Počet integrální

Základní pojmy. Ekvivalence

In: Karel Petr (author); Vojtěch Jarník (author): Počet integrální. s dodatkem Úvod do teorie množství. (Czech). : Jednota československých mathematiků a fysiků, 1931. pp. 657--670.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402677

Terms of use:

© Jednota československých mathematiků a fysiků

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

ODDÍL 1.

ZÁKLADNÍ POJMY. EKVIVALENCE.

1. ÚVOD.

Čtenář této knihy už asi na příkladech poznal, co rozumíme slovem „množství“ (Menge, ensemble). „Množství“ jest souhrn nějakých věcí (hmotných nebo pomyslných), jež nazýváme prvky čili elementy toho množství. Tato věta podává ovšem spíše pouhé ozřejmění, objasnění, vysvětlení pojmu „množství“ než jeho definici; nebudu se zde otázkou definice pojmu „množství“ zabývati, nýbrž budu vycházeti z předpokladu, že tento pojem jest na základě předcházejícího ozřejmění a následujících příkladů čtenáři dostatečně (aspoň pro naše úvahy dostatečně) jasný.

PŘÍKLADY MNOŽSTVÍ.

1. Množství všech obyvatelů Prahy (v daném okamžiku): prvky tohoto množství jsou všichni obyvatelé Prahy.

2. Množství všech čísel celých kladných: prvky jsou tedy čísla $1, 2, 3, \ldots$ $\ldots, 47, \ldots$ (nikoliv však číslo $\frac{3}{2}$).

3. Množství všech čísel x, jež hoví nerovnostem $1 < x < 2$: prvky jsou tedy na příklad čísla $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$, $\sqrt{2}$; nikoliv však čísla $0, 1, 2, \pi$. Pro množství tohoto druhu zavádíme zvláštní označení a pojmenování, jež vyložím. Buďte a, b reálná čísla, $a < b$; potom množství všech čísel x, jež hoví vztahům $a < x < b$, nazýváme otevřeným intervalem a značíme je (a, b); množství všech čísel x, hovících vztahům $a \leqq x \leqq b$, nazýváme uzavřeným intervalem a značíme je $\langle a, b \rangle$. Konečně množství všech čísel x, jež hoví nerovnostem $a \leqq x < b$ resp. $a < x \leqq b$, nazýváme polouzavřeným intervalem a značíme je $\langle a, b)$ resp. $(a, b\rangle$. Vedle těchto intervalů zavádíme ještě „nekonečné intervaly“ takto: značky $\langle a, \infty)$, (a, ∞), $(-\infty, a\rangle$, $(-\infty, a)$ značí množství všech čísel x, pro něž $x \geqq a$, resp. $x > a$, resp. $x \leqq a$, resp. $x < a$. Znakem $(-\infty, +\infty)$

značíme konečně množství všech čísel reálných. Toto označení liší se trochu od označení zavedeného v ostatních kapitolách této knihy; odpovídá však potřebám teorie množství, kde se všechny druhy intervalů často vyskytují. Někteří autoři místo závorek $\langle\ \rangle$ užívají zde závorek $[\ ]$.

4. Množství všech čísel, ležících buď v intervalu $(0, 1)$ nebo v intervalu $(2, 3)$. Prvky tohoto množství jsou na příklad čísla $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, $2\sqrt{2}$, nikoliv však čísla 0, -1, $\frac{3}{2}$, 3, 4.

5. Množství intervalů, jehož prvky jsou intervaly $(0, 1)$ a $(2, 3)$. Množství 4. a 5. jsou *různá* — ačkoliv, kdybychom si je chtěli nějak naznačit graficky na ose číselné, nemohli bychom asi učinit nic jiného, než nakresliti v obou případech týž obrázek, totiž úsečku $(0, 1)$ a úsečku $(2, 3)$. Ta množství jsou různá, neboť množství 4. má za prvky čísla, kdežto množství 5. má za prvky intervaly; množství 4. má nekonečně mnoho prvků, množství 5. má jen dva prvky.

6. Množství všech prvočísel, jež jsou větší než 11 a menší než 17. Toto množství obsahuje *jediný* prvek, totiž prvočíslo 13.

7. Množství, jehož prvky jsou čísla 2, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$.

8. Množství všech bodů v rovině: prvky jsou jednotlivé body v rovině.

9. Množství všech kružnic v rovině: prvky jsou jednotlivé kružnice v rovině.

10. Množství všech čísel kladných: prvky jsou čísla kladná.

11. Množství, jehož prvky jsou:

a) všechna čísla celá kladná,

b) interval $(0, 2)$,

c) král Václav IV.

Na tomto příkladě jsem chtěl jen drasticky ukázat, že prvky nějakého množství mohou býti věci zcela různorodé. Číslo jest tehdy a jen tehdy prvkem tohoto množství, je-li celé kladné; interval jest tehdy a jen tehdy prvkem tohoto množství, je-li totožný s intervalem $(0, 2)$; člověk jest tehdy a jen tehdy prvkem tohoto množství, je-li totožný s Václavem IV.

Množství jest dáno, je-li určeno, které prvky k němu patří. Dvě množství M a N budeme tedy považovati za totožná (označení $M = N$), jestliže se skládají z týchž prvků.

Tak na příklad je-li M množství všech prvočísel menších než 10 a je-li N množství, jehož prvky jsou čísla $2, 3, 5, 7$, tedy je $M = N$. Množství vyznačujeme často také tak, že napíšeme prvky toho množství a dáme je do vlnité závorky; tak na příklad $\{2, 7, 3\}$ jest množství, jehož prvky jsou čísla $2, 7, 3$ (jest ovšem $\{2, 7, 3\} = \{2, 3, 7\} = \ldots$). Nechceme-li nebo nemůžeme-li vypsati všechny prvky, vyznačujeme nenapsané prvky tečkami, při čemž ovšem musí býti nějak určeno, které jsou ty nenapsané prvky: na příklad: množství všech celých čísel od 1 do 100: $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$; množství všech celých čísel kladných: $\{1, 2, 3, \ldots\}$; množství všech čísel celých: $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Pro různé úvahy bývá užitečno zavésti pojem **množství prázdného** (leere Menge, Nullmenge — ale posledního názvu se užívá i v jiném smyslu: ensemble vide), t. j. množství, jež neobsahuje vůbec žádného prvku; tím docílíme často jednodušší formulace.

(Na příklad: Buďte a, b dvě celá čísla, $a < b$; znakem $M(a, b)$ označme množství všech prvočísel, jež jsou větší než a a současně menší než b; toto množství někdy není prázdné — třeba pro $a = 6$, $b = 8$; jindy je prázdné — třeba pro $a = 23$, $b = 29$; kdybychom nepřipouštěli množství prázdné, musili bychom rozeznávati dva případy, které pro velká a a b mohou býti dost těžko rozeznatelné.)

Jsou-li M a N dvě množství, potom říkáme, že N je **částečným množstvím** (Teilmenge, sous-ensemble) množství M (píšeme to $N \subset M$), jestliže každý prvek z N je také prvkem množství M (nebo jinak a snad jasněji: jestliže neexistuje prvek, jenž by patřil k N a při tom nepatřil k M).*) Podle této definice je především množství prázdné částečným množstvím každého množství; za druhé je vždy množství M částečným množstvím množství M (t. j. každé množství je částečným množstvím sebe sama). Každé částečné množství množství M, jež není totožné s M (t. j. každé množství N, hovící vztahům $N \subset M$, $N \neq M$), nazýváme pravým částečným množstvím množství M. Pro zkrácení budeme místo „částečné množství“ říkati také **část.**

2. ZÁKLADNÍ ÚKONY.

Máme-li několik množství, můžeme s nimi prováděti různé úkony, jež nyní zavedeme.

Jsou-li M_1, M_2 dvě množství, nazýváme jejich „**spojením**“ (Vereinigungsmenge nebo Summe, somme) množství N oněch prvků, jež jsou prvky aspoň jednoho z obou množství M_1, M_2; a píšeme $N = M_1 + M_2$.

PŘÍKLAD. M_1 (resp. M_2) budiž množství oněch čísel x, pro něž $0 < x < 2$ (resp. pro něž $1 < x < 3$). $M_1 + M_2$ je potom množství všech čísel x, hovících nerovnosti $0 < x < 3$.

Je patrno, že $M_1 \subset M_1 + M_2$; $M_1 + M_2 = M_2 + M_1$. Rovnost $M_1 = M_1 + M_2$ platí zřejmě tehdy a jen tehdy, je-li $M_2 \subset M_1$.

Tato definice rozšiřuje se beze všeho na libovolný počet „sčítanců“. Máme-li m množství $M_1, M_2, \ldots, M_m$, nazveme jejich

*) Definicím z teorie množství jest obyčejně rozuměti v tomto záporném smyslu; jinak by bylo často nutno vyslovovati definici zvlášť pro množství prázdná.

spojením množství všech prvků, jež jsou prvky aspoň jednoho z těch množství; značka

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_m \quad \text{nebo} \quad \sum_{k=1}^{m} M_k.$$

A obdobně při nekonečném počtu „sčítanců".*)

Na příklad budiž M_0 množství lichých čísel kladných; M_1 budiž množství všech kladných čísel, dělitelných dvěma, ale nedělitelných čtyřmi; obecně budiž M_k množství všech čísel celých kladných, dělitelných 2^k, ale nedělitelných 2^{k+1}. Spojení $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ je pak množství všech čísel celých kladných.

Podobně definujeme „**průnik**" dvou množství (Durchschnitt, produit): jsou-li dána dvě množství M_1, M_2, nazýváme průnikem těch množství množství oněch prvků, jež jsou obsaženy současně v obou těch množstvích; značka $M_1 M_2$.

PŘÍKLADY. 1. Budiž M_1 interval $(0, 2)$, t. j. množství všech čísel x, pro něž $0 < x < 2$; M_2 budiž interval $(1, 3)$. Potom $M_1 M_2$ jest interval $(1, 2)$.

2. Budiž M_1 interval $(0, 1)$, M_2 interval $(1, 2)$; množství $M_1 M_2$ jest množství prázdné.

Obdobně se definuje průnik libovolného konečného počtu množství $M_1, M_2, \ldots, M_m$ jakožto množství všech prvků, jež patří ke všem těmto množstvím; značka

$$M_1 M_2 \ldots M_m \quad \text{nebo} \quad \prod_{k=1}^{m} M_k.$$

Obdobně pro nekonečný počet množství; značka $\prod_{n}^{N} V_n$ (viz předešlou poznámku pod čarou).

PŘÍKLAD. Budiž M_n interval $(-1/n, 1/n)$ (pro $n = 1, 2, 3, \ldots$); potom průnik $\prod_{n=1}^{m} M_n$ jest interval $(-1/m, 1/m)$ a průnik $\prod_{n=1}^{\infty} M_n$ jest $\{0\}$ (t. j. množství, jehož jediný prvek je číslo 0).

POZNÁMKA. Někteří autoři užívají místo $+$, Σ, Π značek $\dotplus$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$ při tom značek $+$ a Σ (a slova Summe) užívají jen tehdy, jestliže žádný prvek nepatří k více než jednomu „sčítanci".

---

*) Podrobně by se definovalo spojení takto: budiž dáno nějaké množství N; každému prvku n z N budiž přiřazeno nějaké množství V_n. Spojením těch množství V_n nazýváme množství všech prvků, jež patří alespoň k jednomu množství V_n; značka $\sum_{n}^{N} V_n$.

Pro počítání s průniky a spojeními lze odvoditi různá pravidla; na příklad platí

$$A(B+C)=AB+AC,$$

neboť vlevo stojí množství všech prvků, jež patří k A a současně buď k B nebo k C, vpravo pak množství všech prvků, jež patří buď k A a současně k B nebo k A a současně k C. Čtenář může jako cvičení dokázati si vztah

(2) $$AB+C=(A+C)(B+C)$$

jakož i zobecnění vztahů (1) a (2) na libovolný počet množství:

$$A\sum_n^N B_n=\sum_n^N AB_n,$$

$$A+\prod_n^N B_n=\prod_n^N (A+B_n).$$

Budtež dána dvě množství A, B, kdež $B\subset A$; potom znakem $A-B$ značíme množství všech prvků z A, jež *nepatří* k B. Tedy $A=B+(A-B)$, kdež oba sčítanci vpravo nemají společných prvků, t. j. $B(A-B)$ jest množství prázdné. Množství $A-B$ nazývá se **rozdílem** množství A, B nebo též množstvím doplňkovým (čili komplementárním) množství B vzhledem k množství A (komplementäre Menge, ensemble complémentaire). Poznamenejme, že podle naší definice jest rozdíl $A-B$ definován jen tehdy, je-li $B\subset A$. Je-li B zcela libovolné, potom množství prvků z A, jež nepatří k B, jest patrně $A-AB$ (pro případ $B\subset A$ je ovšem $AB=B$ a dostáváme tak opět rozdíl $A-B$). Je třeba podotknouti, že obvyklá početní pravidla pro součet a rozdíl zde nemusí platiti; na příklad budiž A interval $(0, 3)$, B interval $(0, 2)$, C interval $(0, 1)$; potom je $A-B$ interval $\langle 2, 3)$, a tedy $(A-B)+C$ je spojení intervalů $(0, 1)$ a $\langle 2, 3)$. Dále je $A+C$ interval $(0, 3)$, a tedy $(A+C)-B$ je interval $\langle 2, 3)$; konečně $A+(C-B)$ není vůbec definováno, neboť není $B\subset C$.

Mysleme si, že dvě množství M_1, M_2 jsou obě částmi množství E; potom $E-(M_1+M_2)$ je množství všech prvků z E, jež nepatří ani k M_1 ani k M_2. Týž význam má však množství $(E-M_1)(E-M_2)$. Tedy platí

$$E-(M_1+M_2)=(E-M_1)(E-M_2);$$

t. j. doplněk spojení rovná se průniku doplňků. Analogicky platí (jak čtenář snadno dokáže), že doplněk průniku rovná se spojení doplňků, t. j.

$$E-M_1M_2=(E-M_1)+(E-M_2).$$

Čtenář snadno zjistí, že oba tyto vztahy platí i pro libovolný počet množství. Tato jakási dualita mezi spojením a průnikem je často užitečná.

3. EKVIVALENCE.

Množství dělíme na **konečná***) (jež obsahují konečný počet prvků) a **nekonečná** (jež obsahují nekonečný počet prvků). Tak v příkladech odstavce 1 jsou množství 1, 3, 6, 7 konečná, ostatní nekonečná. Konečná množství můžeme dále dělit podle počtu jejich prvků; o dvou množstvích konečných, jež mají stejný počet prvků, budeme říkat, že jsou ekvivalentní. Jak poznáme, jsou-li dvě konečná množství ekvivalentní, t. j. mají-li stejný počet prvků?

Představme si, že přineseme do třídy, kde jest určitý počet žáků, několik sešitů a řekneme: vezměte si každý jeden sešit! Jestliže pak každý žák dostane jeden sešit a žádný sešit nezbude, jest těch sešitů stejný počet jako žáků. Je-li však sešitů jiný počet než žáků, není takovéto rozdělení možné: buď zbudou sešity nebo zbudou žáci bez sešitů. Je vidět, že tento způsob rozhodování o ekvivalenci jest možno formulovati obecně: dvě množství konečná jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, jestliže jest možno, přiřaditi prvky jednoho množství vzájemně jednoznačně prvkům druhého množství. A zřejmě tento proces vzájemně jednoznačného přiřazení není nutno omezovati na množství konečná; proto definujeme obecně: *Dvě množství M a N nazýváme* **ekvivalentními**, *jestliže je možno prvky množství M přiřaditi vzájemně jednoznačně prvkům množství N* (obšírněji řečeno: jestliže lze sestrojiti množství párů $[a, b]$ takové, že první člen každého páru je prvkem z M a druhý prvkem z N, a to tak, že každý prvek z M je prvním členem jednoho a jen jednoho páru a rovněž každý prvek z N je druhým členem jednoho a jen jednoho páru. Při tom tedy pořadí obou členů v páru je podstatné; dva páry $[a, b]$, $[a', b']$ pokládám za totožné tehdy a jen tehdy, je-li $a=a'$, $b=b'$).

Jsou-li množství M, N ekvivalentní, píšeme $M \sim N$; říká se také, že množství M a N mají touž mocnost (Mächtigkeit, puissance) nebo totéž kardinální číslo.

V definici nikde se nepožaduje, aby množství M a N neměla společných prvků; na příklad množství $\{1, 2, 3\}$ a množství

*) Množství prázdné počítáme mezi množství konečná.

$\{2, 3, 5\}$ jsou ekvivalentní. Uveďme ještě příklad, kde množství N je pravou částí množství M a přes to je $M \sim N$: budiž M množství všech čísel celých kladných, N budiž množství všech čísel sudých kladných; jest $M \sim N$, neboť stačí každému číslu n z M přiřaditi v N sudé číslo $2n$. U konečných množství ovšem nemůže takový případ nastati; dvě konečná množství jsou si ekvivalentní tehdy a jen tehdy, mají-li stejný počet prvků a tedy, jestliže N je pravou částí konečného množství M, nemůže býti $N \sim M$. Rovněž je jasno, že konečné množství nemůže býti ekvivalentní množství nekonečnému.

Připomeňme ještě, že každé množství je zřejmě ekvivalentní samo sobě: $M \sim M$. Definice ekvivalence jest symetrická, vztahy $M \sim N$ a $N \sim M$ znamenají tedy totéž. Je-li $M \sim N$ a $N \sim P$, je zřejmě též $M \sim P$ (neboť přiřadíme-li vzájemně jednoznačně prvky z M prvkům z N a prvky z N prvkům z P, jsou tím zřejmě také prvky z M vzájemně jednoznačně přiřazeny prvkům z P).

4. SPOČETNÁ MNOŽSTVÍ.

Nejběžnější nekonečné množství je množství celých čísel kladných $\{1, 2, 3, \ldots\}$; množství, jež jsou s tímto **množstvím** ekvivalentní, nazýváme **spočetnými** (abzählbar, dénombrable). Prvky množství spočetného dají se tedy přiřaditi vzájemně jednoznačně celým číslům kladným, t. j. dají se **očíslovati** pomocí čísel 1, 2, 3, ... Množství spočetné je tedy takové množství, jež se dá psáti ve tvaru

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}. \tag{3}$$

Každá nekonečná část množství spočetného je opět spočetná; důkaz leží nasnadě: budiž N nekonečná část množství (3); probírejme po řadě prvky $x_1, x_2, \ldots$; první z nich, který patří k N, budiž x_{n_1}; druhý z nich, který patří k N, budiž x_{n_2} atd; tak dostanu zřejmě množství N ve tvaru

$$N = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\}$$

a tedy je N spočetné (stačí, přiřadíme-li každému celému kladnému číslu k prvek x_{n_k}). Tedy na příklad množství všech čísel sudých kladných, množství všech čísel lichých kladných, množství všech prvočísel jsou spočetná množství.

Množství konečná a spočetná zahrnujeme jednotným názvem „nejvýše spočetná množství“.

*Věta: Spojení nejvýše spočetného množství nejvýše spočetných množství je nejvýše spočetné množství.**)

Důkaz: Buďte ta množství $M_1, M_2, M_3, \ldots$ (ta řada je konečná nebo nekonečná) a budiž

$$M_n = \{ a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots \}$$

(také zde v závorce může stát řada prvků konečná nebo nekonečná). Potom lze seřaditi prvky spojení $\sum_n M_n$ následujícím způsobem:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, \ldots \tag{4}$$

(t. j. seřadím prvky a_{ik} podle rostoucího součtu $i+k$ a prvky s týmž součtem $i+k$ podle rostoucího i); připomeňme, že některá místa v řadě (4) mohou zůstati prázdná (když některé množství M_n je konečné nebo jejich počet konečný), jakož i že některá a_{ik} v řadě (4) je po případě nutno vynechati, aby se tam nevyskytovala vícekráte (na příklad je-li a_{22} týž prvek jako a_{41}, je nutno a_{41} vynechat). Stačí nyní ony prvky, jež ve (4) po naznačené úpravě zbyly, označit po řadě $b_1, b_2, \ldots$; tím se nám skutečně podařilo očíslovati prvky množství

$$\sum_n M_n$$

pomocí čísel $1, 2, 3, \ldots$ (při čemž ovšem buď to číslování někde končí nebo jde do nekonečna).

Tato věta nám dovoluje snadno sestrojovati zajímavé příklady množství spočetných.

PŘÍKLAD 1. Množství všech čísel celých

$$\{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$$

je spočetné: neboť je to množství nekonečné, jež je spojením tří množství nejvýše spočetných

$$\{ -1, -2, -3, \ldots \}; \quad \{ 0 \}; \quad \{ 1, 2, 3, \ldots \}.$$

PŘÍKLAD 2. Množství všech čísel racionálních je spočetné. Neboť: každé číslo racionální lze psáti ve tvaru p/q, kde p, q jsou celá čísla, $q > 0$; označíme-li znakem M_q ($q = 1, 2, 3, \ldots$) množství

*) Podrobněji: Budiž N množství nejvýše spočetné; budiž každému prvku n z N přiřazeno množství M_n, jež je nejvýše spočetné. Potom i spojení

$$\sum_n^N M_n$$

je nejvýše spočetné.

$$\left\{\ldots, \frac{-2}{q}, \frac{-1}{q}, \frac{0}{q}, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots\right\},$$

tedy jest M_q spočetné a množství čísel racionálních, jež se rovná spojení

$$\sum_{q=1}^{\infty} M_q,$$

je tedy také spočetné (zde patří každé číslo racionální k nekonečně mnoha M_q; na příklad číslo $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \ldots$ patří ke všem M_q, číslo $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \ldots$ ke všem M_q, kde q je dělitelno třemi).

PŘÍKLAD 3. Množství N všech bodů $[x, y]$ v rovině, jejichž obě souřadnice jsou racionální čísla, je spočetné. Důkaz: označme, je-li s dané reálné číslo, znakem N_s množství všech bodů $[x, s]$, kde x probíhá všechna racionální čísla; množství N_s je tedy zřejmě ekvivalentní s množstvím všech racionálních čísel a tedy je spočetné; zřejmě pak je

$$N = \sum_{s} N_s,$$

kde s probíhá množství všech racionálních čísel.

PŘÍKLAD 4. Algebraickým číslem nazýváme každé číslo x, jež hoví nějaké rovnici

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{5}$$

($n \geq 1$, $a \neq 0$), jejíž koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou celá čísla. Tvrdím: množství všech algebraických čísel je spočetné. Důkaz je snadný: máme-li nějakou rovnici (5), budeme číslo

$$n + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|$$

nazývati „hodností" té rovnice: hodnost je tedy celé kladné číslo. Označme, při daném celém kladném k, znakem M_k množství všech algebraických čísel, jež hoví nějaké rovnici hodnosti k (M_k je tedy množství všech kořenů všech rovnic hodnosti k). Rovnice hodnosti k je nejvýše k-tého stupně, má tedy nejvýše $k + 1$ celistvých koeficientů a každý z těchto koeficientů má prostou hodnotu nejvýše k: je tedy jen konečný počet rovnic hodnosti k a ježto každá rovnice hodnosti k má nejvýše k kořenů, jest M_k konečné množství. Množství všech čísel algebraických jest však rovno spojení

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k$$

a tedy je spočetné.

5. MNOŽSTVÍ MOCNOSTI KONTINUA.

Všechna množství nekonečná, jejichž mocnost jsme v předešlém odstavci vyšetřili, jsou spočetná (dokonce i dvě množství, jejichž grafická znázornění na ose číselné jsou si tak nepodobná, jako množství všech čísel celých kladných a množství všech čísel racionálních, jsou obě spočetná). Vzniká tedy otázka, existují-li vůbec množství nekonečná, jež nejsou spočetná: tuto otázku zodpovíme kladně touto větou:

Věta. Množství všech čísel intervalu $(0, 1\rangle$ *není spočetné.*

Důkaz: Každé číslo intervalu $(0, 1\rangle$ lze psáti jako nekonečný desetinný zlomek

$$0{\cdot}a_1a_2a_3a_4\ldots; \tag{6}$$

při tom $a_1, a_2, \ldots$ jsou jednotlivé decimály, t. j. číslice $0, 1, 2, \ldots, 9$ (také číslo 1 lze tak psáti; $1 = 0{\cdot}999\ldots$). Čísla x $(0 < x < 1)$, jež lze psáti jako konečný desetinný zlomek, lze psáti ve tvaru (6) dvěma způsoby: na příklad $0{\cdot}24 = 0{\cdot}240000\ldots = 0{\cdot}239999\ldots$ Abychom tuto dvojznačnost odstranili, vyloučíme ze svých úvah zlomky (6) takové, jež od jisté decimály počínaje mají samé nuly; za této úmluvy tedy platí: Každé číslo intervalu $(0, 1\rangle$ lze psáti jedním a jen jedním způsobem ve tvaru (6) a naopak každý desetinný zlomek tvaru (6) dává číslo intervalu $(0, 1\rangle$.

Nyní dokážeme: Vyberu-li z intervalu $(0, 1\rangle$ libovolné spočetné množství čísel N, potom jistě existuje v intervalu $(0, 1\rangle$ číslo, jež není obsaženo v N. Tím bude patrně naše věta dokázána.

Budiž tedy $N = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ spočetné množství čísel intervalu $(0, 1\rangle$ a rozviňme každé číslo z N ve zlomek tvaru (6):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{\cdot}a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\ldots \\ x_2 &= 0{\cdot}a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\ldots \\ x_3 &= 0{\cdot}a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

a definujme nový desetinný zlomek

$$0{\cdot}b_1b_2b_3\ldots \tag{8}$$

takto:

je-li $a_{11} \neq 1$, klaďme $b_1 = 1$; je-li $a_{11} = 1$, klaďme $b_1 = 2$;
je-li $a_{22} \neq 1$, klaďme $b_2 = 1$; je-li $a_{22} = 1$, klaďme $b_2 = 2$;

obecně:

je-li $a_{nn} \neq 1$, klaďme $b_n = 1$; je-li $a_{nn} = 1$, klaďme $b_n = 2$.

Zlomek (8) není stejný se žádným zlomkem (7); není stejný s prvním zlomkem $0{\cdot}a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$, neboť se od něho liší v první decimále $(b_1 \neq a_{11})$; není stejný se zlomkem $0{\cdot}a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$ neboť se od něho liší v druhé decimále $(b_2 \neq a_{22})$: atd. Zlomek (8) patří mezi zlomky uvažované (neboť dokonce žádná jeho decimála není nula) a tedy číslo

$$x = 0{\cdot}b_1b_2b_3\ldots$$

je číslo intervalu $(0, 1\rangle$, jež (vzhledem k vzájemně jednoznačnému přiřazení čísel intervalu $(0, 1\rangle$ a zlomků tvaru (6)) jest různé ode všech čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots$; tím jest věta dokázána.

O množstvích, jež jsou ekvivalentní s množstvím všech čísel intervalu $(0, 1\rangle$, říkáme, že mají **mocnost kontinua.**

Cvičení.

1. Dokažte, že i *otevřený* interval $(0, 1)$ má mocnost kontinua. Návod: zobrazte $(0, 1\rangle$ na $(0, 1)$ tak, že každé iracionální číslo zobrazíte samo na sebe, racionální čísla intervalu $(0, 1\rangle$ pak na racionální čísla intervalu $(0, 1)$ — což jde, ježto obě poslední množství jsou spočetná.

2. Dokažte, že množství všech reálných čísel má mocnost kontinua; dokažte též, že všechny intervaly vůbec, zavedené v odstavci 1, příklad 3, (konečné i nekonečné) mají mocnost kontinua.

Zajímavé a na první pohled překvapující je, že také *množství všech bodů $[x, y]$ v rovině, jejichž souřadnice x, y hoví nerovnostem* $0 < x \leqq 1$, $0 < y \leqq 1$ (t. j. množství všech bodů ve čtverci, při čemž některé body na obvodu se nepočítají), *má mocnost kontinua.* Dokažme to.

Právě tak, jako se každé číslo dá psáti ve tvaru nekonečného desetinného zlomku, dá se psáti i ve tvaru nekonečného dyadického zlomku (t. j. v soustavě dvojkové); čísla intervalu $(0, 1\rangle$ jsou v dyadické soustavě vyjádřena zlomky tvaru

$$0{\cdot}a_1a_2a_3\ldots, \tag{9}$$

kde „decimály“ $a_1, a_2, \ldots$ jsou cifry 0 a 1.*) Ovšem čísla, jež se v dvojkové soustavě dají vyjádřiti konečným zlomkem, dají se vyjádřiti nekonečným zlomkem na dvojí způsob, na příklad

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} = 0{\cdot}101 = 0{\cdot}1010000\ldots = 0{\cdot}1001111\ldots$$

Abychom tuto dvojznačnost odstranili, vyloučíme opět ze svých úvah zlomky (9), jež od jisté decimály mají samé nuly; za této úmluvy dá se tedy každé číslo intervalu $(0, 1\rangle$ vyjádřiti jedním

---

*) Význam zlomku $0{\cdot}a_1a_2a_3\ldots$ jest ovšem tento: na příklad

$$0{\cdot}011001\ldots = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots$$

a jen jedním způsobem ve tvaru (9) a naopak každý dyadický zlomek tvaru (9) vyjadřuje číslo intervalu (0, 1>. Zlomek (9) lze psáti obšírněji ve tvaru

$$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\dots$$

nebo též (vynecháváme-li ty členy, kde decimály jsou nuly)

$$\frac{1}{2^{y_1}}+\frac{1}{2^{y_2}}+\frac{1}{2^{y_3}}+\dots{}^{*)}\ (y_1, y_2, \dots \text{ celá čísla, } 0<y_1<y_2<\dots)$$

nebo též (klademe $x_1=y_1$, $x_2=y_2-y_1$, $x_3=y_3-y_2,\dots$)

(10) $$\frac{1}{2^{x_1}}+\frac{1}{2^{x_1+x_2}}+\frac{1}{2^{x_1+x_2+x_3}}+\dots\ (x_1, x_2, \dots \text{ celá kladná čísla}).$$

Každé číslo intervalu (0, 1> je tedy vyjadřitelno jedním a jen jedním způsobem ve tvaru (10) a naopak, každá řada tvaru (10) dává číslo intervalu (0, 1>; jinak řečeno: čísla x intervalu (0, 1> jsou vzájemně jednoznačně přiřazena posloupnostem

$$x_1, x_2, x_3, \dots\ (x_n \text{ jsou libovolná celá kladná čísla})$$

pomocí vztahu

$$x=\frac{1}{2^{x_1}}+\frac{1}{2^{x_1+x_2}}+\frac{1}{2^{x_1+x_2+x_3}}+\dots$$

Budiž nyní t libovolné číslo intervalu (0, 1>; posloupnost jemu přiřazená budiž $t_1, t_2, \dots$; t. j. budiž

$$t=\frac{1}{2^{t_1}}+\frac{1}{2^{t_1+t_2}}+\frac{1}{2^{t_1+t_2+t_3}}+\dots;$$

tomuto číslu t přiřaďme bod $[x, y]$, jehož souřadnice x, y jsou dány podmínkou, že číslu x přísluší posloupnost $t_1, t_3, t_5, t_7, \dots$, číslu y pak posloupnost $t_2, t_4, t_6, t_8, \dots$; t. j.

$$x=\frac{1}{2^{t_1}}+\frac{1}{2^{t_1+t_3}}+\frac{1}{2^{t_1+t_3+t_5}}+\dots,$$

$$y=\frac{1}{2^{t_2}}+\frac{1}{2^{t_2+t_4}}+\frac{1}{2^{t_2+t_4+t_6}}+\dots;$$

tím je každému číslu intervalu (0, 1> přiřazen bod řečeného čtverce $0<x\leq 1$, $0<y\leq 1$. A toto přiřazení je vskutku vzájemně jednoznačné; neboť je-li $[x, y]$ bod tohoto čtverce, kdež

$$x=\frac{1}{2^{x_1}}+\frac{1}{2^{x_1+x_2}}+\dots,$$

$$y=\frac{1}{2^{y_1}}+\frac{1}{2^{y_1+y_2}}+\dots,$$

---

*) Tato řada je *nekonečná*, neboť zlomky, v nichž všechny decimály od jisté počínaje se rovnají nule, jsme vyloučili.

potom existuje zřejmě jedno a jen jedno číslo t intervalu $(0, 1\rangle$, jemuž tento bod je přiřazen, a sice je to číslo

$$t = \frac{1}{2^{x_1}} + \frac{1}{2^{x_1+y_1}} + \frac{1}{2^{x_1+y_1+x_2}} + \frac{1}{2^{x_1+y_1+x_2+y_2}} + \dots,$$

t. j. číslo, k němuž patří posloupnost $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$ Tím je naše tvrzení dokázáno.

Stejně, jako jsme zde uvažovali body ve čtverci, t. j. dvojice čísel (souřadnic), mohli bychom uvažovati trojice čísel, čtveřice čísel atd., t. j. body v (trojrozměrné) krychli, čtyřrozměrné krychli atd.

6. MNOŽSTVÍ NESPOČETNÁ.

Množství, jež nejsou ani konečná ani spočetná, nazýváme **nespočetnými.** V předešlém odstavci poznali jsme dvě taková množství, jež mají obě mocnost kontinua; ukážeme si nyní na příkladě, že existují také množství nespočetná, jež *nemají* mocnost kontinua.

Budiž M množství všech funkcí proměnné x, jež jsou definovány v intervalu $0 < x \leqq 1$: dvě takové funkce $f(x)$ a $g(x)$ pokládáme přirozeně za totožné tehdy a jen tehdy, platí-li $f(x) = g(x)$ pro všechna x z intervalu $(0, 1\rangle$. Množství M je rozhodně nespočetné; neboť kdyby bylo nejvýše spočetné, byla by podle odstavce 4 i každá část množství M nejvýše spočetná. Funkce $f(x) =$ konstantě patří však k M, ať je hodnota té konstanty jakákoliv; necháme-li tu konstantu probíhat interval $(0, 1\rangle$, potom funkce $g_a(x) = a$ $(0 < a \leqq 1)$ tvoří část množství M, jež má mocnost kontinua (stačí totiž, přiřaditi každé funkci $g_a(x)$, jež pro všechna x intervalu $(0, 1\rangle$ se rovná číslu a, právě to číslo a).

Tvrdím nyní: *množství M nemá mocnost kontinua.*

Důkaz: Kdyby M mělo mocnost kontinua, daly by se jeho prvky (t. j. funkce) vzájemně jednoznačně přiřadit číslům intervalu $(0, 1\rangle$. My dokážeme, že to není možno: t. j. my dokážeme: Jestliže N je část množství M, jejíž prvky lze vzájemně jednoznačně přiřadit číslům intervalu $(0, 1\rangle$, potom nemůže být $N = M$, t. j. potom existuje aspoň jedna funkce v M, jež nepatří k N. Abychom to dokázali, přiřaďme prvky z N vzájemně jednoznačně číslům intervalu $(0, 1\rangle$. Onen prvek (t. j. onu funkci) z N, jenž je přiřazen číslu a, označme $f_a(x)$. Mám dokázati, že existuje funkce $F(x)$, definovaná pro $0 < x \leqq 1$, jež je různá ode všech funkcí $f_a(x)$, ať a je jakékoliv číslo intervalu $(0, 1\rangle$. K tomu cíli definujme $F(x)$ takto: pro každé číslo a intervalu $(0, 1\rangle$ položme

$$F(a) = f_a(a) + 1;$$

t. j. hodnota funkce $F(x)$ v bodě $x = a$ rovná se hodnotě funkce $f_a(x)$ v bodě $x = a$ plus jedna. Funkce $F(x)$ nemůže se skutečně rovnati žádné funkci $f_a(x)$; neboť pro $x = a$ se hodnoty funkcí $F(x)$ a $f_a(x)$ liší o jedničku.

POZNÁMKA. Tento oddíl obsahuje pouze první počátky teorie množství; hlavně teorii ekvivalence je možno vybudovati mnohem obšírněji; viz v této příčině třeba knihu Hausdorffovu, uvedenou na konci tohoto dodatku.