dostaneme po jednoduché úpravě

$$\tfrac{1}{2} C + \log 2 = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \tfrac{1}{2} \log n \right);$$

přímo pak z (α) následuje

$$\tfrac{1}{2} C = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n} - \tfrac{1}{2} \log n \right).$$

III. Součty nekonečných řad, nekonečné součiny.

39. Budiž dána řada $u_1, u_2, u_3, \ldots$ o nekonečném počtu členů a utvořme součet prvých k členů této řady

$$s_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k. \tag{1}$$

Volíme-li za k postupně všechna čísla 1, 2, 3, ... (při čemž $s_1 = u_1$), dostaneme novou řadu $s_1, s_2, s_3, \ldots$ rovněž o nekonečném počtu členů; *má-li pak tato řada limitu rovnou číslu s pro* $\lim n = \infty$, t. j. *jestliže*

$$\lim_{n=\infty} s_n = s, \tag{2}$$

říkáme, že **nekonečná řada**

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots \tag{3}$$

konverguje a že její součet jest s. Neexistuje-li $\lim s_n$ *pro* $n = \infty$, *říkáme, že nekonečná řada* (3) *diverguje.* Řady nekonečné, které konvergují, slují krátce řady *konvergentní*; ty, které divergují, *divergentní.*

Rovnici (2) píšeme též často ve tvaru

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots \tag{4}$$

Příklady. 1. Řada nekonečná

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

diverguje. Neboť $s_n = \frac{1}{2} n (n + 1)$ roste s n nade všecky meze.

2. Řada

luje ! $$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{k-1} + \ldots$$

~~diverguje~~, neboť $s_{2k} = 0$, $s_{2k+1} = 1$; součty s_n mají střídavě hodnoty 0, 1; nemají tudíž limitu.

3. Řada

$$\sqrt{1} + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \ldots + (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) + \ldots$$

diverguje, neboť $s_k = \sqrt{k}$, $\lim s_n = \infty$ pro $n = \infty$, nemá tudíž řada čísel s_n limitu. Řadu tuto můžeme psát též ve tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} + \ldots$$

4. Řada *geometrická*

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots. + aq^{k-1} + \ldots.$$

má za součet prvých k členů pro $q \neq 1$

$$s_k = a\frac{q^k - 1}{q - 1} = \frac{a}{1 - q} - a\frac{q^k}{1 - q}.$$

Jest

$$\lim_{n=\infty} s_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q}\lim_{n=\infty} q^n = \frac{a}{1 - q} \quad \text{pro } |\, q \,| < 1.$$

Jest tedy *řada geometrická nekonečná konvergentní, když* $|\, q \,| < 1$. Když $|\, q \,| > 1$, vzrůstá absolutní hodnota součtů s_n nade všecky meze s indexem a řada geometrická jest divergentní. Jestliže konečně $q = \pm 1$, pak řada geometrická se redukuje na řady

$$a + a + a + \ldots., \quad \text{resp.} \quad a - a + a - a + \ldots.,$$

z nichž v prvé s_k vzrůstá nade všechny meze, v druhé $s_{2k} = 0$, $s_{2k-1} = a$. V obou případech není tedy lim s_n pro $n = \infty$ a řada geometrická diverguje.

5. Jiný příklad, kde stejně jako v předcházejícím dovedeme stanoviti s_n a tak přímo rozhodnouti konvergenci řady, jest řada o obecném členu

$$u_k = \frac{1}{(z + k)(z + k + 1)\ldots.(z + k + \lambda)}; \quad \lambda \text{ celé číslo.}$$ – počet [illegible]

Patrně jest též

$$u_k = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{(z + k)(z + k + 1)\ldots(z + k + \lambda - 1)} - \frac{1}{(z + k + 1)(z + k + 2)\ldots(z + k + \lambda)}\right].$$

Sčítáme-li výrazy, jež z posledního dostaneme dosazujíce za k po řadě $1, 2, 3, \ldots, n$, obdržíme po vynechání těch členů, jež se vzájemně ruší

$$s_n = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{(z + 1)(z + 2)\ldots(z + \lambda)} - \frac{1}{(z + n + 1)(z + n + 2)\ldots(z + n + \lambda)}\right]$$

Odtud ihned následuje, že lim s_n pro lim $n = \infty$ vždy existuje, že tedy řada jest konvergentní a její součet jest

$$\lim_{n=\infty} s_n = s = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{(z + 1)(z + 2)\ldots(z + \lambda)}.$$

6. Nekonečnou řadu

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots. + \frac{1}{k} + \ldots.$$

nazýváme *harmonickou*. Řada tato diverguje; neboť jest $s_1 = 1$, $s_2 = \frac{3}{2}$,

$$s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = s_2 + \frac{1}{2} \qquad \text{tedy } s_4 > \frac{4}{2},$$

$$s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > s_4 + \frac{4}{8} = s_4 + \frac{1}{2} > \frac{5}{2},$$

$$s_{16} = s_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16} > s_8 + \frac{8}{16} = s_8 + \frac{1}{2} > \frac{6}{2}$$

a t. d. a obecně

$$s_{2^\lambda} > s_{2^{\lambda-1}} + \frac{1}{2} > \frac{\lambda + 2}{2}.$$

Jelikož v této řadě $s_n > s_{2^\lambda}$, když $n > 2^\lambda$, jest patrno z výsledku dosaženého, že $\lim s_n = \infty$ a že tedy *řada harmonická diverguje.*

40. Nutná a postačující podmínka pro konvergenci řady nekonečné. Aby řada čísel $s_1, s_2, s_3, \ldots$ měla limitu, k tomu jest nutno a postačitelno, aby bylo lze ke každému kladnému číslu ε nalézti celé číslo n tak, že nerovnost

$$| s_n - s_{n+p} | < \varepsilon \tag{5}$$

jest splněna pro *všecka* kladná a celá p. Z této věty (Bolzano-Cauchyovy) vyplývá ihned nutná a postačitelná podmínka pro konvergenci nekonečné řady (3). Dosadíme-li do (5) dle (1), máme větu: *Nekonečná řada* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ *jest tenkráte a jenom tenkráte konvergentní, přísluší-li ke každému kladnému číslu* ε *číslo celé kladné* n *tak, že nerovnina*

$$| u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{n+p} | < \varepsilon \tag{6}$$

*jest splněna pro **všecka** celistvá kladná* p.

Můžeme též vysloviti podmínku pro konvergenci řady nekonečné (vycházíme-li od jiného tvaru věty Bolzano-Cauchyovy) takto: *Nutná a postačující podmínka, aby řada* (3) *byla konvergentní, jest, aby ke každému kl. číslu* ε *bylo lze stanoviti číslo* N *tak, že jest splněna* (6) *pro všecka* $n > N$ *a pro všecka* $p > 0$. (Užito podm. (I) odst. 28.)

Příklad 1. Uvažujme za příklad k obecné této větě opětně řadu harmonickou. Zvolíme-li si v (6) $p = n$, běží v případě řady harmonické o výraz

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Avšak tento výraz jest větší než $\frac{1}{2}$, neboť každý z n členů právě napsaného součtu jest větší než člen poslední (nehledě k poslednímu členu).

Nelze tedy $| s_n - s_{n+p} |$ při harmonické řadě, ať n si zvolíme jakkoliv, učiniti menším než $\frac{1}{2}$ při libovolném p. Není tudíž splněna nutná a postačující podmínka pro konvergenci řady a řada harmonická diverguje, jakž již přímo bylo zjištěno.

Příklad 2. Vyšetřujme za předpokladu $\alpha > 1$ řadu

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{k^\alpha} + \ldots \tag{7}$$

a výraz $| s_n - s_{n+p} |$. Rozdíl $s_{n+p} - s_n$ jest kladný a s rostoucím p vzrůstá, jak jest patrno. Bude tedy tento rozdíl tím větší, čím větší zvolíme si p. Volme nejprve $p = n$,

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n)^\alpha} < \frac{n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Kladme dále $p = (2^2 - 1)\, n = 3n$. Pak ku součtu právě vypsanému jest přidati tento součet

$$\frac{1}{(2n+1)^\alpha} + \frac{1}{(2n+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(4n)^\alpha} < \frac{2n}{(2n)^\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha-1} n^{\alpha-1}}.$$

Učiňme nyní $p = (2^3 - 1)\, n = 7n$. Tu jest připojiti k předcházejícímu součet

$$\frac{1}{(4n+1)^\alpha} + \frac{1}{(4n+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(8n)^\alpha} < \frac{4n}{(4n)^\alpha} = \frac{1}{4^{\alpha-1} n^{\alpha-1}}.$$

Teď bychom volili $p = (2^4 - 1)\, n$, a t. d. a jest patrno, že postupným zvyšováním čísla p nikdy nedosáhneme při součtu $s_{n+p} - s_n$ součtu této řady nekonečné

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{\alpha-1} n^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1} n^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1} n^{\alpha-1}} + \frac{1}{16^{\alpha-1} n^{\alpha-1}} + \ldots$$

To však jest řada geometrická a je konvergentní, když $\alpha > 1$ (neboť její kvocient jest $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$). Její součet jest

$$\frac{2^{\alpha-1}}{(2^{\alpha-1} - 1)\, n^{\alpha-1}}.$$

Tak jest

$$| s_n - s_{n+p} | < \frac{2^{\alpha-1}}{(2^{\alpha-1} - 1)\, n^{\alpha-1}} \quad \text{pro všecka } p,$$

anebo jinak

$$| s_n - s_{n+p} | < \varepsilon \quad \text{pro všecka } p,$$

když pro celé číslo n splněna jest nerovnina $n^{\alpha-1} > \frac{2^{\alpha-1}}{(2^{\alpha-1} - 1)\,\varepsilon}$. Podmínce větou vyslovené jest tedy vyhověno; neboť ke každému kladnému číslu ε přísluší kladné číslo n (vskutku jest jich nekonečný počet), že a t. d.

Poznámka. Jelikož tedy řada (7) jest konvergentní pro $\alpha > 1$, pro $\alpha = 1$ pak jest divergentní (tu máme řadu harmonickou, jejíž s_k s rostoucím k roste nade všecky meze) a, jestliže $\alpha < 1$, tím spíše řada (7) bude divergovati, vidíme, že nutná a postačující podmínka, aby řada (7) konvergovala jest, aby $\alpha > 1$.

Příklad 3. Řada

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

jest konvergentní. Neboť jest patrně (vypisujeme v následujícím na pravé straně jenom několik prvých členů)

$$|s_n - s_{n+p}| = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) + \ldots$$

$$= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots$$

Jest tedy $|s_n - s_{n+p}| < \frac{1}{n+1}$, aneb $|s_n - s_{n+p}| < \varepsilon$ pro všecka p, je-li jenom $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Součet této řady, jak svrchu v odst. 38. dokázáno, jest log 2.

41. Některé z definice přímo vyplývající věty o konvergentních řadách. 1. Přidáme-li k nekonečné řadě konvergentní (resp. divergentní) konečný počet nových členů, konvergence (resp. divergence) se neruší. Součet nek. řady se pak zvětší o součet přidaných členů.

2. Obdobný výrok lze učiniti, potlačíme-li v nekonečné řadě konečný počet členů.

3. Násobíme-li všecky členy řady konvergentní $u_1 + u_2 + \ldots$ o součtu s číslem a, dostaneme řadu $au_1 + au_2 + \ldots$ opět konvergentní o součtu as.

4. *Jsou-li* $u_1 + u_2 + \ldots$, $v_1 + v_2 + \ldots$ *dvě řady konvergentní o součtech* s, t, *jest* $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots$ *opět řadou konvergentní a její součet jest* $s + t$. Obecněji (použijeme-li zároveň předcházející věty) jest řada $(au_1 + bv_1) + (au_2 + bv_2) + \ldots$ konvergentní a její součet jest $as + bt$.

5. Jestliže řada $u_1 + u_2 + \ldots$ jest konvergentní, jest řada, která vznikne z ní, seskupíme-li (sečteme-li) vždy několik po sobě bezprostředně následujících členů v jediný člen, rovněž konvergentní a má týž

součet. Ku př. řada $(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + (u_5 + u_6) + \ldots$ jest konvergentní a o témž součtu jako daná a rovněž tak řada $(u_1 + u_2) + u_3 + (u_4 + u_5) + u_6 + (u_7 + u_8) + \ldots$ Provedeme-li však tuto operaci na řadě divergentní, můžeme z ní dostati konvergentní. Tak ku př. řada divergentní $1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + 9 - 10 - 11 + \ldots$ dává sečtením vždy čtyř po sobě jdoucích členů $(1 - 2 - 3 + 4) + (5 - 6 - 7 + 8) + \ldots = 0 + 0 + \ldots$ řadu konvergentní.

6. *Jestliže řada* $u_1 + u_2 + \ldots$ *jest konvergentní, jest* $\lim u_n = 0$, *pro* $n = \infty$. Neboť $u_n = s_n - s_{n-1}$ a tedy $\lim u_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$. I z nutné a postačující podmínky pro konvergenci (viz odst. předch.) vyplývá věta tato, jak čtenář zjistí snadno. Opak této věty není však platný, t. j. je-li $\lim u_n = 0$, nemusí řada $u_1 + u_2 + \ldots$ býti konvergentní; jest to patrno ku př. na př. 3. odst. 39. a na řadě harmonické.

7. *Jestliže konverguje řada absolutních hodnot*

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots, \tag{α}$$

tím spíše konverguje řada

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{β}$$

Neboť, aby konvergovala (α), k tomu jest nutno a postačitelno, aby ke kladnému číslu ε příslušelo číslo n tak, že jest

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{pro všecka } p.$$

Jelikož však jest

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| \leqq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|$$

bude tím spíše splněna nutná a postačující podmínka pro konvergenci řady (β) a věta jest dokázána.

Konverguje-li řada $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ současně s řadou $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots$ říkáme o ní, že **konverguje absolutně**; konverguje-li řada $u_1 + u_2 + \ldots$ a řada absolutních hodnot (α) zároveň diverguje, mluvíme o **konvergenci relativní**. Místo pojmenování absolutní a relativní konvergence užívá se též pojmenování *bezpodmínečná* a *podmínečná konvergence.* Též se užívá často pojmenování řady *semikonvergentní* pro řady relativně konvergentní.

Nekonečná řada s kladnými členy, konverguje-li, konverguje vždy absolutně. Rozhodnutí ostatně, zda některá řada konverguje absolutně, spočívá vlastně na rozhodnutí, zda řada (α), řada to s kladnými členy, konverguje absolutně.

Jelikož řady absolutně konvergentní mají daleko větší význam pro analysu a praktické výpočty než řady relativně konvergentní, budeme se jimi ve značnější míře zabývati než s těmito. Z té příčiny mají též zvláštní význam pro nás řady s kladnými členy, jež také obecným úvahám jsou snáze přístupnější, a budou následkem toho v první řadě předmětem našich vyšetřování.

42. Nekonečné řady s kladnými členy. Jsou-li u_1, u_2, u_3, ... čísla vesměs kladná, pak s_n s rostoucím indexem stále vzrůstá a jsou tedy jenom dva případy možny; buď s_n s rostoucím indexem vzrůstají nade všecky meze aneb s_n jsou stále menší než jisté číslo kladné M (v kterémžto případě mají dle věty odst. 27. limitu) a řada nekonečná konverguje. Máme tak větu:

Nutná a postačující podmínka, by řada s kladnými členy konvergovala, jest, aby bylo číslo kladné M takové, že $s_n < M$ pro všecka n. Součet řady té pak není větší než M.

Z této věty následuje: 1. *Jsou-li $u_1 + u_2 + \ldots$, $v_1 + v_2 + \ldots$ dvě řady s positivnými členy a je-li druhá konvergentní, jest i prvá konvergentní, jestliže pro všecka n jest $u_n \leqq v_n$. Je-li $u_n \geqq v_n$ a řada $v_1 + v_2 + \ldots$ divergentní, jest i řada $u_1 + u_2 + \ldots$ divergentní.* Neboť v prvém případě ($u_n \leqq v_n$) jest stále pro všecka n $s_n \leqq t_n$, kde

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad t_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

V druhém případě jest $s_n \geqq t_n$.

2. *Jestliže řada $v_1 + v_2 + \ldots$ s kladnými členy jest konvergentní a jsou-li čísla kladná $a_n < A$ pro všecka n, jest i řada*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots \tag{1}$$

konvergentní. Neboť, označíme-li součet prvých n-členů řady právě vypsané s_n, jest $s_n < At_n$ pro všecka n; je-li tedy stále $t_n < M$, jest $s_n < AM$ pro všecka n.

Je-li však řada $v_1 + v_2 + \ldots$ s kl. členy divergentní a jsou-li čísla $a_n \geqq A$ pro všecka n, jest i řada (1) *divergentní. Při tom jest A* (stejně jako ve větě předcházející) *určité kladné číslo.*

3. *Jsou-li $u_1 + u_2 + \ldots$, $v_1 + v_2 + \ldots$ nekonečné řady s kladnými členy, je-li druhá z nich konvergentní a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \textit{pro všecka } n,$$

jest i prvá konvergentní. Neboť z podmínky této vyplývá

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqq \frac{u_n}{v_n}.$$

Označíme-li tedy $\frac{u_n}{v_n} = \alpha_n$, jest $\alpha_{n+1} \leqq \alpha_n$ a řada $u_1 + u_2 + \ldots$ se redukuje na řadu $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots$, kde všecka čísla $\alpha_p \leqq \alpha_1$ a nastává tedy dle věty 2. konvergence.

Je-li řada $v_1 + v_2 + \ldots$ s kladnými členy divergentní a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

jest i řada $u_1 + u_2 + \ldots$ divergentní. (Dokáže se obdobně.)

4. *Řada $u_1 + u_2 + \ldots$ s kladnými členy jest konvergentní, jestliže*

$$\alpha_n u_n - \alpha_{n+1} u_{n+1} \geqq \alpha u_n \quad \textit{pro všecka } n > m; \tag{2}$$

při tom jest $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ řada kladných čísel, α určité kladné číslo, m kladné číslo celé. Neboť, klademe-li v této nerovnině postupně $n = m + 1, m + 2, \ldots, n$, dostaneme

$$\alpha_{m+1} u_{m+1} - \alpha_{m+2} u_{m+2} \geqq \alpha u_{m+1},$$
$$\alpha_{m+2} u_{m+2} - \alpha_{m+3} u_{m+3} \geqq \alpha u_{m+2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_n u_n - \alpha_{n+1} u_{n+1} \geqq \alpha u_n,$$

odkudž plyne sčítáním všech těchto nerovnin

$$\alpha_{m+1} u_{m+1} - \alpha_{n+1} u_{n+1} \geqq \alpha (u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n);$$

aneb též

$$\alpha_{m+1} u_{m+1} > \alpha (u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n) = \alpha (s_n - s_m);$$

t. j.

$$s_n < s_m + \frac{\alpha_{m+1} u_{m+1}}{\alpha} \quad \text{pro všecka } n > m,$$

odkudž v důsledku základní věty tohoto odstavce vyplývá konvergence řady $u_1 + u_2 + \ldots$

Poznámka 1. Právě tak, jako v poslední větě, stačilo požadovati, aby základní podmínka (2) byla splněna pro všecka kladná, celá n, avšak teprve číslem $n = m + 1$ počínajíc, tak i ve větách předcházejících stačí požadovati splnění příslušných podmínek pouze pro všecka $n > m$.

Poznámka 2. Věty 2. a 3. lze za předpokladu o existenci jistých limit vysloviti ve tvaru pro praktické užití často příhodnějším. Tak větu 2. lze často nahraditi touto: Jestliže řada s kladnými členy $v_1 + v_2 + \ldots$ jest konvergentní a je-li

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{v_n} = a, \quad \text{kde } a \text{ jest číslo kladné,}$$

pak jest i řada $u_1 + u_2 + \ldots$ konvergentní. Je-li prvá z obou divergentní, jest i druhá divergentní. V prvé části této věty (týkající se konvergence) může a býti rovno i nulle. V druhé části věty (týkající se divergence) může a býti ∞; pak ovšem jde o limitu v širším smyslu.

Z věty 3. pak obdobně následuje: Jestliže

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lim_{n=\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

pak z konvergence řady $v_1 + v_2 + \ldots$ následuje konvergence řady $u_1 + u_2 + \ldots$ Je-li však řada $u_1 + u_2 + \ldots$ divergentní, jest i řada $v_1 + v_2 + \ldots$ divergentní. Znaménko rovnosti vedle znaménka $<$ nelze v této větě připustiti. Neboť jsou-li limity dvou řad číselných sobě rovny, nemusí býti členové jedné z těch řad stále menší ($\leqq$) než členové stejnolehlí druhé řady.

Jelikož tyto věty jsou téměř bezprostředním důsledkem vět svrchu vyslovených, netřeba obšírněji je dokazovati.

43. Některá specielní kriteria konvergenční pro řady s klad. členy. Z obecných kriterií předcházejícího odst. lze snadno odvoditi zvláštní, jež se hodí k častému použití v případech specielních.

1. **Kriterium d'Alembertovo.** Volíme-li ve větě 3. za řadu $v_1 + v_2 + \ldots$ řadu geometrickou $1 + q + q^2 + \ldots$, která jest konvergentní, když $q < 1$ (odst. 39., př. 4.), máme větu: *Řada $u_1 + u_2 + \ldots$ o kladných členech jest konvergentní, jestliže*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq q < 1 \quad \textit{pro všecka } n > m.$$

q jest jisté pevné číslo kladné menší než 1, nezávislé od n; m jest určité číslo celé.

2. **Kriterium Cauchyovo.** *Řada $u_1 + u_2 + \ldots$ o kladných členech jest konvergentní, jestliže*

$$\sqrt[n]{u_n} \leqq q < 1 \quad \text{pro všecka } n > m.$$

Význam čísel q, m jest týž jako v předcházející větě. Platnost věty Cauchyovy vyplývá ihned z věty 1. předch. odstavce, volíme-li opětně za řadu $v_1 + v_2 + \ldots$ řadu geometrickou $1 + q + q^2 + \ldots$

3. **Kriterium Raabeovo** (Duhamelovo). *Řada $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ o kladných členech jest konvergentní, je-li*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq 1 - \frac{1+\alpha}{n} \quad \text{pro všecka } n > m,$$

při tom význam čísla m jest týž jako v předcházejících dvou větách, *α pak jest číslo kladné na n nezávislé.* Kriterium Raabeovo jest důsledkem věty 4. předch. odst., klademe-li v ní

$$a_n = n - 1.$$

4. *Řada* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ *o kladných členech jest divergentní, je-li*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq 1 - \frac{1}{n} - \frac{p}{n^2} \quad \text{pro všecka } n > m, \; (\varrho)$$

při tom jest p pevné na n nezávislé číslo reálné. Dokážeme větu nejprve za předpokladu p kladného jakožto důsledek věty 3. odst. předch. Klademe v ní

$$v_n = \frac{1}{n - p - 1}$$

a budeme požadovati, aby celé číslo $m > p + 1$. Z věty citované následuje, že řada $u_1 + u_2 + \ldots$ jest divergentní, když

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq \frac{n - p - 1}{n - p} = 1 - \frac{1}{n - p} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{p}{n(n - p)};$$

tím spíše bude divergentní, jestliže ($p > 0$!)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq 1 - \frac{1}{n} - \frac{p}{n^2}, \quad \text{neboť} \quad \frac{p}{n^2} < \frac{p}{n(n - p)}.$$

Že řada, jejíž obecný člen jest v_n, jest divergentní, patrno z toho, že členové její o indexech větších než m jsou větší než stejnolehlí členové řady harmonické.

Jelikož nastává divergence, je-li splněno (ϱ) při jistém $p > 0$, tím spíše nastane divergence, je-li (ϱ) splněno při $p \leqq 0$, a nastává tedy divergence, ať v (ϱ) jest p jakékoli číslo reálné.

44. Ke kriteriím právě odvozeným druží se **kriteria limitní** *pro řady s kladnými členy*. Jest patrno ku př., že existuje-li

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

bude od jistého indexu počínaje poměr $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ stále menší než jisté číslo q, jež jest menší než 1 (dle definice limity). Tak můžeme vysloviti *limitní* **kriterium d'Alembertovo**: *Má-li poměr* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *pro* $n = \infty$ *limitu menší než 1, jest řada* $u_1 + u_2 + \ldots$ *konvergentní.*

Podobně: **Kriterium Cauchyovo**: *Existuje-li* $\lim \sqrt[n]{u_n}$ *pro* $n = \infty$ *a je-li menší než 1, jest řada* $u_1 + u_2 + \ldots$ *konvergentní.*

Kriterium Raabeovo. *Jestliže jest*

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 1,$$

jest řada $u_1 + u_2 + \ldots$ *konvergentní.*

K těmto kriteriím konvergence se pojí ještě *limitní kriteria pro divergenci. Řada $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ diverguje za předpokladu, že příslušná limita existuje)*:

1. Jestliže $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, (d'Alembertovo kriterium).

2. Jestliže $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$, (Cauchyovo kriterium).

3. Jestliže $\lim\limits_{n=\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < 1$, (Raabeovo kriterium).

4. Jestliže $\lim\limits_{n=\infty} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) n^2$ existuje aneb aspoň jestliže výraz za znaménkem limitním od jistého indexu počínaje jest stále menší jisté číslo p.

Třetí a čtvrté limitní kriterium právě uvedené jsou důsledky svrchu dokázaného kriteria 4., první a druhé kriterium limitní jsou téměř samozřejmy. Neboť v prvém případě členy od jistého indexu počínaje stále rostou a řada tudíž diverguje, v druhém případě pak členy od jistého indexu počínaje jsou dokonce větší než 1.

Ke konci jest ještě poznamenati, že jest vždy

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} \qquad \text{(odst. 31.)}$$

za předpokladu, že existuje limita na levé straně. Kdykoliv tedy lze užiti limitního kriteria d'Alembertova, vždy jest možno použíti limitního kriteria Cauchyova a obě dávají stejný výsledek. Opak však neplatí, neboť existuje-li limita na pravé straně poslední rovnice, nemusí existovati limita na levé straně, takže kriterium Cauchyovo nám může dávati rozhodnutí o konvergenci řady i tenkráte, kdy limitní kriterium d'Alembertovo selhává.

Kriterium d'Alembertovo nepodává rozhodnutí, když $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ (a zároveň jest i Cauchyovo bez užitku). V tomto případě hledíme vyšetření získati pomocí Raabeova kriteria.

Poznámka. Není třeba snad ani podotýkati, že kriteria odstavce předcházejícího jsou obecnější než kriteria limitní v tomto odst. uvedená. Obecnost kriterií odst. předch. nebyla by však umenšena, kdybychom místo pojmu limity zavedli do kriterií pojmy největší a nejmenší z limit. Neboť největší resp. nejmenší limita existuje vždy. Tak ku př. kriterium Cauchyovo odst. předch. lze v podstatě vyjádřiti takto:

Jestliže

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{u_n} < 1,$$

jest řada $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ *konvergentní.* K tomu pak lze připojiti dodatek o divergenci: *Jestliže*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{u_n} > 1,$$

jest řada ona divergentní.

Dodatek tento jest samozřejmý, neboť v případě, že nerovnina v něm uvedená jest splněna, jest nekonečné množství členů dané řady větších než 1.

Příklady. 1. Mějmež řadu, ve které

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2 + an + A}{n^2 + bn + B}.$$

Tu jest $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ pro $n = \infty$; kriterium d'Alembertovo nevede tu k cíli. Pišme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{(a-b)n + (A-B)}{n^2 + bn + B}.$$

Z rovnice této plyne

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) = a - b, \quad \lim_{n=\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = b - a.$$

Je-li tedy $b - a > 1$, jest řada konvergentní; je-li $b - a < 1$, jest řada divergentní. Nerozhodný jest případ, kdy $b - a = 1$. Tu jest

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{-n + (A - B)}{n^2 + bn + B} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{(b + A - B)n + B}{n(n^2 + bn + B)};$$

tedy

$$\lim_{n=\infty}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) n^2 = B - A - b$$

a tedy řada diverguje. Řada daná konverguje tudíž pouze tenkráte, když $b > a + 1$, pro $b \leqq a + 1$ diverguje.

Tím rozhodnuto o konvergenci řady

$$1 + \frac{\alpha . \beta}{\gamma . 1} + \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + 1)}{\gamma(\gamma + 1) . 1 . 2} + \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{\gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2) . 1 . 2 . 3} + \ldots,$$

ve které

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)}{(\gamma + n - 1)n}.$$

Řada tato konverguje tenkráte a jenom tenkráte, když $\gamma > \beta + \alpha$.

Dá-li se obecně rozvinouti podíl dvou po sobě jdoucích členů v řadu postupující dle mocnin klesajících čísla n, jako tomu jest v příkladě právě řešeném prostřednictvím prostého dělení, a dostaneme-li výsledek

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots,$$

pak, jestliže $0 < a_0 < 1$, jest řada daná konvergentní, je-li $a_0 > 1$, jest divergentní (kriterium d'Alembertovo). Je-li $a_0 = 1$, $a_1 < -1$, jest řada konvergentní (kriterium Raabeovo), a konečně pro $a_0 = 1$, $a_1 \geqq -1$ nastává rovněž divergence (3., 4. kriterium divergenční). Lze tedy vždy v tomto obecném velmi často se vyskytujícím případě rozhodnouti snadno, zda řada konverguje či diverguje. Užijeme-li pravidla odvozeného na řady, při nichž

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + A_1 n^{p-1} + A_2 n^{p-2} + \ldots + A_p}{n^p + B_1 n^{p-1} + B_2 n^{p-2} + \ldots + B_p},$$

dostaneme **kriterium Gaussovo:** Řada, při níž podíl dvou po sobě jdoucích členů jest dán výrazem právě napsaným, jest konvergentní, když $B_1 - A_1 > 1$; je-li $B_1 - A_1 \leqq 1$, jest divergentní.

Příklad 2. V řadě

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \qquad x > 0,$$

ke které jsme byli vedeni úvahami odst. 33., 34., nastává konvergence pro každé kladné (a tedy i záporné) x. Neboť užijeme-li kriteria d'Alembertova, dostaneme ihned pro příslušnou limitu:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{x}{n} = 0.$$

Stejně se dokáže, že řada

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

jest konvergentní vždy, když $0 \leqq x < 1$; je-li $x \geqq 1$, jest tato řada divergentní.

Příklad 3. Řada

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^3}{1+x^6} + \ldots + \frac{x^k}{1+x^{2k}} + \ldots$$

jest konvergentní, když $0 < x < 1$. Dle kriteria d'Alembertova jest totiž

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = x \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}$$

a pro $0 < x < 1$ jest limita tohoto výrazu při $\lim n = \infty$ rovna x.

Rovněž nastává konvergence, když $x > 1$; neb tu jest limita rovna $\frac{1}{x}$, což jest opět menší než 1. Pro $x = 1$ jest řada divergentní.

Příklad 4. Zda konverguje řada

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{4\log 4} + \dots$$

nedovedeme rozhodnouti ani dle kriteria d'Alembertova ani Raabeova. Užíváme-li ku př. tohoto, dostaneme (tím, že v následujícím klademe v prvním činiteli $n+1$ místo $n-1$, limita rozhodující o konvergenci zůstane nedotčena)

$$\lim_{n=\infty}(n+1)\left(1-\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)=\lim_{n=\infty}(n+1)\left(1-\frac{n\log n}{(n+1)\log(n+1)}\right)=$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{(n+1)\log(n+1)-n\log n}{\log(n+1)}=\lim_{n=\infty}\frac{\log(n+1)+n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log(n+1)}=$$

$$1+\lim_{n=\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\log(n+1)}=1. \qquad \text{(odst. 34.)}$$

Ani divergenční kriterium 4. odst. 44. nevede tu k cíli.

45. Řady s kladnými, s rostoucím indexem ubývajícími členy. Budiž $u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq \dots \geqq u_k \geqq u_{k+1} \geqq \dots$ a nechť jsou $n_0 = 1$, n_1, n_2, $n_3, \dots$ čísla celá rostoucí ($n_k > n_{k-1}$). Pak jest patrně

$$(n_{p+1}-n_p)u_{n_{p+1}} \leqq \sum_k u_k \leqq (n_{p+1}-n_p)u_{n_p}, \qquad (1)$$
$$k = n_p+1,\ n_p+2,\ n_p+3, \dots,\ n_{p+1},$$

kde symbol Σ vyznačuje součet všech u_k pro vytčená k (v celkovém počtu $n_{p+1}-n_p$). Dělíme-li číslo n_{p+1} číslem n_p, dostaneme číslo větší než 1; budiž podíl ten obsažen stále mezi dvěma kladnými čísly A, B:

$$1 < A < \frac{n_{p+1}}{n_p} < B. \qquad (2)$$

Nerovninu (1) můžeme pak vypisovati takto

$$\left(1-\frac{1}{A}\right)n_{p+1}u_{n_{p+1}} < \sum_k u_k < (B-1)\,n_p u_{n_p},$$
$$k = n_p+1,\ n_p+2, \dots,\ n_{p+1},$$

a tudíž, klademe-li tu $p = 0, 1, 2, \dots, p$ a nerovniny takto vzniklé sčítáme

$$\left(1-\frac{1}{A}\right)(n_1u_{n_1}+n_2u_{n_2}+\dots+n_{p+1}u_{n_{p+1}}) < u_2+u_3+u_4+\dots+u_{n_{p+1}}$$
$$< (B-1)(n_0u_{n_0}+n_1u_{n_1}+\dots+n_pu_{n_p}).$$

Z výsledku toho jest patrno, že *řada* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ *konverguje resp. diverguje současně s řadou, jejíž obecný člen jest* $n_k u_{n_k}$, *jsou-li pro celá čísla* n_p *splněny nerovniny* (2).

1. *Důsledek. Nutná podmínka, aby řada* $u_1 + u_2 + \ldots$ *o kladných členech a zároveň s indexem stále klesajících (aneb aspoň nerostoucích) byla konvergentní, jest, aby*

$$\lim_{n=\infty} n u_n = 0.$$

Neboť řada o obecném členu $n_k u_{n_k}$ by nemohla konvergovati, kdyby ta limita existovala a byla různa od nully (odst. 41., 6.). Neexistuje-li však ta limita, pak největší z limit čísel nu_n pro $\lim n = \infty$ jest jisté číslo kladné α a můžeme si z čísel $1, 2, 3, \ldots$ vybrati čísla $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ (rostoucí zároveň s indexem) tak, aby $\lim \nu_n u_{\nu_n} = \alpha$ pro $\lim n = \infty$ Z řady čísel $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ zvolíme si čísla n_k svrchu uvažovaná přidávajíce po případě $n_0 = 1$ a to tak, že poměr n_{p+1} ku n_p jest stále větší než A. Avšak potom bude splněna prvá z posledních dvou nerovnin tohoto odstavce; z ní pak vyplyne divergence řady dané, jelikož řada o obecném členu $n_k u_{n_k}$ diverguje.

2. *Důsledek.* Klaďme $n_p = a^p$, kde a jest celé větší než 1. Pak jest vyhověno požadavku (2) a máme větu: *Řada* $u_1 + u_2 + \ldots$, jejíž kladní členové jsou stále klesající (aneb aspoň nerostoucí), *konverguje resp. diverguje s řadou*

$$au_a + a^2 u_{a^2} + a^3 u_{a^3} + \ldots + a^p u_{a^p} + \ldots \quad \text{(Věta Cauchyova)}$$

Příklad 1. Uvažujme řadu

$$\frac{1}{2 \log^\alpha 2} + \frac{1}{3 \log^\alpha 3} + \frac{1}{4 \log^\alpha 4} + \ldots$$

Členové této řady jsou kladní a stále klesající a můžeme na ní tudíž užíti větu Cauchyovu. První člen této řady značiti budeme u_2, druhý $u_3, \ldots$ Pak jest

$$a^p u_{a^p} = \frac{a^p}{a^p p^\alpha (\log a)^\alpha} = \frac{1}{(\log a)^\alpha} \cdot \frac{1}{p^\alpha}.$$

Poněvadž pak řada, jejížto obecný člen jest $p^{-\alpha}$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, jest konvergentní jenom tenkráte, když $\alpha > 1$, jinak jest divergentní, vidíme že řada daná jest konvergentní tenkráte a jenom tenkráte, když $\alpha > 1$. Řada posledního příkladu předch. odst. jest tudíž divergentní.

Příklad 2. Podobně bychom mohli rozhodnouti, zda řada

$$\frac{1}{3 \log 3 \log_2^\alpha 3} + \frac{1}{4 \log 4 \log_2^\alpha 4} + \frac{1}{5 \log 5 \log_2^\alpha 5} + \ldots,$$

kde $\log_2 x = \log(\log x)$, jest konvergentní či divergentní. Dokázali bychom užitím věty Cauchyovy zcela snadno, že řada jest konvergentní pouze tenkráte, když $\alpha > 1$; při tom bychom se opírali o výsledek odvozený v příkladu 1.

Příklad 3. Abychom ukázali, že nutná podmínka uvedená v důsledku 1. nemusí býti při řadách o kladných členech konvergentních splněna, uvažujme na příklad řadu, jejíž člen obecný jest dán rovnicemi

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \text{ není-li } n \text{ čtverec celého čísla,}$$

$$u_n = \frac{1}{n}, \text{ je-li } n \text{ čtvercem celého čísla.}$$

Tak dostáváme řadu, jejíž počátek jest

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10^2} + \ldots,$$

a to konvergentní. V této řadě, ať si zvolíme N jakkoliv veliké, vždy jsou u_n taková, že

$$nu_n = 1 \quad \text{a zároveň} \quad n > N;$$

nemůže býti tudíž $\lim nu_n = 0$.

46. Řady absolutně konvergentní. Dokázali jsme na základě obecného kriteria pro konvergenci nekonečných řad, že řada $u_1 + u_2 + \ldots$ konverguje, konverguje-li řada absolutních hodnot $|u_1| + |u_2| + \ldots$; příslušné řady pak jsme nazvali absolutně konvergentní. Proveďme důkaz tohoto tvrzení ještě jiným elementárnějším způsobem. K tomu cíli označíme

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \qquad \sigma_n = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|.$$

Mezi $u_1, u_2, \ldots u_n$, prvními to n členy řady dané, nachází se jistý počet kladných členů; označme součet jich p_n. Obdobně označíme součet záporných členů nacházejících se mezi prvními n členy řady dané $-q_n$. Pak jest

$$s_n = p_n - q_n, \qquad \sigma_n = p_n + q_n.$$

Čísla p_n, q_n s rostoucím n buď vzrůstají aneb aspoň neklesají; konverguje-li tedy řada absolutních hodnot majíc za součet σ, mají p_n i q_n limity (neboť jsou menší než σ) — označíme je p, q — a má tudíž limitu i s_n, t. j. řada daná konverguje a její součet jest $p - q$. Tím je důkaz tvrzení vytčeného znovu podán. Z důkazu toho vyplývá však též, že *řadu absolutně konvergentní můžeme rozštěpiti v součet dvou řad nekonečných: jedna obsahuje všecky členy kladné, druhá pak všecky členy záporné.* (Při tom jest ovšem součet řady dané abs. konv. součtem ze součtu obou dvou řad).

Uvaha předcházející nám zároveň velmi usnadní důkaz věty: *Řada absolutně konvergentní zůstane absolutně konvergentní a její součet se nezmění, když pozměníme nějak pořádek členů.* Dříve než přistoupíme k důkazu věty bude užitečno objasniti poněkud její význam. Nejprve jest věta samozřejma, když běží o záměnu pořádku členů v konečném počtu členů; ku př. kdybych zaměnil pořádek mezi prvými 100 členy; neboť sčítání jest operace kommutativní. Věta však není samozřejma, běží-li o záměnu pořádku nekonečně mnoha členů, a jak poznáme později, neplatí pro řady, jež nejsou absolutně konvergentní. Důkaz její provedeme nejprve pro řady se členy vesměs positivními. Pozměníme-li pořádek v takové řadě $u_1 + u_2 + \ldots$, dostaneme řadu $u'_1 + u'_2 + u'_3 + \ldots$, v níž součet prvých n členů označíme s'_n. Při tom u'_1 se shoduje s jedním členem řady prvé ku př. se členem u_{k_1}, u'_2 se členem $u_{k_2}, \ldots$, u'_n se členem u_{k_n}. Budiž N největší z čísel $k_1, k_2, \ldots k_n$. Pak jest očividně (součet dané řady značíme s),

$$s'_n \leqq s_N < s \quad \text{tedy} \quad s'_n < s; \tag{1}$$

neboť v s_N vedle členů $u'_1 = u_{k_1}$, $u'_2 = u_{k_2}, \ldots, u'_n = u_{k_n}$ se mohou nacházeti ještě jiné členy řady dané. Tím jest dokázána nejprve konvergence řady $u'_1 + u'_2 + \ldots$. Podobně, kdybychom vycházeli z řady $u'_1 + u'_2 + \ldots$ jakožto dané a řadu $u_1 + u_2 + \ldots$ pokládali za vzniklou změněním pořádku členů, bychom dostali (součet řady $u'_1 + u'_2 + \ldots$, značme s')

$$s_n < s'. \tag{2}$$

Z nerovniny (1) následuje $s' \leqq s$, z (2) však zároveň $s \leqq s'$, následkem čehož nutně $s = s'$ a důkaz tvrzení podán pro řady se členy vesměs kladnými. Výsledek platí samozřejmě pro nekonečné řady se členy vesměs zápornými.

Uvažujeme nyní obecnou řadu absolutně konvergentní ponechávajíce v platnosti všechna označení v tomto odstavci zavedená. Z toho, co jsme dokázali, a z pojmu absolutní konvergence jest nejdříve patrno, že řada $u'_1 + u'_2 + \ldots$ jest rovněž absolutně konvergentní. Pro obě tudíž platí

$$s = p - q, \quad s' = p' - q'.$$

Při tom jest p' (resp. $-q'$) součet všech kladných (resp. záporných) členů v řadě $u'_1 + u'_2 + \ldots$ Avšak dle toho, co jsme dosud dokázali, jest $p = p'$, $q = q'$, čímž věta obecně prokázána.

47. Řady relativně *(podmínečně)* konvergentní. Řady $u_1 + u_2 + \ldots$ takové, že $|u_1| + |u_2| + \ldots$ divergují, nazvali jsme, jsou-li konvergentní, relativně (podmínečně) konvergentní. Při nich σ_n s rostoucím indexem vzrůstá nade všecky meze a rovněž tak i aspoň jedno z čísel p_n, q_n (označení vysvětleno v odstavci předcházejícím). Ba možno tvrditi, že *obě* čísla p_n, q_n vzrůstají nade všecky meze s rostoucím n. Neboť kdyby to činilo jenom jedno z čísel, pak z rovnice $s_n = p_n - q_n$ by následovalo, že by s_n rostlo s n v absolutní své hodnotě nade všecky meze a řada $u_1 + u_2 + \ldots$ by nemohla býti konvergentní, což by bylo v odporu s předpokladem. Jsou tedy řady, které dostaneme, podržíme-li z řady dané jenom členy se znaménky kladnými, resp. jenom členy se znaménky zápornými, divergentními a není rozklad řady relativně konvergentní ve dvě řady, z nichž jedna by obsahovala všecky členy kladné, druhá všecky členy záporné, jako to provedeno bylo v odst. předch. pro řady absolutně konvergentní, možný.

Rovněž není platna věta o záměnnosti pořádku členů. Abychom to na příkladě jednoduše prokázali, budeme se zabývati podrobněji nejjednodušším případem řad s proměnlivými znaménky.

48. Řady alternující. Řady alternující aneb řady se *střídavými znaménky* jsou takové řady, jichž členové mají střídavě znaménka kladná a záporná. Budeme takovou řadu psáti ve tvaru

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots + (-1)^{k-1} a_k - \ldots,$$

kde všecka a_k jsou kladná. *Řady tyto konvergují vždy, jestliže čísla a_k s rostoucím indexem ubývají a je-li zároveň $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$. Rozdíl pak mezi součtem této řady a s_n jest menší co do absolutní hodnoty než člen $n+1$-vý a jest téhož znaménka jako tento člen.*

Neboť jest

$$\begin{aligned} s_{2n} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}), \\ s_{2n+1} &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n+1}). \end{aligned}$$

Závorky v těchto výrazech jsou (jelikož $a_k < a_{k-1}$) čísla kladná a jest tudíž $s_2 < s_4 < s_6 < \ldots < s_{2n}$ a $s_1 > s_3 > s_5 > \ldots > s_{2n+1}$. Dále jest $s_{2n+1} > s_{2n} > s_2$ a $s_{2n} < s_1$. Jelikož jsou čísla s_{2k} čísla rostoucí shora ohraničená, čísla pak s_{2n+1} klesající zdola ohraničená, mají prvá i druhá čísla, když k roste nade všecky meze limitu, limity ty pak jsou si rovny, neboť

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \quad \text{a tedy} \quad \lim_{n=\infty} s_{2n+1} - \lim_{n=\infty} s_{2n} = \lim_{n=\infty} a_{2n+1} = 0. \qquad (\alpha)$$

Jest tedy $\lim s_{2n} = \lim s_{2n+1} = \lim s_n = s$ pro $n = \infty$ a řada jest vskutku konvergentní majíc součet s. Jelikož dále

$$\left.\begin{aligned} s_{2n} &< s < s_{2n+1}, \quad \text{jest} \quad s = s_{2n} + \Theta a_{2n+1}, \text{ viz } (\alpha); \\ s_{2n+1} &> s > s_{2n+2}, \qquad\quad s = s_{2n+1} - \Theta' a_{2n+2}; \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

Θ a Θ' jsou kladná čísla menší než 1. Tím jest věta dokázána.

49. Uvažujme nyní řadu

$$s=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\ldots \qquad (\gamma)$$

Řada tato dle věty předcházejícího odst. jest konvergentní, součet její jenž jest kladný,*) jsme označili jako v obecném případě s. Dělíme-li všecky členy dvěma, dostaneme

$$\frac{1}{2}s=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\ldots$$

Sečteme tyto dvě řady (zachovávajíce pořádek členů v každé z obou) avšak tak, že k-tý člen druhé přičteme ku $2k$-tému prvé, jak naznačeno v následujícím

$$\begin{array}{l}
s=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k}+\ldots\\
\frac{1}{2}s=\quad\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{4}\quad+\frac{1}{6}\quad-\frac{1}{8}+\ldots\qquad+\frac{1}{4k-2}\qquad-\frac{1}{4k}+\ldots\\
\hline
\frac{3}{2}s=\frac{1}{1}+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4k-3}+\ 0\ +\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}+\ldots
\end{array}$$

t. j. dostáváme

$$\frac{3}{2}s=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}+\ldots,$$

řadu to, která má tytéž členy jako původní řada, avšak v jiném pořádku. Součet však této řady není s jako původní řady, nýbrž $\frac{3}{2}s$. *Změnou v pořádku členů změnil se i součet dané řady.*

50. Lze dokonce dokázati větu: *Členy řady relativně konvergentní lze uspořádati tak, že součet její jest rovný číslu A libovolně danému.* (Riemann).

Utvořme, abychom tuto větu dokázali, z řady dané dvě řady, jednu ze všech členů kladných, druhou ze všech členů záporných dané řady neměníce při tom pořádek ani členů kladných ani záporných, čímž vzniknou dvě řady nekonečné (a_k, b_k jsou čísla kladná):

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k+\ldots,$$
$$-b_1-b_2-b_3-\ldots-b_k+\ldots$$

Obě jsou divergentní (odst. 47.) a zároveň jest i $\lim a_n=0$, i $\lim b_n=0$ (neboť daná řada jest konvergentní). Sestrojíme nyní řadu novou, při čemž klademe na prvých l_1 míst l_1 prvých členů řady prvé,

*) Dle vztahu (β) jest součet větší než $\frac{1}{2}$ a menší než $\frac{5}{6}$; $s_2<s<s_3$. Ostatně jest součet této řady nám znám; viz př. 3. odst. 40.; $s=\log 2$.

pak za další členy volíme m_1 prvých členů řady druhé, potom l_2 dalších členů řady prvé, dále opět přibereme m_2 členů řady druhé atd. Při tom $l_1, m_1, l_2, m_2, \ldots$ jsou voleny tak (součet prvých n členů řady nově tvořené označme S_n), aby*)

$$S_{l_1-1} \leqq A, \quad S_{l_1} > A; \quad S_{l_1+m_1-1} \geqq A, \quad S_{l_1+m_1} < A;$$
$$S_{l_1+m_1+l_2-1} \leqq A, \quad S_{l_1+m_1+l_2} > A; \ldots$$

Z volby čísel $l_1, m_1, \ldots$ jest patrno, že

$$S_{l_1+m_1+\ldots+l_k+m_k} \quad \text{resp.} \quad S_{l_1+m_1+\ldots+l_k} \tag{δ}$$

liší se od A o méně než

$$b_{m_1+m_2+\ldots+m_k} \quad \text{resp.} \quad a_{l_1+l_2+\ldots+l_k}. \tag{ε}$$

S_λ, kde λ jest mezi $l_1 + m_1 + \ldots + m_k$ a $l_1 + m_1 + \ldots + l_k$, jest položeno mezi čísly (δ) a liší se tedy od A o méně než jest větší z čísel (ε). Jelikož pak čísla (ε), když k roste nade všecky meze, konvergují k nulle, jest i $\lim S_n = A$ pro $n = \infty$, čím jest důkaz podán.

Příklad 1. Uvažujme řadu alternující

$$\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots$$

konvergentní dle věty odst. 48. Součet její lze ostatně snadno vypočísti; jest totiž (viz příklad 3. odst. 39.)

$$2s_{2n} = \sqrt{2n} - \sqrt{2n+1} + 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}}, \quad \lim_{n=\infty} s_n = \frac{1}{2}.$$

Utvořme ze členů té řady řadu novou jiným uspořádáním členů, při čemž však neměníme ani pořádek členů kladných, ani záporných. Nechť na prvých n členů nové řady, jichž součet označíme S_n, připadne ϱ_n členů kladných a τ_n členů záporných; $\varrho_n + \tau_n = n$. Pak jest (viz cit. příkl. odst. 39.)

$$2S_n = \sqrt{2\varrho_n} - \sqrt{2\tau_n+1} + 1 = \frac{2(\varrho_n - \tau_n) - 1}{\sqrt{2\varrho_n}+\sqrt{2\tau_n+1}} + 1.$$

Předpokládejme nejprve

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varrho_n}{\tau_n} = \alpha. \tag{λ}$$

*) Je-li A záporné, volíme $l_1 = 0$.

Pak jest, jestliže α není rovno 1,

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{1}{2} + \frac{(\alpha - 1)}{\sqrt{2\alpha} + \sqrt{2}} \lim_{n=\infty} \sqrt{\tau_n} = \pm \infty.$$

Vzrůstá tedy s rostoucím n při takovém uspořádání, že splněna rovnice (λ), při $\alpha \gtrless 1$ součet prvých n členů nové řady nade všecky meze a stala se tedy *konvergentní řada novým uspořádáním divergentní.* Budiž nyní $\alpha = 1$ a klaďme

$$\rho_n = \tfrac{1}{2}n + \beta\sqrt{n} + \varepsilon_n, \quad \tau_n = \tfrac{1}{2}n - \beta\sqrt{n} - \varepsilon_n;$$

při čemž β chceme stanoviti tak, aby součet nově uspořádané řady byl A, ε_n jest pak číslo kladné menší než 1 volené tak, aby ρ_n (a tedy i τ_n) bylo číslo celé. Při této volbě jest

$$\lim_{n=\infty} S_n = \beta + \tfrac{1}{2}, \text{ tedy } \beta = A - \tfrac{1}{2}.$$

Docílili jsme tak vskutku, že součet řady nové jest číslo A libovolně dané.

Příklad 2. Kdybychom v řadě (γ) v odst. 49. uvažované přemístili členy tak, že by vždy po M členech kladných následovalo N členů záporných, byl by součet řady tak vzniklé patrně

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2Mn-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\dots-\frac{1}{2Nn}\right],$$

Limita tato však dle 38. odst. jest rovna výrazu

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{M}{N} + \log 2,$$

který vhodnou volbou čísel M, N může býti učiněn blízký jakémukoli číslu A. Bylo by ovšem možno i při této řadě docíliti vhodným přeřaděním členů, aby součet nové řady přeřaděním vzniklé byl přesně rovný A; avšak přeřadění to by bylo poněkud složitější.

51. Dirichletovo a Abelovo kriterium konvergence. Dříve než přistoupíme ku odvození těchto kriterií, dokážeme si jednoduchou arithmetickou identitu. Označíme-li $s_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k$, jest

$$\begin{aligned} a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n = s_1(a_1 - a_2) + s_2(a_2 - a_3) + \dots \\ + s_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + a_ns_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Správnost této rovnice vyplyne ihned, roznásobíme-li na pravé straně a ze členů, které obsahují a_k jako činitele, je vytkneme.

Dirichletovo kriterium. Má-li řada kladných čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ stále klesajících $(a_k < a_{k-1})$ za limitu 0 a je-li pro všecka k stále $|s_k| < A$, jest řada

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + \ldots \tag{2}$$

konvergentní. Neboť nejprvé jest konvergentní absolutně řada

$$s_1 (a_1 - a_2) + s_2 (a_2 - a_3) + \ldots + s_n (a_n - a_{n+1}) + \ldots$$

jelikož absolutní hodnoty jednotlivých členů této řady jsou menší než členové řady

$$A (a_1 - a_2) + A (a_2 - a_3) + \ldots + A (a_n - a_{n+1}) + \ldots$$

konvergentní to řady s kladnými členy (součet prvých n členů jest $A (a_1 - a_{n+1})$ a tedy součet celé řady Aa_1). Poněvadž pak mimo to $\lim a_n s_n = 0$ pro $n = \infty$ (neboť $\lim a_n = 0$; $|s_n| < A$), má pravá strana rovnice (1) limitu pro $n = \infty$ a tudíž i levá strana, t. j. řada (2) jest konvergentní.

Abelovo kriterium. Jsou-li kladná čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ stále klesající $(a_k < a_{k-1})$ a je-li řada $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ konvergentní, jest i řada

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \ldots \tag{3}$$

konvergentní. Neboť jelikož čísla $a_1, a_2, \ldots$ s indexem stále klesají a jsou větší než 0, mají limitu. Kdyby $\lim a_n = 0$ pro $n = \infty$, pak řada (3) by byla konvergentní dle Dirichletova kriteria. Budiž tedy $\lim a_n = l > 0$. Pak čísla $a_1 - l, a_2 - l, a_3 - l \ldots$ stále klesají a mají za limitu 0 a tudíž dle Dirichletova kriteria jest řada

$$(a_1 - l) u_1 + (a_2 - l) u_2 + (a_3 - l) u_3 + \ldots \tag{4}$$

konvergentní. Avšak řada $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ jest konvergentní dle předpokladu, tedy i řada (3) jakožto součet řady (4) a $lu_1 + lu_2 + \ldots$, jest konvergentní.

Příklad. Jestliže $a_k < a_{k-1}$ a $\lim a_n = 0$, pak řady

$$\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \Theta + a_2 \cos 2\Theta + a_3 \cos 3\Theta + \ldots,$$

$$a_1 \sin \Theta + a_2 \sin 2\Theta + a_3 \sin 3\Theta + \ldots$$

konvergují, není-li Θ rovno 0 nebo nějakému násobku 2π. Neboť máme-li ku př. zřetel ke druhé z těchto řad, jest

$$s_n = \sin \Theta + \sin 2\Theta + \ldots + \sin n\Theta = \frac{\sin \frac{n\Theta}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2}} \cdot \sin \frac{n+1}{2} \Theta;$$

tedy

$$|s_n| < \left| \frac{1}{\sin \frac{\Theta}{2}} \right|$$

a lze tedy použíti kriteria Dirichletova.

52. Skládání a rozkládání nekonečných řad. Již dříve (odst. 41.) jsme poukázali k tomu, že, dány-li jsou dvě řady konvergentní $u_1 + u_2 + \ldots$, $v_1 + v_2 + \ldots$, řada $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots$ jest též konvergentní a součet její jest roven součtu řad daných. Totéž vyplývá na základě definice konvergence o součtu řady nekonečné i pro řadu takto vytvořenou

$$u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3 + \ldots,$$

kde členové řady druhé prostě *vsunuty* mezi členy řady prvé. Stejné tvrzení můžeme činiti i pro řadu

$$u_1 + u_2 + v_1 + u_3 + u_4 + v_2 + \ldots$$

kde vsunutí jest provedeno poněkud jiným způsobem. Vůbec jest pro konečný výsledek libovolno, jak vsunutí členů řady druhé mezi členy řady prvé se provádí, jenom když členové řady první mezi sebou i členové řady druhé zachovají původní pořad. Jsou-li obě řady absolutně konvergentní, jest i tato podmínka zbytečna. Že takovéto skládání řad dá se rozšířiti na konečný počet řad, jest rovněž na snadě.

Máme-li naopak konvergentní řadu $u_1 + u_2 + \ldots$, můžeme ji sice *rozkládati* ve dvě a několik řad obsahující všecky členy dané řady, ku př. v řady

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots, \quad u_2 + u_4 + u_6 + \ldots$$

Avšak řady tyto nemusí býti konvergentní a toliko, jsou-li konvergentní, můžeme tvrditi, že součet řady dané se rovná součtu řad rozkladem vzniklých. Je-li však daná řada absolutně konvergentní, jsou i řady rozkladem vzniklé vždy konvergentní (absolutně). Můžeme dokonce dokázati pro rozklad dané řady absolutně konvergentní v *nekonečný* počet řad větu:

Utvoříme-li ze všech členů řady absolutně konvergentní neomezený počet řad nekonečných tak, že každý člen řady dané jest obsažen v jedné toliko z těchto řad, jsou nekonečné řady tak vzniklé rovněž absolutně konvergentní a součet řady dané jest rovný součtu řady nekonečné, jejíž členové jsou součty řad nově utvořených. Důkaz této věty provedeme nejprve za předpokladu, že členové řady dané jsou vesměs kladní; součet její označíme s, součet pak jejích prvých k členů s_k. Řady rozkladem vzniklé jsou očividně absolutně konvergentní, neboť mají členy kladné a součet prvých k členů v jedné každé z těchto řad jest jistě menší než s (každá řada obsahuje toliko část členů řady dané). Označme součty řad rozkladem vzniklých po řadě $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots$; označením tím zavedli jsme zároveň jisté pořadí v těchto řadách (řada, jejížto součet jest $S^{(k)}$, bude pro nás k-tou řadou, rozkladem vzniklou). Předpoklad, že řada daná konverguje a má součet s, lze vyjádřiti analyticky tak, že ke každému číslu kladnému ε lze nalézti celé číslo N takové, aby

$$0 < s - s_n < \varepsilon \quad \text{pro všecka } n \geqq N. \tag{1}$$

Stanovme nyní číslo celé M tak, aby v prvých M řadách rozkladem vzniklých bylo prvých N členů dané řady. Pak očividně bude

$$0 < s - (S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)} + \ldots + S^{(m)}) < \varepsilon \text{ pro všecka } m > M. \tag{2}$$

Neboť součet v závorce má v sobě všecky členy součtu s_N, avšak vedle toho ještě jiné členy a tak z (1) následuje ihned nerovnina (2). Avšak tato nerovnina nám praví (neboť ε jest libovolné číslo kladné), že

$$s = S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)} + \ldots + S^{(k)} + \ldots, \tag{3}$$

čímž jest věta pro případ kladných členů dokázána. Jsou-li členové dané řady čísla znamének libovolných, můžeme ji rozložiti dle odst. 46. ve dvě řady (prvá p obsahuje jenom členy kladné, druhá $-q$ jenom záporné) a psáti

$$s = p - q \quad \text{a obdobně} \quad S^{(k)} = P^{(k)} - Q^{(k)}.$$

Poněvadž dle zvláštního případu právě dokázaného platí

$$p = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + \ldots, \quad q = Q^{(1)} + Q^{(2)} + \ldots$$

a tedy

$$p - q = (P^{(1)} - Q^{(1)}) + (P^{(2)} - Q^{(2)}) + \ldots,$$

jsou vztah (3) a věta svrchu vyslovená platny obecně. Jest také patrno, že *řada v* (3) *konverguje absolutně i v obecném případě.*

53. Řady dvojné. Rozklad řady v neomezený počet řad vede nás k tomu uvažovati souhrn členů sestavený dle dvou indexů (jež mohou vzrůstati neomezeně), jak naznačeno přehledně v tabulce

$$\begin{matrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & \ldots, & u_{1k}, & \ldots \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & \ldots, & u_{2k}, & \ldots \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33}, & \ldots, & u_{3k}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{k1}, & u_{k2}, & u_{k3}, & \ldots, & u_{kk}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \tag{t}$$

Nejjednodušší způsob, jak členy této tabulky seřadíme v jedinou řadu, jest, že píšeme členy, při nichž součet indexů jest týž, vedle sebe a členy, jichž součet indexů jest menší před členy, jichž součet indexů jest větší; tak dostáváme řadu

$$u_{11} + u_{12} + u_{21} + u_{13} + u_{22} + u_{31} + u_{14} + u_{23} + u_{32} + u_{41} + \ldots \quad (u)$$

Jest však, jak patrno, nesčetně mnoho jiných způsobů, jak seřaditi všechny členy tabulky (t) v jedinou řadu. Je-li jedna z těch řad absolutně konvergentní, jsou, jak z věty svrchu dokázané plyne, všecky absolutně konvergentní a mají týž součet. Řada nekonečná, jejíž veškeří členové jsou dáni členy tabulky (t), sluje *řada dvojná*. Že řada dvojná sestavená z členů tab. (t) absolutně konvergentní má součet s (bez ohledu na pořádek, ve kterém se sčítání provádí), vypisuje se obyčejně takto:

$$s = \sum_{i,k} u_{i,k}, \quad i, k = 1, 2, 3, \ldots \quad (v)$$

Dle věty předch. odst. dostaneme součet s řady dvojné absolutně konvergentní také jakožto součet řady nekonečné absol. konvergentní

$$s = S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)} + \ldots, \quad (w)$$

kde

$$S^{(k)} = u_{k1} + u_{k2} + u_{k3} + \ldots$$

jest součtem řady absolutně konvergentní dané členy k-tého řádku (*sčítání dle řádků*). Jest však též za téhož předpokladu

$$s = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + \ldots, \quad (x)$$

$$T^{(k)} = u_{1k} + u_{2k} + u_{3k} + \ldots \quad (\textit{sčítání dle sloupců}).$$

Vztahy (w) a (x) lze též vypsati pomocí znaménka součtového takto

$$s = \sum_k \left(\sum_i u_{ik}\right) = \sum_i \left(\sum_k u_{ik}\right); \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

Ke konci lze poznamenati, že *daná řada dvojná jest jistě absolutně konvergentní, jsou-li všecky řady utvořené z členů jednotlivých řádků absolutně konvergentní, a je-li zároveň řada* $\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)} + \ldots$ *konvergentní, při čemž*

$$\sigma^{(k)} = |u_{k1}| + |u_{k2}| + |u_{k3}| + \ldots$$

a naopak; obdobný výrok platný jest i se zřetelem ku sloupcům. Poznámka tato vyplývá snadno z předcházejícího.

54. Transformace Clausenova. Sčítání dvojných řad (t. j. výpočet čísla s předch. odstavce) jsme převedli pomocí věty odst. 52. na sčítání dle sloupců. Věta ta však dává nám prostředek rozmanitými jinými cestami součet ten vypočíst. Ku př. lze psáti

$$s = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots, \tag{y}$$

kde

$$U^{(i)} = a_{ii} + (a_{i,i+1} + a_{i+1,i}) + (a_{i,i+2} + a_{i+2,i}) + \ldots$$

Závorky v tomto výraze jsou zbytečné; v $U^{(i)}$ se patrně nacházejí všecky členy, jichž jeden index jest i, druhý pak jest větší než i, po případě rovný i. Každý člen a_{jl} dané řady dvojné jest obsazen v jedné a jenom jedné z řad $U^{(i)}$ a to, je-li $j < l$, jest v řadě $U^{(j)}$; je-li $l < j$, v řadě $U^{(l)}$.

Příklad. Uvažujme řadu t. zv. *Lambertovu*:

$$s = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \ldots$$

Řada tato jest konvergentní absolutně pro $|x| < 1$ (kriterium d'Alembertovo). Rozvineme-li každý člen její v nekonečnou řadu (geometrickou), kterouž pak píšeme v jeden řádek, máme řadu dvojnou sestavenou dle (t) odst. 53.

$$\begin{array}{l} x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \\ + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots \\ + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Jelikož také jednotlivé řádky jsou absolutně konvergentní pro $|x| < 1$, jest patrno, že řada dvojná jest absolutně konvergentní; můžeme ji tudíž sčítati též dle jiných způsobů. Kdybychom ji sčítali dle sloupců, dostali bychom opět danou řadu. Sčítejme ji dle (y); při tom jest $a_{ik} = x^{ik}$ a tak jest

$$U^{(i)} = x^{i^2} + 2x^{i(i+1)} + 2x^{i(i+2)} + 2x^{i(i+3)} + \ldots = x^{i^2} \frac{1+x^i}{1-x^i}.$$

Jest tedy

$$s = x^{1^2} \frac{1+x}{1-x} + x^{2^2} \frac{1+x^2}{1-x^2} + x^{3^2} \frac{1+x^3}{1-x^3} + \ldots$$

Tak jsme dostali z řady Lambertovy řadu jinou mající stejný součet, která však mnohem rychleji konverguje. Říkáme, že jsme řadu danou *transformovali*; způsob pak, kterým jsme to provedli a který se opírá o rovnici (y), nazývá se transformace *Clausenova.*

55. Výsledky docílené pro řady dvojné v odst. 53. lze bez potíže rozšířiti a zavésti pojem řady trojné, jakožto řady, jichž členové závisí na třech indexech (měnících se od 0 do ∞, po případě od $-\infty$ do ∞): lze konečně bráti v úvahu i řady, jichž členové závisí na ν indexech proměnných. Jelikož příslušné věty z toho, co řečeno bylo o řadách dvojných, jsou na snadě (a jsou to pouhé důsledky věty základní odst. 52.), nebudu věty tyto uváděti a omezím se toliko na stručné vyšetření jedné takové důležité řady.

Nechť jest dána řada

$$\Sigma \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_\nu^2)^\alpha} \tag{1}$$

kde za znaménkem součtovým za $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ se mají dosazovati všechna čísla celá kladná 0, 1, 2, 3, ...; při tom vylučujeme jediný systém hodnot a to ten, ve kterém všechna čísla $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ jsou rovna nulle. Jest pak naším úkolem vyšetřiti hodnoty čísla α, pro něž daná řada jest konvergentní.

Uspořádáme si novou řadu tak, abychom dostali jednoduchou řadu, tím, že seskupíme vhodně její členy. Členy totiž, při nichž

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu = M, \qquad m_1 \geqq 0, \; m_2 \geqq 0, \ldots, \tag{2}$$

sečteme v jediný člen, který pak označíme S_M; tak řada daná se nám změní v řadu

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$$

Ku vyšetření konvergence jest třeba znáti jisté hranice pro S_M. Nejprve jest počet řešení rovnice (2) dán číslem*)

$$\binom{M + \nu - 1}{\nu - 1} = \beta_0 M^{\nu-1} + \beta_1 M^{\nu-2} + \ldots \tag{3}$$

Dále jest patrno, že pro $m_1, m_2, \ldots$ hovící rovnici (2) jest

$$(m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_\nu^2)^\alpha < \nu^\alpha M^{2\alpha}; \tag{4}$$

neboť každé m_ν jest menší nebo rovno číslu M. Konečně jest, jestliže (2) jest splněna, identicky

$$m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_\nu^2 = \frac{M^2}{\nu} + \left(m_1 - \frac{1}{\nu} M\right)^2 + \left(m_2 - \frac{1}{\nu} M\right)^2 + \ldots$$
$$+ \left(m_\nu - \frac{1}{\nu} M\right)^2$$

a tedy

$$m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_\nu^2 \geqq \frac{M^2}{\nu}. \tag{5}$$

*) Dokáže se postupně; patrno jest to při $\nu = 1$, snadno plyne pro $\nu = 2$ a obecně úplnou indukcí.

Z nerovnin (4) a (5) a znajíce počet řešení rovnice (2), můžeme ihned usuzovati další nerovniny

$$\frac{1}{\nu^\alpha}(\beta_0 M^{-2\alpha+\nu-1} + \beta_1 M^{-2\alpha+\nu-2} + \ldots) < S_M < \nu^\alpha (\beta_0 M^{-2\alpha+\nu-1} + \ldots),$$

ze kterých ihned následuje, že nutná a postačující podmínka, aby řada $S_1 + S_2 + \ldots$ a tudíž i daná řada (1) byla konvergentní, jest aby $2\alpha - \nu + 1 > 1$; t. j. aby $\alpha > \frac{1}{2}\nu$.

56. Násobení řad. 1. Jsou-li dány *dvě řady absolutně konvergentní* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$, můžeme, utvoříme-li všechny součiny každého členu řady prvé s každým členem řady druhé, sestaviti tyto součiny v řadu dvojnou ve tvaru tabulky (t) odst. 53:

$$\begin{array}{l} u_1v_1 + u_1v_2 + u_1v_3 + u_1v_4 + \ldots \\ + u_2v_1 + u_2v_2 + u_2v_3 + u_2v_4 + \ldots \\ + u_3v_1 + u_3v_2 + u_3v_3 + u_3v_4 + \ldots \\ + u_4v_1 + u_4v_2 + u_4v_3 + u_4v_4 + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (\alpha)$$

Řada dvojná tak vzniklá jest absolutně konvergentní; neboť absolutní hodnoty členů jednoho řádku dávají řadu konvergentní:

$$\begin{array}{l} |u_k||v_1| + |u_k||v_2| + |u_k||v_3| + \ldots \\ = |u_k|(|v_1| + |v_2| + |v_3| + \ldots) = |u_k|\sigma; \end{array}$$

řada pak $|u_1|\sigma + |u_2|\sigma + \ldots$ jest opět řada konvergentní.

Sčítáme-li onu řadu dvojnou napřed podle řádků, dostaneme ihned, že součet řady dvojné jest roven součinu ze součtů obou daných řad a tak máme větu (*Cauchyovu*): *Jsou-li řady* $u_1 + u_2 + \ldots$, $v_1 + v_2 + \ldots$ *obě absolutně konvergentní, majíce za součet prvá* s, *druhá* t, *pak řada nekonečná, obsahující všecky možné součiny* $u_i v_k$ $(i, k = 1, 2, 3, \ldots)$ *v pořádku libovolném, jest rovněž absolutně konvergentní a má za součet* $s \,.\, t$. T. j. můžeme psáti

$$(u_1 + u_2 + \ldots)(v_1 + v_2 + \ldots) = \sum_{i,k} u_i v_k; \quad i, k = 1, 2, 3, \ldots$$

2. Pišme řadu dvojnou (α) ve tvaru

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_k + \ldots, \qquad (\beta)$$

kde $U_k = u_1 v_k + u_2 v_{k-1} + u_3 v_{k-2} + \ldots + u_k v_1$, a značme jako obyčejně $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $t_n = v_1 + \ldots + v_n$, $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$. Pak jest, jak snadným počtem patrno,

$$S_n = u_1 t_n + u_2 t_{n-1} + u_3 t_{n-2} + \ldots + u_n t_1,$$

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = s_1 t_n + s_2 t_{n-1} + s_3 t_{n-3} + \ldots + s_n t_1$$

a

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{s_1 t_n + s_2 t_{n-1} + \ldots + s_n t_1}{n}, \qquad (\gamma)$$

jestliže limity v rovnici této se vyskytující existují. První jistě existuje, má-li význam $\lim S_n$, t. j. konverguje-li řada (β) a jest rovna součtu té řady, druhá existuje a jest rovna st, konvergují-li řady (u) a (v) (odst. 31. (IV') a (V)). Následuje tedy (věta *Abelova*): *Jsou-li řady* $u_1 + u_2 + \ldots$, $v_1 + v_2 + \ldots$ *konvergentní, majíce za součty čísla* s, t, *pak řada* (β), j e-l i k o n v e r g e n t n í, *má součet* st.

Poznámka 1. Limita na levé straně rovnice (γ) může existovati, i když nemá $\lim S_n$ významu, t. j. i když řada (β) jest divergentní. V tom případě pak, že existuje

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n},$$

říkáme, že řada (β) jest *sčítatelna dle arithmetického středu* a tato limita pak jest její *součet dle arithm. středu*. Užíváme-li tohoto pojmu, můžeme vysloviti dle předcházejících výsledků větu: *Jsou-li řady* $u_1 + \ldots$, $v_1 + \ldots$ *konvergentní, majíce za součty čísla* s, t, *pak řada* (β) *jest sčítatelna dle arithmetického středu a její součet takto počítaný jest* st.

Poznámka 2. Větu Abelovu lze poněkud doplniti větou (*Mertensovou*): *Jestliže jedna z obou řad konvergentních* $u_1 + u_2 + \ldots$, $v_1 + \ldots$ *konverguje absolutně, pak řada* (β) *jest konvergentní.* Ne nesnadný důkaz této věty poskytuje vhodnou látku ku cvičení o pojmech konvergencí u nekonečných řad pro vtipného čtenáře.

Příklad 1. Jest utvořiti součin řad

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

$$1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots$$

dle tvaru (β). Jelikož obě řady jsou absolutně konvergentní, ať jsou x, y jakákoliv čísla reálná, bude i výsledná řada absolutně konvergentní. Jest pak

$$U_{n+1} = 1 \cdot \frac{y^n}{n!} + \frac{x}{1!} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^2}{2!} \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \cdot 1$$

$$= \frac{(x+y)^n}{n!} \quad \text{(dle věty binomické).}$$

Jest tedy součin obou řad řada stejného tvaru

$$1+\frac{x+y}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!}+\dots$$

Budiž $x>0$; pak součet první řady jest e^x (viz odst. 35.); kladme dále $y=-x$, $x+y=0$, potom součin obou daných řad jest 1. Jest tedy součet druhé řady pro $y=-x$ číslo, které násobeno byvši e^x, dává 1, t. j. součet druhé řady jest e^{-x}. Máme tak rovnici

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots \qquad \text{pro } x>0$$

a jest tudíž součet prvé z daných řad rovný e^x, ať jest x jakékoliv reálné číslo, čímž rozšířen výsledek dříve dosažený (odst. 35.).

Příklad 2. Jest násobiti řadu $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ samu sebou opět dle tvaru (β). Tu jest

$$U_n=(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n-2}+\dots+\frac{1}{n}\,\frac{1}{1}\right].$$

Ježto

$$\frac{1}{k(n-k)}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right),$$

jest

$$U_n=2\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\psi(n), \quad \text{kde} \quad \psi(n)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}.$$

Jelikož $\lim\,[\psi(n)-\log n]$ pro $\lim n=\infty$ existuje (odst. 38.), následuje ze vztahu

$$\lim_{n=\infty}\frac{\log n}{n}=0 \text{ (odst. 32., 4. př.) vztah } \lim_{n=\infty}\frac{\psi(n)}{n}=0$$

a jest tedy i $\lim U_n=0$. Avšak jest také

$$|U_n|-|U_{n+1}|=\frac{2}{(n+1)(n+2)}[\psi(n)-1]>0,\ |U_n|>|U_{n+1}|;$$

z posledních pak dvou okolností následuje, že řada $U_1+U_2+U_3+\dots$ jest konvergentní (odst. 48.). Jest tedy patrno, že součin dvou řad relativně konvergentních počítaný dle tvaru (β) může dáti řadu konvergentní.

Příklad 3. Znásobíme-li řadu

$$\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots,$$

samu sebou způsobem stejným jako v příkladě předcházejícím, dostaneme řadu divergentní. Neboť výraz

$$\frac{1}{\sqrt{1 . n}} + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{3(n-2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n . 1}} \geq \frac{n}{\frac{1}{2}(n+1)} \text{*)}$$

(znaménko $=$ toliko pro $n = 1$)

nekonverguje k nulle s rostoucím n.

57. O numerickém výpočtu součtu nekonečných řad. Z pojmu konvergence nekonečné řady vyplývá, že lze vždy, je-li součet dané řady konvergentní s a součet prvých n členů s_n, udati ke každému kladnému číslu ε jakkoliv malému číslo n tak, že

$$| s - s_n | < \varepsilon,$$

což můžeme též psáti ve tvaru

$$s = s_n + \Theta\varepsilon, \qquad -1 < \Theta < 1.$$

Tu vlastnost vyjádřujeme také výrokem, že součet řady konvergentní lze vypočítati s přesností libovolnou. Míra přesnosti jest tu dána číslem ε (po případě, jde-li o *relativní* míru přesnosti, poměrem $\varepsilon : s_n$).

Můžeme však při určitém n docíliti vyšší míry přesnosti než způsobem právě vylíčeným v těch případech, ve kterých lze provésti přesnější odhad rozdílu $s - s_n$. Rozdílu tomuto říká se krátce **zbytek** *řady po n-tém členu*, značiti jej budeme r_n. Jestliže jako obyčejně u_k jest k-tým členem dané řady, jest patrně r_n dáno nekonečnou řadou

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$$

Stanovíme-li pak odhadem (který často, jak během výkladů seznáme, se dá provésti různým způsobem), že r_n jest uvnitř intervalu (A, B), t. j. že

$$A < r_n < B, \quad \text{pak můžeme psáti} \quad r_n = \tfrac{1}{2}(A + B) + \frac{\Theta}{2}(B - A),$$

kde Θ, jako svrchu, jest jisté číslo intervalu $(-1, 1)$; míra přesnosti jest dána rozdílem $\frac{1}{2}(B - A)$. Čím menší bude rozdíl mezi oběma čísly A, B, tím větší docílíme přesnosti při určitém n, počítajíce součet dané řady. Ostatně zevrubněji vylíčíme postup na příkladě.

Příklad 1. Jest stanoviti součet nekonečné řady

$$s = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \ldots$$

---

*) Neboť jest $k(n-k) < \frac{1}{4} n^2$ a tedy $k(n+1-k) < \frac{1}{4}(n+1)^2$.

Jelikož

$$\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k},$$

jest

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \ldots$$
$$< \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots$$
$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$$

Avšak prostřední článek v tomto řetězu nerovnin jest právě r_n. Součet nekonečné řady tvořící prvý článek jest (dle příkl. 5., odst. 39.) $\frac{1}{n+1}$; hodnota třetího článku jest obdobně $\frac{1}{n}$, takže jest

$$\frac{1}{n+1} < r_n < \frac{1}{n} \quad \text{a tedy} \quad r_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{\Theta}{2}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Volíme-li si $n = 10$, máme tudíž

$$s = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right) + \frac{\Theta}{220}.$$

Vypočteme-li tento výraz (používajíce ku př. Valouchových tabulek str. 119 a násl.), dostaneme ihned

$$s = 1{\cdot}5497678\ldots + 0{\cdot}0954545\ldots + \Theta\,.\,0{\cdot}0045454\ldots$$

a tedy $s = 1{\cdot}645$ s chybou menší než 5.10^{-3}.

Můžeme však ještě užší hranice pro r_n docíliti. Čtenář snadno dokáže, že

$$k'(k'+1) < k^2 < k''(k''+1), \text{ jestliže } k' = k - \tfrac{1}{2},\ k'' = k - \tfrac{1}{2} + \frac{1}{8(n+1)}$$

je-li k celé číslo větší než n. Z toho však plyne obdobně jako svrchu

$$\frac{1}{n + \frac{1}{2} + \frac{1}{8(n+1)}} < r_n < \frac{1}{n + \frac{1}{2}},$$

$$r_n = \left(\frac{4(n+1)}{8n^2 + 12n + 5} + \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{\Theta}{(2n+1)(8n^2 + 12n + 5)}$$

a tedy $r_{10} = 0{\cdot}0951866\ldots + \Theta\,.\,0{\cdot}00005\ldots$, odkudž $s = 1{\cdot}64495$ s chybou menší než $5{\cdot}1\,.\,10^{-5}$.

58. Eulerova transformace řady nek. Aby se usnadnil numerický výpočet řady nekonečné, lze často užíti různých method majících za účel jich transformaci. Některé z nich vznikly již v 18. století. Naznačím v následujícím toliko dvě z nich a to Eulerovu a Kummerovu, jakožto nejjednodušší.

Euler vychází od řady (u níž předpokládáme konvergenci)

$$S = u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \dots \tag{a}$$

Násobíme-li na obou stranách dvojčlenem $1 - x$, pak zavedeme označení $\Delta u_k = u_k - u_{k+1}$ a potom zase oním dvojčlenem dělíme, obdržíme ihned (za předpokladu $x \neq 1$)

$$S = \frac{u_1 x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x}\Delta u_1 - \frac{x^3}{1-x}\Delta u_2 - \frac{x^4}{1-x}\Delta u_3 - \dots$$

Opětujeme li tento postup na řadě

$$-\frac{x^2}{1-x}\Delta u_1 - \frac{x^3}{1-x}\Delta u_2 - \frac{x^4}{1-x}\Delta u_3 - \dots,$$

dostaneme, že tato řada jest rovna

$$-\frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta u_1 + \frac{x^3}{(1-x)^2}\Delta^2 u_1 + \frac{x^4}{(1-x)^2}\Delta^2 u_2 + \dots$$

při čemž $\Delta^2 u_k = \Delta u_k - \Delta u_{k+1} = u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2}$. Jest tedy

$$S = \frac{u_1 x}{1-x} - \frac{\Delta u_1 \cdot x^2}{(1-x)^2} + \frac{x^3}{(1-x)^2}\Delta^2 u_1 + \frac{x^4}{(1-x)^2}\Delta^2 u_2 + \frac{x^5}{(1-x)^2}\Delta^2 u_3 + \dots \tag{b}$$

Na řadu takto vzniklou — ponechávajíce prvé dva členy stranou — můžeme obratu již dvakrát použitého znovu užíti atd., tak že dostaneme konečně obecně

$$S = \frac{u_1 x}{1-x} - \frac{\Delta u_1 \cdot x^2}{(1-x)^2} + \frac{\Delta^2 u_1 \cdot x^3}{(1-x)^3} - \frac{\Delta^3 u_1 x^4}{(1-x)^4} + \dots + (-1)^n \frac{\Delta^n u_1 \cdot x^{n+1}}{(1-x)^{n+1}} + R_n,$$

kde

$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{n+1}} \left(x\Delta^{n+1} u_1 + x^2 \Delta^{n+1} u_2 + \dots \right).$$

Výsledek tento (v němž $\Delta^3 u_k = \Delta^2 u_k - \Delta^2 u_{k+1}$, atd.) jest správný, i když řada pro to určité x (různé od 1) jest jenom relativně konvergentní. Jestliže R_n s rostoucím n konverguje k nulle, můžeme nadto pro to určité x klásti

$$S = \frac{u_1 x}{1-x} - \frac{\Delta u_1 x^2}{(1-x)^2} + \frac{\Delta^2 u_1 \,.\, x^3}{(1-x)^3} - \ldots \text{ do nekonečna.}$$

Je-li daná řada konvergentní pro $x = -1$, jest specielně

$$\left.\begin{aligned} u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots &= \frac{u_1}{2} + \frac{\Delta u_1}{4} + \frac{\Delta^2 u_1}{8} + \ldots + \frac{\Delta^n u_1}{2^{n+1}} + r_n; \\ r_n &= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\Delta^{n+1} u_1 - \Delta^{n+1} u_2 + \Delta^{n+1} u_3 - \ldots\right). \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Zvláště pak pro $n = \cancel{0}\;\infty$ jest

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \frac{u_1}{2} + \frac{\Delta u_1}{2} - \frac{\Delta u_2}{2} + \frac{\Delta u_3}{2} - \ldots \quad (c_1)$$

Příklad. Methoda Eulerova vede k jednoduchým výsledkům hlavně při řadách tvaru

$$S = \frac{x}{c+1} + \frac{x^2}{c+2} + \frac{x^3}{c+3} + \ldots$$

Tu jest (při označení v (a) zavedeném)

$$\Delta u_1 = \frac{1}{(c+1)(c+2)}, \qquad \Delta^2 u_1 = \frac{1\,.\,2}{(c+1)(c+2)(c+3)}, \ldots$$

$$\Delta^n u_1 = \frac{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n}{(c+1)(c+2)(c+3)\ldots(c+n+1)}$$

a tedy za předpokladu, že x jest v intervalu $(-1, 1-0)$ — neboť jenom pro tato x jest řada daná konvergentní — a že R_n s rostoucím n konverguje k nulle, jest

$$S = \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1}{c+1} - \frac{x^2}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{(c+1)(c+2)} + \frac{x^3}{(1-x)^3} \cdot \frac{1\,.\,2}{(c+1)(c+2)(c+3)} - \ldots$$

Kdybychom chtěli počítati pomocí tohoto postupu log 2 daný řadou

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots, \quad (d)$$

kladli bychom $x = -1$, $c = 0$ a dostali bychom

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{4} + \ldots,$$

řadu to rychleji než původní konvergující a jíž bychom dokonce přímo mohli použíti k numerickému výpočtu. Mohli bychom si též několik prvých členů v řadě (d) ponechati a teprve na zbytek řady provésti vytčenou transformaci. Tak ku př. dle (c) jest

$$S=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{11\,.\,12}+$$

$$\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1\,.\,2}{11\,.\,12\,.\,13}+\ldots+\frac{1}{2^{10}}\frac{1\,.\,2\ldots 9}{11\,.\,12\,.\,13\ldots 20}+r,$$

kde

$$r=\frac{1}{2^{10}}\left(\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots 10}{11\,.\,12\ldots 21}-\frac{1\,.\,2\ldots 11}{11\,.\,12\ldots 22}+\ldots\right).$$

Nahradíme-li v tomto výraze r polovičkou prvého členu výrazu dávajícího r, dostaneme $S=\log 2$ s chybou menší než $1{\cdot}73\,.\,10^{-16}$; tedy na 15 cifer správně. Jest patrno, že transformací provedenou i řada tak málo konvergentní jako (d) se proměnila ve výraz snadno a s velikou mírou přesnosti stanovitelný.

Konečně jako specielní případ v tomto příkladě provedené transformace uvádím tuto rovnost ($c=-\frac{1}{2}$; $-x^2$ místo x; nad to celá řada pro S dělena číslem $-2x$)

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=$$

$$=\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\frac{2}{3}+\frac{x^5}{(1+x^2)^3}\frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}+\frac{x^7}{(1+x^2)^4}\frac{2\,.\,4\,.\,6}{3\,.\,5\,.\,7}+\ldots \qquad (e)$$

Zbytek po n-tém členu v této řadě má hodnotu

$$r_n=(1-\Theta x^2)\cdot\frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}}\cdot\frac{2\,.\,4\ldots 2n}{3\,.\,5\ldots(2n+1)};\qquad 0<\Theta<1.$$

59. Kummerova methoda pro výpočet součtu numerických řad. Mezi dosti jednoduché a při tom dosti obecné methody ku výpočtu nekonečných řad patří methoda Kummerova. Tato převádí nám výpočet dané řady na výpočet jiné řady, jež snáze se dá při žádané míře přesnosti vypočíst. V podstatě jest použit při ní tento postup myšlenkový: Nechť jest $u_1+u_2+u_3+\ldots$ daná nekonečná řada konvergentní, jejíž součet se má stanoviti. Sestrojme řadu čísel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ takových, že α_k jest rovněž jako u_k závislo na indexu k a že existuje limita

$$\lim_{n=\infty}\left(\alpha_n-\alpha_{n+1}\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=a \qquad (1)$$

různá od nully. Pak jest

$$\alpha_n - \alpha_{n+1}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha - \beta_n, \quad \text{kde} \quad \lim_{n=\infty} \beta_n = 0. \tag{2}$$

Píšeme-li poslední rovnici pro $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ a jednotlivé tyto rovnice násobíme $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ a výsledky sčítáme, dostaneme ihned po snadné úpravě (viz také odst. 42., 4.)

$$\alpha_1 u_1 - \alpha_{n+1} u_{n+1} = \alpha \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} \beta_k u_k.$$

Předpokládáme-li dále, že α_n jest tak voleno, aby existovala limita $\lim_{n=\infty} \alpha_n u_n$, již označíme l, plyne z posledního vztahu, přejdeme-li na obou stranách k limitám, ihned

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = \frac{\alpha_1 u_1}{\alpha} - \frac{l}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \ldots). \tag{I}$$

Tímto výsledkem výpočet řady dané o členech u_k převeden na výpočet řady rovněž konvergentní, jejíž obecný člen jest $\beta_k u_k$, při čemž poměr členu řady nové ku stejnolehlému členu řady původní (t. j. β_k) s rostoucím indexem konverguje k nulle.

Obyčejně hledíme vhodnou volbou čísel α_k docíliti toho, aby β_k s rostoucím indexem k velmi rychle se blížilo k nulle. Příklady ostatně užití této methody a tuto okolnost osvětlí.

Příklad 1. Uvažujme opět řadu, jejíž obecný člen $u_k = k^{-2}$ (viz příklad odst. 57.). Jelikož tu

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}, \text{ jde o výraz } \alpha_n - \alpha_{n+1}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \alpha - \beta_n,$$

kterýž s rostoucím n blížiti se má k limitě α od nully různé. Zkusme, zda vyhovíme tomuto požadavku, klademe-li $\alpha_n = n + d$, kde d jest konstanta (t. j. nezávislá na n). Obdržíme

$$\alpha_n - \alpha_{n+1}\frac{n^2}{(n+1)^2} = n + d - (n + 1 + d)\frac{n^2}{(n+1)^2} =$$
$$\frac{n^2 + (2d+1)n + d}{(n+1)^2}.$$

Výraz tento má vskutku limitu různou od 0 pro $\lim n = \infty$, jež jest rovna 1. Jest tedy $\alpha = 1$. Při tom d jest dosud libovolné a volíme si je tak, aby β_n vypadlo co nejjednodušeji. Jest dle (2)

$$\beta_n = 1 - \frac{n^2 + (2d+1)n + d}{(n+1)^2} = \frac{(1-2d)n + (1-d)}{(n+1)^2}.$$

Klademe-li $d = \frac{1}{2}$, máme tudíž

$$\beta_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}$$

a rovnice (I) nám dává

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2 . 2^2} + \frac{1}{2^2 . 3^2} + \frac{1}{3^2 . 4^2} + \ldots\right),$$

čímž výpočet řady dané jest převeden na výpočet řady, jejíž členové rychleji se blíží k nulle.

Příklad 2. Uvažujme obecněji řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+c)^2 (n+1+c)^2 (n+2+c)^2 \ldots (n+\lambda-1+c)^2}, \quad \lambda \text{ celistvé kl. č.} \tag{m}$$

Tu jest

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+c)^2}{(n+c+\lambda)^2} = \frac{m^2}{(m+\lambda)^2},$$

při čemž jsme k vůli krátkosti zavedli $n + c = m$. Klademe-li tu podobně jako v případě předcházejícím $\alpha_{n+1} = n + c + d = m + d$, dostaneme nejprve $\alpha = 2\lambda - 1$ a pro β_n obdržíme výraz

$$\beta_n = \frac{m(3\lambda^2 - 2\lambda d) + (2\lambda - d)\lambda^2}{(m+\lambda)^2}.$$

Volíme tudíž

$$3\lambda^2 - 2\lambda d = 0, \text{ t. j. } d = \tfrac{3}{2}\lambda \text{ a tedy } \beta_n = \frac{\lambda^3}{2} \cdot \frac{1}{(n+c+\lambda)^2}.$$

Ze vztahu (I) pak následuje, že řada (m) jest hodnotou svojí rovna součtu

$$\frac{(3\lambda + 2c)}{2(2\lambda - 1)(c+1)^2 (c+2)^2 \ldots (c+\lambda)^2} +$$

$$\frac{\lambda^3}{2(2\lambda - 1)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+c)^2 (n+c+1)^2 (n+c+2)^2 \ldots (n+c+\lambda)^2}.$$

Označíme-li řadu v (m) krátce $f(c, \lambda)$, máme tedy relaci

$$f(c, \lambda) = \frac{(3\lambda + 2c)}{2(2\lambda - 1)(c+1)^2 \ldots (c+\lambda)^2} + \frac{\lambda^3}{2(2\lambda - 1)} f(c, \lambda + 1), \tag{n}$$

kterouž převedena jest řada daná na řadu téhož tvaru, jejíž členové však rychleji blíží se k nulle; zároveň nám rovnice poslední umožňuje opětně téže transformace použíti na novou řadu a tak postupovati neomezeně. Tak ku př. řada příkladu předcházejícího jest v zavedeném označení $f\,(0,\ 1)$. I jest

$$f(0,1)=\frac{3}{2\,.\,1\,.\,1^2}+\frac{1^3}{2\,.\,1}f(0.\ 2),$$

$$f(0,2)=\frac{6}{2\,.\,3\,.\,1^2\,.\,2^2}+\frac{2^3}{2\,.\,3}\,.\,f(0,\ 3),$$

$$f(0,3)=\frac{9}{2\,.\,5\,.\,1^2\,.\,2^2\,.\,3^2}+\frac{3^3}{2\,.\,5}f(0,4),\ \ldots$$

Kdybychom postupně dosazovali a prováděli transformaci do nekonečna, dostali bychom konečně po jednoduché úpravě

$$f(0,1)=\frac{3}{2}\left[1+\frac{1}{2^2\,.\,3}+\frac{1\,.\,2}{3^2\,.\,4\,.\,5}+\frac{1\,.\,2\,.\,3}{4^2\,.\,5\,.\,6\,.\,7}+\ldots\right],$$

řadu to, jež konverguje rychleji než řada geometrická o podílu rovném $\frac{1}{4}$.

Mohli bychom však též stejně jako v příkladu předcházejícího odst., jelikož ku př.

$$f(0,1)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{10^2}+f(10,1),$$

prováděti naznačenou operaci s $f\,(10,\ 1)$ a klásti

$$f(10,1)=\frac{23}{2\,.\,1\,.\,11^2}+\frac{1^3}{2\,.\,1}f(10,\ 2),$$

$$f(10,2)=\frac{26}{2\,.\,3\,.\,11^2\,.\,12^2}+\frac{2^3}{2\,.\,3}f(10,3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

při čemž veličiny $f\,(10,\ \lambda)$ rychleji se s rostoucím λ blíží k nulle než $f\ (0,\ \lambda)$.

Příklad 3. Jako další příklad vezmeme v úvahu řadu se střídavými znaménky:

$$g(c,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(c+n)(c+n+1)^2(c+n+2)^2\ldots(c+n+\lambda-1)^2(c+n+\lambda)}. \tag{p}$$

Při ní jest

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=-\frac{(c+n)(c+n+1)}{(c+n+\lambda)(c+n+\lambda+1)}=-\frac{m\,(m+1)}{(m+\lambda)(m+\lambda+1)},$$

kde opět $m=c+n$.

Položíme

$$\alpha_{n+1}=\frac{m^2+a\,m+b}{m\,(m+1)},$$

čímž dostaneme

$$\alpha - \beta_n = \frac{2m^4 + (2a + 2\lambda - 2)m^3 + \dots}{m(m-1)(m+\lambda)(m+\lambda+1)}. \qquad (q)$$

Odtud následuje nejprve $\alpha = 2$ a pro β_n výraz, jehož čitatel jest třetího stupně v m, jmenovatel pak jest týž jako ve výraze (q). Koefficienty a, b volíme tak, aby součinitelé při m^3, m^2 v čitateli byli v něm rovni nulle, to jest, aby

$$2a - 2\lambda - 2 = 0, \quad a(2\lambda - 1) + 2b - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

čímž jsou a, b stanoveny. Při této volbě i součinitel prvé mocnosti m jest rovný nule a dostáváme

$$\beta_n = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2)}{m(m-1)(m+\lambda)(m+\lambda+1)}, \; a = \lambda + 1, \; b = -\tfrac{1}{2}\lambda^2.$$

Užijeme-li těchto výsledků, pak rovnice (I.) odst. 59. a konečně označení zavedeného v (p), obdržíme nejprve

$$g(c, \lambda) = \frac{c^2 + (\lambda + 1)c - \frac{1}{2}\lambda^2}{2c(c+1)^2(c+2)^2 \dots (c+\lambda)^2(c+\lambda+1)} +$$
$$+ \frac{\lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2)}{4} g(c-1, \lambda+2),$$

aneb vyjmeme-li prvý člen z řady $g(c-1, \lambda+1)$ a sloučíme-li jej zároveň s prvým členem pravé strany (v poslední rovnici):

$$g(c, \lambda) = \frac{2c^2 + 6c(\lambda+1) + 5\lambda^2 + 10\lambda + 4}{4(c+1)(c+2)^2(c+3)^2 \dots (c+\lambda+1)^2(c+\lambda+2)} -$$
$$- \frac{\lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2)}{4} g(c, \lambda+2),$$

což jest vztah užitečný pro výpočet řad tvaru $g(c, \lambda)$. Lze pomocí něho vypočítati ku př. součty řad

$$\log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots, \quad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots.$$

Tak pro log 2 lze nejprve psáti:

$$\frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \dots = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{11.12} - \frac{1}{12.13} + \frac{1}{13.14} - \dots\right)$$

(viz odst. 58., (c_1)) a tedy log 2 rovný jest výrazu

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11} + \frac{1}{2} g(10, 1).$$

Avšak (značme $5\lambda^2 + 70\lambda + 264 = q(\lambda)$)

$$g(10,1) = \frac{q(1)}{4 \,.\, 11 \,.\, 12^2 \,.\, 13} - \frac{1^2 \,.\, 2 \,.\, 3}{4}\, g(10,3),$$

$$g(10,3) = \frac{q(3)}{4 \,.\, 11 \,.\, 12^2 \,.\, 13^2 \,.\, 14^2 \,.\, 15} - \frac{3^2 \,.\, 4 \,.\, 5}{4}\, g(10,5),$$

$$g(10,5) = \frac{q(5)}{4 \,.\, 11 \,.\, 12^2 \,.\, 13^2 \,.\, 14^2 \,.\, 15^2 \,.\, 16^2 \,.\, 17} - \frac{5^2 \,.\, 6 \,.\, 7}{4}\, g(10,7), \ldots$$

Bereme-li při výpočtu čísla $g(10, 1)$ zřetel toliko na tři prvé členy ($q(1) = 339$, $q(3) = 519$, $q(5) = 739$), obdržíme pro $\log 2$ hodnotu

$$\log 2 = 0.69108946\overline{6}08946 \ldots + 0{\cdot}00205783799538 - 12364581 \,.\, 10^{-14}$$
$$+ 12136 \,.\, 10^{-14} - \ldots$$

s chybou menší (jak z hruba snadno lze odhadnout) než $3 \,.\, 10^{-13}$. Sčítáme-li naznačená čísla, máme, že

$$\log 2 = 0{\cdot}6931471805604 \pm \Theta \,.\, 3 \,.\, 10^{-13}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

60. Nekonečné součiny. Jako jsme brali v úvahu součty nekonečných řad, zavedeme též obdobným způsobem nekonečné součiny. Budiž dána nekonečná řada čísel $u_1, u_2, u_3, \ldots$ a utvořme z této řady číselné novou řadu čísel $p_1, p_2, p_3, \ldots$, kde

$$p_k = (1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_k). \tag{1}$$

Jestliže existuje limita

$$\lim_{n=\infty} p_n = p \tag{2}$$

různá od nully, *říkáme, že* **nekonečný součin**

$$(1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \ldots (1 + u_k) \ldots \tag{3}$$

konverguje, a, že hodnota jeho jest p. Při této definici jsme však předpokládali, že žádný z činitelů $(1 + u_k)$ tohoto součinu není rovný nulle. Jestliže mezi činiteli $1 + u_k$ jest jeden nebo konečný počet roven nulle, pak konverguje-li nekonečný součin vzniklý z původního tím, že jsme potlačili (vynechali) činitele rovné nulle, říkáme, že konverguje i původní součin a že jeho hodnota jest nulla. Součiny, ve kterých počet činitelů $(1 + u_k)$ rovných nulle jest nekonečně mnoho, vypustíme ze svých úvah.

Jestliže nekonečný součin nekonverguje, říkáme stejně jako při řadách, že *diverguje.*

Z definice podané jest patrno, že konvergentní součin má hodnotu rovnou nulle jenom tenkráte, když jeden anebo více činitelů jest rovno nulle.

Jako při nekonečných řadách, tak i při nekonečných součinech můžeme vynechati konečný počet činitelů, aniž by tím dotčena byla konvergence resp. divergence součinu. Nejprve vynecháme činitele rovné nulle a budeme tedy v následujících obecných úvahách předpokládati, že *činitelé jsou vesměs od nully různi.* Jelikož však dle (1) jest

$$p_n - p_{n-1} = u_n p_{n-1}, \tag{4}$$

dostaneme, přejdeme-li k limitám, — za předpokladu, že daný součin jest konvergentní —

$$\lim_{n=\infty} (p_n - p_{n-1}) = \lim_{n=\infty} p_{n-1} \,.\, \lim_{n=\infty} u_n\,,$$

$$p - p = p \lim_{n=\infty} u_n\,.$$

Jest tedy v konvergentních součinech tvaru (3) $\lim u_n$ vždy rovna nulle. Není-li $\lim u_n = 0$ jest příslušný součin divergentní a nemá pro nás další zájem. Je-li však $\lim u_n = 0$, jak v následujícím trvale budeme předpokládati, jsou činitelé $(1 + u_k)$ od jistého indexu stále kladní a můžeme tudíž při vyšetřování podmínek konvergence nekonečných součinů — potlačujíce po případě konečný počet činitelů — se omeziti jenom na součiny, v nichž činitelé $(1 + u_k)$ jsou vesměs kladní, což také učiníme. Jest tedy v následujících úvahách i číslo p rovnicí (2) dané kladným, jakož i všecka čísla p_k.

Vztah (4) můžeme psáti obecněji takto

$$p_{n+r} - p_n = p_n \left[\frac{p_{n+r}}{p_n} - 1\right],$$

kde r jest kladné číslo celé a kde

$$\frac{p_{n+r}}{p_n} = (1 + u_{n+1})\,(1 + u_{n+2}) \ldots (1 + u_{n+r});$$

přejdeme-li opět k limitě pro $n = \infty$ při pevném r, dostaneme za předpokladu konvergence způsobem stejným jako dříve

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{p_{n+r}}{p_n} - 1\right] = 0.$$

O výraze v závorce hranaté se nacházejícím můžeme dokázati výrok, že ke každému kladnému číslu ε lze stanoviti číslo N tak, aby

$$\left|\frac{p_{n+r}}{p_n} - 1\right| < \varepsilon \text{ pro všecka } n > N \text{ a pro všecka } r. \tag{5}$$

za předpokladu ovšem, že daný součin jest konvergentní.

Pomíjeje snadný důkaz toho výroku, opírající se o větu Bolzano-Cauchyovu (odst. 28.) a o předpoklad definicí daný, že číslo p jest od nully různo (kladno), dokáži opak onoho výroku, že totiž, lze-li ke každému kladnému ε nalézti N tak, aby předcházející nerovnina byla splněna v rozsahu vytknutém, jest daný součin konvergentní.

Zvolme si — abychom to dokázali — v (5) za ε nejprve kladné číslo ε_0 menší než 1 a nerovnina (5) nechť pak jest splněna pro všecka $n \geqq \nu$ a pro všecka r, při čemž ν jest číslo celé. Pak jest, klademe-li $n = \nu$, pro všecka r

$$-\varepsilon_0 < \frac{p_{\nu+r}}{p_\nu} - 1 < \varepsilon_0 \text{ aneb } (1 - \varepsilon_0)\, p_\nu > p_{\nu+r} < (1 + \varepsilon_0)\, p_\nu\,;$$

t. j. všecka p_k od indexu ν počínaje jsou mezi dvěma kladnými čísly $p_\nu (1 - \varepsilon_0)$, $p_\nu (1 + \varepsilon_0)$ a poněvadž i $p_1, p_2, \ldots p_\nu$ jsou čísla kladná, platí pro *všecka* p_k nerovnost $0 < A \leqq p_k \leqq B$, kde A ku př. jest nejmenší z čísel $p_1, p_2, \ldots p_\nu$, $(1 - \varepsilon_0)\, p_\nu$. Následuje pak z (5), násobíme-li ji číslem p_n,

$| p_{n+r} - p_n | < \varepsilon\, p_n < \varepsilon B = \varepsilon'$, je-li $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{B}$ pro všecka $n > N$ a pro všecka r, t. j. jest splněna podmínka Bolzano-Cauchyova postačující k tomu, aby řada čísel kladných $p_1, p_2, p_3, \ldots$ měla limitu. Limita tato nutně jest kladná, neboť jest větší po případě rovna čísla A. Můžeme tudíž vysloviti větu:

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci nekonečného součinu $(1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \ldots$ *jest, aby ke každému kladnému číslu* ε *příslušelo číslo* N *tak, že splněna jest nerovnina*

$|(1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2}) \ldots (1 + u_{n+r}) - 1| < \varepsilon$ *pro všecka* $n > N$ *a všecka* r.

Mohli bychom tuto větu upraviti též takto (viz odst. 28.): *Nutná a postačující podmínka pro konvergenci nekonečného součinu* (3) *jest, aby ke každému kladnému číslu* ε *příslušelo číslo* n *tak, že splněna jest nerovnina*

$$|(1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2}) \ldots (1 + u_{n+r}) - 1| < \varepsilon \textit{ pro všecka } r.$$

Věta tato jest platna pro nekonečné součiny bez omezujících předpokladů svrchu zavedených, jakož jest na snadě.

Poznámka. Místo nekonečného součinu tvaru (3) bylo by důslednější vzhledem k nauce o nekonečných řadách uvažovati součiny tvaru

$$v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \ldots v_k \ldots \tag{6}$$

Rozdíl mezi (3) a (6) spočívá ovšem toliko v označení; od (3) přejdeme ku (6), klademe-li $u_k = v_k - 1$, a naopak od (6) ke (3) bychom dospěli kladouce $v_k = 1 + u_k$. Jelikož však během vyšetřování se tvar (3) ukazuje účelnějším, volil jsem hned od počátku východisko (3).

61. Součiny, v nichž čísla u_k jsou vesměs téhož znaménka. Vyšetřování konvergence nekonečných součinů jest úkolem značně obtížnějším než vyšetřování konvergence nekonečných řad. Lze však v nejdůležitějším případě (totiž t. zv. absolutní konvergence, o níž bude dále řeč) ono převésti na vyšetření konvergence řad. Započneme se součiny nejjednoduššími, totiž se součiny tvaru:

$$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots, \qquad (\alpha)$$
$$(1-u_1)(1-u_2)(1-u_3)\ldots, \qquad (\beta)$$

ve kterých čísla $u_1, u_2, u_3, \ldots$ jsou vesměs čísla kladná. Označíme $p_k = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_k)$, $p'_k = (1-u_1)(1-u_2)\ldots(1-u_k)$. Činíme dále předpoklad, že $\lim u_n = 0$ (není-li $\lim u_n = 0$, jsou, jak bylo svrchu vytknuto, oba součiny divergentní a není třeba se jimi zabývati). Za tohoto předpokladu jsou činitelé, v nichž $u_k \geqq \frac{1}{2}$ v (α) i v (β) v konečném počtu a můžeme je potlačiti beze vlivu na konvergenci obou součinů. Buďtež tedy hned od počátku pro všecka k splněny nerovnosti $0 < u_k < \frac{1}{2}$. Ale potom jest

$$1+u_k < \frac{1}{1-u_k}, \quad 1-u_k > \frac{1}{(1+u_k)^2}$$

a tedy

$$p_k < \frac{1}{p'_k}, \quad p'_k > \frac{1}{p_k^{\,2}}$$

Čísla p_k jsou čísla s indexem rostoucí a mají tudíž buď limitu ((α) jest konverg.) aneb rostou s indexem nade všecky meze ((α) divergentní). Obdobně jsou p'_k klesající a mají tudíž buď limitu od nully různou ((β) jest konvergentní) aneb limitu rovnou nulle ((β) jest divergentní). Následkem toho vyplývá z nerovnin napsaných, že, je-li (β) konvergentní, jest i (α) konvergentní a naopak. *Součiny (α), (β) jsou buď oba zároveň konvergentní, aneb oba zároveň divergentní.*

Avšak jest očividně

$$1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_k < p_k$$

Diverguje-li tedy řada nekonečná s kladnými členy $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, divergují oba součiny (α), (β).

Zbývá nám tudíž jenom vyšetřiti ty nekonečné součiny (α), (β), v nichž řada nekon. s klad. čl. $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ konverguje. Předpokládejme tuto konvergenci a budiž *součet té řady S menší než* 1. (Není-li součet tento hned od počátku menší než 1, stačí, abychom to docílili, vynechati v řadě konečný počet členů a ovšem v (α) a (β) odpovídající jim činitele; tím konvergence řady i obou součinů nebude nijak dotčena). Tu pak jest*)

$$1 - S < 1 - (u_1 + u_2 + \ldots + u_k) < p'_k$$

*) Nejprve totiž jest $1 - u_1 - u_2 < (1-u_1)(1-u_2)$; násobíme-li obě strany této nerovniny číslem $(1-u_3)$, které jest kladné, dostáváme dále (vynechávajíce při čísle menším kladný sčítanec $u_3(u_1+u_2)$)

$$1 - u_1 - u_2 - u_3 < (1-u_1)(1-u_2)(1-u_3)$$

a tak můžeme postupovati dále bez omezení.

t. j. řada čísel p'_k s indexem klesajících jest zdola ohraničena a existuje tedy

$$\lim_{n=\infty} p'_n \geqq 1 - S > 0.$$

Tudíž konverguje-li řada nekonečná s kladnými členy $u_1 + u_2 + \ldots$, *konvergují oba součiny* (α) (β).

Ke konvergenci součinu (α) *a také ke konvergenci součinu* (β) *jest nutno a postačitelno, aby konvergovala řada nekonečná s kladnými členy* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$.

62. Součiny absolutně konvergentní. Budiž řada $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ absolutně konvergentní; pak, jak dokážeme, jest i součin $(1 + u_1)$ $(1 + u_2)$ $(1 + u_3) \ldots$ konvergentní a říkáme v tomto případě, že jest *absolutně konvergentní.* Neboť má-li p_n týž význam jako dříve, můžeme psáti

$$p_n = q_n' . q_n'', \tag{γ}$$

kde q_n' obsahuje ty z prvých n činitelů $1 + u_k$ nekonečného součinu, ve kterých u_k jest kladné, q_n'' pak ty, ve kterých u_k jest záporné. Vzrůstá-li pak n v poslední rovnici nade všecky meze, vzrůstá také počet činitelů ve q_n' a q_n'' nade všecky meze (případ totiž, že od jistého indexu počínajíc všichni členové by měli stejná znaménka, netřeba bráti v úvahu). Při tom, jak z vývodů odst. předch. ihned vyplývá, mají q_n' i q_n'' limity od nully různé (předpokládáme stále, že ve q_n'' nejsou faktory rovné nulle) a má tudíž i p_n limitu od nully různou, vzrůstá-li n nade všecky meze. Jest tedy daný součin konvergentní.

Používajíce rovnice (γ), mohli bychom na základě methody, které jsme použili v odst. 46. pro řady absolutně konvergentní, dále dokázati, že lze v součinu absolutně konvergentním zaměniti libovolně pořádek činitelů a součin ten, zůstávaje konvergentní, nezmění svoji hodnotu. Avšak důkaz této věty, jakož i předcházející, provedeme způsobem, jehož platnosť i na obecnější případ (kdy u_k jsou veličiny komplexní) snadno se dá rozšířiti.

Označme absolutní hodnotu čísla u_k značkou a_k. Pak jest dle předpokladu nekonečná řada s kladnými členy

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{δ}$$

konvergentní, jakož i součin $(1 + a_1)$ $(1 + a_2)$ $(1 + a_3) \ldots$. Označme dále součin prvých n činitelů v tomto posledním součinu π_n. Pak lze ke každému kladnému číslu ε nalézti číslo N takové, že

$$\frac{\pi_{n+r}}{\pi_n} - 1 < \varepsilon \text{ pro všecka } n > N \text{ a všecka } r. \tag{ε}$$

Avšak

$$\left|\frac{p_{n+r}}{p_n} - 1\right| \leqq \frac{\pi_{n+r}}{\pi_n} - 1$$

jak snadno patrno (neboť na levé straně poslední nerovniny jest absolutní hodnota součtu $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+1}\, u_{n+2} + \ldots$, na pravé pak součet $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+1}\, a_{n+2} + \ldots$, což jest součet absol. hodnot členů předcházejícího součtu.) Tedy

$$\left|\frac{p_{n+r}}{p_n} - 1\right| < \varepsilon \text{ pro všecka } n > N \text{ a všecka } r$$

Tím jest dokázáno, že v důsledku konvergence řady (δ) konverguje i daný součin. Dokažme nyní, že lze pořádek činitelů v daném součinu zaměniti a že se nezmění velikost součinu. Proveďme tedy v daném součinu libovolnou záměnu činitelů a budiž v tomto druhém součinu součin prvých n členů značen p'_n. Utvořme podíl $\frac{p_m'}{p_n}$, při čemž m volme už tak veliké, aby v p_m' se nacházeli všicci činitelé, jež jsou v p_n; pak jest

$$\frac{p_m'}{p_n} = (1 + u_\alpha)(1 + u_\beta) \ldots (1 + u_\lambda),$$

kde $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ jsou čísla celá různá vesměs větší než n, největší budiž $n + R$. Lze tudíž psáti

$$|(1 + u_\alpha)(1 + u_\beta) \ldots (1 + u_\lambda) - 1| \leqq (1 + a_\alpha)(1 + a_\beta) \ldots (1 + a_\lambda) - 1 \leqq$$
$$\leqq \frac{\pi_{n+R}}{\pi_n} - 1,$$

$$-\frac{\pi_{n+R}}{\pi_n} + 1 \leqq \frac{p_m'}{p_n} - 1 \leqq \frac{\pi_{n+R}}{\pi_n} - 1$$

Roste-li v poslední nerovnině n nade všecky meze, konverguje pravá i levá strana k nulle (viz (ε)), tedy i prostřední výraz má limitu rovnou nulle a poněvadž $m \geqq n$, jest nutně

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{p_m'}{p_n} - 1\right) = 0, \quad \lim_{m=\infty} p_m' = \lim_{n=\infty} p_n\,,$$

čímž pak jest dán důkaz věty, že *v součinu absolutně konvergentním hodnota součinu se nezmění, zamění-li se pořádek činitelů.*

63. Není nesnadno odvoditi věty o násobení nekonečných součinů a rozkládání jich v součiny konvergentní podobně jako při nekonečných řadách přímo z definice. Podám jenom důkaz věty pro rozklad součinu absolutně konvergentního v neomezený počet součinů (rovněž absolutně konvergentních). Věta ta jest: *Utvoříme-li ze všech činitelů součinu absolutně konvergentního neomezený počet nekonečných součinů tak, že* *každý činitel daného součinu jest obsažen v jednom a toliko v jednom z těchto součinů, jsou součiny tak vzniklé rovněž absolutně konvergentní a hodnota součinu daného jest rovna hodnotě nekonečného součinu, jehož činitelové jsou hodnoty součinů nově tak vytvořených.*

Hodnota daného součinu $(1 + u_1)(1 + u_2) \ldots$ buď p, hodnota součinu $(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots$, kde $a_k = |u_k|$ nechť jest Π. Značky p_n, π_n mějtež týž význam jako v předcházejícím odst. Poněvadž součin Π jest konvergentní, lze udati ke každému kladnému ε číslo celé N tak, že

$$\frac{\Pi}{\pi_N} - 1 < \varepsilon$$

Součiny rozkladem vzniklé jsou očividně rovněž absolutně konvergentní (neboť řada obsahující některé členy řady nekonečné s kladnými členy konvergentní, jest rovněž konvergentní); označme jich hodnoty $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}, \ldots$, kterýmžto označením zavedli jsme zároveň jisté pořadí v těchto součinech. Zvolme si pak celé číslo M tak, aby v prvých M součinech rozkladem vzniklých bylo prvých N činitelů daného součinu. Pak jest, když provedeno krácení, je-li $m > M$,

$$\frac{p}{P^{(1)} \cdot P^{(2)} \ldots P^{(m)}} = (1 + u_\alpha)(1 + u_\beta)(1 + u_\gamma) \ldots$$

kde indexy $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ jsou vesměs větší než N. Avšak jest

$$|(1 + u_\alpha)(1 + u_\beta)(1 + u_\gamma) \ldots - 1| \leqq (1 + a_\alpha)(1 + a_\beta)(1 + a_\gamma) \ldots - 1 \leqq$$
$$\leqq \frac{\Pi}{\pi_N} - 1 < \varepsilon$$

a tedy

$$\left| \frac{p}{P^{(1)} . P^{(2)} \ldots P^{(m)}} - 1 \right| < \varepsilon \text{ pro všecka } m > M$$

čímž dokázáno, že nekonečný součin

$$P^{(1)} . P^{(2)} . P^{(3)} \ldots \qquad (\iota)$$

konverguje a jeho hodnota jest p. *Nekonečný součin tento,* který bychom mohli psáti, ve tvaru $(1 + v_1)(1 + v_2) \ldots$, kde $v_k = P^{(k)} - 1$, *jest absolutně konvergentní.* Důkaz, který lze provésti pomocí součinů $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}, \ldots$ utvořených stejně z Π jako $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots$ z p a na základě okolnosti, že součin, ve kterém $u_1, u_2, \ldots$ jsou čísla kladná, konverguje-li, konverguje absolutně, doporučuji ku provedení čtenáři. Že lze v součinu (ι) libovolně pořádek činitelů zaměniti, aniž by to mělo vliv na konvergenci a na hodnotu součinu, jest ostatně patrno z důkazu svrchu provedeného.

64. Dvojné součiny. Jako jsme v odst. 53. brali v úvahu řady dvojné, můžeme obdobně mluviti o *součinech dvojných* obsahujících *všecky* činitele tvaru $1 + u_{ik}$, kde i a k probíhají všecka čísla kladná přirozené řady číselné. Vypisovati můžeme součin takový pomocí *značky součinové* Π takto

$$\prod_{i,k}(1 + u_{ik}) \quad i, k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (k)$$

Označení toto má ovšem jenom tenkráte význam, je-li součin ten *absolutně konvergentní*; t. j. je-li řada dvojná

$$\sum_{ip} u_{ik} \qquad i, k = 1, 2, 3, \ldots$$

absolutně konvergentní. Pak jest hodnota součinu (k) vždy táž, ať jednotliví činitelové následují po sobě v pořádku jakémkoliv. Dle věty předcházejícího odstavce jest za předpokladu, že součin dvojný (k) jest absolutně konvergentní a že hodnota jeho jest p,

$$p = P^{(1)}.\, P^{(2)}.\, P^{(3)} \ldots,$$

kde

$$P^{(k)} = (1 + u_{k1})(1 + u_{k2})(1 + u_{k3}) \ldots$$

a obdobně

$$p = Q^{(1)}.\, Q^{(2)}.\, Q^{(3)} \ldots$$

$$Q^{(k)} = (1 + u_{1k})(1 + u_{2k})(1 + u_{3k}) \ldots \quad .$$

Součiny v těchto vztazích se vyskytující jsou pak vesměs absolutně konvergentní. Vztahy ty pomocí značky součinové lze vypsati též takto

$$p = \prod_k \Big(\prod_i (1 + u_{ik})\Big) = \prod_i \Big(\prod_k (1 + u_{ik})\Big), \; i = 1, 2, 3, \ldots, \; k = 1, 2, 3, \ldots \; .$$

65. Součiny relativně konvergentní. Součiny konvergentní, které nekonvergují absolutně, slují relativně konvergentní. V těch tvoří čičinitelé $1 + u_k$, ve kterých u_k jest kladné, součin divergentní; a rovněž tak činitelé $1 + u_k$, ve kterých u_k jest záporné. Stejně jako při řadách nekonečných relativně konvergentních lze i v součinu relativně konvergentním vhodným přemístěním činitelů docíliti, aby absolutní hodnota součinu toho byla rovna kladnému číslu A, libovolně předem danému. Důkaz toho jest stejný jako při nekonečných řadách a netřeba jej prováděti. Uvedu jenom dvě poznámky o vyšetřování konvergence takových součinů.

1. Součin $(1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \ldots$ může konvergovati aniž by současně konvergovala řada $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$. O tom nás přesvědčuje součin

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ldots$$

$$\ldots\left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \ldots,$$

součin tento konverguje. Neboť jest (vynecháme-li činitele $1-\frac{1}{\sqrt{1}}$ rovného nulle a v ostatním znásobíme vždy tři po sobě jdoucí činitele)

$$p_{3k}=\left(1+\frac{1}{1}\right)^2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{k^2}\right),\ p_{3k+1}=p_{3k}\left(1+\frac{1}{k+1}\right),$$

$$p_{3k+2}=p_{3k}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\text{čti};$$

mají tedy p_{3n} limitu pro $\lim n=\infty$, jelikož řada

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots$$

konverguje, a touž limitu mají i p_{3n+1}, p_{3n+2}. Řada však

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k}}+\dots,$$

jež se v podstatě redukuje na řadu harmonickou, jest divergentní.

2. Součin $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\dots$ může divergovati i když řada $u_1+u_2+u_3+\dots$ konverguje. Jest totiž věta: *Součin* $(1+u_1)$ $(1+u_2)(1+u_3)\dots$ *konverguje, jestliže konvergují obě řady*

$$u_1+u_2+u_3+\dots,\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+\dots \qquad (\lambda)$$

Konverguje-li prvá z těchto řad a druhá diverguje, diverguje i součin daný (a to tak, že p_n mají pro $\lim n=\infty$ za limitu 0.).

Předpokládejme, abychom tuto větu dokázali, že všecky $|u_k|<\frac{1}{2}$ (vynechávajíce k tomu cíli, je-li to třeba, jistý konečný počet počátečných činitelů daného součinu). Pak můžeme psáti

$$\log p_n=\log(1+u_1)+\log(1+u_2)+\dots+\log(1+u_n)$$

aneb užíváme-li rovnice (4) odst. 36.

$$\log p_n=(u_1+u_2+u_3+\dots+u_n)-(\Theta_1u_1^2+\Theta_2u_2^2+\dots+\Theta_nu_n^2)$$

kde Θ_k jsou čísla kladná mezi $\frac{1}{6}$ a $\frac{5}{3}$. Jsou-li obě řady (λ) konvergentní, mají obě závorky na pravé straně poslední rovnice limitu pro $n=\infty$ a má tedy limitu i p_n pro $n=\infty$ a to limitu od nully různou, čímž dokázáno, že součin daný jest v tom případě konvergentní. Konverguje-li prvá z řad (λ), druhá však diverguje, pak $\log p_n$ s rostoucím n nabývá záporných hodnot o absolutní hodnotě rostoucí nade všecky meze (řada $\Theta_1u_1^2+\Theta_2u_2^2+\dots$ jest divergentní, viz odst. 42.) a p_n tedy konverguje k nulle, čímž věta svrchu uvedená úplně dokázána.