

Počet diferenciální

Obsah

In: Karel Petr (author): Počet diferenciální. Část analytická. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1923. pp. [IX]–XVI.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402688>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fysiků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

OBSAH.

Část první.

Základní pojmy a pomůcky.

I. Úvod. Čísla irracionální.

Odstavec	Strana
1.—3. Některé připomínky o číslech racionálních	1
4. 5. Definice řezu v souhrnu čísel racionálních	2
6. Definice čísel irracionálních	5
7. O rozšíření základních operací arithm. pro čísla irracionální	6
8. Sčítání čísel reálných	7
9. Násobení čísel reálných	7
10. Opětované provádění sčítání a násobení čísel reálných	9
11. Odčítání čísel reálných	9
12. Dělení čísel reálných	10
13. Odčítání a dělení čísel reálných jsou výkony jednoznačné . . .	11
14. Porovnání čísel reálných dle velikosti	12
15. Mezi dvěma různými reálnými čísly jest nekonečné množství čísel racionálních	12
16. Souhrn čísel irracionálních jest všude hustý	12
17. Definice řezu v souhrnu čísel reálných všude hustém	13
18. Absolutní hodnota čísel reálných a příslušné věty	16
19. n -tá odmocnina z reálného čísla	16
20. Mocnina s reálným exponentem	18
21. Definice logaritmu	19

II. O limitách.

22. Množství číselná	20
23. Veličina proměnná a některá jiná často používaná pojmenování a zkratky	21
24. Horní a dolní hranice množství číselného	22
25. Body zhuštění	23
26. Definice limity	25
27. O existenci limit v řadách čísel stále rostoucích (klesajících)	25
28. Věta Bolzano-Cauchyova	27
29. Největší a nejmenší z limit	29
30. Pravidla pro počítání s limitami	30

Odstavec	Strana
31. Některé další věty o limitech	34
32. Příklady pro počítání limit	37
33—35. Užití pojmu limity a příslušných vět k definici funkce e^x a čísla e	39
36. Přirozený logarithmus	43
37. Několik limit	46
38. Eulerova konstanta jako limita	47

III. Součty nekonečných řad, nekonečné součiny.

39. Definice součtu a konvergence nekonečné řady	48
40. Nutná a postačující podmínka pro konvergenci řady nekonečné	50
41. Některé z definice přímo vyplývající věty o konvergenci řad. Konvergence absolutní a relativní	52
42. Nekonečné řady s kladnými členy	54
43. Některá speciální kriteria pro konvergenci řad s kladnými členy	56
44. Kriteria limitní pro konvergenci řad s klad. členy	57
45. Řady s kladnými, s rostoucím indexem ubývajícími členy	61
46. Řady absolutně konvergentní	63
47. Řady relativně konvergentní	64
48. Řady alternující	65
49. Řada $1/1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$	66
50. Věta Riemannova pro řady relativně konvergentní	66
51. Dirichletovo a Abelovo kritérium konvergence	68
52. Skládání a rozkládání nekonečných řad	70
53. Řady dvojné	71
54. Transformace Clausenova	72
55. Řady množné (o členech s několika indexy)	73
56. Násobení řad	75
57. O numerickém výpočtu součtu nekonečných řad	78
58. Eulerova transformace nekonečné řady	80
59. Kummerova metoda pro výpočet součtu nekonečných řad	82
60. Nekonečné součiny. Definice konvergence	87
61. Součiny, v nichž čísla u_k jsou vesměs téhož znaménka	89
62. Součiny absolutně konvergentní	91
63. Jiné odvození vět o součinech absol. konvergentních.	92
64. Dvojné součiny	93
65. Součiny relativně konvergentní	94

IV. Funkce jedné proměnné; zvláště funkce spojité.

66. Pojem funkce. Některé jednoduché funkce	96
67. Funkce konečná. Konečný obor. Oscilace funkce	97
68. Věta o horní hranici hodnot funkce konečné	99
69. Intervaly zavřené a otevřené	100
70. O limitech funkcí	100
71. Jiné limitní pojmy při funkcích o jedné proměnné	102
72. Funkce monotonní, ryze monotonní	103
73. Horní a dolní limita funkční	104

Odstavec	Strana
74. O podmínkách pro existenci limity funkce	105
75. Věta Bolzano-Cauchyova o limitách funkcí	106
76. Funkce spojité	106
77—81. Základní věty o funkcích spojitých	107
82. Funkce inverzní	112
83. Některé příklady diskontinuit	113

V. Přehled o funkcích elementárních. Funkcionální rovnice.

84. Elementární funkce	114
85. Řešení funkcionální rovnice $f(x) + f(x') = f(x + x')$	115
86. Řešení dalších rovnic funkcionálních	116
87. Věta binomická	117
88. Rozvoj logaritmický	119
89.—90. Funkce goniometrické	120
91. Rozvoj funkce $\sin x$ v nekonečný součin	127
92. Formule Wallisova	129
93. Rozvoj $\cos x$ v nekonečný součin	130
94. Funkce cyklometrické	130

Část druhá.

Počít diferenciální pro funkci o jedné proměnné.

VI. Derivace funkce jedné proměnné.

1. Základní definice.

95. Definice derivace	134
96. V bodě, ve kterém má funkce derivaci, jest funkcí spojitou	135
97. Geometrický význam derivace	135
98. Pravidla pro počítání derivací	136
99. Derivace elementárních funkcí	140
100. Některá rozšíření pojmu derivace. Derivace zprava a derivace zleva	142
101. Derivace funkce v intervalu. Primitivní funkce	144

2. Věty obecné o derivaci.

102. Funkce rostoucí (klesající) v bodě	146
103. Věta Rolleova	147
104. Věta o střední hodnotě	148
105. Geometrické znázornění věty o střední hodnotě	148
106. Zobecnění věty o střední hodnotě	149
107. Některé jednoduché důsledky věty o střední hodnotě	150
108. Funkce rostoucí (klesající) v intervalu	151
109. Derivace v okolí bodu, ve kterém má funkce diskontinuitu	152

Odtavec	Strana
110.—112. O funkcích, jež mají derivaci ve všech bodech intervalu (a, b)	153
113. O funkcích graficky zobrazitelných (o čarách názoru přístupných)	156
114. O funkcích spojitých nemajících derivace	161
115. Čtyři čísla derivovaná	168

3. Příklady pro užití věty o střední hodnotě.

116. Vyjádření funkcí $\arctg x$ a $\log(1+x)$ polynomy	171
117. Definice $\cos x$, $\sin x$ rovnicemi diferenciálními	172
118. Kriterium konvergence Cauchyovo	174
119. Stanovení zbytku řady	175

4. O nekonečných řadách, jichž členové jsou funkce proměnné veličiny.

120. Stejněměrná konvergence nekonečných řad	176
121. Stanovení primitivní funkce ku funkci dané řadou stejněměrně konvergentní v (a, b)	179
122. Výpočet $\lim_{x=x_0} (u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots)$, je-li nekonečná řada v okolí bodu x_0 stejněměrně konvergentní. Derivace nekonečné řady	180
123. Konvergence zpola stejněměrná nekonečných řad	182
124. 124.* Rozšíření vět odst. 122	183
124.** Podmínky pro platnost rovnice $\lim_{m \rightarrow \infty} [\lim_{n \rightarrow \infty} u_{m,n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{m \rightarrow \infty} u_{m,n}]$ 186	186

VII. Derivace vyšších řádů; řada Taylorova a řady mocninné vůbec, příslušná použití.

1. Definice derivací vyšších řádů.

125. Definice derivací vyšších řádů. Některé jednoduché příklady	189
126. Leibnicova formule	190
127. Funkce liché a funkce sudé	191
128. Derivace vyšších řádů jakožto limity	191
129. Označení diferenciální	194

2. Formule Taylorova.

130. Úkol formule Taylorovy	196
131. Odvození formule Taylorovy	197
132. Zbytek (člen doplňující) ve formuli Taylorově	198
133. Řada Taylorova (Maclaurinova)	199

3. Použití řady Taylorovy na elementární funkce a o numerickém výpočtu těchto funkcí.

134. Exponenciální funkce	201
135. Funkce $\cos x$, $\sin x$	202

Odstavec	Strana
136. Věta binomická	202
137. Řada logaritmická	205
138. O počítání tabulek logaritmických	208
139. Funkce arc tg x a výpočet čísla π	209
140. Funkce arc sin x	210
141. Příklad rozvoje složitější funkce	212

4. Základní věty o řadách potenčních (mocniných).

142. Poloměr konvergence mocninné řady	214
143.—145. Řada mocninná jest uvnitř intervalu konvergenčního funkcei spojitou, mající derivaci. Výpočet této derivace. Rozvoj řady potenční v řadu Taylorovu	216
146. Body nullové uvnitř intervalu konvergenčního jsou body izolované. Věta o neurčitých součinitelích	220
147. Pokračování analytické u funkce dané řadou potenční	223
148. Potenční řady na hranici intervalu konvergenčního	226
149. 150. Věta Abelova	227
151. Cesàrovy arithmetické středy	229
152. Majorantní funkce (řada)	231
153. Dosazení řady potenční do jiné řady potenční	232
154. Dělení řadou potenční	234
155. Funkce inversní ku funkci dané řadou potenční	235

5. Některé příklady k užití obecných vět o řadách mocninných.

156. Rozvoje funkcei cos n (arc sin x), sin n (arc sin x)	239
157. Rozvoj jistých nekonečných součinů v řady mocninné	241
158. Rozklad funkce $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ v nekonečný součin	243
159. Čísla Bérnoulliská	244
160. Rozvoje funkcei tg x , cotg x , sec x , cosec x	245
161. n -tá derivace funkce funkce	247
162. Řada Lagrangeova, Bürmannova	251

6. Pravé hodnoty výrazů neurčitých.

163. Význam rčení »pravá hodnota«	258
164. Limita podílu spojitých funkcei	259
165. Další věty pro limitu podílu	261
166. Věta l'Hospitalova	263
167.—168. Rozšíření výsledků odst. 165.	264
169. Různé obraty vhodné pro výpočet limit	268

7. O maximech a minimech funkce jedné proměnné.

170. Definice absolutního extrému	270
171. Relativní extrém (maximum, minimum)	271
172. Podmínky pro relativní extrém	272
173. Příklad	278
174. Relativní extrém v bodech, ve kterých funkce nemá derivaci	278

Část třetí.

Počet diferenciální pro funkce o několika proměnných.

VIII. Základní pojmy u funkcí o několika proměnných.

Odstavec	Strana
175. Dvě neodvisle proměnné; obor dvojice neodvisle proměnných	280
176. Odchylka (vzdálenost) dvou bodů	282
177. Okolí bodu	283
178. Hranice oboru	284
179. V každém oboru Ω (nehlédě k oborům »celým«) jsou body hraniční	286
180. Obory konečné	286
181. Body zhuštění	287
182. Funkce dvou proměnných	288
183. Funkce konečná	289
184. Věta o horní hranici funkce v konečném oboru	289
185. Limita řady bodové	290
186. Limita funkce o dvou proměnných	291
187. Několik proměnných (základní pojmenování a věty)	292
188. Funkce o n proměnných	294
189. Obory pro neodvisle proměnnou nejčastěji používané	294
190. Funkce spojitá n proměnných	295
191. Základní vlastnosti funkcí spojitých	296
191. a, b Rozšíření vět o funkcích spojitých	298

IX. Derivace a diferenciály funkcí o několika proměnných.

192. Derivace parciální funkcí o dvou proměnných	301
193. Diferenciály parciální (částečné)	302
194. Diferenciál totální funkce o dvou proměnných	302
195. Podmínky, aby funkce měla totální diferenciál	304
196.—197. Derivace a diferenciály funkcí složených	306
198. Derivace parciální druhého řádu	309
199. Druhá věta udávající podmínky pro záměnnost pořadu derivací	312
200. Derivace vyšších řádů	312
201. Totální diferenciály vyšších řádů při funkcích o dvou prom.	313
201a. Jiná definice totálních diferenciálů	315
202. O rovnicích mezi diferenciály	316
203. Derivace parciální funkcí o více proměnných	318
204. Totální diferenciál funkce o několika proměnných	319
205. Částečný diferenciál funkce o několika proměnných	320
205a. Podmínky pro existenci totálního diferenciálu v daném bodě	320
206. Derivace parciální a totální diff. vyšších řádů u funkcí o více proměnných	321
207. Derivace a diferenciály funkce funkcí	322
Věta Eulerova pro homogenní funkce	324
208. Formule Taylorova pro funkce o několika proměnných	325

Řady mocninné o dvou a několika proměnných.

209. Definice a základní věta	327
210. Obor konvergence	328
211. Druhá základní věta. Příklady.	330
212. Derivace parciální mocninných řad o dvou proměnných	332
213. Derivace vyššího řádu. Věta o neurčitých součinitelích	332
214. Věta Taylorova pro mocninné řady o dvou proměnných	335
215. Majorantní funkce	336
216. Dosazování řad mocninných do řad mocninných o dvou proměnných	337
217. Řady mocninné o více proměnných	339

X. Funkce implicitní. Funkcionální determinanty.

218. Definice implicitní funkce	340
219. Implicitní funkce o jedné neodvisle proměnné	340
220. Jiný důkaz a rozšíření věty o implicitní funkci	342
221. Další zobecnění věty o implicitních funkcích	346
222. Výpočet derivací vyšších řádů u funkcí implicitních	349
223. Funkcionální determinant	350
224. Věty o funkcionálních determinantech	352
225. Funkce závislé	355
Řešení m lineárních rovnic o n neznámých	359
Kvadratická forma, jejíž diskriminant jest hodnoty n -té	359

XI. Záměna proměnných. 361

226. I. Úkol. Zavedení nové neodvisle proměnné	362
227. II. Úkol. Zavedení nových neodvisle proměnných	364
228. Zavedení polárních souřadnic do diferenciálních parametrů	367
229. Orthogonální substituce	368
230. Transformace diferenciálních parametrů orthog. subst.	369
231. Doplněk k větě Eulerové o homogenních funkcích	370
232. Transformace funkcionálního determinantu obecnou lineární substitucí	372
233. Polára	373
234. Hessien; diskriminant kvadratické formy	373
235. Obecné substituce orthogonální	374
236. Souřadnice elliptické	378
237. III. Úkol. Zavedení nové neodvisle i odvisle proměnné	380
238.—239. IV. Úkol. Zavedení nových neodvisle a zároveň nové odvisle proměnné	383
240. Jiná metoda pro řešení IV. úkolu	386
241. Invarianty diferenciální pro orthogonální substituci	389

XII: O maximech a minimech funkcí o několika proměnných.

242. Definice a nutné podmínky pro existenci extrému	390
243.—244. Postačující podmínky	392

Odstavec	Strana
245. Nutné a postačující podmínky, aby kvadratická forma byla formou kladnou	394
246. Vyslovení postačujících podmínek pro existenci extrémů na základě věty odst. předch. Příklady	398
247. Důkaz fundamentální věty algebry	405
248. Relativní extrémý implicitních funkcí	407
249. Extrémy vázané , , , , , ,	411
250. Methoda multiplikátorů (Lagrangeova). Příklady	414
Věta Hadamardova o determinantech	420
251. Základní věta o dvou formách kvadratických	425

XIII. O užití řad potečních ku vyšetřování funkcí implicitních.

252. O funkcích implicitních v případě, že levé strany rovnic je definujících jsou dány potenčními řadami	430
253. Rozšíření věty o implicitních funkcích pro libovolný počet rovnic (a odvisle proměnných)	432
254. Řada Lagrangeova pro několik proměnných	434
255. Věta Weierstrassova	441
256. Definice rčení: »funkce y proměnné x jest v bodě $x = 0$ řádu $\alpha \nabla x \leftarrow$. Polygon Newtonův	446
257.—258. Užití věty Weierstrassovy k dalšímu rozkladu rovnice definující implicitně funkci y proměnné x	448
259. Vyšetřování faktorů tak vzniklých	452
260. Stanovení implicitních funkcí řadami v nejjednodušším případě, λ	454
261. Řešení úplné	456
262. Přehled vylíčeného postupu. Příklad	460
263. Příklad semidefinitní při vyšetřování extrémů u funkcí o dvou proměnných	463

Opravy 466
