Počet differenciální

V. Přehled o funkcích elementárních. Funkcionální rovnice

In: Karel Petr (author): Počet differenciální. Část analytická. (Czech). Praha: Jednota československých mathematiků a fysiků, 1923. pp. 114–133.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402693

Funkce

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} \quad \text{pro } x \neq 0, \; f(0) = 1$$

má limity

$$f(0+0) = 0, \quad f(0-0) = 1.$$

Funkce má diskontinuitu, neboť limity z prava a z leva sice existují, avšak jsou různé. Jest však spojitá v bodě $x = 0$ z leva.

3. Čtyři čísla v (α) uvedená jsou sice stejná, avšak liší se od hodnoty funkce $f(x)$ v bodě c. V tomto případě lze, změníme-li $f(c)$, docíliti, aby $f(x)$ byla spojitou v bodě c a říkáme že diskontinuita jest odstranitelná. Tak ku př. kdybychom definovali funkci $f(x)$ rovnicemi

$$f(x) = x^2 \text{ pro } x \neq 1, \quad f(1) = 0,$$

měla by funkce v bodě $x = 1$ diskontinuitu, neboť $f(1 \pm 0) = 1$, $f(1) = 0$; kdybychom však v bodě $x = 1$ funkci místo nully přisoudili hodnotu rovnou 1, funkce stala by se spojitou v bodě 1.

V. Přehled o funkcích elementárních. Funkcionální rovnice.

84. Rozšířením operace mocnění na čísla reálná vůbec získali jsme nejprve funkci $y = x^\alpha$, kde α jest jisté číslo reálné a $x > 0$. Tato funkce jest t. zv. **obecná mocnina** s exponentem α o proměnné x (anebo krátce α-tá mocnina prom. x). Jak jsme poznali, jest tato funkce funkcí spojitou pro každé $x > 0$ a konečnou v každém uzavřeném intervalu, v němž jest definována. Pro tuto funkci jest platný funkcionální vztah

$$x^\alpha . x'^\alpha = (x\,x')^\alpha \text{ aneb v obecných znacích } f(x)\,f(x') = f(x\,.\,x'). \quad (1)$$

Na druhém místě jsme dospěli svrchu zmíněným rozšířením ku funkci $y = a^x$, $a > 0$, nazývané **obecná exponenciální funkce** při základě a a specielně ku funkci $y = e^x$ (kde e jest exponenciální číslo), t. zv. **exponenciální funkci** v užším smyslu. Funkce tato jest definována pro každé x reálné; i tato funkce, jak rovněž bylo již vytčeno, jest spojitá a konečná v každém konečném intervalu. Funkcionální vztah pro ni platící jest

$$a^x . a^{x'} = a^{x+x'} \text{ a v obecném znaku } f(x) \,.\, f(x') = f(x + x'). \quad (2)$$

Funkce inversní ku funkci $y = a^x$ resp. ku funkci $y = e^x$ jest **obecný logarithmus** při základě a, resp. **přirozený logarithmus**. Značíme-li neodvisle proměnnou zase x a odvisle prom. y, máme při těchto funkcích v zavedeném již označení $y = \log_a x$, resp. $y = \log x$. Funkce tyto jsou definovány toliko pro kladná x a jsou to funkce spojité a konečné v každém uzavřeném intervalu, v němž jsou definovány, a máme pro ně funkcionální rovnici

$\log x + \log x' = \log(x \cdot x')$ aneb v obecném znaku $f(x) + f(x') = f(x \cdot x')$. (3)

Obecná exponenciální funkce i obecný logarithmus jsou funkce rostoucí v celém intervalu, v němž jsou definovány, je-li $a > 1$. Jestliže však $a < 1$, jsou to funkce klesající; pro $a = 1$ redukuje se funkce exponenciální na konstantu, funkce logarithmická pak nemá významu.

85. Funkcionální rovnice základní. Budeme vyšetřovati v následujícím, zda a za jakých podmínek funkcionální rovnice v (1), (2), (3) uvedené stanoví příslušné funkce. K tomu cíli dokážeme si nejprve základní větu: *Každá funkce $f(x)$, která jest konečná v intervalu* $(0, \varepsilon)$ *a která hoví pro všecky reálné hodnoty proměnných x, x' vztahu*

$$f(x + x') = f(x) + f(x'), \tag{4}$$

jest tvaru $f(x) = ax$, kde a jest konstanta.

Budiž nejprve $\varepsilon = 1$. Z funkcionálního vztahu plyne ihned, klademe-li tam $x' = 0$, že $f(0) = 0$. Dále následuje z něho, volíme-li $x' = -x$, že $f(-x) = -f(x)$; stačí tedy bráti v úvahu x kladné. Užíváme-li (4) máme bezprostředně

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x),\ f(3x) = f(2x) + f(x) = 3f(x) \text{ a}$$
$$\text{obecně při } n \text{ celém, kladném } f(nx) = nf(x).$$

Uvažujme nyní limitu

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{5}$$

Každé kladné x lze psáti ve tvaru $x = \xi + n$, kde ξ jest v intervalu $(0, 1 - 0)$ a kde n jest celistvé, kladné $(\geqq 0)$. Jest tedy

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{n=\infty} \frac{f(\xi + n)}{\xi + n} = \lim_{n=\infty} \frac{f(\xi) + nf(1)}{\xi + n}, \tag{5'}$$

ve kterémžto limitním přechodu se ξ může měniti libovolně v intervalu $(0, 1 - 0)$; poněvadž však daná funkce jest v $(0, 1)$ konečnou, jest limita poslední rovna $f(1)$.

Existuje tedy při naší funkci limita (5) vždy, ať x jakýmkoli způsobem roste nade všecky meze a tato limita jest $f(1)$, kteréž číslo označíme a. Budiž dále (stále za předpokladu, že x jest kladné) m libovolné číslo kladné; pak jest dle předcházejícího

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{m f(x)}{m x} = \frac{f(m x)}{m x}$$

Podíl $\frac{f(mx)}{mx}$ se tedy nemění, mění-li se celé číslo m, avšak s rostoucím m nade všecky meze roste i mx nade všecky meze a má podíl ten limitu rovnou $f(1) = a$. Jest tedy podíl nutně rovný a a

$$\frac{f(x)}{x} = a, \quad \text{t. j.} \ f(x) = ax,$$

poněvadž však $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$, jest výsledek $f(x) = ax$, ke kterému jsme dospěli, platný pro každé x.

Tím jest věta dokázána, když $\varepsilon = 1$. Není-li ε rovno 1, stačí místo $f(x)$ uvažovati funkci danou rovnicí

$$g(x) = f(\varepsilon . x).$$

V důsledku rovnice (4) platné dle předpokladu pro $f(x)$ hoví $g(x)$ téže rovnici funkcionální jako $f(x)$; z předpokladu pak, že $f(x)$ jest konečno v $(0, \varepsilon)$, následuje, že $g(x)$ jest konečná, když εx jest v intervalu $(0, \varepsilon)$, t. j. když x jest v $(0, 1)$. Jest tedy $g(x) = ax$ a tudíž

$$f(\varepsilon x) = ax\,; \quad f(x) = \frac{a}{\varepsilon} x = a'x$$

a věta úplně dokázána.

86. *Jediná funkce, která v intervalu* $(0, \varepsilon)$ *není stále rovna nulle a jest tam konečnou a která hoví rovnici funkcionální*

$$f(x + x') = f(x)\, f(x') \tag{6}$$

pro všecky reálné hodnoty proměnných x, x', *jest funkce* A^x, *kde* A *jest kladná konstanta.*

Z rovnice funkcionální plyne $\left(\text{klademe-li } x = x' = \frac{\xi}{2}\right) f(\xi) = f^2\left(\frac{\xi}{2}\right)$, jest tudíž $f(x) \geqq 0$ pro každé ξ. Je-li dále α hodnota v intervalu $(0, \varepsilon)$, pro kterou $f(\alpha) \neq 0$, jest $f(\alpha) = f(x)\, f(\alpha - x)$; označíme-li M horní hranici funkčních hodnot v $(0, \alpha)$, jest tedy pro dolní hranici m těch funkčních hodnot platný vztah

$$m \geqq \frac{f(\alpha)}{M}, \ \text{a tudíž} \ m > 0$$

a jest $f(x)$ pro každé x intervalu $(0, \alpha)$ a následkem toho pro každé x vůbec kladna. Položíme-li $\log f(x) = \varphi(x)$, jest $\varphi(x)$ v $(0, \alpha)$ konečnou (neboť dolní hranice v $(0, \alpha)$ jest $\log m$, horní hranice $\log M$); hoví rovnici funkcionální $\varphi(x + x') = \varphi(x) + \varphi(x')$, jelikož jest

$$\log f(x + x') = \log f(x) + \log f(x')$$

a jest tudíž $\varphi(x) = ax$, a jest konstanta. Jest tedy $f(x) = e^{ax} = A^x$, čímž věta dokázána.

Podobně lze dokázati větu: *Jediná funkce $f(x)$ proměnné $x > 0$, která jest konečná v intervalu $(1, 1+\varepsilon)$ a která hoví rovnici funkcionální*

$$f(xx') = f(x) + f(x') \tag{7}$$

pro všecky kladné hodnoty proměnných x, x', jest funkce $\log_A x$, kde A jest kladná konstanta různá od 1. Neboť, jelikož obor neodvisle proměnné obsahuje toliko kladná čísla, můžeme zavésti místo proměnné x proměnnou z rovnicí

$$x = e^z,\ x' = e^{z'} \text{ a klásti } f(x) = f(e^z) = g(z).$$

Pak funkce $g(z)$ hověti bude funkcionální rovnici $g(z+z') = g(z) + g(z')$ a bude konečnou v intervalu $(0, \delta)$, kde $\delta = \log(1+\varepsilon)$. Tudíž dle věty základní jest $g(z) = a\,z = a \log x = \log_A x$ a věta dokázána.

Konečně uvádím větu: *Jediná funkce $f(x)$ proměnné $x > 0$, která jest konečná v intervalu $(\varepsilon, \varepsilon')$* — při čemž $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ — *a která hoví rovnici funkcionální*

$$f(xx') = f(x)\,f(x') \tag{8}$$

pro všecky kladné hodnoty proměnných x, x', jest funkce x^a, kde a jest reálná konstanta.

Důkaz této věty na základě předcházejícího jest snadný.

87. Věta binomická. Jakožto důsledek obecného řešení funkcionální rovnice (6) lze podati odvození věty binomické. Vzpomeňme si nejprve na definici binomických koefficientů. Jest

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1).(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\quad k},\quad \binom{m}{0} = 1, \tag{9}$$

při tom jest k celé číslo kladné, m libovolné číslo reálné. Pro binomické součinitele platí věta

$$\binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{p-2} + \ldots + \binom{m}{p}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{p} \tag{10}$$

Věta tato jest známa při m i n celém, kladném z elementární arithmetiky a vyplývá jako jednoduchý důsledek binomické věty při celistvém kladném exponentu. Odvodíme si ji tu pro libovolné m i n úplnou indukcí. Předpokládejme, že jest formule (10) dokázána pro p o jednu menší, t. j. že jest

$$\binom{m}{0}\binom{n}{p-1} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-2} + \binom{m}{2}\binom{n}{p-3} + \ldots + \binom{m}{p-1}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{p-1}$$

a násobme tuto rovnici číslem $m+n-p+1$, při čemž užíváme vztahů:

$$(m+n-p+1)\binom{m}{k}\binom{n}{p-k-1}=$$
$$=(m-k)\binom{m}{k}\cdot\binom{n}{p-k-1}+\binom{m}{k}\cdot(n-p+k+1)\binom{n}{p-k-1}$$
$$=(k+1)\binom{m}{k+1}\binom{n}{p-k-1}+(p-k)\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$$
$$=(p-k)\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}+(k+1)\binom{m}{k+1}\binom{n}{p-k-1}$$
$$k=0,1,2,3,\ldots,p-1$$

snadno z (9) plynoucích; dostaneme

$$p\cdot\binom{m}{0}\binom{n}{p}+(1+p-1)\binom{m}{1}\binom{n}{p-1}+(2+p-2)\binom{m}{2}\binom{n}{p-2}+\ldots+$$
$$+p\cdot\binom{m}{p}\binom{n}{0}=(m+n-p+1)\binom{m+n}{p-1}$$

a dělíme-li p, ihned vztah (10). Poněvadž pak formule, kterou máme dokázati, jest očividně správna pro $p=1$, jest správna pro každé celé p.

Uvažujme nyní řadu

$$f(m)=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\ldots+\binom{m}{p}x^p+\ldots$$

a obdobnou řadu $f(n)$, kterou dostaneme z řady napsané, píšeme-li tam n místo m. Utvořme pak součin obou řad dle tvaru odst. 56., (β), viz př. 1. toho odst. Dostaneme řadu postupující dle mocnin x a sice bude $(p+1)$-vý člen té řady

$$\left[\binom{m}{0}\binom{n}{p}+\binom{m}{1}\binom{n}{p-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{p-2}+\ldots+\binom{m}{p}\binom{n}{0}\right]x^p=$$
$$=\binom{m+n}{p}x^p \qquad \text{dle (10)}$$

t. j bude

$$f(m)f(n)=f(m+n).$$

Avšak, je-li $|x|<1$, jest řada pro $f(m)$ konvergentní, ať jest m jakékoliv číslo (jak plyne z kriteria d'Alembertova); je li m v intervalu $(0,1)$, jest $f(m)$ funkcí konečnou, jest tedy nutně dle věty odst. 86. $f(m)=A^m$; než pro $m=1$ jest $f(1)=1+x$, tudíž $A=1+x$ a

$$f(m)=(1+x)^m=1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\ldots+\binom{m}{k}x^k+\ldots \tag{11}$$

pro každé m reálné a pro $|x|<1$.

88. Rozvoj logaritmický. Podám toliko jedno použití věty binomické a to ku odvození rozvoje pro $\log(1+x)$. Kladme nejprve ve vztazích posledního odstavce $A=1-x$ a budiž $1>x>0$. Užijme nerovniny (2) odst. 36. Dle ní jest — číslo n jest kladné, celé —

$$-n\left[(1-x)^{-\frac{1}{n}}-1\right]<\log(1-x)<n\left[(1-x)^{\frac{1}{n}}-1\right].$$

Při tom jest nám známo, že levé křídlo poslední nerovniny s rostoucím n roste a má za limitu $\log(1-x)$, pravé pak křídlo ubývá a má touž limitu pro $\lim n=\infty$. *Jest tedy $\log(1-x)$ jediné číslo, jež nerovninám napsaným vůbec hoví pro všecka n.* Rozviňme obě křídla dle binomické věty, roznásobme n a změňme znaménko, dostaneme po snadné úpravě (obsahující i záměnu obou křídel)

$$\begin{aligned}&\frac{x}{1}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\frac{x^3}{3}+\\&+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{3n}\right)\frac{x^4}{4}+\ldots<-\log(1-x)<\\&<\frac{x}{1}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\frac{x^3}{3}+\\&+\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{3n}\right)\frac{x^4}{4}+\ldots.\end{aligned}\tag{12}$$

Číslo, jež hoví týmž nerovninám jako právě $-\log(1-x)$, jest očividně dáno řadou nekonečnou

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots;$$

avšak, poněvadž pouze jedno takové číslo jest, jest nutně

$$-\log(1-x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^k}{k}+\ldots,\quad 0<x<1.\tag{α}$$

Píšeme-li v této rovnici x^2 místo x a změníme-li znaménko na obou stranách:

$$\log(1-x^2)=-\frac{x^2}{1}-\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{3}-\ldots-\frac{x^{2k}}{k}-\ldots$$

Sečtením posledních obou rovnic konečně máme

$$\log\frac{1-x^2}{1-x}=\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,\quad 0<x<1,\tag{13}$$

což jest rozvoj, který jsme chtěli odvoditi. Kdybychom v rozvoji tom kladli $-x$ místo x, dostali bychom (α), jest tedy rozvoj poslední platný i pro $0 > x > -1$; poněvadž pak pro $x = 0$ jest rovnice (13) očividně platna a pro $x = 1$ se redukuje na známý vztah (odst. 38., (z)), jest rozvoj (13) platný pro všecka x intervallu $(-1+0, 1)$.

Poznámka. Z výrazů (12) jest též bezprostředně patrno, že $n\left[(1-x)^{\frac{1}{n}} - 1\right]$ s rostoucím n ubývá a to, ať n jest jakékoliv číslo reálné kladné, a obdobné tvrzení lze uvésti i při n záporném. Máme tedy

$$\log A = \lim_{x=\infty} x\left(A^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x=-\infty} x\left(A^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x=\pm\infty} x\left(A^{\frac{1}{x}} - 1\right) \qquad (\gamma)$$

a to nejprve pro A kladné menší než 1; položíme li však $A = A_1^{-1}$, dostaneme tutéž rovnici i pro $A > 1$. Vztahu (γ) můžeme dáti též tvar (píšeme-li δ místo $\frac{1}{x}$)

$$\log A = \lim_{\delta=0} \frac{A^{\delta} - 1}{\delta}, \qquad A > 0,$$

nám rovněž již známý.

89. Funkce goniometrické. V elementech geometrie užívány jsou funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\cot x$. Abychom jich mohli používati s plným oprávněním též v analysi, jest třeba jejich definici dáti též analytický podklad. Funkce $\cos x$ hoví rovnici z trigonometrie známé

$$2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y),$$

kde x, y jsou dvě neodvisle proměnné. Funkci $\sin x$ dostaneme z $\cos x$ na základě rovnice $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. Tyto dvě rovnice vezmeme si za východisko a budeme obecně vyšetřovati funkci — označíme ji $C(x)$ — jež nejsouc identicky (t. j. pro každé x) rovna nulle hoví rovnici funkcionální

$$2\,C(x)\,C(y) = C(x+y) + C(x-y). \qquad (1)$$

Vedle toho budeme o funkci $C(x)$ předpokládati, že se stává v bodě ω nullou, že jest v tom bodě funkcí spojitou a že uvnitř intervalu $(0, \omega)$ jest od nully různa. To budou jediné předpoklady, jež postačí, jak uvidíme, aby funkci definovaly v celém oboru čísel reálných. Z rovnice (1) následuje, klademe-li tam jednak $y = 0$, jednak $x = 0$

$$2\,C(x)\,C(0) = 2\,C(x), \quad 2\,C(0)\,C(y) = C(y) + C(-y),$$

ze kterýchžto rovnic plyne (v druhé místo y píšeme x)

$$C(0) = 1, \quad C(-x) = C(x). \qquad (2)$$

Hodnotu, pro kterou $C(x)$ stává se nullou, označili jsme ω; ω jest různo dle prvé z rovnic (2) od 0, dle druhé pak můžeme je pokládati za kladné; budiž tedy $\omega > 0$.

Klaďme v (1) $y = \omega$; dostaneme

$$2\,C(x)\,.\,0 = C(x+\omega) + C(x-\omega), \qquad C(x+\omega) = -\,C(x-\omega) \tag{3'}$$

aneb zvětšíme-li x nejprve o ω, v rovnici tak vzniklé pak ještě jednou o 2ω

$$C(x+2\omega) = -\,C(x), \qquad C(x+4\omega) = -\,C(x+2\omega) = +\,C(x). \tag{3}$$

Nabývá tedy funkce $C(x)$ v bodech, jichž rozdíl jest 4ω, týchž hodnot. Říkáme následkem toho, že $C(x)$ jest **funkcí periodickou** *s periodou* 4ω. V bodech, jež se liší o 2ω, nabývá hodnot stejné absolutní hodnoty, protivného však znaménka. Body, ve kterých $C(x) = 0$, či krátce řečeno **nullové body** funkce $C(x)$ jsou tedy hodnoty

$$\pm\,\omega, \;\pm\,3\omega, \;\pm\,5\omega\,, \ldots, \pm\,(2k+1)\,\omega, \ldots \tag{4}$$

Vedle těchto nullových bodů *nemá funkce* $C(x)$ *již žádných nullových bodů*. Neboť dejme tomu, že by ω_1 byl nullový bod různý od (4); pak by dle prvé rovnice (3) také $\omega_1 - 2k\omega$, kde k jest libovolné číslo celé, byl nullový bod; k můžeme však voliti tak, aby hodnota $\omega_1 - 2k\omega$ padla do libovolného intervalu, jehož délka jest 2ω, tedy ku př. do intervalu $(-\,\omega, \omega)$; to by však odporovalo předpokladu, neboť, poněvadž ω_1 jest různo od bodů (4), padla by ta hodnota *dovnitř* toho intervalu a dle předpokladu v $(0, \omega)$ a tudíž dle (2) i v $(0, -\,\omega)$ není nullových bodů.

Klaďme nyní k. vůli stručnosti

$$C(\omega - x) = S(x)\,; \tag{5}$$

pak ovšem bude také $S(\omega - x) = C(x)$ a dle (3) bude též

$$S(x+2\omega) = -\,S(x), \qquad S(x+4\omega) = S(x). \tag{6}$$

Nullové body této funkce jsou jedině v bodech

$$0, \quad \pm\,2\omega, \quad \pm\,4\omega, \quad \pm\,6\omega, \ldots \tag{7}$$

Z rovnice funkcionální (1) pak následují snadno tyto rovnice (napřed klademe místo x, y výrazy $\omega - x$, $\omega - y$; potom $\omega - x$ místo x; konečně $\omega - y$ místo y; zároveň užijeme rovnic (2), (3), (5))

$$C(x-y) - C(x+y) = 2\,S(x)\,S(y),^{*)} \tag{1'}$$

$$S(x+y) + S(x-y) = 2\,S(x)\,C(y), \tag{1''}$$

$$S(x+y) - S(x-y) = 2\,C(x)\,S(y). \tag{1'''}$$

---

*) Z rovnice (1′) následuje naopak (5), předpokládáme-li jenom $S(\omega) > 0$. Neboť klademe-li v (1′) $y = \omega$, dostaneme $S(x)\,S(\omega) = C(\omega - x)$ (viz 3′)); položíme-li tu ještě $x = \omega$, máme nad to $S^2(\omega) = 1$, tudíž $S(\omega) = 1$ a rovnice (5) odvozena. Definuje tedy (1′) a předpoklad $S(\omega) > 0$ rovněž jednoznačně $S(x)$ na základě $C(x)$.

Z rovnice (1″) následuje pro $x = 0$

$$S(-x) = -S(x); \tag{8}$$

dále klademe v (1′) a (1‴) $x = \xi + \frac{1}{2}h$, $y = \frac{1}{2}h$, obdržíme

$$\begin{aligned} S(\xi + h) &= S(\xi) + 2\,S(\tfrac{1}{2}h)\,C(\xi + \tfrac{1}{2}h), \\ C(\xi + h) &= C(\xi) - 2\,S(\tfrac{1}{2}h)\,S(\xi + \tfrac{1}{2}h). \end{aligned} \tag{9}$$

a konečně v součtu rovnic (1) a (1′) položíme $x = y$, dostaneme

$$C^2(x) + S^2(x) = 1. \tag{10}$$

Z rovnice této plyne, že $C(x)$ a $S(x)$ jsou stále menší než 1, po případě rovny $+1$ (rovny 1 jenom tenkráte, když druhá z funkcí jest rovna nulle). Z předpokladu, že $C(x)$ jest spojitá v bodě ω, následuje, že $S(x) = C(\omega - x)$ jest spojitá v bodě 0; i jest tedy

$$\lim_{h=0} S(\tfrac{1}{2}h) = 0$$

a tudíž dle (9) a v důsledku toho, že abs hodn. funkcí $C(x)$, $S(x)$ jsou stále menší než 1,

$$\lim_{h=0} S(\xi + h) = S(\xi), \quad \lim_{h=0} C(\xi + h) = C(\xi),$$

t. j. *funkce $S(x)$, $C(x)$ jsou funkce spojité v každém bodě.* Z toho však následuje, že $C(x)$ — a tedy i $S(x)$ — jest v intervalu $(0, \omega)$ stále kladnou. Z rovnice pak (9) v důsledku této okolnosti plyne, že v intervalu $(0, \omega)$ jest $S(x)$ funkcí rostoucí, $C(x)$ funkcí klesající. Užíváme-li pak dále rovnic

$$S(x + \omega) = +C(x), \quad C(x + \omega) = -S(x), \tag{11}$$

které snadno z (5), (8), (2), (3) vyplývají, vidíme, že v intervalu $(\omega, 2\omega)$ jest $S(x)$ i $C(x)$ klesající; v intervalu $(2\omega, 3\omega)$ $S(x)$ klesající, $C(x)$ rostoucí a konečně v $(3\omega, 4\omega)$ $S(x)$ i $C(x)$ rostoucí.

Tím jsme si odvodili nejdůležitější vlastnosti funkcí $S(x)$, $C(x)$ které splněny býti musí, mají-li ty funkce na základě předpokladů býti definovány pro všecky reálné hodnoty neodvisle proměnné. Běží nyní o to rozhodnouti, zda funkcionální rovnice s ostatními předpoklady nám dává prostředek stanoviti hodnotu funkce pro libovolnou hodnotu argumentu. Z (1) následuje pro $y = x$

$$C(2x) = 2\,C^2(x) - 1. \tag{12}$$

Klademe-li dále v (1) $2x$ místo x a $y = x$, dostaneme

$$C(3x) = 2C(2x)\,C(x) - C(x) = 4C^3(x) - 3C(x). \tag{13}$$

Obecně pak následuje, položíme-li tam $(n-1)x$, x místo x, y,

$$C(nx) + C((n-2)x) = 2C((n-1)x)\,C(x) \tag{14}$$

Z této rovnice, volíce postupně $n = 2, 3, 4, \ldots$, můžeme vypočítati $C(2x)$, $C(3x)$, $C(4x)$, .. jakožto mnohočleny v $C(x)$ (jakož pro $C(2x)$, $C(3x)$ vskutku provedeno) a dostaneme obecně

$$C(nx) = a_0 C^n(x) + a_1 C^{n-2}(x) + a_2 C^{n-4}(x) + \ldots \tag{15}$$

Funkce $C(nx)$ jest tenkráte a jenom tenkráte nullou, když (viz (4))

$$nx = (2k+1)\omega \text{ aneb } x = \frac{2k+1}{n}\omega,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Uvažme, které z těchto hodnot pro nullové body funkce $C(nx)$ padnou do intervalu $(0, 2\omega)$. Jsou to hodnoty

$$\frac{\omega}{n}, \frac{3\omega}{n}, \frac{5\omega}{n}, \ldots, \frac{(2n-1)\omega}{n}$$

v počtu celkovém n. Pro ně nabývá $C(x)$ vesměs různých hodnot a to takových, že dle (15)

$$a_0 C^n(x) + a_1 C^{n-2}(x) + a_2 C^{n-4}(x) + \ldots = 0, \tag{16}$$

t. j. takových, že jest jimi splněna rovnice n-tého stupně, jejíž kořeny spořádány dle velikosti největším počínaje jsou (neboť $C(x)$ v intervalu $(0, 2\omega)$ stále ubývá)

$$C\left(\frac{\omega}{n}\right),\ C\left(\frac{3\omega}{n}\right),\ C\left(\frac{5\omega}{n}\right), \ldots, C\left(\frac{(2n-1)\omega}{n}\right). \tag{17}$$

Jest tedy patrno z tohoto výsledku a z rovnice (2), (3) a (12), že funkci $C(x)$ v důsledku funkcionální rovnice můžeme vypočítati pro všecka $x = \pm \frac{p}{q}\omega$, kde p, q jsou libovolná celá kladná čísla, a, jelikož jest funkcí spojitou, vůbec pro všecka x.

Existuje-li tedy funkce $C(x)$ hovící rovnici funkcionální a předpokladům, existuje jenom jediná taková funkce. Zbývá jenom podati ještě důkaz že taková funkce vskutku existuje. Kdybychom vyšetřování podaná v tomto směru chtěli doplnit, dospěli bychom k úvahám, jež pro jich délku nelze tu podávati. Lze však důkaz existence jiným a to jednoduchým prostředkem získati. K tomu cíli vezmeme ještě v úvahu t. zv. **funkce hyperbolické** blízké funkcím goniometrickým.

90. Základní funkce hyperbolické jsou

$$\mathrm{Ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{Sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

prvá nazývá se **kosinus hyperbolický**, druhá **sinus hyperbolický**. Jednoduchý způsob, jakým jsou tyto funkce pomocí exponenciální funkce definovány, má za následek, že někteří mathematikové je jako zvláštní funkce nezavádějí a užívají v případě potřeby příslušných výrazů pomocí exponenciální funkce sestrojených.

Pro kosinus hyperbolický snadno odvodíme

$$\mathrm{Ch}\, x \,.\, \mathrm{Ch}\, y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y} + e^{x-y} + e^{-x+y}}{4}$$

aneb jinak

$$2\, \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Ch}\, y = \mathrm{Ch}\,(x+y) + \mathrm{Ch}\,(x-y),$$

což jest rovnice funkcionální táž jako (1) v předch. odst. Tatáž rovnice jest platna pro $\mathrm{Ch}\,(a x)$; jest

$$2\, \mathrm{Ch}\,(a x)\, \mathrm{Ch}\,(a y) = \mathrm{Ch}\,(a\,(x+y)) + \mathrm{Ch}\,(a\,(x-y)). \qquad (18$$

Avšak $\mathrm{Ch}\,(a x)$ jest funkce, pro níž jest platný rozvoj (který dostaneme, dosadíme-li příslušné rozvoje funkcí e^{ax}, e^{-ax}, viz odst. 56., př. 1.)

$$\mathrm{Ch}\,(ax) = 1 + \frac{a^2x^2}{2!} + \frac{a^4x^4}{4!} + \frac{a^6x^6}{6!} + \dots \qquad (19)$$

a funkce tato není rovna nulle pro žádnou hodnotu proměnné x; nemůže tedy býti $\mathrm{Ch}\,(a x)$ funkcí, jež hoví základní funkcionální rovnici a zároveň učiněným předpokladům platným pro funkci $C(x)$. Jest však tato funkce závislá na a^2 a funkcionální vztah (18) jest platný identicky, ať za a^2 dáme jakoukoliv hodnotu; můžeme tedy za a^2 dosaditi i záporná čísla a psáti $-a^2$ místo a^2, čímž dostaneme funkci, již pojmenujeme $\cos a x$ (slovy **kosinus** $a x$) a jež bude dána rozvojem

$$\cos a x = 1 - \frac{a^2x^2}{2!} + \frac{a^4x^4}{4!} - \frac{a^6x^6}{6!} + \dots \qquad (19')$$

Že tato funkce hoví funkcionální rovnici (1), můžeme se ostatně přímo přesvědčiti násobením příslušných řad (viz odst. 56., příklad 1.) Zabývejme se nyní touto funkcí, anebo, což jest v podstatě totéž, funkcí

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Funkce tato jest spojitou v každém bodě, neboť jest (dle binomické věty při celistvém mocniteli)

$$\left| \frac{(x+h)^n}{n!} - \frac{x^n}{n!} \right| < |\, h \,|\, \frac{(|\, x \,| + 1)^{n-1}}{(n-1)!}, \text{ je-li } |\, h \,| < 1$$

a tedy

$$|\cos(x+h) - \cos x\,| < |\, h \,| \left(\frac{\xi}{1!} + \frac{\xi^3}{3!} + \dots \right), \quad \xi = |\, x \,| + 1,$$

odkudž spojitosť snadno následuje. Rozvoj pro $\cos x$ lze dále psáti ve dvojím uspořádání

$$\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{1.2}\right) + \frac{x^4}{4!}\left(1 - \frac{x^2}{5.6}\right) + \frac{x^8}{8!}\left(1 - \frac{x^2}{9.10}\right) + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{x^6}{6!}\left(1 - \frac{x^2}{7.8}\right) - \frac{x^{10}}{10!}\left(1 - \frac{x^2}{11.12}\right) - \ldots$$

Z prvého jest patrno, že $\cos x$ jest kladný, když $0 < x \leqq \sqrt{2}$ a tedy i když $0 < x \leqq 1{\cdot}4$. Z druhého poznáme snadno, že $\cos x$ jest záporný, když $x = 1{\cdot}6$; neboť závorka prvá dává $-0{\cdot}11\ldots$ pro $x = 1{\cdot}6$, ostatní členy pak jsou, jak bezprostředně patrno, rovněž záporny. Poněvadž pak $\cos x$ jest funkcí spojitou, jest nutně mezi 1·4, 1·6 hodnota, pro kterou $\cos x = 0$;*) tuto hodnotu značíme $\frac{\pi}{2}$, kde π jest tak zvané **číslo Ludolfské**. Jest tedy $\cos x$ funkcí, která hoví rovnici funkcionální (1) a též předpokladům požadovaným pro funkci $C(x)$, je-li $\omega = \frac{\pi}{2}$; pro obecné ω jest takovou funkcí

$$C(x) = \cos a x, \text{ jestliže } a\omega = \frac{\pi}{2}; \quad \text{tedy } C(x) = \cos\frac{\pi x}{2\omega} \tag{20}$$

a důkaz existence funkce $C(x)$ (a tudíž i $S(x)$) *podán.*

Zavádí se pak označení

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \text{tedy } \sin a x = S(x) \tag{21}$$

a jsou v důsledku úvah učiněných platny všecky rovnice odst. 89., když v nich $S(x)$, $C(x)$ nahradíme veličinami $\sin a x$, $\cos a x$. Uvedu v přehledu hlavní, klada při tom $a = 1$ a tedy $\omega = \frac{1}{2}\pi$,

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x,$$
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x,$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\sin(x + h) - \sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}h\cos(x + \tfrac{1}{2}h), \quad \cos(x + h) - \cos x =$$
$$= -2\sin\tfrac{1}{2}h\sin(x + \tfrac{1}{2}h).$$

---

*) Taková hodnota může býti jenom jedna; neboť kdyby byly aspoň dvé ω, ω_1, kde $\omega_1 < \omega$ (a obě v intervalu (1·4, 1·6)), bylo by též dle (3) nullovým bodem $2\omega_1 - \omega = \omega_1 - (\omega - \omega_1)$, což jest číslo menší než ω_1; značme je ω_2. Dále byly by

Formule pro $\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$ tu uvedené (t. zv. addiční formule pro $\sin x$, $\cos x$) vyplývají sčítáním z rovnic (1), (1′), (1″), (1‴).

Stejně snadno jako pro $\cos x$ vyplývá vyjádření funkce $\sin x$ řadou; můžeme tu jednak použíti za východisko funkci hyperbolickou $\mathrm{Sh}\,a\,x$ a rovnici funkcionální obdobnou ku (1′), jednak přímo rovnici (1′) a dokázati roznásobením příslušných řad, že je-li $C(x) = \cos a\,x$ dáno řadou (19′), funkce $S(x) = \sin a\,x$ hovící rovnici (1′) jest dána řadou

$$\sin a\,x = \frac{a\,x}{1!} - \frac{a^3x^3}{3!} + \frac{a^5x^5}{5!} - \ldots \tag{22}$$

a tedy

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots{}^{*)} \tag{22′}$$

Vytkneme-li na pravé straně rovnice (22′) x, bude závorka funkcí spojitou, což se dokáže stejně jako svrchu dokázána byla spojitost funkce $\cos x$ a jest tedy podíl funkcí $\sin a\,x$ a x funkcí spojitou; specielně pak jest pro tento podíl v bodě $x = 0$:

$$\lim_{x=0} \frac{S(x)}{x} = \lim_{x=0} \frac{\sin ax}{x} = a. \tag{23}$$

Známe-li však a, jest stanoveno ω (viz (20)); jestliže $a = 1$, jest $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Pro funkce $\cos x$ a $\sin x$ v geometrii užívané jsou platny tytéž funkcionální vztahy jako pro $S(x)$, $C(x)$ v (1), (1′), (1″), (1‴); jelikož nadto jsou pro ony funkce požadavky spojitosti rovněž splněny jakož i vztah

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{23′}$$

jest patrno, že funkce v geometrii užívané shodují se s funkcemi tu odvozenými, klademe-li $a = 1$ a $\omega = \frac{1}{2}\pi$ (jakož ostatně označením již předem bylo naznačeno).

---

též nullovým bodem hodnoty $2\omega_2 - \omega_1 = \omega_1 - 2(\omega - \omega_1) = \omega_3$, $2\omega_3 - \omega_1 = \omega_1 - 2^2(\omega - \omega_1) = \omega_4$, $2\omega_4 - \omega_1 = \omega_1 - 2^3(\omega - \omega_1)$, ... a obecně bylo by též nullovým bodem $\omega_k = \omega_1 - 2^{k-2}(\omega - \omega_1)$, kteréžto číslo, volíme-li k dosti veliké, jest menší než 1·4. Avšak jest nemožno, aby řada pro $\cos x$ stávala se nullou pro číslo in ervalu (0, 1·4) a tedy nejsou v (1·4, 1·6) dvě hodnoty různé, pro které by $\cos x$ stával se rovným nulle.

*) Že $\sin a\,\omega = \sin\frac{\pi}{2}$ jest kladno, což jest třeba vedle (1′) ještě požadovati, aby určení pomocí (1′) se shodovalo s určením dle (5), dokáže se snadno obdobně, jako bylo dokázáno, že $\cos 1{\cdot}4 > 0$.

Poznámka. Odvodíme si ještě nerovninu, jež nám později bude užitečna. Jest dle (22′)

$$\beta \sin\alpha - \alpha \sin\beta = \alpha\beta\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{3!} - \frac{\beta^4-\alpha^4}{5!} + \dots\right) =$$

$$= \alpha\beta\,(\beta^2-\alpha^2)\left(\frac{1}{3!} - \frac{\beta^2+\alpha^2}{5!} + \frac{\beta^4+\beta^2\alpha^2+\alpha^4}{7!} - \dots\right)$$

Předpokládáme-li $|\,\beta\,| > |\,\alpha\,|$, bude závorka poslední v tomto výrazu jistě kladna, když bude kladným výraz

$$\frac{1}{3!} - \frac{2\beta^2}{5!} + \frac{\beta^4}{7!} - \frac{4\beta^6}{9!} + \frac{\beta^8}{11!} - \frac{6\beta^{10}}{13!} + \dots$$

a to bude patrně vždy, když $\beta^2 < 10$; jelikož, jak později*) poznáme, jest $\pi^2 < 10$, můžeme tomuto výsledku dáti buď tvar

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\beta}{\beta} \\ \text{aneb}\quad &\\ &\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} > \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}\right\}\ \text{jestliže } \pi \geqq \beta > \alpha > 0.$$

Specielně dostaneme (užijeme-li dvakráte této nerovniny, jednou pro $\beta = \frac{\pi}{2}$, po druhé limitujíce pro $\lim \alpha = 0$)

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1 \quad \text{pro } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \tag{24}$$

91. Rozvoj funkce ***sin x*** **v nekonečný součin.** Z rovnice (15) dostaneme za předpokladu, že n liché, dosadíme-li tam $\omega - x$ místo x, obdobnou rovnici pro $S\,(nx)$. Píšeme-li tuto rovnici hned pro $\sin nx$, máme

$$\sin nx = b_0 \sin^n x + b_1 \sin^{n-2} x + b_2 \sin^{n-4} x + \dots + b_m \sin x,\quad n = 2m + 1.$$

(Pro koefficienty b_k jest platný vztah $b_k = (-1)^m a_k$.) Funkce $\sin nx$ stává se nullou pro tyto hodnoty

$$0,\ \pm\frac{\pi}{n},\ \pm\frac{2\pi}{n}, \dots,\ \pm\frac{m\pi}{n}$$

*) Ostatně z druhého uspořádání rozvoje pro $\cos x$ (svrchu vypsaného) následuje ihned, že rozvoj ten nabývá hodnoty záporné, dosadíme-li 2·5 za x^2; neboť prvé dva členy jeho dávají dohromady číslo záporné $\left(= -\frac{1331}{21\,.\,64\,.\,96}\right)$ a ostatní jsou rovněž záporné. Jest tedy $\pi^2 < 4\,.\,2{\cdot}5 = 10$.

zvětšené po případě o libovolný celistvý násobek čísla π. Následkem toho stává se polynom

$$b_0 \sin^{n-1} x + b_1 \sin^{n-3} x + b_2 \sin^{n-5} x \ldots + b_m.$$

který jest m-tého stupně v $\sin^2 x$ a který, klademe-li $\sin^2 x = z$, můžeme psáti ve tvaru

$$b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \ldots + b_m, \tag{t}$$

nullou tenkráte a jenom tenkráte, když za z dosadíme jednu z m hodnot $z_1, z_2, \ldots z_m$, při čemž

$$z_k = \sin^2 \frac{\pi k}{n}.$$

Můžeme tedy polynom (t), znajíce všecky nullové jeho hodnoty, rozložiti známým způsobem v kořenové činitele a psáti jej ve tvaru

$$b_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_m)$$

a pro $\sin nx$ máme po snadné úpravě

$$\sin nx = c \,.\, \sin x \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{z}{z_m}\right).$$

Při tom jest c konstantní činitel, jejž snadno stanovíme, dělíme-li celou rovnici x a vypočítáme-li limitu obou stran pro ten případ, že $\lim x = 0$. Dostaneme $c = n$; položíme-li pak v poslední rovnici $\frac{x}{n}$ místo x a tedy $\xi = \sin^2 \frac{x}{n}$ místo z, máme konečně

$$\sin x = n \sin \frac{x}{n} \left(1 - \frac{\xi}{z_1}\right)\left(1 - \frac{\xi}{z_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{\xi}{z_m}\right), \tag{u}$$

což jest rovnice, jež bude naším východiskem.

Budiž ϱ pevné číslo kladné, celé, menší než m, jinak však na m resp. n nezávislé. Označme k vůli krátkosti

$$P_\varrho (x) = n \sin \frac{x}{n} \left(1 - \frac{\xi}{z_1}\right)\left(1 - \frac{\xi}{z_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{\xi}{z_\varrho}\right).$$

Pak lze rovnici (u) psáti ve tvaru

$$\frac{\sin x}{P_\varrho (x)} = \left(1 - \frac{\xi}{z_{\varrho+1}}\right)\left(1 - \frac{\xi}{z_{\varrho+2}}\right) \ldots \left(1 - \frac{\xi}{z_m}\right). \tag{u'}$$

Užijeme-li však u zlomku $\frac{\xi}{z_k}$ vztahů (24) a to v čitateli $\sin \alpha < \alpha$, v jmenovateli pak $\sin\alpha > \frac{2\alpha}{\pi}$ platných za předpokladů $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, dostaneme

$$1 - \frac{\xi}{z_k} > 1 - \frac{x^2}{4k^2}; \quad 0 < x < \frac{n\pi}{2}.$$

Vyplývají tedy z (u') nerovniny (za omezení $x < 2\varrho + 1$)

$$1 > \frac{\sin x}{P_\varrho(x)} > \left(1 - \frac{x^2}{4(\varrho+1)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4(\varrho+2)^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{4m^2}\right). \qquad (v)$$

Přejděme v nerovninách těchto k limitám pro $\lim n = \infty$ ($\lim m = \infty$). Pak, jelikož (odst. 90., (23'))

$$\lim_{n=\infty} n \sin\frac{x}{n} = x \lim_{n=\infty}\left[\sin\frac{x}{n} : \frac{x}{n}\right] = x,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\xi}{z_k} = \frac{x^2}{k^2\pi^2} \lim\left[\left(\xi : \frac{x^2}{n^2}\right) : \left(z_k : \frac{k^2\pi^2}{n^2}\right)\right] = \frac{x^2}{k^2\pi^2},$$

jest

$$\lim_{n=\infty} P_\varrho(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{\varrho^2\pi^2}\right),$$

Výraz tento krátce označíme $p_\varrho(x)$. Pravá strana nerovnin (v) se v limitě promění v nekonečný součin

$$\left(1 - \frac{x^2}{4(\varrho+1)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4(\varrho+2)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4(\varrho+3)^2}\right)\cdots$$

Výraz právě napsaný má, jelikož nekonečný součin o činiteli obecném $\left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right)$. $k = 1, 2, 3, \ldots$ jest konvergentní, za limitu 1 pro $\lim \varrho = \infty$.

Dostáváme tedy, když v nerovninách (v) přejdeme k limitě, napřed pro $\lim n = \infty$ a potom pro $\lim \varrho = \infty$, na obou křídlech 1 a konverguje tedy, provedeme-li postupně oba limitní procesy ve členu prostředním nerovnin (v), prostřední člen rovněž ku 1, t. j. dostáváme, že

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{1^2 \cdot \pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot \pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2 \cdot \pi^2}\right)\cdots \qquad (\text{I.})$$

pro každé $x > 0$. Rovnice však očividně platna jest i pro $x = 0$ a poněvadž $\sin(-x) = -\sin x$, i pro každé $x < 0$ a jest platna tedy pro každé x vůbec.

92. Formule Wallisova. Klademe-li v poslední rovnici $x = \frac{\pi}{2}$, dostaneme

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right)\cdots =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdots,$$

z čeho následuje vyjádření čísla Ludolfského ve tvaru nekonečného součinu

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 . 2 . 4 . 4 . 6 . 6 \ldots}{1 . 3 . 3 . 5 . 5 . 7 \ldots}, \text{ (viz odst. 32.)}$$

odvozené poprvé Wallisem (v jeho spise Arithmetica infinitorum z r. 1655).

93. Rozvoj ***cos x*** **v nekonečný součin.** Pro $\cos x$ dostáváme pomocí formule

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$$

ihned

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{1^2 \pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2 . \pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2 . \pi^2}\right) \ldots \tag{II}$$

Lze však podati ještě jiné odvození, jež poskytuje jistý zájem; a to na základě vztahu $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Jest

$$1 - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}{k^2 \pi^2} = \left(1 - \frac{\pi - 2x}{2k\pi}\right)\left(1 + \frac{\pi - 2x}{2k\pi}\right) =$$

$$= \frac{(2k-1)(2k+1)}{2k \;.\; 2k}\left(1 + \frac{2x}{(2k-1)\pi}\right)\left(1 - \frac{2x}{(2k+1)\pi}\right)$$

a tedy

$$p_k\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi}{2} . \frac{1 . 3}{2 . 2} . \frac{3 . 5}{4 . 4} \ldots$$

$$\ldots \frac{(2k-1)(2k+1)}{2k \;.\; 2k} . \left(1 - \frac{2x}{1\pi}\right)\left(1 + \frac{2x}{1\pi}\right)\left(1 - \frac{2x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{2x}{3\pi}\right) \ldots$$

$$\ldots \left(1 - \frac{2x}{(2k-1)\pi}\right)\left(1 + \frac{2x}{(2k-1)\pi}\right)\left(1 - \frac{2x}{(2k+1)\pi}\right).$$

Přejdeme-li z této rovnice k limitě pro $\lim k = \infty$, máme, užijeme-li jednak formule Wallisovy, jednak sloučíme-li vždy dva činitele po sobě jdoucí v jeden, rovněž formuli (II).

Součiny nekonečné pro $\sin x$ a $\cos x$ tu odvozené slují *Eulerovy* (Introductio in Analysin infinitorum, sv. I., § 158.).

Úkol. Dokažte pomocí nekonečných součinů vztahy $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$ $= \cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

94. Funkce cyklometrické jsou inversními funkcemi ku goniometrickým. Jelikož se jich často používá v analysi a jelikož v elementech mathematiky zpravidla o nich se nepojednává, je třeba tu poněkud obšírněji jich definici a hlavní vlastnosti vyložiti.

Funkce sinus jest funkcí stále rostoucí, když neodvisle proměnná probíhá hodnoty intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; jelikož jest nad to funkcí spojitou, stanoví rovnice

$$x = \sin y, \text{ kde } -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}, \ |x| \leqq 1 \tag{1}$$

s vytčenou vedlejší podmínkou jednoznačně y, dáno-li x; t. j. definuje y jakožto funkci x v intervalu $(-1, 1)$. Funkci tuto nazýváme *arkus sinus* a píšeme

$$y = \operatorname{arc} \sin x, \quad |x| \leqq 1. \tag{2}$$

Jsou tedy rovnice (1) s vedlejší podmínkou pro y a rovnice (2) pro nás úplně ekvivalentní. Funkce $\operatorname{arc}\sin x$ udává tudíž jedno řešení rovnice $\sin y = x$ a sice to jediné, jež spadá do intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; všecka ostatní řešení té rovnice jsou dána výrazy

$$\operatorname{arc} \sin x + 2k\pi, \quad (\pi - \operatorname{arc} \sin x) + 2k\pi,$$

kde k jest libovolné celé číslo (kladné, záporné, nulla).

Funkce kosinus jest funkcí spojitou a stále klesající, když neodvisle proměnná probíhá hodnoty intervalu $(0, \pi)$; stanoví tudíž rovnice

$$x = \cos y, \text{ kde } 0 \leqq y \leqq \pi, \quad |x| \leqq 1 \tag{3}$$

s vytčenou vedlejší podmínkou jednoznačně y, dáno-li x a jest jí y definováno jakožto funkce x v intervalu $(-1, 1)$. Funkci tuto nazýváme *arkus kosinus* a značíme

$$y = \operatorname{arc} \cos x, \quad |x| \leqq 1. \tag{4}$$

Všecka řešení rovnice (3), nevázaná podmínkou pro y ve (3) uvedenou, jsou pak dána výrazem

$$\pm \operatorname{arc} \cos x + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Mezi funkcemi $\operatorname{arc}\sin x$ a $\operatorname{arc}\cos x$ jest vztah — který čtenář snadno z definice dokáže —

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Podobně se definují funkce arkus tangens, arkus kotangens. Prvá jest inversní ku funkci tangens, druhá ku kotangens. Prvá nabývá hodnot intervalu $(-\frac{1}{2}\pi + 0, \frac{1}{2}\pi - 0)$, druhá intervalu $(0 + 0, \pi - 0)$. Jest zde rovnice

$$x = \operatorname{tg} y, \text{ kde } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \text{ ekvivalentní rovnici } y = \operatorname{arctg} x \tag{6}$$

a rovnice

$$x = \operatorname{cotg} y, \text{ kde } \quad 0 < y < \pi, \text{ ekvivalentní rovnici } y = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x. \tag{7}$$

Mezi funkcemi takto definovanými jest opět vztah

$$\text{arc tg}\, x + \text{arc cotg}\, x = \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Z dalších vlastností funkcí cyklometrických uvádím vztahy

$$\begin{aligned} &\text{arc sin}\,(-x) = -\text{arc sin}\, x,\ \text{arc cos}\,(-x) = \pi - \text{arc cos}\, x, \\ &\text{arc tg}\,(-x) = -\text{arc tg}\, x,\ \text{arc cotg}\,(-x) = \pi - \text{arc cotg}\, x \end{aligned} \tag{9}$$

a odvodím ještě zevrubněji t. zv. addiční věty.

Jestliže jest

$$\sin y = x,\ \sin y' = x',\ \text{kde} -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} \leqq y' \leqq \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

jest

$$\sin(y + y') = \sin y \cos y' + \cos y \sin y' = x\sqrt{1 - x'^2} + x'\sqrt{1 - x^2}. \tag{11}$$

Součet $y + y'$ bude tenkrát a jenom tenkrát v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, když $\cos(y + y')$ jest kladný. Je-li $\cos(y + y')$ záporný, jest buď $y + y' > \frac{\pi}{2}$, když y i y' jsou kladná, aneb $y + y' < -\frac{\pi}{2}$, když y, y' jsou záporná čísla. Avšak

$$\cos(y + y') = \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - x'^2} - xx'$$

a jest $\cos(y + y')$ kladný, jsou-li x, x' protivného znaménka; jsou-li pak stejného znaménka, jest $\cos(y + y')$ kladný či záporný dle toho, zda $x^2 + x'^2 < 1$, či $x^2 + x'^2 > 1$. Vyplývá tedy z rovnice (11) pro $y + y'$, což dle (10) jest $\text{arc sin}\, x + \text{arc sin}\, x'$, vztah

$$\text{arc sin}\, x + \text{arc sin}\, x' = \text{arc sin}\,(x\sqrt{1 - x'^2} + x'\sqrt{1 - x^2}), \tag{12}$$

jestliže x, x' jsou protivného znaménka aneb stejného, je-li zároveň $x^2 + x'^2 \leqq 1$;

$$\text{arc sin}\, x + \text{arc sin}\, x' = \pm\pi - \text{arc sin}\,(x\sqrt{1 - x'^2} + x'\sqrt{1 - x^2}), \tag{12'}$$

jestliže x, x' jsou stejného znaménka a zároveň $x^2 + x'^2 \geqq 1$.
Při tom jest v poslední rovnici voliti znaménko horní, jsou-li x, x' obojí kladná, znaménko dolní, jsou-li x, x' záporná.

Podobně se dokáže addiční věta pro $\text{arc tg}\, x$. Jest

$$\text{arc tg}\, x + \text{arc tg}\, x' = \text{arc tg}\, \frac{x + x'}{1 - xx'}, \tag{13}$$

jsou-li x, x' protivného znaménka, jsou-li pak stejného, jestliže zároveň $xx' \leqq 1$; dále pak jest

$$\text{arc tg}\, x + \text{arc tg}\, x' = \pm\pi - \text{arc tg}\, \frac{x + x'}{1 - xx'}, \tag{13'}$$

jsou-li x, x' stejného znaménka a $xx' \geqq 1$; znaménko při π voliti jest stejně jako svrchu. Klademe-li $x + h$, $-x$ místo x, x' a volíme-li hned h tak malé, aby bylo lze užíti formulí (12), (13), dostáváme specielně

$$\operatorname{arc\,sin}(x+h) - \operatorname{arc\,sin} x = \operatorname{arc\,sin}\left((x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}\right), \tag{12''}$$

$$\operatorname{arc\,tg}(x+h) - \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{1+x(x+h)}. \tag{13''}$$

Vedle těchto vztahů vyplývají z formulí pro funkce goniometrické četné iné. Tak pro kladná x jest ku př.

$$\operatorname{arc\,sin} x = \operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,cotg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\operatorname{arc\,cos} x = \operatorname{arc\,sin}\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arc\,cotg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ atd.}$$

Rovněž bezprostředně následuje z (23′) odst. 90.

$$\lim_{x=0}\frac{\operatorname{arc\,sin} x}{x} = 1, \quad \lim_{x=0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = 1. \tag{14}$$