IV. Funkce jedné proměnné; zvláště funkce spojité.

66. Pojem funkce. Budiž dána veličina proměnná x, jež nabývati může všech hodnot obsažených v jistém množství číselném. Toto množství nazvali jsme (odst. 23.) *obor veličiny proměnné x*. Přiřazeno-li je dle určitého předpisu každé hodnotě x daného oboru jedno číslo, pojímáme toto číslo jakožto hodnotu nové proměnné — značme ji y —, kterouž nazýváme funkcí proměnné x v daném oboru. Tak ku př. rovnicí

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

přižazeno jest *každému* x (obor proměnné x obsahuje všecka reálná čísla) jedno číslo y; jest tedy výrazem na pravé straně té rovnice definována jistá funkce proměnné x. Jiné jednoduché příklady funkcí jsou dány vztahy

$$y = x^m,\ y = e^x,\ y = \log x.$$

Při prvé z těchto funkcí může obor proměnné x obsahovati, je-li m celé, kladné všecka reálná čísla, rovněž tak při druhé funkci. Při třetí funkci jest obor omeziti na čísla reálná kladná.

Veličinu x v definici podané nazýváme často *neodvisle proměnnou*, veličinu y pak veličinou *odvisle proměnnou* (neboť změna veličiny y jest dána změnou veličiny x, jež jest libovolná, ovšem až na to, že x jest vázáno na jistý obor). Při odvozování vlastností funkcí v jisté obecnosti platných vyznačujeme okolnost, že veličinu proměnnou pokládáme za funkci proměnné x, stručně symboly jako $y = f(x)$, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = h(x)$ a pod. Označení takového můžeme užívati též jako zkratek za výrazy někdy složité anebo zkratek pro určité předpisy dané při definici funkce příslušné. Pro některé funkce užíváme symbolů ustálených. Tak ku př. $y = E(x)$ znamená hodnotu y rovnou největšímu celému číslu obsaženému v x (t. j. y, jež jest celé, hoví tu podmínkám $x - 1 < y \leqq x$).

V následujícím podám některé příklady funkcí, při čemž v prvých třech objasním pojmy často se vyskytující.

Příklad 1. Funkce

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m$$

kde $c_0, c_1, \ldots c_m$ jsou daná čísla, jest definována pro všecka x a sluje **racionálná celistvá funkce** *proměnné x*; stupně m-tého, je-li $c_m \neq 0$. Jsou-li $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_m = 0$ a tedy $y = c_0$, říkáme, že funkce se redukuje na **konstantu**; v tomto případě se nemění y, mění-li se x; y jest *„nezávislo* od x", jsouc rovno stále (t. j. pro každé x) témuž číslu c_0.

Příklad 2. Funkce

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n},$$

kde a_k, b_k jsou daná čísla (nezávislá od x, konstanty), jest definována pro všecka x vyjma ta, pro které jmenovatel jest roven nulle. Nazývá se **racionálnou funkcí** *proměnné* x.

Příklad 3. Rovnicí

$$y^2 + 2x^2 y - 5x^2 = 0$$

jsou každému x přiřazena dvě y; jedno jest kladné, druhé záporné. Požadujeme-li, aby $y \geqq 0$, pak jest tou rovnicí ke každému x přiřazeno jedno $y \geqq 0$ a definována jest tedy funkce proměnné x. Jest to zvláštní případ **algebraické funkce**. Obecně jest algebraická funkce dána rovnicí algebraickou tvaru ($A_k(x)$ buďtež racionálné funkce proměnné x):

$$y^m + A_1(x) y^{m-1} + A_2(x) y^{m-2} + \ldots + A_m(x) = 0$$

a ještě — je-li třeba — jistými vedlejšími podmínkami.

Příklad 4. Každé číslo reálné dá se vyjádřiti jako součet čísla celého a zlomku desetinného buď konečného aneb nekonečného. Toto vyjádření jest jednoznačné, klademe-li si podmínku, aby čísla, která lze vyjádřiti pomocí konečného zlomku des., jím skutečně byla vyjadřována.*) Přiřaďme pak číslu

$$x = A + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \ldots$$

číslo

$$y = A + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_3}{10^2} + \frac{a_5}{10^3} + \ldots + \frac{a_{2k-1}}{10^k} + \ldots$$

Při tom jest A číslo celé. a_k jsou čísla celá od 0 až do 9. Tím jsme definovali jistou funkci proměnné x, značiti ji budeme $y = \chi(x)$.

Jiné příklady funkcí budou podány v odstavcích následujících.

67. Funkce konečná. Je-li dána funkce $f(x)$ proměnné x probíhající obor číselný Ω, tvoří hodnoty neodvisle proměnné i příslušné hodnoty funkční jistá množství číselná. Je-li množství číselné Ω zdola i shora ohraničeno, nazýváme obor neodvisle proměnné **konečným oborem**. Je-li množství číselné vytvořené příslušnými hodnotami funkce $f(x)$ zdola i shora ohraničeno, sluje funkce $f(x)$ *funkcí konečnou v oboru* Ω; v tomto případě mají hodnoty funkce $f(x)$, když x probíhá daný obor Ω, jistou *horní hranici* M a jistou dolní hranici m (odst. 24.); i jest pro všecka x daného oboru $M \geqq f(x) \geqq m$. Čísla M a m slují **horní a dolní hranice** *funkce* $f(x)$ *v daném oboru* Ω.

*) Ku př. $2\frac{1}{10}$ se dá vyjádřiti konečným zlomkem desetinným 2·1 anebo nekonečným 2·09999...

Rozdíl $M-m$ nazývá pak se **oscillací** funkce $f(x)$ v oboru Ω. Jsou-li x_1, x_2 dvě libovolné hodnoty oboru Ω, jest vždy $|f(x_1)-f(x_2)| \leq$ $\leq M - m$; a naopak snadno lze nahlédnouti, že, ať ε jest číslo kladné jakkoliv malé, vždy jest aspoň jedna dvojice čísel x_1, x_2 vybraná v oboru Ω, pro kterou $|f(x_1) - f(x_2)| > M - m - \varepsilon$. Jest tedy $M - m$ horní hranicí pro $|f(x_1) - f(x_2)|$, probíhají-li čísla x_1, x_2 od sebe neodvisle všecky hodnoty oboru Ω.

Rovněž jest patrna tato vlastnosť čísla M: Má-li funkce $f(x)$ v oboru Ω_1 horní hranici M_1, v oboru Ω_2 pak horní hranici M_2, má v oboru, který vznikne spojením obou oborů Ω_1, Ω_2 v jediný, za horní hranici číslo větší z obou čísel M_1, M_2. Obdobnou vlastnosť má i číslo m. Má-li funkce $f(x)$ v oboru Ω horní hranici M a v oboru Ω', který jest částí oboru Ω, horní hranici M', pak, je-li $M > M'$, jest horní hranicí funkce $f(x)$ v oboru, který vznikne z Ω odloučením oboru Ω', číslo M. (Plyne z předcházející věty)

Příklad 1. Funkce

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}, \tag{α}$$

když obor neodvisle proměnné jest dán všemi reálnými čísly (obor jest nekonečný), jest funkcí konečnou, neboť jest stále kladna ($f(x) > 0$) a zároveň menší než $\frac{1}{2}$. Horní hranice funkčních hodnot jest $\frac{1}{3}$ (nabývá tuto hranici pro $x = 0$), dolní hranice jest 0 (této hodnotě se funkce libovolně blíží, když x roste v absol. hodn. nade všecky meze).

Příklad 2. Funkce daná vztahy

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ pro } 0 < x \leq 1, \quad f(0) = 2$$

jest definována pro všecka x intervalu (0, 1) — obor jest konečný. Pro každou hodnotu neodvisle proměnné nabývá $f(x)$ sice zcela určitou hodnotu, avšak funkce jest nekonečná; neboť, ať jest dáno číslo kladné A jakkoliv, pro každé x hovící nerovninám $0 < x < \frac{1}{A}$ nabývá $f(x)$ hodnoty větší než A. Funkce daná jest však zdola ohraničena; $m = 1$, kterou nabývá pro $x = 1$. Obdobné vývody by bylo lze provésti v intervalu (0, — 1).

Příklad 3. Funkce daná vztahy

$$f(x) = \frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{x} \quad \text{pro} \quad x \gtrless 0, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1$$

jest nekonečná v každém intervalu obsahujícím bod 0, ať si hodnotu funkce v bodě 0 zvolíme jakkoliv. Uvažujme ku př. interval $(-1, 1)$. Pak jest (v tomto intervalu)

$$|f(x)| \geqq |x^{n-1} f(x)|; \qquad (p)$$

avšak

$$x^{n-1} f(x) = \frac{a_n}{x} + a_{n-1} + a_{n-2}x + \ldots + a_1 x^{n-2}.$$

Pravá strana jest součet funkce nekonečné dané prvním členem (viz předch. příklad) a konečné (menší v absol. hodn. než součet absol. hodn. koefficientů $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$); jest tedy celek nekonečná funkce a tím spíše, dle (p), jest $f(x)$ nekonečnou funkcí.

68. Pro funkce, mající v daném oboru horní hranici M, jest tato věta: *Má-li funkce $f(x)$ v jistém konečném oboru Ω horní hranici M, pak existuje číslo ξ takové, že v části daného oboru nacházející se uvnitř intervalu $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ má funkce $f(x)$ za horní hranici rovněž číslo M a to ať si kladné číslo ε zvolíme jakkoliv* (malé). Číslo ξ nemusí přínáležeti oboru Ω; pod částí daného oboru nacházející se uvnitř intervalu $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ vyrozumívají se *všecka* čísla oboru Ω, jež jsou zároveň uvnitř intervalu $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. *Obdobná věta platí i pro dolní hranici*, netřeba ji slovně uváděti.

Jelikož obor Ω jest konečný, lze udati dvě čísla a, b taková, že všechny body oboru Ω jsou položeny mezi a, b (t. j. jinak řečeno, že nacházejí se uvnitř intervalu (a, b)). Abychom svrchu uvedenou větu dokázali, rozdělíme si všecka reálná čísla ve dvě skupiny $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; do $\mathfrak{A}$ dáme všechna čísla menší než a, a a pak taková čísla c, že v části oboru Ω spadající do intervalu (a, c) jest horní hranice funkce $f(x)$ menší než M. Patří-li nějaké číslo c ke skupině $\mathfrak{A}$, patří k ní jistě i číslo $c' < c$ dle způsobu, jak $\mathfrak{A}$ byla definována. Do $\mathfrak{B}$ dáme všecka ostatní čísla, která nejsou v $\mathfrak{A}$; taková čísla jsou, neboť ku př. b a čísla větší než b nepatří jistě ku $\mathfrak{A}$. Obě ty skupiny stanoví číslo ξ, které jest mezi nimi rozhraním a které má vlastnost ve větě požadovanou. Neboť ať jest ε číslo kladné jakkoliv malé, patří $\xi + \varepsilon$ ku $\mathfrak{B}$, $\xi - \varepsilon$ pak ku $\mathfrak{A}$; jest tedy pro čísla x daného oboru položená mezi a a $\xi + \varepsilon$ horní hranicí funkce $f(x)$ číslo M, pro x pak položená mezi a a $\xi - \varepsilon$ horní hranicí funkce $f(x)$ číslo menší než M, odkudž tvrzení ve větě učiněné bezprostředně následuje. Takových bodů ξ, majících vlastnost ve větě uvedenou, může býti mezi a a b více; viz obdobnou úvahu pro body zhuštění (odst. 25.).

Poznámka 1. Je-li obor Ω oborem nekonečným, nemusí takové číslo ξ existovati. Ku př. funkce (α) předch. odstavce má za dolní hranici 0, nelze však udati bod ξ tak, aby v $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ měla funkce za dolní hranici 0, nýbrž daná funkce blíží se k nulle, když $|x|$ roste nade všecky meze. Horní hranice této funkce jest $\frac{1}{3}$; pro tuto jest bod $\xi = 0$, neboť uvnitř intervallu $(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$ jest horní hranice funkce právě $\frac{1}{3}$, jelikož funkce nabývá tuto hodnotu pro $x = 0$.

Poznámka 2. Není-li ξ číslem oboru Ω, musí patrně býti bodem zhuštění množství číselného daného oborem Ω, neboť jinak bylo by lze udati číslo ε tak, že v $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ nebyly by žádné body oboru Ω. Je-li ξ číslem oboru Ω a není-li zároveň bodem zhuštění čísel oboru Ω, pak očividně funkce daná $f(x)$ nabývá v ξ hodnotu M.

Poznámka 3. Jiný způsob důkazu věty tohoto odstavce — a to způsob, který lze zevšeobecniti pro libovolný počet proměnných — bude podán později pro funkce o dvou proměnných.

69. Omezíme se v následujících úvahách o funkcích jedné proměnné na obory pro neodvisle proměnnou, jež jsou dány *všemi body jednoho intervalu* (a, b), při čemž ještě jednou zdůrazňuji, že pod pojmenováním tím jsou zahrnuty všecky body intervalu *včetně hranic* a, b. Zpravidla také bude předpokládáno $a < b$ a pod bodem x *uvnitř* intervalu (a, b) bude vyrozumívána hodnota x, pro kterou $a < x < b$; platí-li pro x vztah $a \leqq x \leqq b$, sluje x bodem intervalu (a, b). Viz odst. 23., kde také vyložen byl význam symbolů $(a + 0, b)$, $(a, b - 0)$, $(a + 0, b - 0)$, (a, ∞), $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$. Intervaly těmito symboly vytčené nazývají se **otevřenými**, interval (a, b) pak **zavřeným**.

Omezením vytčeným docíleno bude při výkladech zjednodušení, věty dovozované stanou se jím přístupnější porozumění. Ostatně není omezení to nijak na závadu při velké většině použití vět v analysi, jejímž předmětem jsou hlavně funkce definované v intervalech.

70. O limitách funkcí. Budiž dána funkce $f(x)$ pro všecky body intervalu (a, b) a budiž c bod uvnitř intervalu (a, b). Podáme definici pro pojem **limity funkce** $f(x)$, **když** x **konverguje ku** c, kterýžto pojem — existuje-li při dané funkci $f(x)$ v důsledku té definice — bude značen symbolem

$$\lim_{x=c} f(x). \tag{1}$$

Podáme ihned dvě definice, o nichž pak dokážeme, že věcně se shodují.

1. *Definice. Řada čísel $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k, \ldots$, vesměs různých od c, mějž limitu rovnou c, když index k vzrůstá do nekonečna. Pak, existuje-li vždy limita*

$$\lim_{n=\infty} f(c_n) = C \tag{2}$$

a je-li vždy táž (rovna C), ať $c_1, c_2, c_3 \ldots$ jest jakákoliv řada čísel intervalu (a, b) různých od c mající za limitu c, říkáme, že existuje limita (1) *a že jest rovna C.*

2. *Definice. Přísluší-li ke každému číslu kladnému ε číslo kladné η tak, že jest*

$$|f(x) - C| < \varepsilon \text{ pro všecka } x \text{ intervalu } (a, b), \text{ pro něž } 0 < |x - c| < \eta \quad (3)$$

říkáme, že existuje limita (1) *a že jest rovna C.*

Abychom dokázali, že obě definice jsou ekvivalentní, ukažme nejprve, že není možno, aby byla limita (1) dle první definice, neexistuje-li dle druhé definice. Dejme tomu tedy, že není splněna podmínka v druhé definici vyslovená. Zvolme si řadu čísel kladných $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ mající za limitu nullu. Pak (poněvadž není vyhověno podmínce definice 2.) jest jisté číslo kladné ε_0 takové, že aspoň pro jeden bod x_k hovící nerovnině $0 < | x_k - c | < \eta_k$ jest splněna nerovnina

$$| f(x_k) - C | \geqq \varepsilon_0, \quad (4)$$

ať jest k jakkoliv veliké (a tedy následkem toho η_k jakkoliv malé). Čísla však $x_1, x_2, x_3, \ldots$ jsou různa od c a mají za limitu c a kdyby bylo vyhověno 1. definici, bylo by tudíž

$$\lim_{n=\infty} f(x_n) = C;$$

avšak této rovnici vyhověno býti nemůže v důsledku nerovniny (4) pro všecka k platné. Není-li tudíž vyhověno podmínce v druhé definici, není také vyhověno požadavku 1. definice.

Dokažme dále, že, je-li vyhověno podmínce v druhé definici, jest také vyhověno 1. definici. Je-li $c_1, c_2, c_3, \ldots$ libovolná řada čísel různých od c majících za limitu c, pak nutně jest jisté číslo N takové, že jest $| c_n - c | < \eta$ pro všecka $n > N$. V důsledku (3) však jest též

$$| f(c_n) - C | < \varepsilon \text{ pro všecka } n > N;$$

t. j. v důsledku vztahu (3) jest splněna rovnice (2).

Tím jest věcná shoda obou definic prokázána.

Na základě definice 1. však jest patrno, že věty pro limity číselných řad, odvozené v odst. 30., jsou platny i pro limity funkcí, pokud ovšem věty ty odvozeny byly obecně, t. j. nezávisle na tom, jak příslušné řady číselné konvergují ku své limitě. Uvedu v následujícím příslušné věty ve tvaru rovnic:

1. $\lim\limits_{x=c} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x=c} f(x) \pm \lim\limits_{x=c} g(x)$,

2. $\lim\limits_{x=c} [f(x)\, g(x)] = \lim\limits_{x=c} f(x) \,.\, \lim\limits_{x=c} g(x)$,

3. $\lim\limits_{x=c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x=c} f(x)}{\lim\limits_{x=c} g(x)}$ za předpokladu, že $\lim\limits_{x=c} g(x) \neq 0$.

4. $\lim\limits_{x=c} A^x \;= A^c,\quad \lim\limits_{x=0} A^x = 1,$

5. $\lim\limits_{x=c} \log_A x = \log_A c,\quad x > 0,\quad c > 0,$

6. $\lim\limits_{x=c} x^\mu \;= c^\mu,\quad x > 0,\quad c > 0.$

7. Jestliže $f(x) > g(x)$ v okolí bodu c, jest $\lim f(x) \geqq \lim g(x)$.

Věty 1., 2., 3., 7. platí ovšem jenom za předpokladu, že limity funkcí $f(x)$, $g(x)$ tam se vyskytující, vskutku existují. Konečně lze na základě označení tu zavedeného psáti výsledky odst. 37.

$$\lim_{\delta=0} \frac{e^\delta - 1}{\delta} = 1,\quad \lim_{\delta=0} \frac{\log(1+\delta)}{\delta} = 1,\quad \lim_{\delta=0} \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta} = \mu.$$

Vztahu (s) odst. 55. pak při $x = 1$ lze dáti jeden z těchto tvarů

$$\lim_{a=\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^a = e,\qquad \lim_{\delta=0} (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e.$$

71. Pro limitu v odstavci předch. definovanou zavádí se často označení symbolem $f(c \pm 0)$, takže jest

$$C = \lim_{x=c\pm 0} f(x) = f(c \pm 0)$$

Vedle této limity užívá se ještě jiných pojmů limitních. Jest totiž možno, že proměnná x blížíc se ku c blíží se jenom hodnotami menšími než c — anebo jinak řečeno, máme-li na mysli zobrazení reálných čísel osou číselnou, blíží se k němu *z leva*. V tomto případě máme tato dvě označení pro limitu, k níž se blíží příslušné hodnoty funkční (existuje-li ovšem taková limita):

$$\lim_{x=c-0} f(x) = f(c-0) \tag{5}$$

a jest tato limita, užíváme-li druhého způsobu definice, stanovena zevrubně tímto výrokem: Přísluší-li ke každému kladnému číslu ε číslo kladné η tak, že

$$| f(x) - C | < \varepsilon \quad \text{pro všecka } x, \text{ pro něž } 0 < c - x < \eta,$$

říkáme, že existuje **limita funkce** $f(x)$ **z leva** a že jest rovna C; označení jest dáno výrazy na obou stranách (5). Podobně definuje se **limita funkce** $f(x)$ **z prava**, jež se značí výrazy

$$\lim_{x=c+0} f(x) = f(c+0).$$

Z definic podaných vyplývá bezprostředně věta: *Existují-li limity funkce $f(x)$ v bodě c z leva i z prava a jsou-li si rovny, existuje i limita funkce $f(x)$ v bodě c a jest oněm rovna.* Aneb pomocí symbolů vyjádřeno:

Jestliže $f(c-0) = f(c+0)$, jest i $f(c \pm 0) = f(c+0) = f(c-0)$.

Věty 1., 2., 3., 7. předcházejícího odstavce jsou platny i pro limity z prava a z leva.

Poznámka. Význam symbolických rovnic

$$\lim_{x=\infty} f(x) = f(\infty)\,, \quad \lim_{x=-\infty} f(x) = f(-\infty),$$
$$\lim_{x=c} f(x) = \infty, \qquad f(c-0) = \infty, \ldots \text{atd.},$$

z nichž prvé dvě nám definují **smysl symbolů** $f(\infty)$, $f(-\infty)$, jest patrný a netřeba se jimi dále zdržovati. Pro první z obou symbolů lze psáti

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \lim_{x'=0+0} f\left(\frac{1}{x'}\right)$$

a podobnou rovnici lze napsati i pro druhý symbol.

72. Funkce monotonní. Limity v odst. předch. brané v úvahu nemusí ovšem vždy existovati; naopak seznáme, že požadavkem, aby u funkce $f(x)$ byla limita pro $\lim x = c$, se pro funkci $f(x)$ zavádějí podmínky značně omezující volnost voliti hodnoty funkční v okolí bodu c. Dříve však, než těmito podmínkami budeme se zabývati, vezmeme v úvahu jednak druh funkcí velmi důležitý, při nichž limity zmíněné vždy existují, jednak nové pojmy limitní.

Funkci $f(x)$ nazýváme v intervalu (a, b) *rostoucí*, jestliže pro $x > x'$, kde x, x' jsou dva libovolné body intervalu, jest stále $f(x) > f(x')$; je-li pro $x > x'$ buď $f(x) > f(x')$ aneb $f(x) = f(x')$, nazýváme $f(x)$ funkcí *neklesající*.

Obdobně definují se funkce *klesající* a *nerostoucí*.

Funkce, které jsou v celém intervalu (a, b) buď rostoucí aneb v celém intervalu klesající, slují **ryze monotonní** *v intervalu* (a, b); těm pak, které jsou buď v celém intervalu neklesající aneb v celém intervalu nerostoucí, dáváme rovněž jediné pojmenování, totiž **funkce monotonní** *v intervalu* (a, b).

Pro funkce monotonní (a tedy také pro funkce ryze monotonní, jež jsou zvláštním případem monotonních) jest pak věta: *Při funkci monotonní v intervalu* (a, b) *existují v každém bodě* c *uvnitř toho intervalu limity z leva i z prava* (t. j. čísla $f(c-0)$, $f(c+0)$). *V krajních bodech* a, b *intervalu existují pak limity* $f(a+0)$, $f(b-0)$. Důkaz toho jest na snadě a jest vlastně obsažen v odst. 27. Neboť, je-li $a < c < b$, tvoří hodnoty funkce monotonní $f(x)$ pro všecka x intervalu $(a, c-0)$ jisté množství číselné, které jest shora i zdola ohraničeno.*) Uvažujme, běží-li o funkci neklesající, horní hranici toho

*) Neboť, je-li $f(x)$ monotonní v (a, b) a je-li $a \leqq x \leqq b$, jest $f(x)$ položeno v intervalu, jehož krajní body jsou dány čísly $f(a)$, $f(b)$.

množství M; pak dle definice horní hranice jest jistě jedno číslo z daného množství, které jest větší než $M - \varepsilon$, při čemž ε jest libovolně zvolená hodnota kladná; budiž toto číslo $f(c-\eta)$ (tu ovšem nutně $a \leqq c - \eta < c$) tak, že jest

$$f(c-\eta) > M - \varepsilon,\ 0 < M - f(c-\eta) < \varepsilon$$

a tím spíše, jelikož běží o funkci neklesající,

$$|f(x) - M| < \varepsilon \text{ pro všecka } x \text{ intervalu } (c-\eta, c-0), \text{ t. j. pro } x, \text{ pro něž } 0 < c - x < \eta.$$

Existuje tedy limita $f(c-0) = M$. Podobně se dokáže tvrzení to pro funkci nerostoucí a pro limity z prava.

Poznámka. Jelikož při funkcích monotonních limity $f(c+0)$, $f(c-0)$ vždy existují, stačí k výpočtu těchto limit znáti limity řad

$$\lim_{n=\infty} f(c_n),\quad \lim_{n=\infty} f(c_n'),$$

kde $c_1, c_2, c_3, \ldots$ jest určitá řada čísel větších než c, taková, že $\lim c_n = c$ pro $n = \infty$, a obdobně c'_k. Tak ku př. bychom mohli voliti

$$c_n = c + \frac{1}{n},\quad c_n' = c - \frac{1}{n}.$$

73. Horní a dolní limita funkcí. Uvažujme nyní *libovolnou funkci konečnou definovanou pro všecky body intervalu* (a, b); budiž bod c uvnitř toho intervalu a ξ hodnota kladná taková, že $c - \xi$ jest ještě v (a, b). Horní hranice funkčních hodnot $f(x)$, když x jest v intervalu $(c - \xi, c - 0)$, budiž M_ξ, dolní hranice m_ξ. Když ξ klesá k nulle (t. j. když $c - \xi$ rostouc blíží se ku c), pak M_ξ klesá anebo aspoň neroste, m_ξ roste po př. neklesá. Jsou tedy M_ξ a m_ξ funkce monotonní a mají limity, když $\lim \xi = 0$; pro tyto limity máme zvláštní označení a pojmenování;

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\xi=0+0} M_\xi &= \overline{f(c-0)}, \text{ \textit{horní limita funkce} } f(x) \text{ \textit{z leva v bodě} } c;\\ \lim_{\xi=0+0} m_\xi &= \underline{f(c-0)}, \text{ \textit{dolní limita funkce} } f(x) \text{ \textit{z leva v bodě} } c.\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Obdobně definují se *horní a dolní limita funkce* $f(x)$ *z prava v bodě* c $\overline{f(c+0)}$, $\underline{f(c+0)}$. Existují tedy v každém bodě uvnitř intervalu (a, b) při dané funkci čtyři čísla; pro krajní body a, b ovšem vždy toliko dvě (pro a dvě limity z prava, pro b z leva)

Poznámka. Není-li $f(x)$ funkcí konečnou v (a, b), pak ani limity svrchu vytčené nemusí existovat. Tu neexistuje-li ku př. $\overline{f(c-0)}$ dle definice svrchu podané, mohou nastati jenom tyto dva případy:

1. Množství číselné dané hodnotami funkce $f(x)$ pro x intervalu $(c-\eta,\ c-0)$ není shora ohraničeno, ať si volíme η jakkoliv malé. Pak píšeme symbolicky

$$\overline{f(c-0)} = +\infty \text{ aneb prostě } \overline{f(c-0)} = \infty.$$

2. Množství číselné právě vytknuté jest sice shora ohraničeno, avšak horní hranice, když η se blíží k nulle, klesá pod záporná čísla hodnot libovolně velikých. Tu píšeme

$$\overline{f(c-0)} = -\infty.$$

Obdobný význam mají symbolické rovnice $\underline{f(c-0)} = +\infty,\ = -\infty$; $\overline{f(c+0)} = +\infty$, atd. Připustíme-li, berouce pojem limity v širším smyslu, i v těchto případech existenci horních, resp. dolních limit funkcí, pojímáme tyto horní resp. dolní limity v širším smyslu. Pak ovšem při každé funkci definované pro všecky body intervallu (a, b), ať konečné či nekonečné v tom intervallu, existují čtyři limity $\overline{f(c-0)}$, $\underline{f(c-0)}$, $\overline{f(c+0)}$, $\underline{f(c+0)}$ v širším smyslu v každém bodě c intervallu (a, b).

74. *Nutná a postačující podmínka, aby existovala* $f(c-0)$, *jest aby* $\overline{f(c-0)} = \underline{f(c-0)}$. Označení budiž totéž jako v předch. odst. Důkaz věty vyslovené spočívá v následujícím:

Jestliže nejprve $\overline{f(c-0)} = \underline{f(c-0)}$, pak z rovnic (A) definujících tato čísla, jichž společnou hodnotu označíme a, následuje, že

$$\lim_{\xi=0+0} M_\xi = \lim_{\xi=0+0} m_\xi = a$$

a z nerovnin

$$M_\xi \geqq f(x) \geqq m_\xi \text{ platných pro všecka } x, \text{ pro něž } c-\xi \leqq x < c,$$

plyne ihned, přejdeme-li k limitám pro $\lim \xi = 0$, že jest také $\lim\limits_{x=c-0} f(x) = a$, to jest, že existuje $f(c-0)$ rovné a.

Jestliže naopak existuje $f(c-0)$, pak (odst. 71.) ke každému kladnému ε přísluší číslo η tak, že jest

$$|\,f(x) - f(c-0)\,| < \varepsilon \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } 0 < c-x \leqq \eta,$$

t. j. pro všecka x intervallu $(c-\eta,\ c-0)$ jest

$$f(c-0) - \varepsilon < f(x) < f(c-0) + \varepsilon$$

a tedy též

$$f(c-0) - \varepsilon \leqq m_\eta \leqq M_\eta \leqq f(c-0) + \varepsilon.$$

Rozdíl $M_\eta - m_\eta$ jest tudíž menší než 2ε a tím spíše $\overline{f(c-0)} - \underline{f(c-0)} < 2\varepsilon$ (neboť $M_\eta \geqq \overline{f(c-0)}$, $m_\eta \leqq \underline{f(c-0)}$). Poněvadž však za ε můžeme zvoliti libovovolné číslo kladné, jest $\overline{f(c-0)} = \underline{f(c+0)}$, čímž věta úplně dokázána.

Podobně se najdou nutné a postačující podmínky pro existenci $f(c+0)$.

Poznámka. Věta dokázaná se rozšiřuje snadno i pro ten případ, že bereme v úvahu limity v širším smyslu. Viz poznámku odst. předch.

75. **Věta Bolzano-Cauchyova o limitách funkcí.** Z úvah odstavce předcházejícího vyplývá ihned fundamentální věta pro nauku o limitách funkcí: *Nutná a postačující podmínka pro existenci limity $f(c-0)$ jest, aby ke každému kladnému číslu ε příslušelo číslo η tak, že jest*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \text{ pro všecka } x', x'', \text{ pro něž } 0 < c - x' < \eta,$$
$$0 < c - x'' < \eta. \qquad (A)$$

Z nerovniny (A) totiž vyplývá

$$f(x'') - \varepsilon < f(x') < f(x'') + \varepsilon.$$

Je-li x'' nějaká pevná hodnota uvnitř intervalu $(c-\eta, c)$, pak (jelikož x' může býti libovolnou hodnotou toho intervalu) vyplývá ihned

$$f(x'') - \varepsilon < m_\eta \leqq M_\eta < f(x'') + \varepsilon,$$

odkudž jako v předcházejícím odstavci $\overline{f(c-0)} = \underline{f(c-0)} = f(c-0)$. Podmínka jest tudíž postačující. Jestliže naopak $\overline{f(c-0)} = \underline{f(c-0)}$, pak lze ke každému ε nalézti η tak, že (neboť existují limity čísel M_ξ, m_ξ monotonně se s ξ měnících a ty jsou si rovny)

$$M_\eta - m_\eta < \varepsilon$$

a tím spíše jest splněna (A). Podmínka jest tudíž nutna.

Věty pro nutnou a postačující podmínku ku existenci limity $f(c+0)$, pak ku existenci $f(c \pm 0)$ vyplývají snadnou obměnou z věty hořejší. Uvedu ještě jinou úpravu věty shora vyslovené a to pro existenci limity $f(c \pm 0)$: *Nutná a postačující podmínka, aby existovala limita*

$$\lim_{x=c} f(x) = f(c \pm 0)$$

jest, aby ke každému kladnému číslu ε příslušelo číslo x_0 tak, že

$$|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } 0 < |c - x| < |c - x_0|.$$

76. **Funkce spojité.** *O funkci $f(x)$, definované pro všecky body v okolí bodu c a v bodě c, říkáme, že jest spojitá v bodě c, jestliže existuje limita funkce v bodě c a jestliže*

$$\lim_{x=c} f(x) = f(c).$$

Rovnici tuto můžeme též dle označení zavedených psáti $f(c \pm 0) = f(c)$. Obšírněji můžeme definici funkce spojité v bodě c vysloviti též takto: *Funkce $f(x)$ jest spojitá v bodě c, přísluší-li ke každému kladnému ε číslo kladné η tak, že jest*

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } |x - c| < \eta. \qquad (B)$$

Že prvá i druhá definice spojité funkce jsou identické, jest patrno z definice limity funkce (odst. 70.). Z vět pro limity funkcí (odst. 70.) vyplývají ihned věty: Jsou-li $f(x)$, $g(x)$ funkce spojité v bodě c, jsou spojity i $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\, g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, při čemž v poslední funkci se požaduje ještě, aby $g(c) \neq 0$.

Funkce a^x, $\log x$, x^a jsou funkce spojité, prvá pro každé x, druhá a třetí pro každé $x > 0$.

Racionálná funkce z funkcí spojitých v bodě c jest spojitá v bodě c, není-li jmenovatel pro $x = c$ rovný nulle (odst. 30., 6.).

Dále následuje jako bezprostřední důsledek definice věta: *Je-li $f(x)$ spojitou funkcí v bodě c, $F(x)$ pak spojitou v bodě $x = f(c)$, jest i spojitou $F[f(x)]$ v bodě c.* (Věta pro *spojitost funkce funkce*).

Poznámka. Jestliže jest splněna rovnice

$$f(c-0) = f(c) \text{ aneb rovnice } f(c+0) = f(c),$$

říkáme v prvém případě, že funkce jest **spojitá z leva**, v druhém pak, že jest **spojitá z prava**.

77. Základní vlastnosti funkcí spojitých. 1. *Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě c a zároveň v tomto bodě různa od nully, lze udati jisté okolí bodu c, ve kterém $f(x)$ jest různo od nully a téhož znaménka jako $f(c)$.* Zvolme si za ε číslo kladné menší než absolutní hodnota čísla $f(c)$. K němu lze v důsledku definice spojité funkce v bodě c na základě předpokladu nalézti číslo η tak, že

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \qquad \text{pro všecka } x, \text{ pro něž } |x - c| < \eta,$$

t. j.

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon \quad \text{v intervalu } (c - \eta,\ c + \eta),$$

čímž věta dokázána.

78. 2. Říkáme li, že funkce $f(x)$ jest spojitá v každém bodě intervalu (a, b), myslíme tím, že v každém bodě uvnitř intervalu jest spojitou ve smyslu podané definice, v bodech a, b pak že jest spojitou z prava resp. z leva. Podmínkou, aby tomu tak bylo, t. j. aby funkce byla spojita v každém bodě intervalu (a, b) jest patrně, aby ke každému číslu c daného intervalu (tedy po případě i k bodům a, b) a ke každému kladnému číslu ε příslušelo kladné číslo η_c (závislé na ε a c) takové, že

$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ **pro všecka** x **intervalu** (a, b) **pro něž** $|x - c| < \eta_c$.

Toto η_c není úplně stanoveno, neboť jest patrno, že, je-li nerovnina právě napsaná splněna při jistém η_c, tím spíše bude splněna, zvolíme-li si číslo menší místo η_c. O všech přípustných η_c můžeme však předem a při každé funkci $f(x)$ předpokládati, že jsou menší ($\leqq$) než $b - a$, neboť by to nemělo smyslu větší η_c bráti v úvahu. Přísluší tedy ke každému ε a ke každému c daného intervalu nekonečné množství čísel $\eta_c \leqq b-a$, majících tedy jistou horní hranici, již označíme $\eta_c^{(m)}$. Poněvadž dle definice horní hranice jest každé číslo, menší než $\eta_c^{(m)}$, zároveň menší než jedno z čísel η_c, bude nutně splněna nerovnina

$|f(x)-f(c)| < \varepsilon$ pro všecka x intervalu (a, b), pro něž $|x-c| < \eta_c^{(m)}$,

jestliže ovšem funkce $f(x)$ jest spojitá v každém bodu intervalu (a, b), jakož chceme předpokládati. Zavedením čísla $\eta_c^{(m)}$ místo η_c jsme získali tu výhodu, že máme číslo hodnotami ε, c jednoznačně stanovené a můžeme se tudíž mnohem určitěji a jasněji vyjadřovati, než kdybychom si byli ponechali původní číslo η_c. A tu platí věta: *Dolní hranice čísel $\eta_c^{(m)}$, probíhá-li c všecky body intervalu (a, b) při pevném ε, jest číslo kladné.*

Čísla $\eta_c^{(m)}$ jsou čísla vesměs kladná, může tedy jich dolní hranicí býti buď zase číslo kladné anebo nulla a my máme tudíž dokázati, že dolní hranicí není nulla. K tomu cíli připustíme pro okamžik, že dolní hranicí čísel $\eta_c^{(m)}$ jest nulla; jelikož však $\eta_c^{(m)}$ jest funkcí čísla c definovanou v intervalu (a, b), jest dle věty odst. 68. aspoň jeden bod c_0 v tom intervalu takový, že když c jest v intervalu $(c_0-\delta, c_0+\delta)$ má $\eta_c^{(m)}$ za dolní hranici nullu, ať si kladné číslo δ zvolíme jakkoliv malé. Jelikož však v c_0 jest $f(x)$ funkcí spojitou, lze k číslu $\frac{1}{2}\varepsilon$ udati kladné číslo η_0 tak, že

$|f(x)-f(c_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ pro všecka x v (a, b), pro něž $|x-c_0| < \eta_0$.

Specielně, zvolíme-li si dva libovolné body x', x'' intervallu $(c_0-\eta_0, c_0+\eta_0)$,*) jest dle napsané nerovniny

$$|f(x')-f(x'')| = |(f(x')-f(c_0))-(f(x'')-f(c_0))| \leqq$$
$$\leqq |f(x')-f(c_0)| + |f(x'')-f(c_0)| < \varepsilon$$

a tedy, je-li x' libovolný bod intervalu $(c_0-\frac{1}{2}\eta_0, c_0+\frac{1}{2}\eta_0)$, jest

$|f(x)-f(x')| < \varepsilon$ pro všecka x v (a, b), pro něž $|x-x'| < \frac{1}{2}\eta_0$.

Jest tedy $\eta_{x'}^{(m)} > \frac{1}{2}\eta_0$ a tudíž jest pro c v intervalu $(c_0-\frac{1}{2}\eta_0, c_0+\frac{1}{2}\eta_0)$*) dolní hranicí čísel $\eta_c^{(m)}$ číslo $\geqq \frac{1}{2}\eta_0$ a nikoliv nulla, jakož jsme pro okamžik připustili; následkem toho jest tomu taktéž pro celý interval (a, b) a věta jest dokázána.

Z vývodů předcházejících následuje věta 2.: *Jestliže $f(x)$ jest spojitá v každém bodě intervalu (a, b), pak lze ke každému kladnému číslu ε nalézti kladné číslo η tak, že*

$$\left.\begin{aligned} |f(x')-f(x)| < \varepsilon \ \text{pro všecka } x', x \text{ intervalu } (a, b),\\ \text{pro něž } |x'-x| < \eta. \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

*) a zároveň ovšem v intervalu (a, b).

Stačí totiž za η voliti dolní hranici čísel $\eta_c^{(m)}$ anebo nějaké číslo kladné menší než tato dolní hranice.

Funkcím $f(x)$, které mají vlastnost, že lze ke každému číslu kladnému ε nalézti číslo kladné η tak, že jest vyhověno nerovnině (I) ve vytčeném rozsahu, říkáme **funkce stejnoměrně spojité** *v intervalu* (a, b). Můžeme tudíž větu poslední vysloviti také takto: *Jestliže $f(x)$ jest spojitá v každém bodě intervalu (a, b), jest v tom intervalu stejnoměrně spojitá.*

I. **Důsledek.** *Je-li funkce $f(x)$ spojitá v každém bodě intervalu (a, b), lze interval ten rozdětiti na konečný počet intervalů menších tak, aby oscillace funkce dané v těchto intervalech byly vesměs menší než kladné číslo ε.* Stačí k tomu voliti si intervaly tak, že jejich délky jsou vesměs menší než číslo η, číslo to ve větě právě dokázané stanovené.

II. **Důsledek.** *Je-li funkce $f(x)$ spojitá v každém bodě intervalu (a, b), jest v tom intervalu konečná.* Neboť, je-li intervalů, jež dle předcházejícího důsledku existují, celkem n, jest oscillace funkce v celém intervalu menší než $n\varepsilon$ a tedy hodnota funkce $f(x)$ jest, když x jest v (a, b), stále obsažena mezi čísly $f(a) - n\varepsilon$, $f(a) + n\varepsilon$. Má tedy funkce spojitá v každém bodě intervalu (a, b) v tom intervalu určitou horní hranici, jakož i určitou dolní hranici.

Poznámka. Větu fundamentální tohoto odstavce jsme dokázali pro intervaly zavřené. Pro intervaly otevřené věta není platna. Tak ku př. funkce definovaná vztahy

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ pro } x \neq 0,\ f(0) = 0$$

jest spojitá v každém bodě intervalu $(0 + 0, 1)$. Nelze však stanoviti číslo kladné η tak, aby

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x}\right| < \varepsilon \quad \text{pro všecka } x', x \text{ intervalu } (0 + 0, 1), \text{ pro něž } |x' - x| < \eta.$$

Neboť aby nerovnina právě napsaná byla splněna, k tomu by bylo nutno, aby

$$|x' - x| < \varepsilon x x'.$$

Pravou stranu však, zvolíme-li si x' dosti blízko k nulle, lze učiniti menší než každé kladné číslo, odkudž jest patrno, že číslo kladné η žádané vlastnosti neexistuje.

79. 3. *Má-li funkce $f(x)$ spojitá v každém bodě intervalu (a, b) v intervalu tom za horní hranici číslo M, pak jest jistě aspoň jedna hodnota ξ intervalu (a, b), pro kterou $f(\xi) = M$. Stejné tvrzení jest platno i pro dolní hranici.*

Nechť přísluší ku kladnému číslu ε libovolně danému číslo kladné η tak, že jest splněna (I) odst. předch. Jelikož $f(x)$ má v (a, b) za horní hranici M, pak dle věty odst. 68. jest v intervalu (a, b) aspoň jeden bod — značme jej c — takový, že uvnitř intervallu $(c - \eta, c + \eta)$*) má $f(x)$ za horní hranici M. Dle definice horní hranice jest tedy uvnitř $(c - \eta, c + \eta)$ bod x, pro nějž

$$M \geqq f(x) > M - \varepsilon, \qquad (\alpha)$$

kde ε jest svrchu zvolené číslo kladné (viz vztah (I)). Současně však jest dle (I), jelikož $|x - c| < \eta$,

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon. \qquad (\beta)$$

Z (α) a (β) však následuje

$$M - f(c) < 2\varepsilon.$$

$M - f(c)$ jest určité číslo buď kladné aneb rovné nulle a dokázali jsme o něm, že jest menší než 2ε, což jest podstatně číslo kladné libovolně zvolené; nemůže tedy $M - f(c)$ býti číslem kladným a jest tudíž $M - f(c) = 0$; t. j. $f(c) = M$, čímž věta dokázána. (Číslo ξ ve větě uváděné jest právě rovno c.)

Poznámka. Nabývá-li funkce $f(x)$ v bodě c intervalu (a, b) hodnoty $f(c)$ takové, že pro všechny ostatní body toho intervalu jest

$$f(x) \leqq f(c), \qquad x \text{ jest v } (a, b),$$

nazýváme $f(c)$ **maximální hodnotou funkce** $f(x)$ **v intervalu** (a, b) anebo krátce též **maximem** (*absolutním*) $f(x)$ v intervalu (a, b). Podobně se definuje **minimální hodnota** aneb **minimum** funkce $f(x)$ v (a, b). Větu dokázanou lze též pak vysloviti takto: Funkce spojitá v intervalu (a, b) nabývá aspoň v jednom bodě intervalu (a, b) maximální hodnoty v (a, b) a aspoň v jednom bodě toho intervalu minimální hodnoty v (a, b), jež rovnají se číslům M, m.

Věta tato neplatí pro intervaly otevřené. Tak ku př. funkce

$$\frac{1}{x^2 + 1}$$

jest definována v intervalu $(-\infty, \infty)$. Tato funkce nabývá maximální hodnoty rovné 1 v bodě $x = 0$; minimální hodnoty nenabývá však v žádném bodě $(m = 0)$. Říkáme také, že daná funkce v intervalu $(-\infty, \infty)$ minimální hodnotu nemá.

80. 4. *Je-li $f(x)$ funkcí spojitou v každém bodu intervalu (a, b) a $f(a)$ různo od $f(b)$, pak nabývá $f(x)$ v intervalu (a, b) každou hodnotu mezi $f(a)$ a $f(b)$ ležící aspoň jednou.*

---

*) pokud interval tento spadá do (a, b).

Budiž ku př. $f(a) > \mathfrak{L} > f(b)$ a dokažme, že $f(x)$ nabývá v jistém bodě intervalu (a, b) hodnoty $\mathfrak{L}$. K tomu cíli rozdělme všecka čísla reálná ve dvě skupiny $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Do skupiny $\mathfrak{A}$ dáme čísla menší než a, číslo a a potom všecka čísla c intervalu (a, b) taková, že v (a, c) nenabývá $f(x)$ hodnot menších $(\leq)$ než $\mathfrak{L}$. Ostatní čísla reálná dáme do skupiny $\mathfrak{B}$. Skupiny $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ mají základní vlastnosti odst. 5. a stanoví číslo λ.

Uvažujme nyní interval $(\lambda - \eta, \lambda + \eta)$, kde η přísluší ku kladnému číslu ε libovolně zvolenému tak, aby byla splněna nerovnosť (I. V intervalu však $(\lambda - \eta, \lambda - 0)$ nabývá $f(x)$ hodnot větších než $\mathfrak{L}$, v intervalu $(\lambda, \lambda + \eta)$ aspoň v jednom bodě hodnoty $\leqq \mathfrak{L}$. Je li x libovolná hodnota intervalu $(\lambda - \eta, \lambda + \eta)$, jest (v důsledku volby η vzhledem ku ε) $| f(x) - f(\lambda) | < \varepsilon$, tím spíše tedy jest (neboť mezi $f(x)$ nacházejí se hodnoty $> \mathfrak{L}$ a aspoň jedna $\leqq \mathfrak{L}$)

$$| \mathfrak{L} - f(\lambda) | < \varepsilon.$$

$\mathfrak{L}$ a $f(\lambda)$ jsou však pevné (na ε nezávislé) hodnoty, jelikož pak jich rozdíl jest menší v absol. hodn. než ε, kteréž číslo kladné si můžeme zvoliti jak chceme malé, jest $\mathfrak{L} = f(\lambda)$, čímž věta dokázána.

Důsledek. *Jsou-li $f(a)$ a $f(b)$ čísla od nully různá a protivného znaménka, jest aspoň jedna hodnota v intervale (a, b), pro kterou* $f(x) = 0$.

Příklad. Racionálná celistvá funkce $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ jest funkcí spojitou (viz odst. 76.) v každém intervalu. Dosadíme-li za x dosti veliké číslo kladné X, dostaneme $f(X) > 0$. Stačí ku př. položiti za X některé z čísel, pro něž

$$D^n > A\,(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1) \quad (A > | a_k |,\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

aneb za předpokladu, že $X > 1$,

$$X^n > A\,\frac{X^n - 1}{X - 1}, \quad X^{n+1} > (A + 1)\,X^n - A.$$

Dostaneme tak vhodné číslo X, volíme-li si $X = A + 1$. *Je-li a_n záporné,* jest $f(0) < 0$. Stává se tedy $f(x)$ nullou aspoň pro jedno $x > 0$.

Je-li n sudé, stává se za stálého předpokladu, že $a_n < 0$, také nullou aspoň pro jednu hodnotu $x < 0$, což stejně se dá dokázati, jakož i věta: Je-li n liché a $a_n > 0$, jest aspoň jedna hodnota $x < 0$, pro kterou $f(x) = 0$.

Má tedy rovnice algebraická lichého stupně $f(x) = 0$ vždy aspoň jeden kořen reálný, který jest protivného znaménka jako a_n.

81. 5. *Je-li $f(x)$ funkce monotonní v intervalu (a, b) a nabývá-li v tom intervalu každé hodnoty mezi $f(a)$ a $f(b)$, jest $f(x)$ funkcí spojitou.* !

Budiž c bod uvnitř (a, b), pro který nechť jest (jde-li o funkci ku př. neklesající) $f(a) < f(c) < f(b)$. Zvolme si kladné číslo ε libovolně, pouze k vůli zjednodušení výkladů omezme volbu tu požadavkem, aby bylo menší než každé z obou čísel $f(b) - f(c)$, $f(c) - f(a)$. Dle předpokladu (a se zřetelem ku právě provedenému omezení čísla ε) nabývá $f(x)$ v (a, b) i hodnoty $f(c) - \varepsilon)$ i hodnoty $f(c) + \varepsilon$; prvé, když $x = c'$, druhé pro $x = c''$ a jest stále v důsledku předpokladu učiněného $a < c' < c < c'' < b$. Volme za η menší z čísel $c - c'$, $c'' - c$; pak, je-li x uvnitř $(c - \eta, c + \eta)$, jest jednak x uvnitř (c', c''), jednak $f(c') \leqq f(x) \leqq f(c'')$ či jinak $f(c) - \varepsilon \leqq f(x) \leqq f(c) + \varepsilon$. T. j. lze tvrditi, že

$$|f(x) - f(c)| \leqq \varepsilon \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } |x - c| < \eta$$

čímž (dle definice funkce spojité) jest dokázáno, že $f(x)$ jest spojita v bodě c a věta jest dokázána

Důkaz obdobný provede se snadno i v případech, jež nebyly brány v úvahu; ku př., když $c = a$, aneb když $f(a) = f(c)$, a p.

82. Funkce inversní. Jestliže $f(x)$ jest funkcí *ryze* monotonní a zároveň spojitou v intervalu (a, b), pak, je-li y libovolnou hodnotou mezi $f(a)$ a $f(b)$, má rovnice o jedné neznámé x

$$y = f(x), \quad y \text{ jest jistá hodnota mezi } f(a) \text{ a } f(b) \tag{1}$$

jedno řešení ležící v intervalu (a, b). T. j. rovnicí napsanou každé hodnotě pro y intervalu $(f(a), f(b))$ jest přiřazeno jedno x intervalu (a, b); anebo konečně rovnicí napsanou jest definováno x jakožto funkce y a to v intervalu $(f(a), f(b))$ a můžeme tudíž též psáti

$$x = \varphi(y). \tag{2}$$

Rovnice (1) a (2) nám v podstatě praví totéž o vztahu veličin x, y; v první jest jenom x neodvisle, y odvisle proměnná; v druhé jest tomu naopak. Funkce φ, jež se vyskytuje v (2), sluje pak *inversní* ku funkci f z rovnice (1).

Funkce $\varphi(y)$ jest rovněž ryze monotonní, neboť, je-li ku příkladu $f(a) < f(b)$, jest pro $y_1 > y$ též v důsledku rovnice (1) a předpokladů $x_1 > x$, t. j. jest $\varphi(y_1) > \varphi(y)$. Jelikož pak $\varphi(y)$ nabývá každou hodnotu mezi a a b, *jest i $\varphi(y)$ funkcí spojitou.*

Příklad 1. Ku funkci $y = e^x$ (ryze monotonní spojité v celém intervalu) přísluší dle předch. funkce inversní, jež bude definována pro všecka kladná y a nabývati bude všech hodnot intervalu $(-\infty, \infty)$. Funkce ta jest, jak nám již známo, funkce logaritmická $x = \log y$.

Příklad 2. Funkce

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

jest ryze monotonní stoupající v intervalu $(1, \infty)$, jak vyplývá snadno při $h > 0$ z rovnice

$$f(x+h) - f(x) = h\left(1 - \frac{1}{x(x+h)}\right);$$

nabývá pak $f(x)$, když x probíhá interval $(1, \infty)$, všech hodnot intervalu $(2, \infty)$. Jest tedy inversní funkce ku $f(x)$ definována v intervalu $(2, \infty)$ a nabývá hodnot intervalu $(1, \infty)$. Řešením rovnice kvadratické dostaneme pro tuto inversní funkci výraz

$$x = \tfrac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 - 4}).$$

Kdybychom při odmocnině psali místo znaménka $+$ znaménko $-$, dostali bychom inversní funkci také ku $f(x)$, avšak v proměnné x pro interval $(0, 1)$, v proměnné y pro interval $(\infty, 2)$.

83. Některé příklady diskontinuit. Není-li funkce v bodě c spojitou říkáme, že má v tom bodě diskontinuitu. Sestavím přehledně různé případy takových diskontinuit a objasním je příklady.

1. Funkce stává se v okolí bodu c nekonečnou. Tak ku př. funkce definovaná vztahy

$$f(x) = \frac{1}{x-c} \quad \text{pro } x \neq c, \quad f(c) = 0.$$

Rovněž funkce

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{pro } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Tato funkce jest spojitá v bodě $x = 0$ z prava, neboť jest $f(0+0) = 0$, avšak $f(0-0) = \infty$.

2. Funkce jest sice v okolí bodu c konečnou, avšak čtyři čísla

$$\overline{f(c+0)}, \ \underline{f(c+0)}, \ \overline{f(c-0)}, \ \underline{f(c-0)}. \qquad (\alpha)$$

nejsou vesměs si rovna. Tu může nastati několik případů. Tak ku příkladu při

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{x} \quad \text{pro } x \neq 0, \quad f(0) = 0,$$

když x se blíží ku $x = 0$ z prava, funkce osciluje mezi -1 a 1 a jest

$$f\left(\frac{2}{4k+1}\right) = 1, \quad f\left(\frac{2}{4k+3}\right) = -1;$$

k libovolné celé číslo kladné. I jest patrno, že jest

$$\overline{f(0+0)} = 1, \quad \underline{f(0+0)} = -1$$

a stejně jest tomu tak, když se blíží x k nulle z leva.

Funkce

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} \quad \text{pro } x \neq 0, \ f(0) = 1$$

má limity

$$f(0+0) = 0. \quad f(0-0) = 1.$$

Funkce má diskontinuitu, neboť limity z prava a z leva sice existují, avšak jsou různé. Jest však spojitá v bodě $x = 0$ z leva.

3. Čtyři čísla v (α) uvedená jsou sice stejná, avšak liší se od hodnoty funkce $f(x)$ v bodě c. V tomto případě lze, změníme-li $f(c)$, docíliti, aby $f(x)$ byla spojitou v bodě c a říkáme že diskontinuita jest odstranitelná. Tak ku př. kdybychom definovali funkci $f(x)$ rovnicemi

$$f(x) = x^2 \text{ pro } x \neq 1, \quad f(1) = 0,$$

měla by funkce v bodě $x = 1$ diskontinuitu, neboť $f(1 \pm 0) = 1$, $f(1) = 0$; kdybychom však v bodě $x = 1$ funkci místo nully přisoudili hodnotu rovnou 1, funkce stala by se spojitou v bodě 1.

V. Přehled o funkcích elementárních. Funkcionální rovnice.

84. Rozšířením operace mocnění na čísla reálná vůbec získali jsme nejprve funkci $y = x^\alpha$, kde α jest jisté číslo reálné a $x > 0$. Tato funkce jest t. zv. **obecná mocnina** s exponentem α o proměnné x (anebo krátce α-tá mocnina prom. x). Jak jsme poznali, jest tato funkce funkcí spojitou pro každé $x > 0$ a konečnou v každém uzavřeném intervalu, v němž jest definována. Pro tuto funkci jest platný funkcionální vztah

$$x^\alpha . x'^\alpha = (x x')^\alpha \text{ aneb v obecných znacích } f(x)\, f(x') = f(x . x'). \qquad (1)$$

Na druhém místě jsme dospěli svrchu zmíněným rozšířením ku funkci $y = a^x$, $a > 0$, nazývané **obecná exponenciální funkce** při základě a a specielně ku funkci $y = e^x$ (kde e jest exponenciální číslo), t. zv. **exponenciální funkci** v užším smyslu. Funkce tato jest definována pro každé x reálné; i tato funkce, jak rovněž bylo již vytčeno, jest spojitá a konečná v každém konečném intervalu. Funkcionální vztah pro ni platící jest

$$a^x . a^{x'} = a^{x+x'} \text{ a v obecném znaku } f(x) . f(x') = f(x + x'). \qquad (2)$$

Funkce inversní ku funkci $y = a^x$ resp. ku funkci $y = e^x$ jest **obecný logarithmus** při základě a, resp. **přirozený logarithmus**. Značíme-li neodvisle proměnnou zase x a odvisle prom. y, máme při těchto funkcích v zavedeném již označení $y = \log_a x$, resp. $y = \log x$. Funkce tyto jsou definovány toliko pro kladná x a jsou to funkce spojité a ko-