Část prvá.

Základní pojmy a pomůcky.

I. Úvod.

Čísla irracionálná.

1. Základním prvkem arithmetiky a analyse jsou čísla celá. Aby bylo možno prováděti bez jakéhokoliv omezení odčítání mezi čísly celými, jest třeba rozšířiti čísla celá o čísla celá záporná (a o nullu). Konečně, aby bylo proveditelno dělení čísel celistvých, zavedena čísla lomená. Všecka čísla souhrnu čísel celistvých, lomených (kladných i záporných) budeme nazývati čísla **racionálná**. Základní čtyři operace arithmetické: sčítání, odčítání, násobení a dělení lze s čísly racionálnými vždy vykonati (s výjimkou dělení číslem 0) a obdržíme vždy jako výsledek číslo racionálné.

2. Čísla racionálná lze přirovnávati dle velikosti. Jestliže totiž rozdíl $a-b$ dvou čísel racionálných a, b jest číslo kladné, říkáme, že a **jest větší než** b a píšeme to ve tvaru $a > b$. Jestliže současně $a > b$, $b > c$, následuje snadno v důsledku této definice, že $a > c$. Dále připomínám, že, je-li a číslo kladné, jest $a > 0$ a naopak; rovněž výroky, $a < 0$ a a jest záporné jsou stejného významu.

Se zřetelem ku vylíčené právě vlastnosti (o možnosti porovnávati čísla racionálná dle velikosti) říkáme, že souhrn racionálných čísel se dá uspořádati dle velikosti, a mluvíme pak o *pořadí racionálných čísel*.

Rovněž se zřetelem ku vytčené vlastnosti řadíme čísla racionálná mezi t. zv. **veličiny**. Veličiny, jež lze vzájemně porovnávati dle velikosti, označovati budeme jako **veličiny stejného druhu**. Veličiny dané čísly racionálnými jsou veličiny nejjednoduššího druhu, neboť tvoří podklad pro určování jiných veličin.

3. Jest nesčíslné množství čísel racionálných mezi 0 a 1; všechna jsou dána ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde p a q jsou celá, nesoudělná čísla kladná.

při čemž $p < q$; číslům těmto říká se zpravidla *pravé zlomky*. *Jest však také nesčíslné množství racionálných čísel mezi dvěma libovolnými čísly racionálnými od sebe různými*; neboť jsou-li a, b dvě taková čísla, $b > a$, jest každé číslo tvaru

$$a + (b - a)\,r\,;\quad r \text{ pravý zlomek } (0 < r < 1)$$

číslem racionálným mezi a, b. Tuto vlastnost míníme, pravíce, že *souhrn čísel racionálných jest* **všude hustý**.

4 Dáno-li jest libovolné číslo racionálné c, můžeme všechna *ostatní* čísla racionálná rozděliti ve dvě skupiny A, B. Do první skupiny A dáme všechna čísla racionálná a, která jsou menší než c; do druhé skupiny B pak všechna racionálná čísla b větší než c. Rozdělili jsme tak pomocí čísla c *všechna* čísla racionálná ve tři skupiny; a to ve skupiny A, B a ve skupinu, obsahující jediné číslo c. Číslo c však můžeme také přidati buď ke skupině A, aneb ke skupině B, a pak vznikají ze *všech* čísel racionálných toliko dvě skupiny. Přidáme-li je ke skupině A, bude tato obsahovati všechna čísla $a < c$ a číslo c; přidáme-li je ku B, bude B obsahovati všecka čísla $b \geq c$. Budeme nazývati takovéto rozdělení všech čísel racionálných ve tři resp. ve dvě skupiny pomocí čísla c **řezem**, který byl proveden číslem c v souhrnu čísel racionálných. Řez tento lze provésti, jak právě vyloženo, třemi (v podstatě ovšem málo rozdílnými) způsoby. Jelikož řez tento způsoben číslem racionálným, sluje *řez racionálný*. Můžeme též říkati, že číslo c tvoří **rozhraní** mezi skupinami A a B.

Je-li ε libovolné číslo kladné (racionálné) jakkoliv malé, lze udati zároveň ve skupině A číslo a a ve skupině B číslo b tak, že $b - a < \varepsilon$. Neboť, je-li n číslo celé kladné a takové, že $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, jest $c + \frac{1}{n}$ číslo ve skupině B a $c - \frac{1}{n}$ číslo ve skupině A, nadto jest

$$\left(c + \frac{1}{n}\right) - \left(c - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Můžeme si tedy za a vzíti $c - \frac{1}{n}$ a za b číslo $c + \frac{1}{n}$. Jest patrno, že čísel a, b takových, že $b - a < \varepsilon$, jest nekonečné množství.

5. Mějmež dvě skupiny čísel racionálných A a B, mající tyto vlastnosti:

1. Každé číslo a ze skupiny A jest menší než každé číslo b ze skupiny B.

2. Patří-li ke skupině A číslo a, patří k ní také každé číslo a', které jest menší než a; patří-li ke skupině B číslo b, patří k ní také $b' > b$.

3. Ať jest ε jakékoliv číslo racionálné kladné, lze zároveň ve skupině A vybrati číslo a a ve skupině B číslo b tak, že $b - a < \varepsilon$.

Tu lze nejprve tvrditi, že ve skupinách A a B jsou obsažena všechna čísla racionálná, nejvýše s výjimkou jediného čísla c. Neboť kdyby dvě čísla různá c, c' nebyla ve skupinách A, B obsažena a $c' > c$, pak dle vlastností 2. a 1. by všechna čísla b (ze skupiny B) byla větší než c' a všechna čísla a (ze skupiny A) by byla menší než c a tedy všechny rozdíly $b - a$ by byly větší než $c' - c$ a nemohly by tedy býti utvořeny rozdíly $b - a$ menší než $c' - c$, jak žádá vlastnost 3.

Mohou tedy se zřetelem ke skupinám A a B s uvedenými třemi základními vlastnostmi a souhrnu všech čísel racionálných nastati jenom tyto případy:

I. Jest jedno jediné číslo racionálné c, které není obsaženo ani ve skupině A, ve které jsou *všechna* čísla racionálná menší než c, ani v B, ve které jsou *všechna* čísla racionálná větší nežli c. Ve skupině A není čísla největšího; neboť je-li a kterékoliv z čísel skupiny A, jest mezi a a c nekonečné množství čísel racionálných (odst. 3.); obdobně není v B žádné číslo nejmenším.

II. *Všechna* čísla racionálná jsou rozdělena ve *dvě* skupiny A, B; ve skupině A pak nachází se největší číslo té skupiny c a všechna čísla racionálná menší než c; čísla racionálná větší nežli c jsou všechna ve skupině B, která nemá čísla nejmenšího.

III *Všechna* čísla racionálná jsou rozdělena ve *dvě* skupiny A, B; ve skupině B pak nachází se nejmenší číslo té skupiny c zároveň se všemi čísly racionálnými většími nežli c; všechna čísla racionálná, která jsou menší než c, jsou ve skupině A, která nemá největšího čísla.

IV. *Všechna* čísla racionálná jsou rozdělena na *dvě* skupiny A, B; není však ani ve skupině A čísla největšího, ani ve skupině B čísla nejmenšího.

Těmito čtyřmi případy jsou všechny možnosti vyčerpány, neboť zdánlivě možný případ, aby všechna racionálná čísla byla rozdělena ve dvě skupiny A a B a aby i ve skupině A bylo číslo největší c a ve skupině B číslo nejmenší c' (při čemž dle 1. vlastnosti by nutně bylo $c' > c$) nenastane, jelikož by čísla racionálná mezi c' a c — a těch je nekonečný počet — nepřináležela ani skupině A ani B, což jest jak svrchu bylo ukázáno, vyloučeno v důsledku vlastnosti 3.

V případech I, II. a III. vznikly skupiny A, B racionálných čísel *řezem racionálným*, který způsobilo číslo c. Že může nastati případ IV., ukážeme na příkladě:

Příklad: Do skupiny A dejme čísla racionálná záporná, nullu a pak taková kladná čísla racionálná, jichž čtverec jest menší než 2. Do skupiny B zařaďme kladná čísla racionálná, jichž čtverec jest větší než 2. Tím jsme vyčerpali všechna čísla racionálná, neboť každé kladné číslo racionálné jest buď takové, že jest čtverec jeho menší než 2 anebo takové, že čtverec jeho jest větší než 2. Skupiny A, B mají v tomto případě vlastnosti 1., 2., 3.; tedy všechny vlastnosti shora vytčené. Neboť je-li a i b kladné a

$$a^2 < 2, \quad b^2 > 2, \quad \text{jest } b^2 > a^2 \text{ a tedy } b > a; \text{ (vlastnost 1.)}.$$

Je-li a i a' kladné a

$$a^2 < 2, \quad a' < a, \quad \text{jest } a'^2 < a^2 \text{ a tedy } a'^2 < 2; \text{ (vlastnost 2.)}.$$

Jsou-li a i b kladná rac. čísla a $a^2 < 2$, $b^2 > 2$ a není-li již $b - a < \varepsilon$, kde ε jest dané kladné rac. číslo, utvořme číslo $\frac{1}{2}(a + b)$. Toto číslo jest opět racionálné a patří do skupiny A nebo B. Nechť patří ku př. do skupiny B a položme $a_1 = a$, $b_1 = \frac{1}{2}(a + b)$, pak jest $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$. Není-li $\frac{1}{2}(b - a)$ menší než ε, opakujeme tento postup, až po k—tém takovém kroku dospějeme k číslům racionálným a_k, b_k (prvé ze skupiny A, druhé ze skupiny B), že

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b - a)$$

a je patrno, že je-li k dosti veliké,*) jest $b_k - a_k < \varepsilon$. Tím dokázána i vlastnost 3. Nastává tudíž jeden ze čtyř případů svrchu uvedených. Případ první předem jest vyloučen (neboť v A a v B jsou obsažena *všechna* čísla racionálná). Avšak ani případ II. a III nenastává; neboť není ani v A čísla největšího, ani v B čísla nejmenšího. Dokažme ku př., že v A není čísla největšího; je-li totiž a libovolné kladné číslo v A (t. j. $a^2 < 2$, $2 - a^2 > 0$), lze vždy udati číslo celé n tak, aby též

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2, \quad \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2;$$

této nerovnině bude jistě vyhověno, bude-li splněna nerovnina

$$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n} < 2 - a^2 \quad \text{aneb} \quad n > \frac{2a + 1}{2 - a^2}.$$

Jest tedy při této volbě čísla n i $a + \frac{1}{n}$ číslo v A. To jest: ať jest a kterékoliv číslo v A, jsou čísla v A, která jsou ještě větší než a (a jest takových nesčíslné množství).

Nastává tudíž nutně pro skupiny A a B v tomto příkladě stanovené případ IV.

---

*) Podmínka příslušná pro k jest $2^k > \frac{b - a}{\varepsilon}$.

6. Skupiny A, B, z nichž prvou budeme nazývati *dolní*, druhou *horní*, mají jistě všechny tři základní vlastnosti odst. 5., jestliže každé číslo ze skupiny dolní jest menší než každé číslo ze skupiny horní a jestliže v A, B jsou obsažena *všechna* racionálná čísla. Neboť, že takové skupiny mají prvé dvě vlastnosti, jest patrno bezprostředně; že mají také třetí vlastnost, vyplývá takto: Budiž a jedno číslo skupiny A a n číslo celé. Utvořme pak řadu čísel

$$a,\ a+\frac{1}{n},\ a+\frac{2}{n},\ a+\frac{3}{n},\ldots\ldots,\ a+\frac{k}{n},\ldots\ldots$$

Poněvadž tato čísla jsou racionálná a rostou nade všechny meze s k, jsou jistě v této řadě čísla patřící ke skupině B. Budiž první z čísel patřících v této řadě ke skupině B

$$a+\frac{\lambda}{n},\ \text{pak předcházející číslo jest}\ a+\frac{\lambda-1}{n}$$

a patří ke skupině A, rozdíl těchto dvou čísel jest $\frac{1}{n}$, jejž možno, zvolíme-li n dosti veliké, učiniti menším než kladné číslo ε, ať ε jest jakkoliv malé. Tedy třetí vlastnost skupin A, B jest dokázána. Stejně by se třetí vlastnost skupin A, B dokázala, kdyby A, B místo, aby obsahovala *všechna* racionálná čísla, obsahovala *všechna racionálná čísla s vyloučením jediného*. V tomto případě ostatně třetí vlastnost skupin A, B jest téměř bezprostředně patrna (viz odst. 4.).

Toto předeslavše můžeme vysloviti následující základní *definici*: *Jsou-li* **všechna** *čísla racionálná rozdělena ve dvě skupiny A a B tak, že každé číslo skupiny A jest menší nežli kterékoliv číslo skupiny B a že není ani ve skupině A čísla největšího, ani ve skupině B čísla nejmenšího,* jako tomu jest v příkladě odstavce předcházejícího, *říkáme, že čísla racionálná jsou rozdělena* **řezem irracionálným**. *Tomuto řezu budiž — dle definice — přiřazeno nové číslo t. zv.* **irracionálné**, *jež pokládati budeme za větší než všechna čísla skupiny A a menší než čísla skupiny B* a jež tvoří rozhraní v pořadí čísel racionálných.

Tím rozšířen dosavadní obor číselný, obsahující jenom čísla racionálná, o nový druh čísel; zároveň jest definicí nám dána možnost rozhodovati, zda určité číslo irracionálné jest větší či menší než libovolné číslo racionálné. Konečně jest patrno, že skupiny čísel racionálných A, B o třech základních vlastnostech shora uvedených stanoví v každém ze čtyř svrchu uvedených a jedině možných případů určité číslo buď racionálné (v prvých třech případech), buď irracionálné (ve čtvrtém případě). Souhrn těchto čísel (racionálných i irracionálných) budeme nazývati *souhrnem čísel* **reálných** a můžeme tedy stručně tvrditi, že **dvě**

skupiny A, B o základních třech vlastnostech stanoví vždy jisté číslo reálné, jež tvoří rozhraní v pořadí čísel racionálných.

Čísla definovaná řezy provedenými v souhrnu čísel racionálných budeme v úvahách bezprostředně následujících značiti $\gamma, \gamma_1, \gamma', \overline{\gamma},$. a pod

7. Nestačí ovšem jenom definovati nový druh čísel, jest nutno také stanoviti, jak se provádějí základní operace arithmetické pro obor číselný rozšířený o čísla irracionálná. Podáme definici základních operací pro čísla definovaná skupinami A, B (o třech základních vlastnostech), t. j. pro čísla *reálná* vůbec; jelikož racionálná čísla tvoří zvláštní případ reálných a jelikož čísla irracionálná jsme definovali jako veličiny téhož druhu s čísly racionálnými (neboť v definici podané se číslo γ porovnává s čísly racionálnými ve své velikosti) jest nutno, aby pravidla a věty pro základní operace s čísly irracionálnými a vůbec s čísly reálnými se shodovaly formálně s pravidly a větami pro základní operace s čísly racionálnými. Tímto požadavkem dospíváme však k definicím pro čtyři základní operace arithmetické (sčítání, odčítání, násobení a dělení), dávající za výsledky čísla zcela určitá, čísla jedině možná. Vycházeti budeme z následujících vět: Jsou-li a, b, a_1, b_1 čísla racionálná a jsou-li platny nerovniny

$$a < b \quad , \quad a_1 < b_1,$$

pak jsou platny i nerovniny

$$\text{(I.)} \quad a + a_1 < b + b_1, \qquad \text{(II.)} \quad a - b_1 < b - a_1$$

a jsou-li nad to čísla a, a_1 čísla kladná, i nerovniny

$$\text{(III.)} \quad a\,a_1 < b\,b_1 \quad , \quad \text{(IV.)} \quad \frac{a}{b_1} < \frac{b}{a_1}.$$

Jestliže jsou tedy A, B dvě skupiny čísel racionálných definujících číslo irracionálné γ a A_1, B_1 obdobné skupiny definující irracionálné číslo γ_1 a označíme-li číslo ze skupiny A resp. B znakem a resp. b — a_1 resp. b_1 nechť jest číslo z A_1 resp. z B_1 —, pak dle základní definice

$$a < \gamma < b, \qquad a_1 < \gamma_1 < b_1$$

a v důsledku nerovniny první (I.), jejíž platnost přirozeně rozšíříme i na čísla irracionálná, nutně budeme požadovati pro součet $\gamma + \gamma_1$ vztah

$$(\alpha) \qquad a + a_1 < \gamma + \gamma_1 < b + b_1.$$

Avšak všechny možné součty $a + a_1$ tvoří skupinu číselnou A_2, součty $b + b_1$ skupinu číselnou B_2; dokážeme-li, jakož vskutku dokážeme, že skupiny A_2, B_2 mají tři základní vlastnosti odst. 5., získali jsme nerovninou (α) úplně přesné stanovení čísla $\gamma + \gamma_1$ skupinami A_2, B_2 a tedy definici pro součet čísel irracionálných γ, γ_1, na které není nic libovolného, leda zcela přirozený požadavek, aby čísla irracionálná byla veličinami téhož druhu jako racionálná. Tak jsme dospěli k definici součtu čísel irracionálných (při čemž jest ještě podati důka; o vlastnostech skupin A_2, B_2) a obdobně z (II.), (III.), (IV.) lze získati definice pro ostatní základní operace arithmetické.

Podám v následujícím pouze definici sčítání (a to, aby byla podána v celku a tak zachován přehled, částečně s opakováním výkladů právě učiněných) a násobení způsobem naznačeným. Odčítání a dělení k vůli změně a hlubšímu procvičení příslušných pojmů budou definovány jako inversní úkony ku sčítání a násobení. Definice ty podáme vesměs tak, že jsou platny, ať čísla γ, γ_1 v nich se vyskytující jsou jakákoliv čísla reálná (racionálná či irracionálná).

8. Sčítání čísel reálných: Nechť A, B jsou skupiny čísel racionálných o základních třech vlastnostech (odst. 5) a rovněž tak skupiny A_1 a B_1. Prvé dvě nechť definují reálné číslo γ, druhé dvě pak γ_1. Čísla skupiny A značiti budeme $a, a', a'', \ldots$ a obdobně čísla skupin B, A_1, B_1 označme po řadě $b, b', b'', \ldots$; $a_1, a'_1 \ldots$; $b_1, \ldots$ Utvořme ze součtů $a + a_1$, $a' + a_1$, $a + a'_1$, $a' + a'_1, \ldots$ skupinu A_2 a ze součtů $b + b_1, \ldots$ skupinu B_2. Skupiny A_2 a B_2 mají tytéž tři základní vlastnosti jako skupiny A, B resp. skupiny A_1, B_1. Neboť jest vždy

$$a + a_1 < b + b_1, \text{ jelikož } a < b,\ a_1 < b_1 \quad \text{(vlastnost prvá).}$$

Je-li libovolné číslo racionálné $a'_2 < a + a_1$, můžeme snadno (nesčíslněkrát různým způsobem) nalézti dvě čísla racionálná a', a'_1 taková, že $a' < a$, $a'_1 < a_1$ a současně $a'_2 = a' + a'_1$. Tudíž a'_2 již v důsledku toho, že jest menší než $a + a_1$ (což jest číslo skupiny A_2), jest číslem skupiny A_2. (Vlastnost druhá.)

Zvolíme-li konečně a, b; a_1, b_1 tak, že $b - a < \frac{\varepsilon}{2}$, $b_1 - a_1 < \frac{\varepsilon}{2}$,

jest $$(b + b_1) - (a + a_1) < \varepsilon \quad \text{(vlastnost třetí).}$$

Definují tedy skupiny A_2 a B_2 číslo γ_2; toto číslo bude pro nás součtem čísel γ, γ_1; i píšeme

$$\gamma_2 = \gamma + \gamma_1.$$

Při tom jest patrno, že $\gamma + \gamma_1 = \gamma_1 + \gamma$, a rovněž snadno vyplývá $\gamma + (\gamma_1 + \gamma'_1) = (\gamma + \gamma_1) + \gamma'_1$ a $\gamma + 0 = \gamma$. Číslo 0 odpovídá řezu při němž ve skupině A jsou všechna čísla racionálná záporná, ve skupině B všechna čísla rac. kladná, v jedné ze skupin A, B může pak býti ještě číslo 0 samo.

9. Násobení čísel reálných. Uvažujme nejprve čísla reálná γ a γ_1, předpokládajíce o nich, že jsou obě *kladná*, t. j. že $\gamma > 0$, $\gamma_1 > 0$.

Buďtež jako v odstavci předcházejícím A, B skupiny stanovící γ; A_1, B_1 pak skupiny stanovící γ_1. Jelikož $\gamma > 0$, $\gamma_1 > 0$ bude v dolních skupinách A, A_1 v obou 0 a vedle toho ještě racionálná čísla kladná (jinak by γ resp. γ_1 bylo rovno 0).

Označme a, a', .. resp. a_1, a'_1, .. libovolná čísla *kladná* skupiny A resp. A_1. Čísla b, b', ... resp. b_1, b'_1, ... buďtež zase libovolná čísla ze skupiny B resp. B_1. Utvoříme si nové dvě skupiny A_3, B_3. Do A_3 dáme všechny součiny $a\, a_1$, $a'\, a_1$, $a\, a'_1$, $a'\, a'_1$, .. pak 0 a všechna záporná čísla racionálná; do B_3 dáme všechny součiny $b\, b_1$, $b'\, b_1$, ... Skupiny tak vzniklé mají základní vlastnosti odst. 5. Neboť

$$a\, a_1 < b\, b_1, \text{ jelikož } a < b,\ a_1 < b_1 \quad \text{(vlastnost prvá).}$$

Je-li $0 < a'_3 < a\, a_1$, jest možno (nesčíslněkrát různým způsobem) nalézti dvě čísla racionálná kladná a', a'_1 taková, že $a' < a$, $a'_1 < a_1$ a současně $a'_3 = a'\, a'_1$ a tedy již v důsledku toho, že kladné číslo a'_3 jest menší než $a\, a_1$ (což jest číslo skupiny A_3), patří a'_3 ke skupině A_3 (druhá vlastnost).

Že mají skupiny A_3, B_3 vlastnost třetí, můžeme dokázati takto: Ať jest δ jakékoliv číslo kladné, lze čísla a, b ve skupinách A, B zvoliti tak, aby $b - a < \delta$ a rovněž čísla a_1 b_1 lze vybrati, aby $b_1 - a_1 < \delta$. I jest pak

$$b\, b_1 - a\, a_1 < (a + \delta)\,(a_1 + \delta) - a\, a_1 = \delta\,(a + a_1) + \\ + \delta^2 < \delta\,(b^{(0)} + b_1^{(0)} + 1),$$

kde $b^{(0)}$, $b_1^{(0)}$ jsou dvě kterákoliv čísla prvé ze skupiny B, druhé ze skupiny B_1 a kde o δ předpokládáno, že jest menší než 1 (a v důsledku toho v závorce za δ dosazena 1). Omezíme-li δ ještě tak, že

$$\delta < \frac{\varepsilon}{b^{(0)} + b_1^{(0)} + 1}, \quad \varepsilon \text{ číslo kladné libovolně}$$

zvolené, bude $b\, b_1 - a\, a_1 < \varepsilon$, čímž i třetí vlastnost dokázána

Definují tedy skupiny A_3, B_3 číslo reálné γ_3, toto číslo pokládáme za součin čísel γ, γ_1 a budeme tudíž psáti

$$\gamma_3 = \gamma \cdot \gamma_1 .$$

Touto definicí násobení dostáváme, jsou-li γ, γ_1 čísla racionálná, za součin jich číslo racionálné a sice totéž, které dostáváme dle definice násobení čísel racionálných (již i s jejími důsledky v této úvaze předpokládám ovšem jako známou.).

Očividně (jako prostý důsledek obdobných vět pro čísla racionálná) jsou platny věty — za předpokladu, že γ, γ_1, γ'_1 jsou kladná čísla —

$$\gamma \cdot \gamma_1 = \gamma_1 \cdot \gamma, \quad \gamma \cdot (\gamma_1 \cdot \gamma'_1) = (\gamma \cdot \gamma_1) \cdot \gamma'_1, \quad \gamma \cdot (\gamma_1 + \gamma'_1) = \gamma \cdot \gamma_1 + \gamma \cdot \gamma'_1 .$$

Stejně jako při číslech racionálných vynecháváme často tečku jakožto značku násobení a značíme dále $\gamma . \gamma = \gamma^2$, $\gamma . \gamma . \gamma = \gamma^3$, atd.

Příklad: Utvořme γ^2, kde γ jest definováno skupinami A, B příkladu odstavce 5. Číslo γ^2 bude dáno skupinami A'', B''; prvá obsahuje čísla záporná a součiny $a\,a'$, druhá součiny $b\,b'$, při čemž $a^2 < 2$, $a'^2 < 2$, $b^2 > 2$, $b'^2 > 2$ (a, a', b, b' jsou čísla kladná).

I jest též

$$a^2\,a'^2 < 4 \text{ neb } a\,a' < 2 \text{ a rovněž } b\,b' > 2.$$

Skupiny A'', B'' obsahují tedy všechna čísla racionální vyjma 2 a definují tudíž číslo 2. Jest tedy $\gamma^2 = 2$, t. j. $\gamma = \sqrt{2}$.

10. V předcházejících odstavcích provedli jsme definici sčítání a násobení na podkladě jistých operací se skupinami A, B, A_1, B_1 příslušná čísla reálná definujícími; operace tyto vedly k novým skupinám A_2, B_2 resp. A_3, B_3 a o těch jsme dokázali, že mají opět tři základní vlastnosti odst. 5. jako skupiny původní; totéž ovšem nastane, když operace ty budeme opětovati, ku př. při konstrukci čísla $\gamma . (\gamma_1 . \overline{\gamma_1})$; v tomto případě (a obdobných) můžeme pak ihned konstruovati výsledné skupiny — jde-li o čísla reálná γ, γ_1, $\overline{\gamma_1}$ vesměs kladná — tak, že do skupiny dolní dáme součiny čísel kladných a, a_1, $\overline{a_1}$ (t. j. součiny $a . a_1 . \overline{a_1}$), číslo 0 a čísla záporná, do horní skupiny součiny $b . b_1 . \overline{b_1}$, a můžeme býti jisti, že skupiny výsledné takto sestrojené mají základní 3 vlastnosti a definují číslo, kteréž ovšem značíme $\gamma\,(\gamma_1\,\overline{\gamma_1})$.*) Podobně jest tomu v jiných případech, tak že zkoumání, zda při opětovaném použití operací při sčítání a násobení prováděných jsme vedeni ke skupinám majícím 3 základní vlastnosti, jest zbytečno a to i tenkráte, když výsledné skupiny jedním rázem konstruujeme; nebudeme je tudíž v následujícím prováděti.

11. Odčítání čísel reálných. Odčítati číslo γ od γ_1, značí — obdobně jako při racionálných číslech — vyhledati číslo γ_4 tak, aby

$$\gamma_4 + \gamma = \gamma_1. \tag{1}$$

Předpokládejme nejprve $\gamma_1 = 0$, t. j. hledejme číslo, jež značiti budeme $\overline{\gamma}$, takové, aby $\overline{\gamma_4} + \gamma = 0$. Číslo toto snadno najdeme konstrukcí příslušných skupin. Číslo dané γ nechť jest dáno skupinami A, B o třech základních vlastnostech (odst 5.). Změníme-li u všech čísel skupiny A, jakož i u všech čísel skupiny B znaménko (píšíce $-a$ místo a, resp. $-b$ místo b), dostaneme nové dvě skupiny a to z B vznikne tak skupina $\overline{A}$. z A vznikne skupina $\overline{B}$; skupiny $\overline{A}$ a $\overline{B}$ budou, jak patrno,

---

*) Tytéž dvě skupiny výsledné bychom do tali při konstrukci čísla $(\gamma\,\gamma_1)\,\overline{\gamma_1}$, čímž právě podán jest důkaz rovnosti $\gamma\,(\gamma_1 . \overline{\gamma_1}) = (\gamma . \gamma_1)\,\overline{\gamma_1}$.

míti opět všechny tři zákl. vlastnosti odst. 5. a budou definovati jisté číslo $\bar{\gamma}$. Utvořme součet čísla γ a čísla $\bar{\gamma}$ právě definovaného dle předpisu odst. 8.; ve skupině dolní budou čísla $a - b < 0$, t. j. čísla vesměs záporná; ve skupině horní budou čísla $b - a > 0$, t. j. čísla vesměs kladná.

Obsahuje tedy *) skupina dolní *všechna* čísla racionálná záporná a skupina horní všechna čísla rac. kladná a stanoví skupiny ty 0. Jest tudíž $\gamma + \bar{\gamma} = 0$. Číslo $\bar{\gamma}$ značíme $(0 - \gamma)$ neb kratčeji $(-\gamma)$ po případě i $-\gamma$. Obecněji zavádíme pro číslo γ_4 (vzniklé odčítáním γ od γ_1 a hovící rovnici (1)) znak $\gamma_4 = \gamma_1 - \gamma$ a stanovíme γ_4, přičteme-li k oběma stranám rovnice (1) $(-\gamma)$; tu dostaneme:

$$(\gamma_4 + \gamma) + (-\gamma) = \gamma_1 + (-\gamma) \quad \text{aneb} \quad \gamma_4 + (\gamma + (-\gamma)) = \gamma_1 + (-\gamma)$$
$$\gamma_4 = \gamma_1 + (-\gamma) \quad \text{t. j.} \quad \gamma_1 - \gamma = \gamma_1 + (-\gamma).$$

Touto rovnicí odčítání čísel reálných převádí se na sčítání čísel reálných.

V důsledku zavedení čísla $(-\gamma)$ můžeme rozšířiti definici násobení i na čísla reálná *záporná* (t. j. čísla reálná menší než 0). Je-li γ_1 záporné, γ kladné, položíme definujíce součin $\gamma\gamma_1$

$$\gamma\gamma_1 = -\gamma \, . (-\gamma_1) \quad \text{a rovněž} \quad \gamma_1 \gamma = -(-\gamma_1)\, \gamma.$$

Jsou-li γ i γ_1 záporná reálná čísla, klademe $\gamma\gamma_1 = (-\gamma)\,(-\gamma_1)$. I při definici takto rozšířené zůstanou věty o násobení uvedené ke konci odst. 9. v platnosti, jak čtenář snadno dokáže.

Stejně tomu jest, stanovíme-li pro násobení nullou, že $0 \, . \gamma = \gamma \, . 0 = 0$, je-li γ libovolné číslo reálné i toto stanovení jest z důvodů, z nichž hlavní naznačeny v odst. 7., jedině možné.

12. Dělení čísel reálných. Odčítání definovali jsme jakožto inversní úkon ke sčítání, stejně můžeme i dělení čísla γ_1 číslem γ definovati jakožto vyhledávání čísla γ_5 hovícího rovnici

$$\gamma\gamma_5 = \gamma_1 ; \tag{2}$$

t. j. jakožto operaci inversní k násobení, při čemž je nutno předpokládati, že γ jest různo od nully (neboť $0 . \gamma_5 = 0$). Učiníme nejprve předpoklad $\gamma > 0$ a podáme nejdříve řešení rovnice (2), když $\gamma_1 = 1$, t. j. budeme za předpokladu $\gamma > 0$ hledati číslo $\bar{\gamma}$ hovící rovnici $\gamma \, . \bar{\gamma} = 1$. Takové číslo snadno najdeme sestrojením příslušných skupin. Číslo γ nechť je dáno skupinami A, B; sestrojme skupinu $\bar{A}$ ze všech čísel $\frac{1}{b}$,

*) Neboť skupiny sčítáním vzniklé mají tři základní vlastnosti a tedy obsahují *všechna* čísla racionálná, s vyloučením nejvýše jediného čísla.

k nimž přidáme 0 a čísla záporná; skupina $\overline{B}$ nechť obsahuje čísla $\frac{1}{a}$, kdež a jsou zase kladná čísla skupiny A. Pak skupiny $\overline{A}$ a $\overline{B}$ mají 3 základní vlastnosti odst. 5., jak snadno lze dokázati*), a definují číslo $\overline{\gamma}$, o němž čtenář snadno dokáže, používaje pravidel pro provádění násobení v odst. 9. vyložených, že $\overline{\gamma}\gamma = 1$.

Číslo tak nalezené značíme

$$\overline{\gamma} = \frac{1}{\gamma}, \text{ tak že } \frac{1}{\gamma} \cdot \gamma = 1 = \gamma \cdot \frac{1}{\gamma}.$$

Pomocí čísla $\overline{\gamma}$ dostaneme řešení rovnice (2) ve tvaru

$\gamma_5 = \gamma_1 \cdot \frac{1}{\gamma}$, což také píšeme buď ve tvaru $\gamma_5 = \frac{\gamma_1}{\gamma}$ neb $\gamma_5 = \gamma_1 : \gamma$. (3)

Neboť jest

$$\gamma \cdot \gamma_5 = \gamma_5 \cdot \gamma = \left(\gamma_1 \cdot \frac{1}{\gamma}\right)\gamma = \gamma_1\left(\frac{1}{\gamma} \cdot \gamma\right) = \gamma_1.$$

Rozšíření výkonu dělení číslem γ pro ten případ, že $\gamma < 0$, provésti lze snadno jako důsledek definice násobení číslem záporným, což tu pomíjím.

13. Definice pro odčítání a dělení tu podané vedou, jsou-li γ a γ_1 čísla racionálná, k týmž výsledkům, jako definice z počátků aritmetiky známé pro odčítání a dělení čísel racionálných; neboť definice ony i tyto se shodují.

Konečně lze ukázati, že žádná jiná čísla než γ_4 resp. γ_5 nehoví rovnicím (1) resp. (2). Dejme tomu ku př., že by rovnice (2) byla splněna jednak číslem γ_5, jež jsme stanovili v (3), jednak, kdybychom místo γ_5 dosadili číslo γ'_5; t. j. dejme tomu, že by byly splněny současně obě rovnice:

$$\gamma\gamma_5 = \gamma_1 \quad \gamma\gamma'_5 = \gamma_1.$$

Z nich následuje $\gamma\gamma_5 = \gamma\gamma'_5$, aneb násobíme-li po obou stranách číslem $\frac{1}{\gamma}$ svrchu sestrojeným,

$$\frac{1}{\gamma}(\gamma\gamma_5) = \frac{1}{\gamma}(\gamma\gamma'_5), \text{ odkudž } \left(\frac{1}{\gamma} \cdot \gamma\right)\gamma_5 = \left(\frac{1}{\gamma} \cdot \gamma\right)\gamma'_5, \text{ t. j. } \gamma_5 = \gamma'_5,$$

tedy není γ'_5 různé od γ_5 a tvrzení pro rovnici (2) dokázáno.

Jako snadný důsledek odvodí čtenář větu: Je-li součin dvou (anebo i více) činitelů rovný nulle, jest aspoň jeden činitel rovný nulle

*) Skupiny $\overline{A}$, $\overline{B}$ obsahují totiž všechna racionálná čísla záporná a rovněž všechna rac. čísla kladná (leda s vyloučením jediného čísla $\frac{1}{c}$ v tom případě, že také skupiny A, B obsahují všecka čísla rac. kl. s vyloučením čísla c).

14. K odčítání čísel γ, γ_1 navážeme definici vztahující se ku porovnávání irracionálných čísel dle velikosti. Doposud dovedeme jenom říci, zda určité číslo γ jest větší nebo menší než kterékoliv číslo racionálné. Specielně jest $\gamma > 0$, jestliže 0 jest ve skupině A (a zároveň γ od 0 rozdílno). V tomto případě $\gamma > 0$ říkáme o čísle γ, jak už shora bylo řečeno, že jest *kladné*; je-li $\gamma < 0$, jest γ *záporné*. My pak stanovíme $\gamma > \gamma_1$ t. j. γ jest větší než γ_1, jestliže rozdíl $\gamma - \gamma_1$ jest kladný; jestliže $\gamma - \gamma_1 < 0$, jest $\gamma < \gamma_1$ t. j. γ jest menší než γ_1.

Definice tato neodporuje dřívějším stanovením o porovnávání čísel racionálných mezi sebou a čísla irracionálného s racionálnými, pojímajíc je jako zvláštní případy.

Z této definice a z vět pro sčítání a odčítání již dokázaných vyplývá věta: Je-li $\gamma > \gamma_1$ a $\gamma_1 > \gamma'$, jest $\gamma > \gamma'$. Jest tedy i souhrn čísel reálných souhrnem *uspořádaným* dle velikosti a můžeme mluviti *o pořadí čísel reálných.*

Z definice dále vyplývá snadno, že je-li součet dvou kladných čísel rovný aneb menší než ε, každý sčítanec je menší než ε. Jestliže tudíž skupiny A, B stanoví číslo γ, a my na základě 3. vlastnosti odst. 5. vybereme ve skupině A číslo a a zároveň ve skupině B číslo b tak, že $b - a < \varepsilon$, kde ε jest libovolné číslo kladné racionálné, pak jest $b - \gamma < \varepsilon$, $\gamma - a < \varepsilon$; neboť

$$(b - \gamma) + (\gamma - a) = b - a < \varepsilon, \; b - \gamma > 0, \; \gamma - a > 0.$$

Lze tedy v obou skupinách číslo γ definujících vybrati čísla racionálná, jež od čísla γ se liší o číslo menší než kladné číslo ε, které může býti libovolně malé, anebo kratčeji řečeno, *jež číslo γ udávají s přesností libovolně velikou.*

15. Jelikož ve skupině A není čísla největšího, ani ve skupině B čísla nejmenšího, definují-li skupiny A, B čísel racionálných číslo irracionálné γ, jest mezi každým číslem racionálným c (ať patří k A nebo ku B) a mezi γ vždy nekonečné množství racionálných čísel. Následkem toho jest i mezi dvěma různými čísly irracionálnými γ, γ_1 nekonečné množství čísel racionálných; neboť je-li ku př. $\gamma_1 > \gamma$ a A, B resp. A_1, B_1 skupiny čísel racionálných definující γ resp. γ_1, jsou jistě ve skupině A_1 čísla, jež nejsou ve skupině A; je-li jedno z těchto c, pak jest $\gamma_1 > c > \gamma$ a odtud na základě předcházejícího učiněné tvrzení vyplývá.

16. Doposud jsme dokázali existenci jediného čísla irracionálného a to v příkladě odst. 5. a 9., kde jsme sestrojili pomocí skupin A, B číslo $\gamma = \sqrt{2}$ (t. j. číslo pro něž $\gamma^2 = 2$). Čísla kladná ve skupině A

označme v tomto případě m; pak jest $\sqrt{2}-m$ číslo kladné a menší než $\sqrt{2}$; číslo ve skupině B označme n, pak jest

$$0 < \frac{\sqrt{2}-m}{n} < 1; \quad m > 0.$$

Avšak číslo $\dfrac{\sqrt{2}-m}{n}$ jest číslo irracionálné*), ať m a n jsou jakákoliv čísla ze skupin A a B, a jest tedy mezi 0 a 1 nesčíslné množství čísel irracionálných vytčeného tvaru. Tudíž (viz odst. 3.) můžeme usuzovati, že i mezi dvěma libovolnými různými čísly racionálnými jest nesčíslné množství čísel irracionálných tvaru

$$p + q\sqrt{2}, \tag{α}$$

kde p a q jsou čísla racionálná ($q \neq 0$). Tvarem (α) jest, jsou-li p, q čísla racionálná, dán jistý souhrn čísel reálných (irracionálných při $q \neq 0$).

Budeme nazývati souhrn čísel **všude hustým**, je-li mezi každými dvěma různými čísly racionálnými nesčíslné množství čísel tohoto souhrnu. (Viz odst. 3.) Jest tedy souhrn čísel (α) souhrnem všude hustým a tím spíše *jest souhrn všech čísel irracionálných vůbec souhrnem všude hustým.*

Rovněž snadno lze nahlédnouti v důsledku předchozího odstavce a právě provedených úvah, že mezi dvěma různými čísly reálnými jest nesčíslné množství čísel tvaru (α) a vůbec nesčíslné množství čísel irracionálných.

Obecně lze tvrditi, že, je-li mezi dvěma čísly rac. různými nesčíslné množství čísel jistého souhrnu číselného, jest i mezi dvěma různými reálnými čísly nesčíslné množství čísel toho souhrnu a naopak (jak ihned vyplývá z předchozího odst.). Následkem toho bylo by lze upraviti definici souhrnu čísel všude hustého tak, že bychom v ní dvě různá čísla racionálná nahradili dvěmi různými čísly reálnými.

17. Číslo irracionálné jsme definovali jako číslo tvořící rozbraní (řez) mezi čísly racionálnými tak, že se souhrn těchto čísel rozpadal každým číslem irracionálným ve dvě skupiny A, B. Podobné úvahy můžeme provésti na každém souhrnu čísel reálných, je-li tento souhrn všude hustým. Máme-li totiž takový souhrn všude hustý — čísla tohoto souhrnu budeme značiti malými německými písmenami — a sestrojíme-li dvě skupiny $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ z čísel tohoto souhrnu mající tři základní

*) Neboť kdyby to číslo bylo rovno číslu racionálnému r, bylo by

$$\frac{\sqrt{2}-m}{n} = r, \text{ t. j. } \sqrt{2} = m + nr$$

a $\sqrt{2}$ bylo by číslo racionálné.

vlastnosti odst. 5. (každé číslo $\mathfrak{a}$ skupiny $\mathfrak{A}$ jest menší než každé $\mathfrak{b}$ skupiny $\mathfrak{B}$; patří-li $\mathfrak{a}$ ku $\mathfrak{A}$, patří každé $\mathfrak{a}' < \mathfrak{a}$ rovněž ku $\mathfrak{A}$ a patří-li $\mathfrak{b}$ ku $\mathfrak{B}$, patří i $\mathfrak{b}' > \mathfrak{b}$ ku $\mathfrak{B}$; ať jest ε číslo reálné jakkoliv malé, lze udati v $\mathfrak{A}$ číslo $\mathfrak{a}$ a v $\mathfrak{B}$ číslo $\mathfrak{b}$ tak, že $\mathfrak{b} - \mathfrak{a} < \varepsilon$), lze nejprve ukázati bez potíže (stejně jako v odst. 5.), že oběma skupinami $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou všechna čísla daného souhrnu vyčerpána nejvýše s výjimkou jediného čísla toho souhrnu. Jsou-li pak oběma skupinami $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *všechna* čísla daného souhrnu vyčerpána a není-li zároveň ani v $\mathfrak{A}$ číslo největší, ani v $\mathfrak{B}$ číslo nejmenší, pak definují skupiny $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ číslo nové (t. j. nepatřící k danému souhrnu) tvořící jakési rozhraní mezi čísly souhrnu daného a jež pokládati jest větším než všechna čísla skupiny $\mathfrak{A}$ a menším než všechna čísla skupiny $\mathfrak{B}$. Dokážeme však, že v tomto obecnějším případě jest toto číslo nové, k němuž tak dospíváme a jež tvoří rozhraní mezi $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, shodno s číslem reálným tvořícím rozhraní mezi jistými dvěma skupinami čísel racionálných.

Neboť utvoříme li dvě skupiny čísel racionálných A, B tak, že do A dáme každé číslo racionálné, které jest menší než některé z čísel skupiny $\mathfrak{A}$ a do B dáme každé číslo racionálné, které jest větší než některé z čísel skupiny $\mathfrak{B}$, dostaneme skupiny A, B tři zákl. vlastností odst. 5., definující tedy jisté číslo reálné γ, jakožto rozhraní mezi A a B (jež může býti buď racionálné, buď irrac.). Toto číslo γ jest větší než všechna čísla $\mathfrak{a}$ skupiny $\mathfrak{A}$ a menší než všechna čísla $\mathfrak{b}$. Neboť, kdyby bylo jedno číslo $\mathfrak{a}$, pro které $\gamma < \mathfrak{a}$, pak by bylo jedno číslo racionálné menší než $\mathfrak{a}$ a větší než γ (mezi γ a $\mathfrak{a}$ jest jich nekonečné množství) a bylo by tedy číslo, které patří ku A a jest větší než γ, což jest absurdní; nemůže však také býti γ rovno jednomu z čísel $\mathfrak{a}$, neboť pak ostatní čísla $\mathfrak{a}$ by byla menší než toto $\mathfrak{a} = \gamma$ (jak právě dokázáno) a ve skupině $\mathfrak{A}$ by bylo číslo největší, což předpokladem vyloučeno; i jest tedy nutně γ větší než každé z čísel $\mathfrak{a}$ a stejně se dokáže, že γ jest menší než každé číslo z $\mathfrak{B}$. Jest tedy rozhraní mezi čísly skupiny $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ utvořeno číslem reálným γ zcela určitým a *nedospíváme, — užívajíce postupu provedeného při souhrnu čísel racionálných na daný souhrn čísel reálných všude hustý, — k jiným číslům, než nám již známým, t. j. číslům obsaženým v celém souhrnu čísel reálných.*

Jest pak naopak patrno, že *každé číslo reálné* γ tvoří rozhraní v každém souhrnu všude hustém a různá čísla reálná v něm tvoří různá rozhraní (viz odst. předch.); *dává nám tedy každý souhrn všude hustý skupinami $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ o třech základních vlastnostech také všechna čísla reálná,* stejně jako souhrn čísel racionálných.

Příklad 1. Všechna čísla racionálná, vyjádřená v desetinné (dekadické) soustavě číslicové konečným počtem číslic, tvoří souhrn čísel všude hustý. Jest to část ze souhrnu čísel racionálných. Již na podkladě tohoto souhrnu můžeme tedy definovati každé číslo reálné jakožto rozhraní mezi dvěma skupinami $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ utvořenými z čísel tohoto souhrnu. Tak ku př. dáme-li do skupiny $\mathfrak{A}$ čísla

$$8,\quad 8{\cdot}3,\quad 8{\cdot}33,\quad 8{\cdot}333,\quad 8{\cdot}3333,\ \ldots\quad \underbrace{8{\cdot}333\ldots 3}_{k\text{ - cifer}}\ \text{a t. d. neomezeně}$$

a všechna čísla vyjádřená konečným počtem cifer v desetinné soustavě, jež jsou menší než čísla právě vypsaná, a dáme-li do skupiny $\mathfrak{B}$ všechna čísla

$$8{\cdot}4,\quad 8{\cdot}34,\quad 8{\cdot}334,\quad 8{\cdot}3334,\quad 8{\cdot}33334,\ \ldots\ \text{a t. d. neomezeně,}$$

jakož i všechna čísla vyjádřená konečným počtem číslic v desetinné soustavě, jež jsou větší než čísla právě vypsaná, rozdělili jsme všechna čísla uvažovaného souhrnu ve dvě skupiny $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ o třech základních vlastnostech a není ani v $\mathfrak{A}$ číslo největší ani v $\mathfrak{B}$ číslo nejmenší. Následkem toho definují $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ číslo neobsažené v daném souhrnu, jež jest jak patrno $8\frac{1}{3}$.

Je-li γ libovolné číslo reálné a ε číslo kladné jakkoliv malé, lze v důsledku úvahy v tomto odstavci provedené nalézti ve skupinách $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ čísla $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ (a jest jich nekonečné množství), že

$$0 < \gamma - \mathfrak{a} < \varepsilon, \qquad 0 < \mathfrak{b} - \gamma < \varepsilon.$$

Na této větě zakládá se přibližné určování čísel irracionálných pomocí desetinných zlomků.

Příklad 2. Jeli ω dané číslo irracionálné, tvoří čísla tvaru $p + q\omega$, kde p, q mohou nabývati všech hodnot racionálných, souhrn čísel reálných všude hustý. To již bylo dokázáno v odst. 16. za předpokladu $\omega = \sqrt{2}$. Avšak souhrn všude hustý také dostaneme, *probíhají-li p, q všecka celistvá čísla racionálná.* Ponechávám důkaz tohoto tvrzení čtenáři, jakož i odvození důsledku vztahujícího se ku přibližnému vyjadřování čísel reálných pomocí čísel $p + q\omega$, kde p, q jsou čísla celá (obdobně jako tomu bylo v příkladě předch.).

Poznámka. 1. Kdybychom vycházeli od souhrnu všech čísel reálných, pak dvě skupiny $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ze souhrnu toho vytvořené (jež tedy obsahují všecka čísla reálná) a mající buď tři základní vlastnosti odst. 5. anebo, což jest v tomto případě v podstatě totéž, vlastnosť, že každé číslo skupiny $\mathfrak{A}$ jest menší než každé číslo skupiny $\mathfrak{B}$, stanovily by dle vývodů svrchu uvedených zase jenom číslo reálné (jež jest buď největším číslem skupiny $\mathfrak{A}$ anebo nejmenším číslem skupiny $\mathfrak{B}$).

Jest tedy postup, kterého jsme užívali, abychom od racionálných čísel dospěli k irracionálným, ukončen a opětovným jeho použitím nedospíváme již k číslům novým.

Poznámka. 2. V následujících výkladech provádím stanovení určitých čísel reálných, ve vývodech se vyskytujících, buď na podkladě čísel racionálných anebo, což jest často jednodušší, na podkladě čísel reálných vůbec. V tomto posledním případě pak obdobně jako při číslech racionálných požadujeme buďto sestrojení dvou skupin čísel reálných, majících tři základní vlastnosti odst. 5., anebo konstrukci dvou skupin, obsahujících všecka čísla reálná (po případě s vyloučením jednoho) a majících vlastnost prvou odst. 5.

18. V předcházejících odstavcích byly odvozeny hlavní věty a pravidla o počítání s čísly reálnými v úplné shodě s větami pro počítání s čísly racionálnými. Bylo by snadno dokázati, že i veškerá obecná pravidla pro počítání s čísly reálnými zde neuváděná shodují se s pravidly pro počítání s čísly racionálnými. Budu je v následujícím předpokládati a podám jenom ještě jako doplněk úvah předcházejících definici absolutní hodnoty čísla reálného a definice n-té odmocniny, mocniny s libovolným mocnitelem a logarithmu.

Absolutní hodnota čísla γ, již značíme krátce $|\gamma|$, jest stanovena těmito rovnicemi:

$$|\gamma| = \gamma, \quad \text{je-li } \gamma \geqq 0,$$
$$|\gamma| = -\gamma, \quad \text{je-li } \gamma \leqq 0.$$

Pro absolutní hodnotu platí tyto věty snadno patrné:

$$|\gamma \cdot \gamma'| = |\gamma| \cdot |\gamma'|, \qquad \left|\frac{\gamma}{\gamma'}\right| = \frac{|\gamma|}{|\gamma'|},$$
$$|\gamma \pm \gamma'| \leqq |\gamma| + |\gamma'|,$$
$$|\gamma \pm \gamma'| \geqq |\gamma| - |\gamma'|$$

a obecně

$$|\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_m| \leqq |\gamma_1| + |\gamma_2| + \ldots + |\gamma_m|.$$

19. n-tá odmocnina z reálného čísla Jako nový příklad ku vývodům předcházejícím podám stanovení čísla, jehožto n-tá mocnina jest rovna číslu γ; při tom buď n číslo celé kladné a γ kladné číslo reálné, jež není n-tou mocninou čísla racionálného.

Jako v příkladě odst. 5. rozdělíme si všechna čísla racionálná na dvě skupiny A, B; do prvé dáme všechna kladná čísla racionálná a, pro něž $a^n < \gamma$, jakož i čísla < 0. Do druhé dáme všechna čísla b, pro něž $b^n > \gamma$. Poněvadž jsou rozdělena všechna čísla racionálná a poněvadž každé b jest větší než každé a, mají skupiny A, B všechny tři základní vlastnosti odst. 5. a definují tudíž kladné reálné číslo, jež označíme ω.

Dokažme, že $\omega^n = \gamma$. Abychom vypočetli ω^n, utvoříme dvě nové skupiny A_1, B_1 dle předpisu o násobení čísel reálných. Ve skupině A_1

budou všechna čísla racionálná tvaru $a \,.\, a' \,.\, a'' \ldots a^{(n)}$ a čísla $\leqq 0$ ve skupině B_1 budou čísla $b \,.\, b' \,.\, b'' \ldots b^{(n)}$; při tom jsou $a, a', a'', \ldots a^{(n)}$ kladná čísla skupiny A; $b \,.\, b', \ldots b^{(n)}$ čísla skupiny B. Skupiny A_1, B_1 mají jistě tři základní vlastnosti skupin definujících číslo reálné (viz odst. 10.), číslo pak, které stanoví jest právě γ. Neboť všechna čísla skupiny A_1 jsou menší než γ (jest totiž $(a \,.\, a' \,.\, a'' \ldots a^{(n)})^n < \gamma^n$) a rovněž čísla skupiny B_1 větší než γ. Tudíž vskutku $\omega^n = \gamma$.

Pro číslo ω budeme užívati znaku $\gamma^{\frac{1}{n}}$. Snadno vyplývá pak z definice a pravidla o umocňování celistvým exponentem

$$\left(\gamma^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{r}} = \gamma^{\frac{1}{qr}}.$$

Mimo to budeme značiti (celé číslo p může býti i záporné):

$$\left(\gamma^{\frac{1}{q}}\right)^p = \gamma^{\frac{p}{q}}; \text{ pak jest } \left(\gamma^{\frac{1}{qr}}\right)^{pr} = \left\{\left[\left(\gamma^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{r}}\right]^r\right\}^p = \gamma^{\frac{p}{q}} \text{ a tedy}$$

$$\gamma^{\frac{pr}{qr}} = \gamma^{\frac{p}{q}};$$

jsou tedy výrazy γ^c, kde c jest libovolné racionálné číslo, čísla úplně definovaná. Pro ně jsou platny tyto základní věty:

$$\gamma^c \,.\, \gamma^{c'} = \gamma^{c+c'}, \quad (\gamma^c)^{c'} = \gamma^{c \,.\, c'}, \quad (\gamma \,.\, \gamma')^c = \gamma^c \,.\, \gamma'^c \tag{1}$$

jichž snadný důkaz tu nebudu prováděti.

Z definice čísla $\gamma^{\frac{1}{n}}$ plyne, že při $\gamma > 1$ jest i $\gamma^{\frac{1}{n}} > 1$; neboť 1 jest jedním z čísel dolní skupiny A definujících $\gamma^{\frac{1}{n}}$. Jest tedy i γ^c při $\gamma > 1$ a $c > 0$ větší než 1 a tudíž se zřetelem ku první z rovnic (1) *γ^c s rostoucím c roste.* Dále lze stále při $\gamma > 1$ ke každému kladnému δ udati číslo η tak, aby

$$0 < \gamma^c - 1 < \delta, \text{ pro všechna } c, \text{ pro něž } 0 < c < \eta. \tag{2}$$

Neboť klademe-li

$$\gamma^{\frac{1}{n}} = 1 + \delta_0, \text{ pak } \delta_0 > 0 \text{ a dle binomické věty } \gamma > 1 + n\delta_0,$$

$$\delta_0 < \frac{\gamma - 1}{n}, \quad \gamma^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\gamma - 1}{n} \text{ a pro } 0 < c < \frac{1}{n} \text{ jest } \gamma^c - 1 < \frac{\gamma - 1}{n}$$

Má-li tedy býti splněna (2), postačí, když

$$\frac{\gamma - 1}{n} < \delta \text{ aneb } n > \frac{\gamma - 1}{\delta}.$$

V těchto nerovninách má býti n celé; stačí pak si zvoliti kterékoli celistvé n jim hovící. Jedna celistvá hodnota, jim hovící, položena mezi $\frac{\gamma - 1}{\delta}$ a $\frac{\gamma - 1}{\delta} + 1 = \frac{\gamma + \delta - 1}{\delta}$; tu vezmeme za základ. Bude tedy pro toto n

$$\frac{\delta}{\gamma+\delta-1} \leqq \frac{1}{n} < \frac{\delta}{\gamma-1}$$

(znaménko rovnosti v tomto vztahu jest na místě jenom tenkráte, když hranice pro n jsou čísla celá) a podmínce $c < \frac{1}{n}$ postačující ke splnění (2) bude vyhověno, když

$$c < \frac{\delta}{\gamma+\delta-1}\,; \quad \text{t. j.} \quad \eta = \frac{\delta}{\gamma+\delta-1}\,, \tag{3}$$

čímž důkaz tvrzení podán

20. Mocnina s libovolným reálným mocnitelem. V předcházejícím odstavci jsme definovali γ^c, kde c jest racionálné a $\gamma > 0$; podáme nyní definici γ^λ, kde λ jest vůbec reálné číslo dané skupinami A, B o číslech racionálných (a) resp. (b). Uvažujme případ $\gamma > 1$. Pak sestrojíme dvě skupiny A_1, B_1 čísel reálných takto: Do skupiny A_1 dáme všechna reálná čísla, jež jsou menší než některé z čísel γ^a, po případě i tomuto číslu rovna, do skupiny B_1 dáme všechna čísla reálná, jež jsou větší než některé z čísel γ^b anebo jemu rovna. Skupiny A_1, B_1 mají pak dle způsobu, jak jsme je stanovili, prvé dvě zákl. vlastnosti odst. 5., jakž okamžitě patrno. Mají však i třetí vlastnost. Neboť je-li ε libovolné číslo kladné a $\delta < \varepsilon\gamma^{-b^{(0)}}$, lze psáti

$$\gamma^b - \gamma^a = \gamma^a(\gamma^{b-a} - 1) < \gamma^{b^{(0)}}(\gamma^{b-a} - 1) < \delta\gamma^{b^{(0)}} < \varepsilon.$$

Při tom $b^{(0)}$ jest libovolné číslo skupiny B pevně zvolené; a, b pak jest třeba voliti tak, aby

$$b - a < \frac{\delta}{\gamma+\delta-1} \quad \text{(viz vztah (2) a (3) předch. odst.)}$$

Tato volba čísel b, a jest vždy možna, neboť jsou to čísla skupiny A, B definujících číslo λ. Mají tedy skupiny reálných čísel A_1, B_1 i třetí základní vlastnost odst. 5. a definují číslo reálné, jež značiti budeme γ^λ.

Z definice téměř bezprostředně následuje, že $\gamma^\mu < \gamma^\lambda$, je-li $\mu < \lambda$. Rovněž i věty zevšeobecňující rovnice (1) můžeme bez potíže dokázati. Dokažme, že $\gamma^\mu \cdot \gamma^\lambda = \gamma^{\lambda+\mu}$. K tomu cíli označíme skupiny definující čísla λ, μ, γ^λ, γ^μ po řadě (A, B), (C, D), (A_1, B_1), (C_1, D_1) a obdobně i čísla těchto skupin $(a, a', \ldots; b, b', \ldots)$, $(c, c', \ldots\ldots)$, $(a_1, a'_1, \ldots)$, ... Utvoříme-li součin $\gamma^\lambda \cdot \gamma^\mu$, dostaneme dvě skupiny čísel reálných; horní ku př. bude obsahovati čísla $b_1 \cdot d_1$, při čemž $b_1 \geqq \gamma^b$, $d_1 \geqq \gamma^d$, tedy $b_1 d_1 \geqq \gamma^{b+d}$, kdež $b + d$ jest číslo horní skupiny v součtu $\lambda + \mu$. Naopak každé číslo horní skupiny pro číslo $\lambda + \mu$ lze psáti ve tvaru $b + d$; avšak každé číslo reálné větší než γ^{b+d} lze rozložiti ve dva faktory reálné, z nichž prvý jest větší než γ^b, druhý pak větší než γ^d t. j. ve dva faktory, z nichž prvý jest jedním z čísel b_1, druhý z čísel d_1. Shoduje se tedy horní skupina patřící k součinu $\gamma^\lambda . \gamma^\mu$ s horní skupinou přiřazenou ke $\gamma^{\lambda+\mu}$. Jelikož totéž lze stejně dokázati i pro dolní skupiny,*) jest

$$\gamma^\lambda . \gamma^\mu = \gamma^{\lambda+\mu}.$$

Úvahy předcházející platí pro $\gamma > 1$; je-li $\gamma = 1$, klademe $\gamma^\lambda = 1$; je-li $\gamma < 1$ (avšak kladné), položíme

$$\gamma^\lambda = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{-\lambda}, \quad \frac{1}{\gamma} > 1,$$

čímž jsme převedli případ kladného $\gamma < 1$ na případ, kdy mocněnec jest větší než jedna. Doporučuji ještě čtenáři provésti důkaz rovnice $(\gamma^\mu)^\lambda = \gamma^{\mu\lambda}$.

Téměř bezprostředně vyplývá zevšeobecnění nerovniny (2) odst. 19. Neboť je-li $\gamma > 1$ a $0 < \lambda < \dfrac{\delta}{\gamma + \delta - 1}$, lze udati číslo racionálné c, pro které $\lambda < c < \dfrac{\delta}{\gamma + \delta - 1}$ a tedy i (2) jest splněno; poněvadž pak $\gamma^c > \gamma^\lambda$, platí tím spíše

$$0 < \gamma^\lambda - 1 < \delta \qquad \text{pro } 0 < \lambda < \frac{\delta}{\gamma + \delta - 1}.$$

Dělíme-li celou nerovninu γ^λ (jež jest větší než 1, jelikož tu $\gamma > 1$), máme

$$0 < 1 - \gamma^{-\lambda} < \delta\gamma^{-\lambda} < \delta,$$

takže můžeme psáti

$$|\gamma^\lambda - 1| < \delta \qquad \text{pro } |\lambda| < \frac{\delta}{\gamma + \delta - 1} \tag{3_1}$$

a pro všechna $\gamma > 1$.

21. Definice logaritmu. Logaritmus čísla reálného γ při základě u (u kladné reálné číslo různé od 1) jest číslo γ_1 hovící rovnici

$$u^{\gamma_1} = \gamma \tag{4}$$

Značíme pak γ_1 krátce takto

$$\gamma_1 = \log_u \gamma.$$

Dokažme za předpokladu $u > 1$, že taková čísla reálná vždy jsou, tím, že je stanovíme skupinami A a B o třech základních vlastnostech. Rozdělme všechna čísla racionálná ve dvě skupiny tak, že do skupiny A

---

*) Jest ostatně patrno, že shodují-li se horní skupiny příslušné ke dvěma reálným číslům, shodují se i dolní leda s výjimkou jediného čísla, kteréž jest potom rozhraním mezi dolní a horní skupinou.

dáme všechna čísla a, pro něž $u^a < \gamma$; do skupiny B dáme všechna čísla b, pro něž $u^b > \gamma$. Patrně jest každé b větší než každé a (viz odst. předch.) a poněvadž vytčeným rozdělením jsou všechna čísla rac. vyčerpána (ve zvláštním případě s vyjmutím jednoho čísla c_1, pro které pak jest $u^{c_1} = \gamma$), mají skupiny A a B vskutku všechny tři základní vlastnosti a definují tudíž určité číslo γ_1. Abychom dokázali, že platna jest nyní rovnice (4), stanovme u^{γ_1} dle předpisu předcházejícího odstavce tím, že sestrojíme nové dvě skupiny C, D. V prvé budou všechna čísla reálná, která jsou menší než některé u^a, v druhé všechna čísla reálná, která jsou větší než některé u^b. Čísla c skupiny C jsou menší než γ, čísla d skupiny D větší než γ. Jelikož pak dle předchozího odstavce C i D mají tři základní vlastnosti, jest skupinami těmi dáno číslo a to jest právě γ. Jest tedy (4) vskutku splněna. Podobně by se provedl důkaz, kdyby $u < 1$.

Z definice logarithmů vyplývají snadno věty z elementů známé:

$$\log_u (\gamma\gamma') = \log_u \gamma + \log_u \gamma', \quad \log_u \gamma^\mu = \mu \log_u \gamma$$

a jiné Z rovnice (4) následuje přímo

$$u = \gamma^{\frac{1}{\gamma_1}}.$$

Je-li $u > 1$ a $\gamma > \gamma'$, jest i $\log_u \gamma > \log_u \gamma'$.

II. O limitách.

22. Množství číselná. Pod množstvím číselným vyrozumíváme souhrn (sbírku) čísel dle určitého předpisu vybraných. Tak ku př. 1, 3, 7, tvoří dohromady množství číselné o třech členech. Všechna čísla racionálná kladná a menší než 1 tvoří rovněž množství číselné; počet členů tohoto množství jest nekonečný. Čísla

$$(m) \qquad \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}, \ldots\ldots$$

tvoří číselné množství rovněž o nekonečném počtu členů.

Množství číselné jest **shora ohraničeno**, lze-li udati číslo L tak, že všechna čísla množství jsou menší než L. Množství číselné jest **zdola ohraničeno**, lze-li udati číslo l tak, že všechna čísla množství jsou větší než číslo l.

Ku př.: Souhrn čísel racionálných kladných a menších než 1 tvoří množství ohraničené shora i zdola. Množství číselné (m) jest rovněž shora i zdola ohraničeno, neboť všechna čísla toho množství jsou menší