ODDÍL 3.

POŘADOVÁ ČÍSLA.

1. ÚVODNÍ POZNÁMKY.

Je jasno, že každé množství konečné uspořádané má první prvek: abychom to nahlédli, zvolme v daném konečném uspořádaném množství M nějaký prvek a_1: není-li tento prvním prvkem z M, existuje v M prvek $a_2 \prec a_1$; není-li a_2 ještě prvním prvkem z M, existuje v M prvek $a_3 \prec a_2$ atd; ježto je M konečné, musí se tento postup jednou zakončit — t. j. musíme takto dojíti k nějakému prvku, jenž je prvním prvkem z M.

Ježto každá neprázdná část N konečného uspořádaného množství M je opět konečné množství uspořádané, obsahuje podle právě řečeného též množství N první prvek, t. j.:

*Každé konečné množství uspořádané je dobře uspořádané.**)

Budiž M uspořádané (a tedy dobře uspořádané) množství konečné třeba o n prvcích; potom jeho prvky jsou — volíme-li vhodně indexy — uspořádány takto:

$$a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec \ldots \prec a_n$$

(stačí označiti znakem a_1 první prvek z M, znakem a_2 první prvek z $M - \{a_1\}$, znakem a_3 první prvek z $M - \{a_1, a_2\}$ atd.). Mám-li jiné uspořádané množství konečné N rovněž o n prvcích, lze jeho prvky psáti rovněž podle tohoto schematu

$$b_1 \prec b_2 \prec b_3 \prec \ldots \prec b_n;$$

z toho je vidět, že $M \simeq N$ (stačí přiřaditi prvku a_i prvek b_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$). Naopak, je-li $M \simeq N$ a je-li M konečné, musí býti také N konečné a míti týž počet prvků jako M; neboť

*) Uspořádané množství nekonečné nemusí být dobře uspořádané — viz oddíl 2, odstavec 1, příklad 2, 4, 5, 7, 8.

podobné zobrazení dvou množství jest vzájemně jednoznačné. Tedy: *Dvě konečná množství uspořádaná jsou si podobna tehdy a jen tehdy, mají-li týž počet prvků.**) *Konečné množství nemůže býti nikdy podobno nekonečnému množství.*

Každé nejvýše spočetné uspořádané množství je podobné nějakému uspořádanému množství, jehož prvky jsou celá kladná čísla.

Neboť, je-li za prvé M konečné uspořádané množství o n prvcích, je toto množství podobné každému uspořádanému množství o n prvcích, tedy je na příklad podobné množství $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, uspořádanému podle velikosti.

Je-li za druhé M spočetné uspořádané množství, lze jeho prvky označiti

$$a_1, a_2, a_3, \ldots;$$

budiž N množství všech celých kladných čísel, uspořádané takto: je-li $a_l \prec a_m$, potom budiž $l \prec m$. Zřejmě jest $M \cong N$ (stačí přiřaditi prvku a_k z M v množství N číslo k).

2. POŘADOVÁ ČÍSLA PRVNÍ A DRUHÉ TŘÍDY ČÍSELNÉ.

Uvažujme nyní všechna množství dobře uspořádaná, jejichž prvky jsou celá kladná čísla (tedy jsou to množství nejvýše spočetná). Mezi tato množství patří na příklad množství prázdné, množslví $\{1\}$, množství $\{3\}$, množství $\{1, 3\}$ s pořadím $1 \prec 3$, množství $\{1, 3\}$ s pořadím $3 \prec 1$, množství $\{4, 7\}$ s pořadím $4 \prec 7$ (tato tři poslední množství jsou navzájem různá, ale navzájem podobná), množství všech čísel celých kladných, uspořádaných podle velikosti, množství všech čísel celých kladných, uspořádaných takto: $2 \prec 1 \prec 4 \prec 3 \prec 6 \prec 5 \prec \ldots$, množství všech sudých čísel kladných, uspořádaných podle velikosti (tato tři poslední množství jsou si opět podobná), množství všech celých čísel kladných, uspořádaných takto: $2 \prec 3 \prec 4 \prec \ldots \prec 1$ (t. j. 1 leží za všemi ostatními prvky: ostatní prvky jsou uspořádány podle

---

*) Jinými slovy: dvě množství dobře uspořádaná konečná jsou podobná tehdy a jen tehdy, jsou-li ekvivalentní. Pro množství nekonečná tato věta neplatí; neboť na příklad množství $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, uspořádané podle velikosti, a množství $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, uspořádané tak, že čísla 2, 3, 4, ... jsou uspořádána podle velikosti a číslo 1 leží za všemi ostatními prvky, jsou ekvivalentní, jsou také dobře uspořádaná, ale nejsou podobná (důkaz mohu zajisté přenechati čtenáři).

velikosti: toto množství není podobné žádnému z předcházejících) atd.

Všechna tato množství rozdělíme nyní ve třídy tak, že dvě množství, patřící do téže třídy, jsou si podobná, kdežto dvě množství, patřící do dvou různých tříd, jsou si nepodobná (t. j. shrneme vždy všechna množství sobě navzájem podobná do jediné třídy).*) Tak jednu třídu tvoří množství prázdné, jinou třídu tvoří všechna množství $\{n\}$, jež mají jediný prvek n, jenž je libovolné celé kladné číslo, jinou třídu tvoří všechna množství, jejichž prvky jsou dvě celá kladná čísla v libovolném uspořádání, jinou třídu tvoří všechna množství dobře uspořádaná, jejichž prvky jsou (některá nebo všechna) čísla celá kladná a jež jsou podobná množství všech čísel celých kladných. uspořádanému podle velikosti atd.

Máme-li nyní libovolné nejvýše spočetné dobře uspořádané množství M (jehož prvky jsou docela libovolné — nemusí to být zrovna celá kladná čísla), potom víme z předchozího odstavce, že existuje aspoň jedno dobře uspořádané množství N, jehož prvky jsou celá kladná čísla a jež je podobné množství M. Množství M je pak ovšem podobno všem množstvím, jež patří do téže třídy jako množství N, není však podobno žádnému množství, jež patří do jiné třídy než N.

Každému nejvýše spočetnému dobře uspořádanému množství M je tedy přiřazena jedna a jen jedna z našich tříd (totiž právě ona třída, jež se skládá z množství podobných množství M); je jasno, že dvěma podobným množstvím je přiřazena táž třída, dvěma nepodobným množstvím pak jsou přiřazeny dvě různé třídy.

Pro další úvahy je zcela lhostejno, že ona věc, kterou jsme takovému množství M přiřadili, je právě ona třída, jež se skládá z množství podobných množství M; podstatný je pro následující úvahy pouze tento výsledek:

Každému množství dobře uspořádanému a nejvýše spočetnému M lze přiřaditi jistou věc — kterou nazveme **pořadovým číslem množství** *M (Ordinalzahl, Ordnungszahl) — tak, že dvě podobná množství mají totéž pořadové číslo, dvě nepodobná množství pak mají různá pořadová čísla.*

Podle předchozího odstavce platí: dvě konečná dobře uspořádaná množství mají totéž pořadové číslo tehdy a jen tehdy,

---

*) Že je to možno, plyne z toho, že, platí-li $M \cong N$, $N \cong P$, platí i $M \cong P$.

mají-li stejný počet prvků: pořadové číslo množství konečného dobře uspořádaného nemůže býti rovno pořadovému číslu žádného spočetného množství dobře uspořádaného. Čísla pořadová, příslušející množstvím konečným, budeme nazývati „čísly pořadovými první třídy číselné“; čísla pořadová, příslušející spočetným množstvím, budeme nazývati „čísly pořadovými druhé třídy číselné“. Všechna konečná uspořádaná množství o n prvcích mají totéž pořadové číslo, jež bychom tedy mohli označiti třeba $\boxed{n}$ nebo nějak podobně; ježto není třeba obávati se nedorozumění, budu pořadové číslo množství o n prvcích značiti prostě písmenem n (jakož je také všeobecně zvykem), zrovna tak jako přirozené číslo n. (Číslo 0 (nula) je ovšem pořadovým číslem množství prázdného.)

3. USPOŘÁDÁNÍ POŘADOVÝCH ČÍSEL.

Množství všech pořadových čísel první třídy označme $\mathfrak{Z}_1$, množství všech pořadových čísel druhé třídy označme $\mathfrak{Z}_2$; množství všech čísel pořadových první a druhé třídy jest pak dáno spojením $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$. Toto množství $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ uspořádáme takto: buďtež α, β dva různé prvky ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$; potom existuje množství nejvýše spočetné dobře uspořádané M, jehož pořadové číslo jest α, a rovněž existuje takové množství N, jehož pořadové číslo jest β; ježto $\alpha \neq \beta$, nemůže býti $M \simeq N$. Podle základní věty oddílu 2, odstavce 4 jest tedy buď množství M podobno nějakému úseku množství N (a potom ovšem každé množství podobné množství M je podobno nějakému úseku každého množství podobného množství N, čili každé množství s pořadovým číslem α je podobno nějakému úseku každého množství s pořadovým číslem β) a v tomto případě budeme psáti $\alpha \prec \beta$; nebo jest množství N podobno nějakému úseku množství M (a potom ovšem ...) a v tomto případě budeme psáti $\beta \prec \alpha$. Podle základní věty tyto dva případy se vylučují; jsou-li tedy α, β dvě pořadová čísla ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$, platí vždy jeden a jen jeden z těchto tří vztahů

$$\alpha = \beta, \quad \alpha \prec \beta, \quad \beta \prec \alpha.$$

Budiž nyní $\alpha \prec \beta$, $\beta \prec \gamma$; buďtež M, N, P tři množství, jejichž pořadová čísla jsou resp. α, β, γ; potom je tedy množství M podobno úseku množství N a množství N je podobno úseku množství P; tedy též množství M je podobno úseku množství P; t. j. platí $\alpha \prec \gamma$. Tedy: je-li $\alpha \prec \beta$, $\beta \prec \gamma$, je též $\alpha \prec \gamma$.

Vztah $\prec$, který jsme zavedli pro množství $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$, hoví tedy požadavkům vysloveným v oddílu 2, odstavec 1. Množství $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ jest tedy tímto vztahem uspořádáno.*)

Dokážeme si nyní, že množství $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ je dokonce **dobře uspořádané.** Napřed dokážeme:

I. *Budiž α libovolné pořadové číslo ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$; označme znakem N množství všech čísel ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$, jež jsou $\prec \alpha$; potom je N dobře uspořádané a má pořadové číslo α. (Důsledek: tedy je N nejvýše spočetné.)*

Důkaz: Existuje dobře uspořádané množství M, jež má pořadové číslo α. Prvky množství M a prvky množství N lze si přiřaditi vzájemně jednoznačně takto: každý prvek m z M vytvořuje jistý úsek $A_M(m)$, jenž má nějaké pořadové číslo, označme je $\beta(m)$: ovšem je $\beta(m) \prec \alpha$: různým prvkům m, m' z M odpovídají ovšem různá čísla $\beta(m)$, $\beta(m')$: neboť, jestliže třeba $m \prec m'$, tu jest $A_M(m)$ úsekem množství $A_M(m')$ a tedy $\beta(m) \prec \beta(m')$. Konečně každé pořadové číslo β z N je takto přiřazeno nějakému prvku z M: neboť, je-li $\beta \prec \alpha$, potom každé množství, jež má pořadové číslo β, musí býti podobné nějakému úseku $A_M(m)$; ten úsek má však pořadové číslo $\beta(m)$; tedy $\beta = \beta(m)$. Toto vzájemně jednoznačné přiřazení množství M a N je však dokonce i podobné; je-li totiž $m \prec m'$, potom úsek $A_M(m)$ je úsekem úseku $A_M(m')$ a tedy $\beta(m) \prec \beta(m')$. Množství N je tedy také dobře uspořádané (oddíl 2, odstavec 3, věta IV) a má pořadové číslo α.

II. *Množství $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ je dobře uspořádané.*

Důkaz: Budiž P libovolná neprázdná část množství $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$; zvolme v P nějaký prvek α; buď je α prvním prvkem v P, nebo není; v tomto druhém případě množství P_1, definované jakožto

„množství všech prvků z P, jež jsou $\prec \alpha$",

není prázdné: ježto P_1 je částí množství všech čísel $\prec \alpha$ (kteréžto množství je dobře uspořádané podle předešlé věty), obsahuje P_1 první prvek β, jenž je samozřejmě prvním prvkem množství P (neboť každý prvek z P, jenž není v P_1, je buď $\succ \alpha$ nebo $= \alpha$, kdežto $\beta \prec \alpha$).

*) Když budu v dalším mluviti o množství $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ (nebo o nějakém jeho částečném množství), budu tím rozuměti množství $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ takto uspořádané. Místo „pořadové číslo" budu často, pokud nebude možno nedorozumění, říkati krátce „číslo".

III. *Množství $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ je nespočetné.*

Důkaz: $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ je dobře uspořádané; kdyby bylo nejvýše spočetné, mělo by nějaké pořadové číslo α (ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$): množství N všech pořadových čísel $\prec \alpha$ by mělo podle věty I také pořadové číslo α, t. j. bylo by $N \simeq \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$, což je však nemožno, neboť N je úsekem množství $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$.

4. STRUKTURA MNOŽSTVÍ $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$.

1. Jsou-li m a n dvě čísla ze $\mathfrak{Z}_1$ a je-li $m < n$, je též $m \prec n$ (obšírněji: je-li přirozené číslo m menší než přirozené číslo n, je pořadové číslo m před pořadovým číslem n): neboť množství o n prvcích obsahuje úsek o m prvcích. My budeme v dalším vztah $\prec$ mezi pořadovými čísly ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ psáti jako nerovnost $<$ a také ho budeme tak čísti (místo „α je před β“ budeme říkati „α je menší než β“); pro pořadová čísla první třídy je tento vztah v souhlase s obyčejným vztahem nerovnosti mezi příslušnými čísly přirozenými, takže není se obávati nedorozumění nebo sporu. Čísla ze $\mathfrak{Z}_1$ jsou tedy uspořádána takto (0 je ovšem pořadovým číslem množství prázdného): $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$

2. Každé číslo ze $\mathfrak{Z}_2$ je větší než každé číslo ze $\mathfrak{Z}_1$; jinými slovy: je-li n libovolné celé číslo, $n \geq 0$ a je-li M libovolné spočetné dobře uspořádané množství, potom obsahuje M úsek, složený z n prvků (stačí označiti znakem a_0 první prvek z M, znakem a_1 první prvek z $M - \{a_0\}$, znakem a_2 první prvek z $M - \{a_0, a_1\}$ atd. a sestrojiti úsek $A_M(a_n) = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$).

3. Za každým číslem n ze $\mathfrak{Z}_1$ existuje jedno bezprostředně následující, totiž $n+1$; totéž platí i pro čísla ze $\mathfrak{Z}_2$:

IV. *Ke každému číslu α ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ existuje číslo „bezprostředně následující“, t. j. nejmenší ze všech čísel pořadových větších než α.*

Důkaz: Množství všech čísel $< \alpha$ má podle odstavce 3, věty I pořadové číslo α a je tedy nejvýše spočetné: tedy i množství všech čísel $\leq \alpha$ je nejvýše spočetné; ježto pak $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ je nespočetné (odstavec 3, věta III), jest množství všech čísel $> \alpha$ neprázdné a obsahuje tedy nejmenší (t. j. první) prvek, jak bylo dokázati.

Toto číslo bezprostředně následující po čísle α označuje se $\alpha + 1$ (pro α z první třídy číselné je to ve shodě s označením běžným z aritmetiky).

Obecněji platí:

V. *Je-li $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ nejvýše spočetné množství pořadových čísel ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$, potom existují v $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ čísla větší než všechna a_n (a ježto je $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ dobře uspořádané, existuje mezi těmi čísly, jež jsou větší než všechna a_n, jedno nejmenší).*

Důkaz: Budiž M_n množství všech čísel ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$, jež jsou $\leqq a_n$; potom (viz předešlý důkaz) M_n je nejvýše spočetné a tedy i spojení $M_1 + M_2 + \ldots$ je nejvýše spočetné. Tedy existují v nespočetném množství $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ čísla, jež nepatří k $M_1 + M_2 + \ldots$: t. j. existují čísla, jež jsou větší než všechna a_n.

4. Ke každému číslu n ze $\mathfrak{Z}_1$ (vyjma k nejmenšímu číslu 0) existuje číslo bezprostředně předcházející $n - 1$, t. j. číslo, jehož bezprostředně následujícím číslem je číslo n. Pro čísla ze $\mathfrak{Z}_2$ není tento výrok vždy správný; uvažujme na příklad nejmenší číslo ze $\mathfrak{Z}_2$ (jež se značí obyčejně ω, my je tak budeme také značiti). Toto číslo je tedy větší než každé číslo n ze $\mathfrak{Z}_1$, ale $\leqq$ než každé číslo ze $\mathfrak{Z}_2$. Bezprostředně předcházejícím číslem k ω by mohlo tedy býti jenom nějaké číslo n ze $\mathfrak{Z}_1$; ale n nemůže býti bezprostředně předcházejícím k ω, ježto bezprostředně po n následuje číslo $n + 1$ a nikoliv číslo ω.

Vzhledem k tomu rozeznáváme pořadová čísla dvojího druhu:

a) Pořadová čísla *isolovaná* čili *prvního druhu*, t. j. nula a všechna taková čísla, k nimž existuje číslo bezprostředně předcházející.*)

b) Pořadová čísla *druhého druhu* čili *limitní* (též Grenzzahl), t. j. pořadová čísla od nuly různá, k nimž neexistuje číslo bezprostředně předcházející.

Budiž $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$ rostoucí posloupnost čísel ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$; ježto $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ je spočetné množství, existují podle věty V čísla, jež jsou větší než všechna α_n, a mezi nimi jisté nejmenší α, jež nazýváme limitou té posloupnosti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$:

$$\alpha = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \alpha_n$$

(nedorozumění s pojmem limity obvyklým v diferenciálním počtu jistě se nemusím obávati; pro lepší odlišení píši zde Lim s velkým L).

---

*) Je-li $\alpha < \beta$, je $\alpha + 1 \leqq \beta$ (neboť $\alpha + 1$ je nejmenší z čísel $> \alpha$) a tedy $\alpha + 1 < \beta + 1$. K číslu isolovanému γ existuje tedy *jen jedno* číslo bezprostředně předcházející; neboť kdyby existovala dvě, α a β ($\alpha < \beta$), tu by bylo $\alpha + 1 < \beta + 1$ a tedy by nemohlo býti $\alpha + 1 = \beta + 1 = \gamma$.

Tvrdím: VI. *Toto číslo* $\lim\limits_{n=\infty} \alpha_n$ *je druhého druhu a naopak, každé číslo druhého druhu ze* $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ *lze takto vyjádřit.*

Důkaz: a) Kdyby α bylo prvého druhu,*) existovalo by číslo β takové, že $\beta + 1 = \alpha$; ježto $\beta < \alpha$, musil by existovat index n takový, že $\alpha_n \geqq \beta$; tedy by bylo $\alpha_{n+1} \geqq \alpha_n + 1 \geqq \beta + 1 = \alpha$, a tedy by nebylo α větší než všechna α_n.

b) Budiž za druhé α číslo druhého druhu; budiž N množství všech čísel menších než α: podle odstavce 3, věty I je N množství nejvýše spočetné,**) není však prázdné (neboť $\alpha \neq 0$); budiž

$$\{N = \beta_1, \beta_2, \ldots\}.$$

N neobsahuje největšího čísla, neboť toto největší číslo by bylo zřejmě číslem bezprostředně předcházejícím před α. Můžeme tedy definovati jistou rostoucí posloupnost

$$\beta_{k_1} < \beta_{k_2} < \beta_{k_3} < \ldots$$

pořadových čísel takto: $\beta_{k_1} = \beta_1$: ježto N neobsahuje největšího čísla, existuje v N číslo $> \beta_{k_1}$: budiž k_2 nejmenší index takový, že $\beta_{k_2} > \beta_{k_1}$: budiž dále k_3 nejmenší index takový, že $\beta_{k_3} > \beta_{k_2}$ (ovšem jest $k_3 > k_2$) atd. Tvrdím:

$$\alpha = \lim_{n=\infty} \beta_{k_n}.$$

Především jest samozřejmě $\alpha > \beta_{k_n}$ pro každé n: za druhé, kdyby existovalo číslo menší než α, jež by bylo větší než všechna β_{k_n}, musilo by to číslo býti v N; nechť je to třeba číslo β_l; najděme n tak, že $k_n < l < k_{n+1}$ (rozhodně musilo by býti l různé ode všech k_n): potom by však β_l bylo číslo větší než β_{k_n}, což není možno, neboť k_{n+1} je *nejmenší* index takový, že $\beta_{k_{n+1}} > \beta_{k_n}$.

Tedy skutečně: je-li α libovolné číslo limitní ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$, lze nalézti rostoucí posloupnost čísel ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$$

tak, že

$$\alpha = \lim_{n=\infty} \alpha_n.$$

5. Všimněme si poněkud začátku množství $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$. Napřed přijdou všechna čísla ze $\mathfrak{Z}_1$:

$$0, 1, 2, 3, \ldots;$$

bezprostředně po nich následuje nejmenší číslo ze $\mathfrak{Z}_2$, které jsme

*) α je jistě různé od nuly, dokonce — jak čtenář snadno nahlédne — patří α k $\mathfrak{Z}_2$.

**) Dokonce právě spočetné, neboť α je jistě číslo ze $\mathfrak{Z}_2$.

(sub 4.) označili ω; potom přijde číslo $\omega+1$, potom číslo $(\omega+1)+1$ — jež se značívá $\omega+2$; potom číslo $(\omega+2)+1$, jež se značívá $\omega+3$ atd. Rostoucí posloupnost $\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots$ má limitu, jež se značívá $\omega.2$; potom přijdou čísla $\omega.2+1, \omega.2+2, \omega.2+3, \ldots, \omega.2+n, \ldots$; tato posloupnost má opět limitu, jež se značí $\omega.2+\omega$ čili $\omega.3$; čtenáři je již jistě jasno, co znamená $\omega.n$ $(n=1,2,3,\ldots)$; číslo bezprostředně následující po všech číslech $\omega.n+k$ $(n=1,2,3,\ldots,\ k=0,1,2,\ldots)$ značí se $\omega.\omega$ nebo ω^2; potom přijdou čísla

$$\omega^2+1,\ \omega^2+2, \ldots,\ \omega^2+\omega,\ \omega^2+\omega+1,\ \omega^2+\omega+2, \ldots,\ \omega^2+\omega.2,\ \omega^2+\omega.2+1, \ldots,$$
$$\omega^2+\omega.3, \ldots,\ \omega^2+\omega.n+k, \ldots,\ \omega^2+\omega^2=\omega^2.2,\ \omega^2.2+1, \ldots,$$
$$\omega^2.2+\omega.n+k, \ldots,\ \omega^2.3, \ldots,\ \omega^2n+\omega k+l, \ldots,\ \omega^2.\omega=\omega^3, \ldots;$$

čtenář zajisté již poznal, jak se definuje $\omega^n.m_0+\omega^{n-1}m_1+\ldots$ $\ldots+\omega m_{n-1}+m_n$; číslo bezprostředně následující po všech takových „mnohočlenech" označuje se ω^ω atd.

Začátek množství $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$ vypadá tedy takto:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega.2, \omega.2+1, \omega.2+2, \ldots, \omega.3, \ldots, \omega.k+n, \ldots,$$
$$\omega^2,\ \omega^2+1, \ldots,\ \omega^2+\omega k+l, \ldots,\ \omega^n.m_0+\omega^{n-1}.m_1+\ldots+\omega m_{n-1}+m_n, \ldots,$$
$$\omega^\omega, \omega^\omega+1, \ldots;$$

vzpomeňme si, že množství všech pořadových čísel menších než α má pořadové číslo α (odstavec 3, věta I): tedy 0 jest pořadovým číslem množství všech pořadových čísel <0, t. j. množství prázdného; 3 jest pořadovým číslem množství $\{0, 1, 2\}$: ω jest pořadovým číslem množství $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$: $\omega+2$ jest pořadovým číslem množství $\{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1\}$, $\omega.2$ jest pořadovým číslem množství $\{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots\}$ atd. Toto postupné vybudování pořadových množství $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$, jakož i teorii „sčítání" a „násobení" čísel lze vybudovati systematičtěji; omezuji se však na těchto několik nesoustavných poznámek, jen aby se čtenář seznámil s několika nejmenšími čísly ze $\mathfrak{Z}_2$ a utvořil si jakousi představu o struktuře množství $\mathfrak{Z}_2$; v dalším nebudeme tento bod 5. nikde potřebovati.

5. TRANSFINITNÍ INDUKCE.

Čtenáři je známa t. zv. úplná indukce: obdobnou úlohu, jakou má pro množství všech čísel celých $\geqq 0$ úplná indukce, má pro množství všech čísel ze $\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_2$ t. zv. transfinitní indukce. Abych čtenáře na ni připravil, proberu napřed úplnou indukci. Úplná indukce spočívá na této větě:

Věta A. Budiž M nějaké množství, jehož prvky jsou celá čísla $\geqq 0$, *jež má tyto dvě vlastnosti:*

1. 0 *patří k M;*

2. *Je-li n celé kladné číslo, a patří-li k M všechna celá čísla m, hovící nerovnostem* $0 \leqq m < n$, *potom i číslo n patří k M.*

Tvrdím: potom množství M obsahuje všechna čísla celá $\geqq 0$.

Důkaz: Kdyby tomu tak nebylo, existovala by celá čísla $\geqq 0$, jež nepatří k M, a mezi těmi čísly by existovalo jisté nejmenší, označme je n. Podle 1. musí býti $n > 0$; ježto n je nejmenší kladné číslo, jež nepatří k M, tedy všechna celá čísla m, pro něž $0 \leqq m < n$, patří k M; tedy by podle 2. také číslo n patřilo k M, což dává spor.

Z věty A plyne hned:

Věta B (úplná indukce). Budiž předložen nějaký výrok $f(n)$ *závislý na celém čísle n* ($n \geqq 0$), *jenž má tyto vlastnosti:*

1. *Výrok* $f(0)$ *je správný (t. j. výrok* $f(n)$ *je správný pro* $n = 0$);

2. *je-li n celé kladné, a je-li výrok* $f(m)$ *správný pro všechna celá čísla m hovící nerovnostem* $0 \leqq m < n$, *potom je správný i výrok* $f(n)$.

Tvrdím: potom je výrok $f(n)$ *správný pro všechna celá čísla* $n \geqq 0$.

Důkaz: Budiž M množství oněch celých čísel $n \geqq 0$, pro něž výrok $f(n)$ je správný; podle předpokladů 1. a 2. splňuje množství M předpoklady 1. a 2. věty A; tedy podle věty A obsahuje M všechna celá čísla $\geqq 0$, jak bylo dokázati.

Jak je čtenáři známo, nemusí úplná indukce začínati u nuly, nýbrž u jedničky nebo u dvojky atd. Příslušné změny ve znění a v důkazech vět A a B mohu přenechati čtenáři. Transfinitní indukce spočívá pak na této větě:

Věta C. Budiž M nějaké množství, jehož prvky jsou čísla ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ *a jež má tyto vlastnosti:*

1. 0 *patří k M;*

2. *Je-li* α *libovolné číslo ze* $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$, *různé od nuly a patří-li k M všechna pořadová čísla* β, *pro něž* $0 \leqq \beta < \alpha$, *potom patří i číslo* α *k množství M.*

Tvrdím: $M = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$.

Důkaz: Kdyby existovala v $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ čísla, jež nepatří k M, existovalo by mezi těmito čísly číslo nejmenší (ježto $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ je dobře uspořádané), označme je α; potom by bylo podle 1. nutně

$\alpha > 0$ a všechna čísla β, pro něž $0 \leqq \beta < \alpha$, by musila patřiti k M: tedy by podle 2. i číslo α patřilo k M, což dává spor.

Z věty C plyne ihned:

Věta D **(transfinitní indukce).** *Budiž předložen výrok $f(\alpha)$, závislý na pořadovém čísle α, jenž má tyto vlastnosti:*

1. Výrok $f(0)$ je správný;

2. je-li $\alpha > 0$ pořadové číslo ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ a je-li výrok $f(\beta)$ správný pro všechna pořadová čísla β, pro něž $0 \leqq \beta < \alpha$, potom je správný i výrok $f(\alpha)$.

Tvrdím: Výrok $f(\alpha)$ je správný pro všechna pořadová čísla α ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$.

Důkaz: Budiž M množství oněch čísel α ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$, pro něž výrok $f(\alpha)$ je správný; následkem předpokladů 1. a 2. hoví množství M předpokladům 1. a 2. věty C, a tedy jest podle věty C: $M = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$, jak bylo dokázati.

Transfinitní indukce opět nemusí začínat u nuly, nýbrž u libovolného čísla α_0 ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$: příslušné změny ve znění a v důkazech vět C a D mohu přenechati čtenáři.

6. ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY.

V definici pořadových čísel byla jedině podstatná ta okolnost, že každému dobře uspořádanému nejvýše spočetnému množství byla přiřazena jistá věc tak, že dvěma podobným množstvím je přiřazena táž věc, dvěma nepodobným množstvím dvě různé věci. Jakého druhu ta věc je, je lhostejno. Přirozeně nemusíme se při této definici omeziti na množství nejvýše spočetná: stejným způsobem lze zavésti pořadová čísla pro libovolná dobře uspořádaná množství: každému množství dobře uspořádanému přiřadíme jistou věc — kterou nazveme pořadovým číslem toho množství — tak, že dvěma podobným množstvím je přiřazena táž věc, dvěma nepodobným množstvím jsou přiřazeny dvě různé věci. My jsme se omezili pro větší jasnost, konkretnost a stručnost jen na pořadová čísla ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$, t. j. na pořadová čísla, odpovídající množstvím nejvýše spočetným. Proto též v následujícím, budu-li říkati pořadové číslo (někdy třeba jen „číslo“, pokud nehrozí nedorozumění), jest rozuměti vždy jen pořadová čísla ze $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$. Pořadová čísla, odpovídající množstvím nekonečným, nazývají se též **čísly transfinitními** (pro nás to jsou tedy čísla ze $\mathfrak{Z}_2$).

Obdobnou definici lze zavésti též pro libovolná množství uspořádaná (jejichž zvláštním případem jsou množství dobře uspořádaná): každému množství uspořádanému přiřadíme jistou věc tak, že dvěma podobným množstvím odpovídá táž věc, dvěma nepodobným množstvím odpovídají dvě různé věci. Ta „věc" nazývá se pak **pořadovým typem** toho množství. Pořadová čísla můžeme, chceme-li (a také se to obyčejně tak dělá) pokládati za speciální případ pořadových typů: pořadový *typ* množství *dobře* uspořádaného nazveme prostě jeho pořadovým *číslem*.

Obdobnou definici lze zavésti i při pojmu *ekvivalence* (oddíl 1.): každému množství přiřadíme jistou věc — kterou nazveme **„kardinálním číslem"** toho množství — tak, že dvěma ekvivalentním množstvím je přiřazena táž věc, dvěma neekvivalentním množstvím jsou přiřazeny dvě různé věci.

Teorii pořadových čísel lze vybudovati velmi bohatě; první počátky poznal čtenář v tomto oddílu. Obdobnou teorii lze vybudovati pro kardinální čísla: to je umožněno následující slavnou větou Zermelovou, která dává jistý vztah mezi naukou o obecných množstvích (ve smyslu oddílu 1, tedy bez jakéhokoliv uspořádání prvků) a mezi teorií množství dobře uspořádaných: *Každé množství lze dobře uspořádati.* (T. j. v každém množství M lze definovati uspořádání prvků tak, že M se stane množstvím dobře uspořádaným.)

Uvádím tyto poznámky jen pro orientaci čtenáře; nebudeme jich v následujícím nikde potřebovati. Čtenář, jenž by se blíže o ně zajímal, najde poučení v literatuře, uvedené na konci tohoto dodatku.