + \ldots$ stejnoměrně konvergentní pro všecka x, pro něž $0 < | x - x_0 | < \delta$, a je-li konečně řada $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ konvergentní pro $x = x_0$, jest řada tato vůbec konvergentní v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a její součet $s(x)$ má v bodě x_0 derivaci, pro niž

$$s'(x_0) = u'_1(x_0) + u'_2(x_0) + u'_3(x_0) + \ldots$$

V tomto případě běží totiž vlastně o limitu pro $\lim h = 0$ výrazu

$$\frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} = \frac{u_1(x_0 + h) - u_1(x_0)}{h} + \frac{u_2(x_0 + h) - u_2(x_0)}{h} + \ldots \tag{17}$$

Řada na pravé straně jest konvergentní stejnoměrně pro všecka h, pro něž $0 < | h | < \delta$, neboť jest dle věty o střední hodnotě (součet prvých n členů té řady značíme $S_n(h)$)

$$| S_{n+p}(h) - S_n(h) | = | u'_{n+1}(x_0 + \Theta h) + u'_{n+2}(x_0 + \Theta h) + \ldots + \\ + u'_{n+p}(x_0 + \Theta h) |$$

Jelikož pak řada $u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots$ jest stejnoměrně konvergentní pro $0 < | x - x_0 | < \delta$, lze výraz na pravé straně učiniti menším než ε, volíme-li jenom $n > N$, kde N jest číslo vhodně ku ε volené. Odtud vyplývá tvrzení právě učiněné o řadě (17) (viz pozn. v odst. 120.), jakož i snadno věta svrchu uvedená v hlavní věci jako důsledek základní věty. Jest jenom si uvědomiti ještě, že z předpokladu o konvergenci řady $u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots$ a z okolnosti právě dokázané, že řada v (17) konverguje, následuje konvergence řady $u_1(x_0+h)+u_2(x_0+h)+\ldots$ pro $|h|<\delta$, tedy konvergence řady $u_1(x)+u_2(x)+\ldots$ v $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Poznámka. Z vět tohoto a předcházejícího odstavce následuje, že k funkci, která jest dána součtem řady stejnoměrně konvergentní, jejíž členové jsou funkce spojité mající primitivní funkce, přísluší vždy primitivní funkce.

123. Konverguje-li řada $u_1(x)+u_2(x)+\ldots$ v okolí bodu x_0 a to tak, že lze ke dvojici kladných čísel ε, n nalézti číslo δ, aby splněna byla nerovnina

$$|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } 0<|x-x_0|<\delta$$

budeme říkati, že řada daná **konverguje v bodě** x_0 **zpola stejnoměrně.** Při tom jest ε libovolné číslo kladné; n jest kladné číslo celé, jež zpravidla nutno omeziti podmínkou $n>N$, kde N jest jisté číslo závislé na ε.

Příklad. Řada

$$(x-xe^{-x^2})+(xe^{-x^2}-2xe^{-2x^2})+(2xe^{-2x^2}-3xe^{-3x^2})+\ldots$$

má $s_n(x)=x-nxe^{-nx^2}$. Řada konverguje pro každé x; součet její jest $s(x)=x$. Konvergence tato není však stejnoměrná v žádném intervalu obsahujícím bod 0, neboť $s(x)-s_n(x)=nxe^{-nx^2}$ jest rovno pro $x=\frac{1}{n}$ hodnotě $e^{-\frac{1}{n}}$, která s rostoucím n se blíží k jedné a nelze tudíž $s(x)-s_n(x)$ co do absolutní hodnoty učiniti menším než číslo ε menší než 1 pro všecka n větší než jisté číslo N_0 (ať si N_0 zvolíme jakkoliv) a pro všecka x intervalu obsahujícího bod 0. Řada však konverguje v bodě 0 zpola stejnoměrně, neboť jest patrně

$$|nxe^{-nx^2}|<\varepsilon \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } |x-0|<\frac{\varepsilon}{n};$$

jest tedy číslo δ v tomto jednoduchém příkladě rovno $\frac{\varepsilon}{n}$. V příkladě projednávaném jsou ε, n úplně libovolná čísla kladná (n ovšem celistvé).

Kdybychom místo řady právě uvažované vzali v úvahu řadu, jejíž obecný člen jest

$$u_n(x)=\frac{1}{(n-1)n}+(n-1)xe^{-(n-1)x^2}-nxe^{-nx^2} \qquad (p)$$

bylo by patrně

$$| s(x) - s_n(x) | = \left| \frac{1}{n} + n x e^{-nx^2} \right| \leq \frac{1}{n} + n|x| e^{-nx^2}$$

Tu jest napřed nutno n omeziti ku př. podmínkou $n > \frac{2}{\varepsilon}$, následkem čehož první sčítanec pravé strany bude menší než $\frac{1}{2}\varepsilon$; aby i druhý sčítanec pravé strany byl menší než $\frac{\varepsilon}{2}$ stačí, aby pro x splněna byla nerovnina $| x | < \frac{\varepsilon}{2n}$. Jest tedy i řada o obecném členu stanoveném v (p) zpola stejnoměrně konvergentní v bodě $x = 0$; neboť jsou-li ε, n čísla kladná, z nichž poslední jest celistvé a větší než $\frac{2}{\varepsilon}$, jinak však jsou úplně libovolně zvolena, jest pro ni

$$| s(x) - s_n(x) | < \varepsilon \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } | x - 0 | < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Poznámka. Definice podaná snadno se rozšiřuje na řady konvergentní v jistém oboru majícím v bodě x_0 bod zhuštění a obdobně též i úvahy následující. Pak mluvíme o řadách konvergujících v bodě x_0 zpola stejnoměrně se zřetelem k oboru Ω. Jelikož však tento obecnější případ by jenom stěžoval jasnost výkladu a zobecnění příslušné neposkytuje žádných obtíží, omezil jsem se v podaném výkladu i v následujícím na případ jednodušší a nejčastěji přicházející.

124. Podržme v následujícím označení odst. 122. Jestliže nekonečná řada $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) \ldots$ jakož i řada $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ jsou konvergentní — prvá v okolí bodu x_0 —, pak nutná a postačující podmínka, aby

$$\lim_{x = x_0} s(x) = \sigma, \tag{A}$$

jest, aby řada $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ konvergovala v bodě $x = x_0$ zpola stejnoměrně.

Dokažme nejprve, že podmínka ta jest postačující a předpokládejme tedy, že řada $u_1(x) + \ldots$ konverguje v x_0 zpola stejnoměrně; máme tedy předpoklady celkem tři.

Z předpokladu prvého, že řada $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ konverguje, následuje možnost stanoviti ku libovolnému kladnému ε číslo N tak, aby

$$| \sigma - \sigma_n | < \varepsilon \text{ pro všecka } n > N. \tag{α}$$

Z druhého předpokladu, že řada $u_1(x) + \ldots$ konverguje v bodě x_0 zpola stejnoměrně, následuje možnost ku číslům ε a n stanoviti číslo δ' tak, aby

$$| s(x) - s_n(x) | < \varepsilon \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } 0 < | x - x_0 | < \delta'. \tag{β}$$

Při tom jest n libovolné potud, že pouze může býti ohraničeno zdola (kteréžto ohraničení závisí pak od ε). Můžeme však zvoliti si n vždy tak, aby bylo $n > N$ a my si zvolíme jedno takové určité n.

Pak z předpokladu třetího, který praví, že $\lim u_k(x) = \alpha_k$ pro $\lim x = x_0$, následuje při tomto určitém n, že k číslu ε lze nalézti číslo δ'' tak, aby

$$|\sigma_n - s_n(x)| < \varepsilon \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } 0 < |x - x_0| < \delta''. \quad (\gamma)$$

Z nerovnin (α), (β), (γ) pak následuje stejně jako v odst. 122.

$$|s(x) - \sigma| < 3\varepsilon \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

kde δ jest menší z čísel δ', δ'', čímž (A) jest dokázáno.

Abychom dokázali, že podmínka jest nutná, budeme naopak předpokládati, že splněn jest vztah (A) vedle předpokladu prvého a třetího a dokážeme, že potom řada daná konverguje v bodě x_0 zpola stejnoměrně.

Budiž ε zase libovolné číslo kladné. Určíme nejprve N tak, aby

$$|\sigma_n - \sigma| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{pro všecka } n > N, \quad (\alpha')$$

což jest možno v důsledku předpokladu prvého. Ať si zvolíme číslo $n > N$ jakkoliv, vždy jest možno v důsledku třetího předpokladu stanoviti číslo δ_1 (závislé na n a ε), aby

$$|s_n(x) - \sigma_n| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } 0 < |x - x_0| < \delta_1; \quad (\beta')$$

z (A) pak následuje existence čísla δ_2 takového, že

$$|\sigma - s(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } 0 < |x - x_0| < \delta_2. \quad (\gamma')$$

Z (α'), (β'), (γ') pak zase následuje, že

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } 0 < |x - x_0| < \delta_3,$$

kdež δ_3 jest menší z obou čísel δ_1, δ_2. Jest tedy řada daná vskutku v bodě x_0 zpola konvergentní a důkaz věty svrchu uvedené úplně podán.

Větu tuto však lze ještě rozšířiti. Předpoklad totiž, že konverguje řada $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$, který jsme zavedli, není třeba činiti a tak, bereme-li zároveň v úvahu obory obecnější Ω jako v odst. 122., možno vysloviti větu: *Nutná a postačující podmínka, aby*

$$\lim_{x=x_0} (u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots) =$$
$$= \lim_{x=x_0} u_1(x) + \lim_{x=x_0} u_2(x) + \lim_{x=x_0} u_3(x) + \ldots,$$

jest (předpokládáme-li, že limity na pravé straně existují), aby řada $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ konvergovala v bodě $x = x_0$ zpola stejnoměrně se *zřetelem k oboru Ω. Se zřetelem k tomuto oboru jest bráti také limity zavedené ve větě; bod x_0 jest jedním z jeho bodů zhuštění a nemusí přináležeti ku Ω.*

Postačí ku důkazu věty takto rozšířené dokázati, že z předpokladu konvergence zpola stejnoměrné řady $u_1(x) + u_2(x) + \dots$ následuje konvergence řady $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$; to učiníme. Budiž $\frac{1}{4}\varepsilon$ libovolné kladné číslo; pak lze ke dvojici čísel $[\frac{1}{4}\varepsilon, n']$ a rovněž ke dvojici čísel $[\frac{1}{4}\varepsilon, n'']$ stanoviti čísla $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$ tak, aby (podržujeme stále označení odst. 122.)

$$|s(x) - s_{n'}(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ pro všecka } x \text{ oboru } \Omega,$$

$$\text{pro něž } 0 < |x - x_0| < \delta^{(1)}, \qquad (\varepsilon)$$

$$|s(x) - s_{n''}(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ pro všecka } x \text{ oboru } \Omega,$$

$$\text{pro něž } 0 < |x - x_0| < \delta^{(2)}, \qquad (\iota)$$

kde n', n'' jsou celá kladná čísla libovolně zvolená, pouze omezená podmínkou, že jsou větší než jisté číslo n_0 závislé na ε. (Vytčená možnost následuje z předpokladu zpola stejnom. konv.) Avšak z okolnosti, že $\lim u_n(x) = \alpha_n$ při $\lim x = x_0$, následuje existence čísla kladného δ, které si můžeme voliti a také volíme menší než každé z čísel $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$, takového, že

$$|s_{n'}(x) - \sigma_{n'}| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |s_{n''}(x) - \sigma_{n''}| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ pro všecka } x \text{ oboru } \Omega,$$

$$\text{pro něž } 0 < |x - x_0| < \delta. \qquad (\varkappa)$$

Ze vztahu (ε), (ι), $(\varkappa)$ však plyne

$$|\sigma_{n'} - \sigma_{n''}| < \varepsilon \text{ pro každou dvojici kl. cel. čísel } [n', n''],$$

$$\text{kde } n' > n_0,\ n'' > n_0,$$

což znamená (dle věty Bolz.-Cauchyovy), že řada $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$ jest konvergentní.

124*. Obdobně jako z věty odst. 122. vyplývají i z věty odstavce předcházejícího **dva důsledky.**

1. Budiž $u_1(x) + u_2(x) + \dots$ nekonečná řada, jejíž členové jsou funkce spojité v bodě x_0 a která konverguje v okolí bodu x_0. Pak nutná a postačující podmínka, aby součet té řady $s(x)$ byl funkcí spojitou v bodě x_0, jest, aby řada daná byla v bodě x_0 zpola stejnoměrně konvergentní.

2. Nechť mají $u_1(x), u_2(x), \dots$ derivace $u'_1(x), u'_2(x), \dots$ v bodě x_0 a v okolí toho bodu, a nechť jest řada $u'_1(x) + u'_2(x) + \dots$ konvergentní v okolí bodu x_0. Pak nutná a postačující podmínka, aby součet

řady $u_1(x)+u_2(x)+\ldots$ (konvergující v bodě x_0) měl derivaci v bodě x_0, a aby ta derivace byla rovna součtu řady $u'_1(x_0)+u'_2(x_0)+\ldots$, jest, aby řada $u'_1(x)+u'_2(x)+\ldots$ konvergovala v bodě x_0 zpola stejnoměrně

124.** Větám odst. 122. a 124 lze dáti poněkud jiný tvar a lze je také v jednom směru poněkud rozšířiti. Užijeme jich nejprve na nekonečnou řadu

$$f_1(x)+(f_2(x)-f_1(x))+(f_3(x)-f_2(x))+\ldots+(f_k(x)-f_{k-1}(x))+\ldots; \quad (1)$$

o funkcích $f_k(x)$ budeme předpokládati, že

$$\lim_{x=x_0} f_k(x)=\beta_k, \quad k=1, 2, 3, \ldots, \quad (2)$$

kde limity jest bráti se zřetelem k oboru Ω (jako v odst. 122.).

V řadě (1) jest $s_n(x)=f_n(x)$, i jest patrno, že řada (1) jest konvergentní, jestliže existuje limita řady funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., t. j. limita

$$\lim_{n=\infty} f_n(x)=f(x). \quad (3)$$

Budeme pak říkati, že řada funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... konverguje stejnoměrně v oboru Ω ku $f(x)$ (aneb také, že limita (3) existuje stejnoměrně vzhledem ku Ω), lze-li ku číslu kladnému ε, libovolně volenému, udati číslo N tak, že jest

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \text{ pro všecka } n>N \text{ a všecka } x \text{ v } \Omega. \quad (4)$$

Obdobně se definuje konvergence zpola stejnoměrná.

Věta základní odst. 122., užijeme-li ji na (1), dá se vysloviti takto: Konverguje-li řada funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$,... v oboru Ω s rostoucím indexem stejnoměrně ku $f(x)$, existuje i limita

$$\lim_{n=\infty}\beta_n=\beta$$

a jest

$$\lim_{x=x_0} f(x)=\beta.$$

Výrok tento můžeme pomocí symbolů psáti jako rovnici

$$\lim_{x=x_0}\left[\lim_{n=\infty} f_n(x)\right]=\lim_{n=\infty}\left[\lim_{x=x_0} f_n(x)\right] \quad (\mathrm{I})$$

pravící nám, že dvě limitní operace jsou za jistých předpokladů (vyjádřených hlavně vztahy (2) a (4)) operace záměnné.

Užijeme této věty nejprve na obor čísel x, různých od x_0, daný řadou x_1, x_2, x_3, ..., kterážto pak řada nechť má za limitu číslo x_0 tak, že jest $\lim_{m=\infty} x_m=x_0$. Označíme dále

$$f_n(x_m)=v_{m,n}, \quad f(x_m)=\gamma_m.$$

Pak rovnice (2) má tvar

$$\lim_{m=\infty} u_{m,k} = \beta_k \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \tag{2'}$$

rovnice (3) pak tvar

$$\lim_{n=\infty} u_{k,n} = \gamma_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3'}$$

Podmínka pro stejnoměrnou konvergenci v (3') jest, že ke každému číslu kladnému ε lze udati N tak, aby

$$| u_{k,n} - \gamma_k | < \varepsilon \text{ pro všecka } n > N \text{ a pro všecka } k. \tag{4'}$$

Pak rovnice (I) změní se v rovnici

$$\lim_{m=\infty} \left[\lim_{n=\infty} u_{m,n} \right] = \lim_{n=\infty} \left[\lim_{m=\infty} u_{m,n} \right], \tag{II}$$

jež jest platna za předpokladů:

1. *existují limity ve* (2') *a* (3').

2. *limita ve* (3') *existuje stejnoměrně vzhledem ku* $k = 1, 2, 3, \ldots$; *t. j. ke každému kladnému* ε *lze udati* N, *aby bylo splněno* (4').

Užíváme-li pojmu konvergence zpola stejnoměrné, můžeme vysloviti větu: *Nutné a postačující podmínky, aby byla platna rovnice* (II), *jsou:*

1. *existují limity* (2') *a* (3').

2. *limita ve* (3) *existuje zpola stejnoměrně vzhledem ku* $k = 1, 2, \ldots$, *t. j. ke každé dvojici čísel* $[\varepsilon, n]$ *lze udati číslo* M, *takže jest*

$$| u_{k,n} - \gamma_k | < \varepsilon \text{ pro všecka } k > M, \tag{5}$$

Při tom jest ε *kladné číslo libovolné,* n *pak jest číslo celé, omezené toliko podmínkou, že jest větší než jisté číslo závislé na* ε.

Můžeme však ještě jiné věty jako důsledek vět odst. 122. a 124. vysloviti, opírajíce se o definici limity funkce (odst. 70.). Klademe nejprve

$$u_{m,n} = f(x_m, y_n),$$

požadujíce, aby

$$\lim_{m=\infty} x_m = x_0, \quad \lim_{n=\infty} y_n = y_0;$$

potom potlačivše indexy u x, y, máme na mysli vůbec limity $\lim x = x_0$ $\lim y = y_0$, ať již x a y jakýmkoliv způsobem, jsouce různa od x_0, y_0, konvergují k x_0, y_0, zůstávajíce ovšem při tom v oborech Ω, resp. Ω', v nichž x_0 resp. y_0 jsou body zhuštění. Dostaneme tak z (II) rovnici

$$\lim_{x=x_0} \left[\lim_{y=y_0} f(x, y) \right] = \lim_{y=y_0} \left[\lim_{x=x_0} f(x, y) \right]. \tag{III}$$

Rovnice tato jest platna za předpokladů:

1. *Existují limity* $\lim\limits_{x=x_0} f(x, y) = \varphi(y)$, $\lim\limits_{y=y_0} f(x, y) = \psi(x)$.

2. *Druhá z těchto limit existuje stejnoměrně vzhledem ku* x *oboru* Ω; *t. j. k číslu* ε *lze udati číslo* δ, *aby*

$|f(x, y) - \psi(x)| < \varepsilon$ *pro všecka* y *oboru* Ω', *pro něž* $0 < |y - y_0| < \delta$,

a pro všecka x *oboru* Ω.

Užíváme-li pojmu konvergence zpola stejnoměrné, můžeme též vysloviti větu: *Nutné a postačující podmínky, aby platna byla rovnice* (III), *jsou:*

1. *Existují limity* $\lim\limits_{x=x_0} f(x, y) = \varphi(y)$, $\lim\limits_{y=y_0} f(x, y) = \psi(x)$.

2. *Druhá z těchto limit existuje zpola stejnoměrně vzhledem ku* x *oboru* Ω; *t. j. ke každé dvojici čísel* $[\varepsilon, y']$ *lze udati číslo* δ, *aby*

$$|f(x, y') - \psi(x)| < \varepsilon \text{ pro všecka } x \text{ oboru } \Omega,$$
$$\text{pro něž } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

při tom jest ε *libovolné číslo kladné;* y' *jest libovolné číslo oboru* Ω', *vázané toliko podmínkou tvaru* $|y' - y_0| < \eta$, *kde* η *jest číslo kladné závislé na* ε.

Příklad. Volme ku př.

$$u_{m,n} = \frac{ne^{-\frac{m}{n}}}{1+n}.$$

Tu vztah (II) splněn není; levá strana rovnice (II) nabývá při této volbě hodnoty 1, pravá hodnoty 0. Nemohou býti tudíž splněny nutné a postačující podmínky pro (II). Vskutku podmínka (5) se mění v nerovnost

$$1 - \frac{ne^{-\frac{k}{n}}}{1+n} < \varepsilon. \qquad (\lambda)$$

jež splněna býti má pro *všecka* k větší než jisté číslo M závislé na dvojici čísel ε, n; při tom ε jest úplně libovolné, n jest omezeno toliko podmínkou, že má býti větší než jisté číslo závislé na ε. Avšak z nerovniny poslední následuje snadným počtem, že má býti (ε budiž < 1)

$$k < n \log \frac{n}{(1-\varepsilon)(n+1)}$$

a nemůže tedy existovati číslo M takové, aby nerovnina (λ) byla splněna pro všecka $k > M$.