ČÁST ČTVRTÁ.

INTEGRÁLY MNOŽNÉ (INTEGRÁLY Z FUNKCÍ O NĚKOLIKA PROMĚNNÝCH).

XII. INTEGRÁLY MNOŽNÉ Z FUNKCÍ KONEČNÝCH.

1. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI.

262. V odstavci 85—87 byla podána definice integrálu z konečné funkce $f(x)$ v intervalu (a, b). Definice ta se dá snadno rozšířiti na funkce o několika proměnných. Provedeme toto rozšíření zevrubně pouze pro dvě proměnné, avšak způsobem, jenž se dá bezprostředně rozšířiti na libovolný počet proměnných, na základě pojmů a vět vyložených v odstavci 259—261. Při tom ovšem ty vývody, které by byly téměř prostým opakováním toho, co vyloženo při jedné proměnné, a které čtenář snadno může sám doplniti, budou vynechány a toliko odkaz na příslušný dřívější výklad při jedné proměnné bude uveden.

Při jedné proměnné byl dán obor integrační proměnné jistým intervalem (a, b). Při dvou proměnných budeme každou dvojici hodnot $[x, y]$ znázorňovati bodem $[x, y]$ v rovině XY a obor bude dán vždy souhrnem bodů nacházejících se uvnitř jisté uzavřené, spojité křivky K, po případě může býti omezen několika uzavřenými, spojitými křivkami i skládati se z několika částí. Budeme pak k značení oboru užívati písmen Ω, ω opatřených, bude-li to třeba k rozlišení různých oborů, různými indexy. Stejně jako při jedné proměnné uvažovali jsme na počátku pouze intervaly konečné, budou nyní veškeré obory v úvahu vzaté konečné.

O křivkách, jež vymezovati budou obory Ω (resp. ω), učiníme jednou provždy předpoklad, že jsou to čáry spojité kvadratury schopné v užším smyslu (odstavec 258). Přísluší tudíž každému oboru Ω (resp. ω) určitý obsah (velikost plošná při 2 proměnných), *jejž značiti budeme stejně jako příslušný obor, totiž písmenem* Ω (resp. ω). Nadto provedeme-li čtvercové dělení celé roviny XY, při čemž strana čtverců jest vesměs δ, pak součet ploch čtverců, jež jsou protínány ohraničením oboru Ω (resp. ω), konverguje k nule, jestliže δ konverguje k nule (viz odstavec 258).

Konečně jest vytknouti, že pod body oboru Ω (resp. ω) *vyrozumíváme v následujícím body, jež jsou jednak uvnitř* Ω, *jednak na ohraničení oboru* Ω.

263. Budiž nyní dána v oboru Ω funkce $f(x, y)$ a budiž tato funkce **konečná.** Horní hranice funkčních hodnot budiž (je-li $[x, y]$ v Ω) označena M, dolní hranice m. Rozdělme Ω čarami na n oborů menších $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; horní hranici hodnot funkce $f(x, y)$, je-li $[x, y]$ na ω_k, označíme M_k, dolní hranici pak m_k. Mezi obsahem oboru Ω a částí ω_k jest vztah

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_n. \tag{1}$$

Jako při jedné proměnné vezmeme i nyní v úvahu součty

$$S = M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + \ldots + M_n\omega_n = \sum_k M_k\omega_k,$$

$$s = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n = \sum_k m_k\omega_k,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Jelikož jest $m \leqq M_k \leqq M$, $m \leqq m_k \leqq M$, platí se zřetelem k (1) i pro součty S resp. s, jež jmenujeme opětně *horní* resp. *dolní součty*, tyto nerovniny

$$m\Omega \leqq S \leqq M\Omega, \qquad m\Omega \leqq s \leqq M\Omega, \tag{2}$$

odkudž vyplývá, že všecka možná čísla S, která dostáváme různými děleními oboru Ω na obory ω_k, a při různém n mají svou dolní hranici, již značiti budeme Σ, a podobně čísla s svoji horní hranici σ.

O těchto číslech plyne úvahou úplně shodnou s úvahou odstavce 85, že

$$\Sigma \geqq \sigma. \tag{I}$$

POZNÁMKA. Při důkaze, jenž právě byl naznačen odkazem k odstavci 85, užívá se dvojího rozdělení Ω v obory menší, a to jednak v obory $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ (dělení D), jednak v obory $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$, (dělení D'). Potom užijeme-li všech čar ohraničujících obory ω_i, ω'_j $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ k rozdělení oboru Ω v obory menší, vznikne dělení D'', jímž vznikají z Ω

obory $\omega''_1, \omega''_2, \omega''_3, \ldots, \omega''_l, \ldots$ Je-li těchto oborů ω''_l konečný počet, máme právě případ, ve kterém lze použíti postupu odstavce 85, jak uvedeno; protínají-li se však čáry provádějící dělení D s čarami užitými při dělení D' v nekonečném počtu bodů, jest oborů ω''_l nekonečný počet a postupu odstavce 85 nelze tu bez dalších pomůcek použíti.

Tu však můžeme při důkaze vztahu (I) postupovati takto: Budiž S horní součet příslušný k dělení D, s' pak dolní součet příslušný k dělení D'. Vztah (I) bude dokázán, dokážeme-li, že vždy $S \geqq s'$. K tomu cíli pokryjme rovinu sítí čtvercovou (vznikající dvěma systémy rovnoběžných přímek), každý čtverec o straně δ. Uvažovati budeme ty čtverce sítě, jež mají společné body s Ω. Ke každému z těchto čtverců σ_k jsou přiřaděny funkcí $f(x, y)$ a oborem Ω dvě čísla N_k, n_k (horní resp. dolní hranice funkce $f(x, y)$, je-li $[x, y]$ na σ_k a zároveň na Ω). Sestrojme pak tyto součty

$$T = \sum_k N_k \sigma_k, \qquad t = \sum_k n_k \sigma_k,$$

vztahující se ke všem čtvercům sítě v úvahu přicházejícím. Jest $T \geqq t$. Avšak

$$S > T - \mu \mathfrak{M} \varepsilon, \qquad s' < t + \mu \mathfrak{M} \varepsilon,$$

tedy

$$S - s' > -2\mu \mathfrak{M} \varepsilon.$$

Při tom jest μ nejvyšší počet oborů ω_i resp. ω'_j, jež mohou míti současně společné body s jedním čtvercem sítě (zřejmě jest μ menší ($\leqq$) než větší z m, n), $\mathfrak{M}$ jest horní hranice absolutních hodnot $f(x, y)$ na Ω, ε jest libovolné číslo kladné; δ konečně jest tak voleno, aby součet čtverců sítě, jež mají společné body s čarami ohraničujícími obory ω_i, ω'_j byl menší než ε. Jelikož ε můžeme voliti libovolně malé, vyplývá ihned $S \geqq s'$.

264. *O číslech Σ a σ platí dále, že jsou to limity, ke kterým konvergují součty*

$$\overline{S} = \sum_k \overline{M}_k \overline{\omega}_k, \qquad \overline{s} = \sum_k \overline{m}_k \overline{\omega}_k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

když n roste nade všecky meze a zároveň rozměr všech částí $\overline{\omega}_k$ konverguje k nule. Při tom jsou $\overline{\omega}_k$ rovněž části oboru Ω, takže

$$\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots + \overline{\omega}_n = \Omega$$

a $\overline{M}_k$ resp. $\overline{m}_k$ jsou horní resp. dolní hranice funkce $f(x, y)$ na $\overline{\omega}_k$.

Dokažme větu o součtech $\overline{S}$; o nich platí nejprve (jelikož patří mezi součty S)

$$\overline{S} \geqq \Sigma. \tag{3}$$

Poněvadž součty S mají dolní hranici Σ, lze udati ke každému číslu kladnému libovolně malému ε takové rozdělení plochy Ω na p oborů menších $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, že příslušný k němu horní součet, jejž značiti budeme S_0, hoví nerovnině

$$\Sigma \leqq S_0 = \sum_i M_i \omega_i < \Sigma + \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{α}$$

Proveďme dělení plochy Ω na části $\overline{\omega_k}$ tak, aby rozměry těchto částí byly menší než η, kdež η jest číslo kladné zatím libovolné. Části ty budou dvojího druhu. Buďto všecky body té části budou přináležeti jedinému z oborů ω_i — v tomto případě označíme jejich indexy k' —, anebo budou přináležeti aspoň dvěma různým oborům ω_i — tu značiti budeme jejich indexy k''. Jest tedy

$$\overline{S} = \sum_k \overline{M_k}\,\overline{\omega_k} = \sum_{k'} \overline{M_{k'}}\,\overline{\omega_{k'}} + \sum_{k''} \overline{M_{k''}}\,\overline{\omega_{k''}}.$$

Prvý sčítanec pravé strany označíme $\overline{S_1}$, druhý pak $\overline{S_2}$. Rozměr η zvolíme si nyní tak malý, aby součet ploch $\overline{\omega_{k''}}$ byl menší než $\varepsilon/\mathfrak{M}$, kde ε jest kladné číslo svrchu zvolené a $\mathfrak{M}$ jest horní hranice absolutních hodnot funkce $f(x, y)$ v Ω (viz důsledek 2 odstavce 261). Pak jest $\overline{S_2}$ co do absolutní hodnoty menší než

$$\mathfrak{M} \sum \overline{\omega_{k''}} < \mathfrak{M} \frac{\varepsilon}{\mathfrak{M}} = \varepsilon \quad \text{a tedy } \overline{S} < \overline{S_1} + \varepsilon. \tag{β}$$

Podobně, zmenšíme-li v $S_0 = \sum_i M_i \omega_i$ plochy ω_i o ty části, které se skládají na obory $\omega_{k''}$, číslo M_i ponechávajíce v příslušných sčítancích beze změny, změní se S_0 v S_1, kterýžto součet se liší od S_0 rovněž o číslo menší než $\mathfrak{M} \,.\, \varepsilon/\mathfrak{M} = \varepsilon$. Tedy

$$S_1 < S_0 + \varepsilon. \tag{γ}$$

Konečně jest bezprostředně jasno, že

$$\overline{S_1} \leqq S_1 \tag{δ}$$

Z nerovnin (α), (β), (γ), (δ) vyplývá však ihned (jejich sčítáním)

$$\overline{S} < \Sigma + 3\varepsilon. \tag{4}$$

Na základě (3) a (4) jest tedy

$$|\overline{S} - \Sigma| < 3\varepsilon,$$

kterážto nerovnina jest podle uvedeného jistě splněna, učiníme-li rozměry částí ω_k menší než η, to jest dosti malé, čímž věta dokázána. Stejně se dokáže tvrzení věty o součtech $\bar{s}$.

265. Rozdělení Ω na části menší $\bar{\omega}_k$ můžeme provésti třeba tak, že vedeme v rovině XY neohlížejíce se na čáru K omezující Ω dva systémy čar vzájemně se protínajících. čímž po případě provedeno může býti dělení celé roviny anebo aspoň oboru přesahujícího Ω na $\bar{\omega}_k$. Ku příkladu vedeme systém přímek rovnoběžných s osou X, při čemž sousední dvě přímky mají vzdálenost δ, stejný pak systém přímek rovnoběžných s osou Y; tím se nám rozdělí celá rovina na čtverce o ploše δ^2.

Provádíme-li však dělení části rovinné obsahující obor Ω nepožadujíce, aby části $\bar{\omega}_k$ vyplnily přesně Ω, tu pro části $\bar{\omega}_k$ takto vznikající jsou tři případy možné:

1. $\bar{\omega}_k$ jsou celé na Ω, označíme tyto části souhrnně $\omega^{(1)}$;
2. $\bar{\omega}_k$ jest částečně na Ω, částečně vně Ω, tu užijeme značky $\omega^{(2)}$;
3. ω_k jest celé vně Ω (nemá s Ω společné body).

Utvoříme-li součet $\sum\limits_k \bar{M}_k\bar{\omega}_k$, kterýž vztahuje se ke všem částem $\omega^{(1)}$ a ke všem anebo jen některým podle libosti zvoleným částem $\omega^{(2)}$, při čemž $\bar{M}_k$ jest horní hranice $f(x, y)$, pokud $[x, y]$ *nachází se na* $\bar{\omega}_k$ *a zároveň na* Ω, pak můžeme tvrditi

$$\lim \sum_k \bar{M}_k\bar{\omega}_k = \Sigma, \tag{II}$$

pro limitu rozměrů $\bar{\omega}_k = 0$; součet vztahuje se ke všem $\omega^{(1)}$, po případě i k některým nebo všem $\omega^{(2)}$.

Neboť to, co jsme proti dřívějšímu přidali resp. ubrali tím, že jsme místo úseku některé mezi částmi $\omega^{(2)}$ brali celou příslušnou část, po případě tím, že jsme části oboru Ω spadající do některých $\omega^{(2)}$ úplně vynechali, má za limitu nulu. Příslušní totiž sčítanci v $\sum\limits_k \bar{M}_k\bar{\omega}_k$ jsou co do absolutní hodnoty menší než

$$\mathfrak{M}\sum \omega^{(2)}; \quad \text{součet vztahuje se ke všem } \omega^{(2)},$$

avšak $\lim \sum \omega^{(2)} = 0$ (viz odstavec 261, důsl. 2).

Stejně jako rovnice (II) vyplývá

$$\sigma = \lim \sum_k \bar{m}_k\bar{\omega}_k \tag{II'}$$

pro limitu rozměrů části $\bar{\omega}_k = 0$; součet vztahuje se ke všem $\omega^{(1)}$, po případě i k některým nebo všem $\omega^{(2)}$.

POZNÁMKA. I tu lze učiniti obdobné dodatky jako v poznámce k odstavci 262. Úvaha podaná jest na základě zavedených pojmů a dokázaných vět správná jenom potud, pokud to, co obor Ω vytíná z jednoho každého $\omega^{(2)}$ sestává z jedné souvislé části roviny; nejvýše ještě bychom mohli připustiti, že se skládá z konečného počtu souvislých částí. Pro ten případ však, že hranice oboru Ω protíná ohraničení některého z oborů $\omega^{(2)}$ v nekonečném počtu bodů, lze podati snadno důkaz cestou příbuznou k té, jíž byl podán důkaz poznámky k odstavci 262. Vybereme si jedno dělení D, k němuž patřící horní součet S se liší od Σ o méně než o $\varepsilon' > 0$. Lze nyní sestrojiti plošky ω_k o rozměru menším než δ, jak svrchu naznačeno, takže součet za limitním znaménkem ve (II), vztahujeme-li jej pouze k $\omega^{(1)}$, se liší od S rovněž o méně než ε' (k tomu cíli stačí voliti δ dosti malé, viz příslušný počet v poznámce odstavce 262). Z toho následuje, že součet ve (II), vztahuje-li se ke všem $\omega^{(1)}$, se liší od Σ o méně než $2\varepsilon'$, zvolíme-li δ dosti malé. Správnost rovnice (II) tudíž dokázána v tomto případě, který se rozšiřuje bezprostředně na případ, že součet se vztahuje ke všem $\omega^{(1)}$ a k některým nebo i všem $\omega^{(2)}$.

266. Provedeme-li dělení oboru Ω přímkami s osou X a přímkami s osou Y rovnoběžnými o rovnicích

$$\begin{aligned} &x = x_0, \quad x = x_1, \quad x = x_2, \ldots, x = x_{n-1}, \quad x = X; \\ &y = y_0, \quad y = y_1, \quad y = y_2, \ldots, y = y_{p-1}, \quad y = Y, \end{aligned} \tag{5}$$

při čemž předpokládáme, že obor Ω jest obsažen v pravoúhelníku o stranách $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$ a že pro čísla v (5) se vyskytující jsou platny nerovniny $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < X$, $y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{p-1} < Y$, pak můžeme psáti

$$\Sigma = \lim \sum_{i,k} M_{ik}\, \Delta x_i\, \Delta y_k \tag{6}$$

pro ten případ, že $\lim \Delta x_i = \lim (x_i - x_{i-1}) = 0$, $\lim \Delta y_k = \lim (y_k - y_{k-1}) = 0$ a že čísla n, p rostou nade všecky meze. V rovnici (6) značí M_{ik} horní hranici funkce $f(x, y)$ v pravoúhelníku o vrcholích $(x_i\, y_k)$, (x_{i-1}, y_k), (x_{i-1}, y_{k-1}), (x_i, y_{k-1}) a o ploše $\Delta x_i\, \Delta y_k$; *součet pak tam se nacházející stačí vztahovati toliko na ty pravoúhelníky, jež jsou cele obsaženy na* Ω.

Obdobně jest (se stejným významem pro značku součtovou a limitní)

$$\sigma = \lim \sum_{i,k} m_{ik}\, \Delta x_i\, \Delta y_k. \tag{6'}$$

267. Čísla Σ, σ v předcházejících odstavcích definovaná existují pro každý obor Ω (svrchu podrobněji vymezený) a pro každou funkci $f(x, y)$ v Ω definovanou a konečnou. Rozdělíme-li obor Ω čarou k (kvadratury schopnou) na dva obory Ω_1, Ω_2, pak ovšem i pro tyto obory a pro touž funkci $f(x, y)$ budou ta čísla existovati. Označíme je Σ_1, σ_1 při oboru Ω_1; při oboru Ω_2 užijeme značek Σ_2, σ_2. I jest (za stálého předpokladu, že všecka čísla vztahují se k jedné a téže funkci)

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2, \qquad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \tag{III}$$

Neboť dělení, jež obor Ω_1 dělí na části $\overline{\omega}_k$ (o rozměrech konvergujících k nule), společně s obdobným dělením oboru Ω_2 a s čarou k tvoří dělení oboru Ω na části s rozměry konvergujícími k nule a tedy součet $\sum_k \overline{M}_k \overline{\omega}_k$ příslušný k oboru Ω_1 a funkci $f(x, y)$ dohromady se součtem obdobným příslušným k Ω_2 tvoří rovněž takový součet příslušný k Ω, odkudž první z rovnic (III) dokázána. Stejně jest patrna i druhá z těch rovnic.

268. Nejdůležitější jest pro nás případ, kdy čísla Σ a σ vztahují se ke konečné funkci $f(x, y)$ a k oboru Ω jsou si rovna. *Tu nazýváme číslo* $\Sigma = \sigma$ **integrálem dvojným funkce** $f(x, y)$ **v oboru** Ω. *O funkci $f(x, y)$ pak říkáme, že jest v oboru Ω integrace schopna.*

Pro funkce integrace schopné platí následující věta (na základě odstavce 265): *Nutná a postačující podmínka, aby konečná funkce $f(x, y)$ byla v oboru Ω integrace schopna, jest, aby*

$$\lim \sum_k (\overline{M}_k - \overline{m}_k)\, \overline{\omega}_k = 0 \qquad \text{pro limitu rozměrů } \overline{\omega}_k = 0; \tag{7}$$

součet stačí vztahovati na všecka $\omega^{(1)}$.

Je-li tato podmínka splněna, pak existuje dvojný integrál z funkce $f(x, y)$ v oboru Ω (který se nazývá *oborem integračním*) a značíme jej

$$\iint_\Omega f(x, y)\, d\omega.$$

Máme tudíž na základě této definice (za předpokladu, že jest splněna podmínka (7))

$$\iint_\Omega f(x, y)\, d\omega = \lim \sum_k \overline{M}_k \overline{\omega}_k = \lim \sum_k \overline{m}_k \overline{\omega}_k \quad \text{pro limitu rozměrů } \overline{\omega}_k = 0. \tag{IV}$$

Podobně plynou jako při jedné proměnné tyto rovnice

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, d\omega = \lim \sum_k \mu_k \overline{\omega}_k, \qquad \overline{m}_k \leqq \mu_k \leqq \overline{M}_k, \tag{IV'}$$

$$= \lim \sum_k f(\xi_k, \eta_k)\, \overline{\omega}_k, \tag{IV''}$$

kde (ξ_k, η_k) jest libovolný bod oboru $\overline{\omega}_k$ a kde znaménko součtové a limitní má týž význam jako v (II) a (II').

Konečně užíváme-li dělení pravoúhelníkového (odstavec 266), můžeme též psáti

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, d\omega = \lim \sum_{i,j} M_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j = \lim \sum_{i,j} m_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j \tag{8}$$

$$= \lim \sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j)\, \Delta x_i\, \Delta y_j \tag{8'}$$

pro $\lim \Delta x_i = 0$, $\lim \Delta y_j = 0$; součtová znaménka a symboly Δx_i, Δy_j mají týž význam jako v rovnicích (6) a (6'); ξ_i a η_j jsou pak libovolná čísla vázaná nerovninami $x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$, $y_{j-1} \leqq \eta_j \leqq y_j$. V důsledku rovnic (8), (8') zavádí se pro dvojný integrál též toto označení:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, d\omega = \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{8''}$$

Jelikož toto označení vytýká jasně integrační proměnné, budeme ho v následujícím výhradně používati. Vztah (8') býval dříve obyčejně východiskem pro definice dvojného integrálu.

POZNÁMKA 1. Není-li Σ rovno σ, sluje Σ **horní**, σ pak **dolní integrál dvojný** z funkce $f(x, y)$ v oboru Ω. Pro integrály tyto budeme užívati tohoto označení

$$\Sigma = \overline{\iint\limits_{\Omega}} f(x, y)\, dx\, dy,$$

$$\sigma = \underline{\iint\limits_{\Omega}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

POZNÁMKA 2. Rozdíl $\overline{M}_k - \overline{m}_k$ vyskytující se v podmínce (7) sluje (stejně jako při jedné proměnné) *oscilací* funkce $f(x, y)$ v oboru $\overline{\omega}_k$.

Místo podmínky (7) můžeme vysloviti též následující *(druhou)* podmínku nutnou a postačitelnou: *Aby konečná funkce $f(x, y)$ byla v oboru Ω integrace schopna, k tomu jest nutno a postačitelno, aby ke každým dvěma číslům kladným ε, ε' bylo lze nalézti číslo η takové, že součet všech oborů $\overline{\omega}_k$, při nichž jest oscilace větší než ε, jest menší než ε', zvolíme-li si jen rozměry oborů $\overline{\omega}_k$ vesměs menší než η.*

Neboť, je-li tato druhá podmínka splněna, jest součet v (7) se vyskytující jistě menší než $\Omega\varepsilon + (M - m)\varepsilon'$, odkudž jest patrno, že, je-li splněna podmínka druhá, jistě jest splněna i podmínka v (7).

Je-li naopak splněna podmínka v (7), lze ke každému číslu kladnému ε'' stanoviti η'' tak, že

$$\sum_k (\overline{M_k} - \overline{m_k})\overline{\omega_k} < \varepsilon'', \quad \text{jsou-li rozměry všech } \overline{\omega_k} < \eta'', \qquad (\alpha)$$

Tím spíše jest, značí-li O_ε součet všech oborů ω_k, v nichž oscilace funkce $f(x, y)$ jest větší než ε,

$$\varepsilon O_\varepsilon < \varepsilon'', \quad \text{jsou-li rozměry všech } \overline{\omega_k} < \eta'',$$

t. j. součet O_ε všech oborů $\overline{\omega_k}$, při nichž oscilace jest větší než ε, lze učiniti menší než $\varepsilon''/\varepsilon$, zvolíme-li si rozměry všech oborů $\overline{\omega_k}$ menší než η''. Stačí tudíž voliti $\varepsilon'' = \varepsilon\varepsilon'$, $\eta'' = \eta$, aby v důsledku rovnice (α) a tudíž v důsledku podmínky v (7) byla splněna podmínka druhá.

Jest tedy podmínka v (7) úplně ekvivalentní s podmínkou druhou.

Dále jest patrno z důkazu podmínky v (7), že *postačí k zjištění, že některá funkce $f(x, y)$ jest v Ω integrace schopna, aby podmínka v (7) byla splněna, když rozměry oborů $\overline{\omega_k}$ nějakým určitým pevně stanoveným způsobem konvergují k nule* (viz stejnou poznámku při funkcích o jedné proměnné v odstavci 87). Rovněž se zřetelem k výrazu (IV'') lze učiniti obdobnou poznámku, jako byla učiněna na str. 218 se zřetelem k výrazu (12) odstavce 87.

POZNÁMKA 3. Užíváme-li pro dvojný integrál označení uvedené v (8''), jest míti na mysli, že jsou x, y souřadnice bodu $[x, y]$ v *pravoúhlé soustavě souřadnicové*, jakož stále bylo, byť jenom mlčky, předpokládáno.

269. O funkcích integrace schopných. Stejně jako v odstavci 88 a 89 plynou i nyní věty: *Funkce $f(x, y)$ v oboru Ω spojitá dvou proměnných x, y jest v Ω integrace schopna.*

Funkce $f(x, y)$, která jest konečná v oboru Ω a spojitá ve zbytku oboru Ω vzniklém z Ω odnětím konečného počtu oborů, jejichž celkovou plochu můžeme učiniti libovolně malou, jest v Ω integrace schopna.

Jest tedy ku příkladu taková funkce $f(x, y)$ v Ω integrace schopnou, jež jest konečnou v Ω a jež jest dále spojitou, vyjma v bodech konečného počtu čar kvadratury v užším smyslu schopných, v jejichž bodech ta funkce může míti diskontinuity.

Jsou-li funkce $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ v Ω integrace schopny, jest též v Ω integrace schopný jejich součet a jest

$$\iint_{\Omega}(f_1(x, y)+f_2(x, y))\,dx\,dy=\iint_{\Omega}f_1(x, y)\,d\omega+\iint_{\Omega}f_2(x, y)\,dx\,dy. \tag{9}$$

Pomíjeje věty obdobné k větám *e*), *f*), *g*) odstavce 89 uvádím jenom tuto nerovninu

$$\left|\iint_{\Omega}f(x, y)\,dx\,dy\right|\leqq\iint_{\Omega}|f(x, y)|\,dx\,dy \tag{10}$$

platnou pro funkce $f(x, y)$ v Ω integrace schopné.

Konečně jako důsledek věty (III), odstavce 267 vyplývá pro obory Ω_1, Ω_2, jež nemají společných bodů leda na společné hranici, tento vztah

$$\iint_{\Omega_1}f(x, y)\,dx\,dy+\iint_{\Omega_2}f(x, y)\,dx\,dy=\iint_{\Omega_1+\Omega_2}f(x, y)\,dx\,dy. \tag{11}$$

270. Jsou-li obory $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots, \Omega_n, \ldots$ takové, že

$$\lim_{n=\infty}\Omega_n=\Omega,$$

pod kterýmžto vztahem vyrozumíváme okolnost, že i obsah oboru, jejž k Ω_n jest přidati, i obsah oboru, jejž od Ω_n jest odebrati, aby touto obojí současnou operací (přidáním i odebráním) z Ω_n vznikl obor Ω, jest menší než kladné číslo ε_n, jež s rostoucím n nade všecky meze konverguje k nule, pak, je-li $f(x, y)$ ve všech oborech Ω_n i v oboru Ω integrace schopno, jest

$$\lim_{n=\infty}\iint_{\Omega_n}f(x, y)\,dx\,dy=\iint_{\Omega}f(x, y)\,dx\,dy. \tag{V}$$

Neboť jest (podle (2) odstavce 263 a podle (11))

$$\left|\iint_{\Omega_n}f(x, y)\,dx\,dy-\iint_{\Omega}f(x, y)\,dx\,dy\right|<2\varepsilon_n\mathfrak{M}, \tag{V$_1$}$$

kde $\mathfrak{M}$ jest horní hranice absolutních hodnot funkce $f(x, y)$ v Ω, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$

POZNÁMKA. Rovnice (V_1) jest ve skutečnosti dokázána pouze tehdy, jestliže obory Ω, Ω_n se liší o konečný počet souvislých částí (t. j. jestliže takových částí, jež jest k Ω_n přidati, resp. od něho odníti, aby vznikl Ω, jest konečný počet). V případě, že tomu tak není, lze opět užíti čtvercové sítě, téže pro oba obory Ω, Ω_n a vyšetřovati rozdíl součtů

$\sum_{\Omega} M_i \delta_i$ resp. $\sum_{\Omega_n} M_j \delta_j$, δ_i resp. δ_j čtverce sítě o straně δ na Ω resp. Ω_n,

jež v limitě konvergují k integrálům rovnice (V_1). Dostaneme bez potíže rovnici (V).

271. Věta o střední hodnotě. Vztahy (2) odstavce 263 mají ihned tento důsledek pro funkce $f(x, y)$ v Ω integrace schopné

$$m\Omega \leqq \iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy \leqq M\Omega, \tag{VI$_1$}$$

jejž můžeme též psáti ve tvaru

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \mu\Omega \qquad m \leqq \mu \leqq M. \tag{VI$_2$}$$

Pro funkce $f(x, y)$ v souvislém Ω spojité lze tuto rovnici psáti ve tvaru

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \Omega \,.\, f(\xi, \eta), \tag{VI$_3$}$$

kde (ξ, η) jest bod (uvnitř) oboru Ω. Vztahy (VI_1), (VI_2), (VI_3) jsou *různé tvary věty o střední hodnotě dvojného integrálu.* Můžeme je snadno zevšeobecniti. Nejprve následuje z (VI_1), je-li $m \geqq 0$ ($f(x, y)$ jest v tomto případě v Ω stále kladná, po případě nule rovná),

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy \geqq 0. \tag{β}$$

Buďtež dále $f(x, y)$, $g(x, y)$ dvě funkce v Ω integrace schopné, *z nichž druhá není v Ω nikdy záporná; funkce $f(x, y)$ nechť pak má v Ω za horní resp. dolní hranici funkčních hodnot číslo M resp. m.* Tu jest pro všecky body na Ω

$$(M - f(x, y))\, g(x, y) \geqq 0$$

a tudíž podle (β)

$$\iint_{\Omega} (M - f(x, y))\, g(x, y)\, dx\, dy \geqq 0$$

a tedy

$$\iint_{\Omega} M g(x, y)\, dx\, dy \geqq \iint_{\Omega} f(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy.$$

Podobně odvodí se nerovnina vztahující se k m, takže celkem dostáváme

$$m \iint_{\Omega} g(x, y)\, dx\, dy \leqq \iint_{\Omega} f(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy \leqq M \iint_{\Omega} g(x, y)\, dx\, dy, \tag{VI$_4$}$$

což jest věta *o střední hodnotě dvojného integrálu* v obecnější formě. Můžeme ji psáti také ve tvaru

$$\iint_\Omega f(x,y)\,g(x,y)\,dx\,dy = \mu \iint_\Omega g(x,y)\,dx\,dy, \qquad m \leqq \mu \leqq M \tag{VI$_5$}$$

anebo, je-li $f(x, y)$ funkce spojitá na souvislém oboru Ω,

$$\iint_\Omega f(x,y)\,g(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta) \iint_\Omega g(x,y)\,dx\,dy,$$

kde ξ, η jest bod na Ω. Stran otázky, kdy v (VI_1) resp. (VI_4) lze znaménka rovnosti psaná pod znaménkem $<$ vypustiti, odkazuji k odstavci 80.

POZNÁMKA. Pro ten případ, že $f(x, y) = 1$ v celém oboru Ω, jest $m = M = 1$ a na základě (VI_1) máme ihned

$$\iint_\Omega dx\,dy = \Omega, \tag{α}$$

čímž vyjádřen obsah (plošná velikost) oboru Ω dvojným integrálem. Výsledkem tímto jest vyjádřen obsah množným integrálem a jest výsledek ten přímým důsledkem definice obsahu (a definice množného integrálu). Pro obory trojrozměrné platí rovněž: Obsah **T** takového oboru, který označíme rovněž **T**, jest dán výrazem

$$\mathbf{T} = \iiint_{\mathbf{T}} dx\,dy\,dz \tag{α'}$$

a t. d. pro obory o libovolném počtu rozměrů. Při oborech dvojrozměrných velikost plošná v (α) daná jest velikost plošná v užším smyslu.

272. **O výpočtu integrálů dvojných pomocí dvojnásobné integrace (integrálů dvojnásobných).** Výpočet integrálu dvojného lze převésti zpravidla na výpočet dvojnásobného integrálu. Odvodíme v té příčině nejdůležitější příslušné věty. Při tom vyjdeme od nejjednoduššího případu berouce za integrační obor Ω pravoúhelník P v rovině XY omezený přímkami o rovnicích $x = x_0$, $x = X$; $y = y_0$, $y = Y$. Provedeme rozdělení pravoúhelníka toho přímkami o rovnicích (5) odstavce 266, čímž se pravoúhelník rozpadne na $n.p$ menších pravoúhelníků. Jsou-li M_{ik} resp. m_{ik} horní resp. dolní hranice funkce $f(x, y)$ v pravoúhelníku o vrcholích (x_i, y_k), (x_i, y_{k-1}), (x_{i-1}, y_k), (x_{i-1}, y_{k-1}), můžeme psáti za předpokladu, že $f(x, y)$ jest v pravoúhelníku P integrace schopna,

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \lim \sum_{i,k} M_{ik}\,\Delta x_i\,\Delta y_k = \lim \sum_{i,k} m_{ik}\,\Delta x_i\,\Delta y_k \tag{12}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, n, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, p, \quad x_n = X, \quad y_p = Y$$

pro ten případ, že $\lim \Delta x_i = 0$ a $\lim \Delta y_k = 0$ a n i p rostou nade všecky meze. O číslech x_i, y_k nechť i tu platí nerovniny v odstavci 266 předpokládané (totiž $x_{i-1} < x_i$, $y_{k-1} < y_k$).

Zvolme si nyní hodnoty $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tak, že $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, a uvažujme funkci $f(\xi_i, y)$ jedné proměnné y. Horní hranice této funkce, když y jest v intervalu (y_{k-1}, y_k), budiž $M_k(\xi_i)$, dolní hranice pak $m_k(\xi_i)$. Tu jest zřejmě

$$M_{ik} \geqq M_k(\xi_i) \geqq m_k(\xi_i) \geqq m_{ik}$$

a tedy také

$$\sum_{i,k} M_{ik} \Delta x_i \Delta y_k \geqq \sum_{i,k} M_k(\xi_i) \Delta x_i \Delta y_k \geqq \sum_{i,k} m_k(\xi_i) \Delta x_i \Delta y_k \geqq \sum_{i,k} m_{ik} \Delta x_i \Delta y_k. \quad (13)$$

Prostřední součty můžeme však psáti též takto (vypisujíce součet vzhledem k indexu k)

$$\begin{gathered}\sum_{i,k} M_k(\xi_i) \Delta x_i \Delta y_k = \\ = \sum_i \Delta x_i [M_1(\xi_i) \Delta y_1 + M_2(\xi_i) \Delta y_2 + M_3(\xi_i) \Delta y_3 + \ldots + M_p(\xi_i) \Delta y_p],\end{gathered} \quad (14)$$

$$\begin{gathered}\sum_{i,k} m_k(\xi_i) \Delta x_i \Delta y_k = \\ = \sum_i \Delta x_i [m_1(\xi_i) \Delta y_1 + m_2(\xi_i) \Delta y_2 + m_3(\xi_i) \Delta y_3 + \ldots + m_p(\xi_i) \Delta y_p].\end{gathered} \quad (15)$$

Jestliže však jest funkce $f(x, y)$ podle y v intervalu (y_0, Y) integrace schopna, ať jest x jakákoliv hodnota intervalu (x_0, X), jest patrně v důsledku Riemannovy definice integrálu

$$\begin{gathered}M_1(\xi_i) \Delta y_1 + M_2(\xi_i) \Delta y_2 + \ldots + M_p(\xi_i) \Delta y_p \geqq \\ \geqq \int_{y_0}^{Y} f(\xi_i, y)\, dy \geqq m_1(\xi_i) \Delta y_1 + \ldots + m_p(\xi_i) \Delta y_p\end{gathered} \quad (16)$$

a tedy podle (13), (14), (15) a (16)

$$\sum_{i,k} M_{ik} \Delta x_i \Delta y_k \geqq \sum_i \left[\int_{y_0}^{Y} f(\xi_i, y)\, dy\right] \Delta x_i \geqq \sum_{i,k} m_{ik} \Delta x_i \Delta y_k.$$

Poněvadž podle (12) levá i pravá strana nerovniny napsané má limitu a to touž (pro $\lim \Delta x_i = 0$, $\lim \Delta y_k = 0$, $\lim n = \infty$, $\lim p = \infty$), má i prostřední článek této nerovniny touž limitu pro $\lim \Delta x_i = 0$ a $\lim n = \infty$ a to, ať jest ξ_i jakákoliv hodnota intervalu (x_{i-1}, x_i), t. j. jinými slovy: *Funkce proměnné x*

$$\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$$

jest podle x integrace schopna v intervalu (x_0, X) a jest

$$\int_{x_0}^{X}\left(\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy\right) dx = \iint_P f(x, y)\, dx\, dy, \tag{VII}$$

čímž rovnost mezi dvojným integrálem daným a integrálem dvojnásobným prokázána. Užíváme-li obvyklého označení pro integrály dvojnásobné, můžeme ji také psáti ve tvaru

$$\iint_P f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy.$$

Kdybychom předpokládali, že $f(x, y)$ jest podle x integrace schopno, ať jest y jakákoliv hodnota intervalu (y_0, Y), mohli bychom stejně dokázati

$$\iint_P f(x, y)\, dx\, dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx. \tag{VII'}$$

273. Rozšíření platnosti získaných vztahů. Kdybychom používali pojmů horního a dolního integrálu, mohli bychom věty předcházejícího odstavce poněkud rozšířiti. Ať jest $f(x, y)$ podle y integrace schopno či ne, můžeme vždy psáti místo (16)

$$M_1(\xi_i)\, \Delta y_1 + M_2(\xi_i)\, \Delta y_2 + \ldots + M_p(\xi_i)\, \Delta y_p \geqq \overline{\int_{y_0}^{Y}} f(\xi_i, y)\, dy \geqq \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(\xi_i, y)\, dy \geqq$$
$$\geqq m_1(\xi_i)\, \Delta y_1 + \ldots + m_p(\xi_i)\, \Delta y_p$$

a tedy obdobně jako svrchu

$$\sum_{i,k} M_{ik}\, \Delta x_i\, \Delta y_k \geqq \sum_i \left[\overline{\int_{y_0}^{Y}} f(\xi_i, y)\, dy\right] \Delta x_i \geqq \sum_i \left[\underline{\int_{y_0}^{Y}} f(\xi_i, y)\, dy\right] \Delta x_i \geqq \sum_{i,k} m_{ik}\, \Delta x_i\, \Delta y_k,$$

odkudž, přejdeme-li k limitám, následuje, že funkce proměnné x

$$\overline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y)\, dy, \qquad \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y)\, dy$$

jsou v intervalu (x_0, X) integrace schopny a že

$$\iint_P f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{X} \left[\overline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y)\, dy\right] dx = \int_{x_0}^{X} \left[\underline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y)\, dy\right] dx, \tag{VII''}$$

čímž věta (VII) rozšířena.

K tomuto výsledku lze přičiniti tyto poznámky: Ze vztahu (VII'') následuje

$$\int_{x_0}^{X}\left[\overline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y)\, dy - \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y)\, dy\right] dx = 0.$$

Avšak funkce proměnné x v hranaté závorce se nacházející jest v důsledku pojmu horního a dolního integrálu (odstavec 87, poznámka 2) stále buď kladná aneb rovna nule. Integrál z té funkce však jest roven nule, i jest tudíž ta funkce sama rovna nule v bodech množství bodového v (x_0, X) všude hustého (odstavec 97, poznámka 3). To jest v těch bodech jest

$$\overline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y)\, dy = \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y)\, dy$$

a funkce $f(x, y)$ jest podle y v mezích y_0, Y integrace schopna při všech x jistého množství v (x_0, X) všude hustého. Jest tedy funkce proměnné x

$$\varphi(x) = \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$$

funkcí definovanou pro všecky body zmíněného množství a jest funkcí na základě rozšířeného pojmu integrálního (odstavec 94) a svrchu provedených úvah integrace schopnou. Lze tedy (užívajíce stále pojmu zavedeného v odstavci 94) psáti **tento základní vztah**

$$\iint_P f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{X} dx \left[\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy\right]$$

za pouhého předpokladu, že $f(x, y)$ jest v P integrace schopna a rovněž

$$\iint_P f(x, y)\, dx\, dy = \int_{y_0}^{Y} dy \left[\int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx\right],$$

z čehož dále

$$\int_{x_0}^{X} dx \left[\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy\right] = \int_{y_0}^{Y} dy \left[\int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx\right].$$

Tím odvozena nová podmínka postačující pro existenci dvojnásobných integrálů (ve smyslu odstavce 94) a záměnnost pořadu integračního.

274. Abychom větu odstavce 272 rozšířili pro libovolný (konečný) obor Ω, jehož ohraničení protíná rovnoběžky s osou X, resp. Y v konečném počtu bodů, opíšeme tomuto oboru pravoúhelník P (tak, aby všecky body oboru Ω byly uvnitř toho pravoúhelníka), jehož strany mějtež rovnice $x=x_0$, $x=X$; $y=y_0$, $y=Y$ a užijeme větu odstavce 315 na funkci $\mathfrak{f}(x, y)$ následovně definovanou

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(x, y) &= f(x, y) \quad \text{pro všecky body oboru } \Omega, \\ \mathfrak{f}(x, y) &= 0 \quad \text{pro všecky body vně oboru } \Omega. \end{aligned} \tag{17}$$

Pak jest, jestliže $f(x, y)$ jest v Ω integrace schopno a podle y integrace schopno v mezích daných oborem Ω, ať jest x abscisa kteréhokoliv bodu na Ω, také $\mathfrak{f}(x, y)$ v pravoúhelníku P integrace schopno a rovněž podle y integrace schopno v mezích (y_0, Y), ať jest x kterákoliv hodnota intervalu (x_0, X). Můžeme pak podle (VII) psáti

$$\iint\limits_P \mathfrak{f}(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0}^{Y} \mathfrak{f}(x, y)\, dy.$$

Rozložíme-li si dvojný integrál vzhledem k P v integrál podle Ω a v integrál podle zbytku vzniklého z P odečtením Ω (viz rovnici 11) a uvědomíme-li si, že tento poslední integrál jest roven nule (neboť funkce $f(x, y)$ v tom zbytku vyjma snad hranic jest stále rovna nule), můžeme ihned psáti

$$\iint\limits_\Omega f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_\Omega dx \int f(x, y)\, dy \tag{VIII}$$

(viz odstavec 178, 179).

Podobně za obdobných předpokladů vyplývá

$$\iint\limits_\Omega f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_\Omega dy \int f(x, y)\, dx. \tag{VIII'}$$

Použijeme-li však výsledků odstavce 273, můžeme psáti za pouhého předpokladu, že $f(x, y)$ jest v Ω integrace schopna,

$$\iint\limits_\Omega f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_\Omega \left[\int f(x, y)\, dy\right] dx = \int\limits_\Omega \left[\int f(x, y)\, dx\right] dy.$$

V těchto relacích integrály dvojnásobné mají zcela jasný význam; lze je ostatně pomocí funkce $\mathfrak{f}(x, y)$ vyjádřiti jako sledy dvou integrací v intervalech (x_0, X), (y_0, Y).

275. O výpočtu trojných integrálů. Abychom naznačili různé okolnosti, jež při přeměně integrálů množných v integrály mnohonásobné mohou nastávati (a jež při dvou proměnných nenastávají), vyjádříme integrál trojný pomocí sledu integrací. Budeme uvažovati nejprve případ nejjednodušší, ve kterém integrační obor jest pravoúhelníkový obor $\mathbf{R}$ omezený rovinami $x = x_0$, $x = X$; $y = y_0$,

$y = Y$; $z = z_0$, $z = Z$. Při tom nechť jest $x_0 < X$, $y_0 < Y$, $z_0 < Z$. Obor **R** rozdělíme si rovinami o rovnicích

$$\begin{aligned} &x = x_0, \quad x = x_1, \quad x = x_2, \ldots, \quad x = x_{p-1}, \quad x = X, \\ &y = y_0, \quad y = y_1, \quad y = y_2, \ldots, \quad y = y_{q-1}, \quad y = Y, \\ &z = z_0, \quad z = z_1, \quad z = z_2, \ldots, \quad z = z_{r-1}, \quad z = Z, \end{aligned} \tag{3}$$

kde $x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{p-1} < X$, $y_0 < y_1 < \ldots < Y$, $z_0 < z_1 < \ldots < Z$. Obor **R** rozpadá se tak v $p \,.\, q \,.\, r$ oborů pravoúhelníkových $\mathbf{r}_{ijk}$, kde $\mathbf{r}_{ijk}$ jest pravoúhelníkový obor $(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1}; x_i, y_i, z_k)$. Pak jest

$$\iiint_{\mathbf{R}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim \sum_{i,j,k} M_{ijk}\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k = \lim \sum_{i,j,k} m_{ijk}\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k \tag{11}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, p; \quad j = 1, 2, 3, \ldots, q; \quad k = 1, 2, 3, \ldots, r.$$

Význam znaménka limitního a značek M_{ijk}, m_{ijk} v této rovnici jest nasnadě.

Budiž ξ_i číslo nacházející se v intervalu (x_{i-1}, x_i), pak hranice rovnoběžnostěnu $\mathbf{r}_{ijk}$ vytínají na rovině o rovnici $x = \xi$ pravoúhelník obsahující body o souřadnicích $(\xi_i; y, z)$, při čemž y resp. z nabývá libovolné hodnoty intervalu (y_{j-1}, y_j) resp. (z_{k-1}, z_k); t. j, bod $[y, z]$ jest pro ty body bodem pravoúhelníku $(y_{i-1}, z_{k-1}; y_i, z_k)$. Označme $M_{jk}(\xi_i)$ horní hranici funkce $f(\xi_i, y, z)$ proměnných $[y, z]$, když bod $[y, z]$ jest na pravoúhelníku právě zmíněném; dolní hranice pak budiž v tomto případě $m_{jk}(\xi_i)$. Potom jest podle významu příslušných značek

$$M_{ijk} \geqq M_{jk}(\xi_i) \geqq m_{jk}(\xi_i) \geqq m_{ijk}$$

a tedy

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j,k} M_{ijk}\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k \geqq \sum_{i,j,k} M_{jk}(\xi_i)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k \geqq \\ &\geqq \sum_{i,j,k} m_{jk}(\xi_i)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k \geqq \sum_{i,j,k} m_{ijk}\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k. \end{aligned} \tag{12}$$

Vnitřní dva součty v tomto čtyrčlenném řetězu nerovnin lze však psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k} M_{jk}(\xi_i)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k &= \sum_i \left[\sum_{j,k} M_{jk}(\xi_i)\, \Delta y_j\, \Delta z_k\right] \Delta x_i \\ \sum_{i,j,k} m_{jk}(\xi_i)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k &= \sum_i \left[\sum_{j,k} m_{jk}(\xi_i)\, \Delta y_j\, \Delta z_k\right] \Delta x_i. \end{aligned} \tag{13}$$

Jestliže však $f(x, y, z)$ jest funkce podle y, z integrace schopna v pravoúhelníku $(y_0, z_0; Y, Z)$, jejž označíme P_1, ať jest x jakákoliv pevná hodnota intervalu (x_0, X), můžeme v důsledku definice dvojného integrálu ihned psáti

$$\sum_{j,k} M_{jk}(\xi_i)\,\Delta y_j\,\Delta z_k \geqq \iint\limits_{P_1} f(\xi_i, y, z)\,dy\,dz \geqq \sum_{j,k} m_{jk}(\xi_i)\,\Delta y_j\,\Delta z_k \tag{14}$$

a tedy podle (12), (13) a (14)

$$\sum_{i,j,k} M_{ijk}\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k \geqq \sum_i \Big[\iint\limits_{P_1} f(\xi_i, y, z)\,dy\,dz\Big]\,\Delta x_i \geqq \sum_{i,j,k} m_{ijk}\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k.$$

Za předpokladu, že $f(x, y, z)$ jest v $\mathbf{R}$ integrace schopna, kterýž učiníme, má levá i pravá strana nerovniny právě napsané limitu a to touž (pro $\lim \Delta x_i = 0$, $\lim \Delta y_j = 0$, $\lim \Delta z_k = 0$; $\lim p = \lim q = \lim r = \infty$); následkem toho má i prostřední článek poslední nerovniny touž limitu pro $\lim \Delta x_i = 0$ a $\lim p = \infty$ a to, ať jest ξ_i jakákoliv hodnota intervalu (x_{i-1}, x_i), t. j. jinými slovy: *Funkce proměnné* x

$$\iint\limits_{P_1} f(x, y, z)\,dy\,dz$$

jest podle x *integrace schopna v intervalu* (x_0, X) a jest

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_0}^{X} \Big[\iint\limits_{P_1} f(x, y, z)\,dy\,dz\Big]\,dx, \tag{IV}$$

čímž rovnost mezi integrálem trojným a sledem jednoduché a dvojné integrace za jistých předpokladů o funkci $f(x, y, z)$ *prokázána.*

Také ku platnosti rovnice (IV) není však nikterak nutný předpoklad, že $f(x, y, z)$ jest podle $[y, z]$ v pravoúhelníku P_1 integrace schopna. Obdobně jako při dvojných integrálech vyplývá i zde, že funkce

$$\varphi_1(x) = \overline{\iint\limits_{P_1}} f(x, y, z)\,dy\,dz, \qquad \varphi_2(x) = \underline{\iint\limits_{P_1}} f(x, y, z)\,dy\,dz,$$

které mají vždy význam, jsou v (x_0, X) podle x integrace schopné a že

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_0}^{X} \varphi_1(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} \varphi_2(x)\,dx;$$

pak tedy

$$\int_{x_0}^{X} (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))\,dx = 0 \quad \text{a} \quad \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \geqq 0,$$

tudíž jest $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ v (x_0, X) v bodech množství číselného v (x_0, X) všude hustého, t. j. $f(x, y, z)$ jest v P_1 integrace schopna podle $[y, z]$ pro všecka x právě zmíněného množství a funkce

$$\varphi(x)=\iint f(x, y, z)\, dy\, dz$$

jest v bodech toho množství definována. Má-li tedy pro funkci $f(x, y, z)$ konečnou v R význam levá strana rovnice (IV), má vždy význam i pravá strana té rovnice (ovšem na základě rozšíření definice integrálu podle odstavce 94).

276. Můžeme však také i jinak postupovati. Nechť jest η_j libovolná hodnota intervalu (y_{j-1}, y_j) a ζ_k libovolná hodnota intervalu (z_{k-1}, z_k); pak rovnoběžnostěn $\mathfrak{r}_{ijk}$ vytíná na přímce o rovnicích $y=\eta_j$, $z=\zeta_k$ úsečku obsahující body o souřadnicích (x, η_j, ζ_k), při čemž x nabývá všecky hodnoty intervalu (x_{i-1}, x_i). Označme horní hranici funkce $f(x, \eta_j, \zeta_k)$ jedné proměnné x, když x probíhá interval (x_{i-1}, x_i), značkou $M_i(\eta_j, \zeta_k)$; dolní hranice měj tu označení $m_i(\eta_j, \zeta_k)$. Pak jest zřejmě

$$M_{ijk} \geqq M_i(\eta_j, \zeta_k) \geqq m_i(\eta_j, \zeta_k) \geqq m_{ijk}$$

a tedy

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k} M_{ijk}\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k &\geqq \sum_{i,j,k} M_i(\eta_j, \zeta_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k \geqq \\ \geqq \sum_{i,j,k} m_i(\eta_j, \zeta_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k &\geqq \sum_{i,j,k} m_{ijk}\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k.\end{aligned} \tag{15}$$

Avšak jest identicky při vhodném uspořádání

$$\sum_{i,j,k} M_i(\eta_j, \zeta_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k = \sum_{j,k} \Big[\sum_i M_i(\eta_j, \zeta_k)\, \Delta x_i\Big] \Delta y_j\, \Delta z_k \tag{16}$$

vedle vztahu, který z právě napsaného vznikne, nahradíme-li v něm M písmenem m. Dále jest podle integrální definice Riemannovy, je-li $f(x, y, z)$ funkce integrace schopná podle x v intervalu (x_0, X), ať za y, z volíme jakékoliv pevné hodnoty v intervalech (y_0, Y), (z_0, Z)

$$\sum_i M_i(\eta_j, \zeta_k)\, \Delta x_i \geqq \int_{x_0}^{X} f(x, \eta_j, \zeta_k)\, dx \geqq \sum_i m_i(\eta_j, \zeta_k)\, \Delta x_i \tag{17}$$

a tedy v důsledku (15), (16) a (17)

$$\sum_{i,j,k} M_{ijk}\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k \geqq \sum_{j,k} \Delta y_j\, \Delta z_k \int_{x_0}^{X} f(x, \eta_j, \zeta_k)\, dx \geqq \sum_{i,j,k} m_{ijk}\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k.$$

Limita krajních článků této nerovniny pro ten případ, že $\lim \Delta x_i = 0$, $\lim \Delta y_j = 0$, $\lim \Delta z_k = 0$, a $\lim p = \lim q = \lim r = \infty$ jest táž (totiž integrál z $f(x, y, z)$ v R). Tudíž i prostřední článek má pro $\lim \Delta y_j = 0$, $\lim \Delta z_k = 0$ a $\lim q = \lim r = \infty$ touž limitu a to, ať jsou η_j, ζ_k jakékoliv hodnoty intervalů (y_{j-1}, y_j), (z_{k-1}, z_k), t. j. jinými slovy: *Funkce proměnných y, z*

$$\int_{x_0}^{X} f(x, y, z)\, dx$$

jest podle $[y, z]$ integrace schopna v pravoúhelníku P_1 a jest

$$\iiint_{\mathbf{R}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{P_1} \left[\int_{x_0}^{X} f(x, y, z)\, dx\right] dy\, dz, \tag{IV$_1$}$$

čímž za poněkud jiných předpokladů vyjádřena opětně rovnost mezi integrálem trojným a sledem dvojné a jednoduché integrace.

I v rovnici (IV_1) jest předpoklad svrchu činěný, že $f(x, y, z)$ jest podle x integrace schopno v (x_0, X), ať jest $[y, z]$ kterýkoliv bod na P_1, nepodstatný. Stejně jako v odstavci 274 při dvojných integrálech dá se bez předpokladu dokázati, že $f(x, y, z)$ jest podle x integrace schopno pro všecka $[y, z]$ z množství bodového v P_1 všude hustého. Zavedeme-li tak rozšířený pojem integrální pro integrály dvojné obdobně, jak to učiněno bylo při integrálech jednoduchých v odstavci 94, má dvojný integrál na pravé straně rovnice (IV_1) význam a rovnice ta platna. Od podrobného provádění těchto úvah — jakožto méně důležitých — však tu upouštím.

Dále vyplývá porovnáním rovnic (IV) a (IV_1) za předpokladu, že $f(x, y, z)$ jest podle x, y, z v $\mathbf{R}$ integrace schopno, tento vztah

$$\int_{x_0}^{X} \left[\iint_{P_1} f(x, y, z)\, dy\, dz\right] dx = \iint_{P_1} \left[\int_{x_0}^{X} f(x, y, z)\, dx\right] dy\, dz, \tag{18}$$

což jest rovnice poučující nás o záměnnosti v pořadu dvojné a jednoduché integrace. Platnost její se podle předcházejícího poukazu rozšiřuje na funkce obecnější, než jsou funkce předpokladv vyslovenými vytčené.

POZNÁMKA. Jelikož dvojný integrál na pravé straně rovnice (IV_1) se vyskytující, existuje-li, lze vyjádřiti jakožto integrál dvojnásobný, můžeme místo rovnice (IV_1) psáti vztah

$$\iiint_{\mathbf{R}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{x_0}^{X} \left[\int_{y_0}^{Y} \left(\int_{z_0}^{Z} f(x, y, z)\, dz\right) dy\right] dx$$

anebo v jednodušším a dostatečně srozumitelném tvaru

$$\iiint\limits_{R} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0}^{Y} dy \int\limits_{z_0}^{Z} f(x, y, z)\,dz, \tag{19}$$

čímž vyjádřen integrál trojný **integrálem trojnásobným.** K platnosti (19) jest nutno a postačitelno, aby $f(x, y, z)$ bylo v **R** integrace schopno, připouštíme-li ovšem rozšíření pojmu jednoduchého integrálu dané odstavcem 94.

277. Úvahy odstavců předcházejících zevšeobecňují se snadno pro obecnější konečné obory **T**. Je-li dán trojný integrál z funkce $f(x, y, z)$ v oboru **T**, kterýžto obor se nachází v pravoúhlém rovnoběžnostěnu **R**, a má tu vlastnost, že rovnoběžky s osami jej protínají v konečném počtu bodů definujeme si funkci $\mathbf{f}(x, y, z)$ pro všecky body v **R** těmito rovnicemi

$\mathbf{f}(x, y, z) = f(x, y, z)$ pro všecky body $[x, y, z]$ v oboru **T**,

$\mathbf{f}(x, y, z) = 0$ pro všecky body $[x, y, z]$ zároveň vně oboru **T** a uvnitř **R**.

Pak užijeme-li věty odstavců předcházejících na funkci $f(x, y, z)$ takto definovanou, máme úvahou, která se úplně shoduje s úvahou odstavce 274, za náležitých předpokladů o funkci $f(x, y, z)$ a oboru **T** (jejichž vyslovení jest nasnadě a tu k vůli stručnosti opomenuto) tyto vztahy

$$\iiint\limits_{T} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_0}^{X} \left[\iint\limits_{\Omega_x} f(x, y, z)\,dy\,dz\right] dx, \tag{IV$_2$}$$

$$\iiint\limits_{T} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{P_1} \left[\int\limits_{\Lambda_{y,z}} f(x, y, z)\,dx\right] dy\,dz. \tag{IV$_3$}$$

V rovnici prvé značí Ω_x obor v rovině proměnných y, z takový, že necháme-li (y, z) probíhati všemi body oboru Ω_x, probíhá bod $[x, y, z]$ při pevně daném se neměnícím x všemi body oboru **T** majícími právě tutéž souřadnici X-ovou. Geometricky stanovíme hranice oboru Ω_x jakožto průsek roviny rovnoběžné s rovinou YZ, takže všecky její body mají souřadnice (x, y, z), kde x jest konstantní, s ohraničením oboru **T**. Integrační interval (x_0, X) v rovnici prvé lze nahraditi intervalem (resp. souhrnem intervalů), v nichž se nacházejí všecka taková x, jimiž p[illegible] ušná Ω_x mají velikosti plošné od nuly různy.

V rovnici druhé značí Λ_{yz} interval resp. souhrn intervalů takový, že necháme-li x probíhati všemi body toho intervalu (resp. těch intervalů), probíhá bod $[x, y, z]$ při pevně daném i y i z všemi body oboru **T** majícími tutéž souřadnici Y-ovou i Z-ovou. Geometricky stanovíme hranice intervalu (resp. souhrnu intervalů) A_{yz} jakožto průsek přímky rovnoběžné s osou X, takže všechny body té přímky mají souřadnice (x, y, z), kde y, z jsou konstantní, s ohraničením oboru **T**. Integrační obor P_1 dvojného integrálu v rovnici druhé lze nahraditi oborem Ω v rovině proměnných $[y, z]$, v němž se nacházejí všecka taková $[y, z]$, jimiž příslušný A_{yz} má celkovou délku od nuly různou. Skládá-li se A_{yz} z intervalů $[a_{yz}, b_{yz}]$, $[c_{yz}, d_{yz}], \ldots$, kde $a_{yz} < b_{yz} < c_{yz} < d_{yz}, \ldots$, jest ovšem v označení snadno srozumitelném

$$\int_{A_{yz}} f(x, y, z)\, dx = \int_{a_{yz}}^{b_{yz}} + \int_{c_{yz}}^{d_{yz}} + \ldots; \tag{20}$$

$a_{yz}, b_{yz}, \ldots$ jsou obecně funkce proměnných y, z.

Sledy jednoduché a dvojné integrace vyznačené na pravých stranách rovnic (IV$_2$), (IV$_3$) můžeme také podle způsobu užitého v odstavci 178 pro integrály dvojnásobné takto jednodušeji vypisovati

$$\underbrace{\int dx \iint}_{\mathbf{T}} f(x, y, z)\, dy\, dz, \qquad \underbrace{\iint dy\, dz \int}_{\mathbf{T}} f(x, y, z)\, dx.$$

Užíváme-li tohoto označení, máme porovnávajíce (IV$_2$), (IV$_3$) za předpokladů o funkci $f(x, y, z)$ patrných z úvah předcházejících vztah

$$\underbrace{\int dx \iint}_{\mathbf{T}} f(x, y, z)\, dy\, dz = \underbrace{\iint dy\, dz \int}_{\mathbf{T}} f(x, y, z)\, dx. \tag{18'}$$

Je-li $f(x, y, z)$ dále takovou funkcí, že dvojný integrál v rovnici (IV$_2$) se vyskytující lze rozložiti v integrál dvojnásobný, t. j. že lze na příklad psáti

$$\iint_{\Omega_x} f(x, y, z)\, dy\, dz = \underbrace{\int dy \int}_{\Omega_x} f(x, y, z)\, dz$$

při libovolném x intervalu (x_0, X), pak můžeme integrál trojný vypsati jakožto sled tří jednoduchých integrací a v označení snadno srozumitelném máme místo (IV$_2$)

$$\iiint_{\mathbf{T}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \underbrace{\int dx \int dy \int}_{\mathbf{T}} f(x, y, z)\, dz, \tag{19'}$$

čímž integrál trojný vyjádřen jest pomocí **integrálu trojnásobného.** Toto vyjádření jest zejména možno vždy, jestliže $f(x, y, z)$ jest funkcí spojitou tří proměnných v oboru **T** a máme v tomto případě i možnost pořadí proměných, podle kterých se integrace trojnásobná postupně provádí, libovolně (ze šesti různých pořadí) si zvoliti.

PŘÍKLAD 1. Počítejme integrál

$$J = \iiint_K (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

kde obor integrační K jest koule o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Integrál můžeme podle věty předcházejícího odstavce vyjádřiti dvojím způsobem; nejprve jest, jelikož toliko roviny $x = a$, kde $-R < a < R$, protínají kouli (v ploše rovinné velikosti od nuly různé) a protínají ji v kruhu k_a o rovnici $y^2 + z^2 = R^2 - a^2$,

$$J = \int_{-R}^{R} \left[\iint_{k_x} (y^2 + z^2)\, dy\, dz \right] dx.$$

Zaveďme do dvojného integrálu v této rovnici proměnné polární $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$. Obor integrační k_x změní se v pravoúhelník na rovině proměnných (r, φ) o vrcholech $(0, 0)$ $(\sqrt{R^2 - x^2}, 0)$, $(\sqrt{R^2 - x^2}, 2\pi)$, $(0, 2\pi)$, takže jest

$$\iint_{k_x} (y^2 + z^2)\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} r^3\, dr = \tfrac{1}{2}\pi(R^2 - x^2)^2$$

a tedy

$$J = \tfrac{1}{2}\pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)^2\, dx = \tfrac{8}{15}\pi R^5.$$

Počítáme-li podle rovnice (IV$_3$), jest A_{bc} interval $(-\sqrt{R^2 - b^2 - c^2}, +\sqrt{R^2 - b^2 - c^2})$ a P_1 můžeme nahraditi kruhem k_0 rovnici $y^2 + z^2 = R^2$, takže jest

$$J = \iint_{k_0} \left[\int_{-\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}}^{+\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}} (y^2 + z^2)\, dx \right] dy\, dz = 2 \iint_{k_0} (y^2 + z^2) \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\, dy\, dz.$$

Zavedeme-li i tu souřadnice polární týmiž rovnicemi jako svrchu, máme po snadném počtu

$$J = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2}\, dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R^2} \varrho \sqrt{R^2 - \varrho}\, d\varrho = 2\pi \cdot \tfrac{2}{3} \int_0^{R^2} (R^2 - \varrho)^{\frac{3}{2}}\, d\varrho = \tfrac{8}{15}\pi R^5$$

(substituce $r^2 = \varrho$, integrace částečná).

PŘÍKLAD 2. Stanoviti jest obsah oboru n-rozměrného omezeného „rovinou" o rovnici $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n - A = 0$ a „rovinami" souřadnými $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n$, A čísla kladná, jest obor — značme jej jakož i jeho obsah A — v té části celého prostoru, ve které zároveň $x_1 > 0$, $x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$ a dán jest obsah integrálem n-rozměrným

$$\mathrm{A} = \iint_{\mathrm{A}} \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Převedeme jej na integrál n-násobný, integrujíce po řadě podle $x_n, x_{n-1}, \ldots, \ldots, x_2, x_1$. Meze těchto integrací jsou: dolní vesměs rovny nule a horní po řadě rovny číslům

$$\frac{A - a_1x_1 - a_2x_2 - \ldots - a_{n-1}x_{n-1}}{a_n}, \quad \frac{A - a_1x_1 - a_2x_2 - \ldots - a_{n-2}x_{n-2}}{a_{n-1}}, \ldots, \frac{A - a_1x_1}{a_2}, \frac{A}{a_1}.$$

Provedeme-li integrace, dostaneme

$$\mathrm{A} = \frac{A^n}{n!\, a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Výsledek tento zůstává s malou změnou v platnosti i když některá nebo všecka čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n, A$ jsou záporná. Pak stačí místo toho čísla, jež jest záporné dosazovati do výsledku jeho absolutní hodnotu. Jestliže některé z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest rovno nule, obor uvažovaný jest nekonečný, výsledná formule pak nemá významu.

2. ZAVÁDĚNÍ NOVÝCH INTEGRAČNÍCH PROMĚNNÝCH DO MNOŽNÝCH INTEGRÁLŮ.

278. Budiž dán dvojný integrál

$$I = \iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy$$

a jest uloženo integrál ten vyjádřiti integrálem, v němž proměnné integrační jsou u, v, kteréžto proměnné jsou dány pomocí x, y prostřednictvím vztahů

$$u = \varphi_1(x, y), \quad v = \psi_1(x, y). \tag{1_1}$$

O funkcích $\varphi_1(x, y)$, $\psi_1(x, y)$ pak učiníme předpoklad, že jsou pro body oboru Ω (včetně hranic) spojité a že mají tam derivace prvního řádu rovněž spojité (a tudíž též konečné). Těmi vztahy jest každému bodu $[x, y]$ oboru Ω přiřaděn jeden bod $[u, v]$ roviny opatřené dvěma pravoúhlými osami UV; všecky body tak přiřazené vyplňují jistý obor Ω_1 a my budeme také naopak předpokládati, že každý bod $[u, v]$ oboru Ω_1 toliko jednomu bodu oboru Ω jest přiřazen. V důsledku toho lze za předpokladu, že $[u, v]$ přináleží k Ω_1, rovnice (1_1) psáti též ve tvaru

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \tag{1}$$

při čemž $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ jsou spojité funkce v oboru Ω_1 (včetně hranic); mají pak v něm derivace rovněž spojité, jestliže determinant funkcionální D_1 funkcí φ_1, ψ_1 vzhledem k proměnným x, y v oboru Ω jest stále od nuly různý anebo, jestliže determinant funkcionální

$$D(u,v)=\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} \tag{2}$$

jest v oboru Ω_1 stále od nuly různý (což jest totéž, neboť součin obou determinantů funkcionálních jest stále rovný 1 — DP 224, (II) —; je-li tudíž determinant D_1 v oboru Ω funkcí spojitou, konečnou a od nuly různou, jest druhý determinant D takovou funkcí v oboru Ω_1). Budeme předpokládati, že $D(u,v)$ jest v oboru Ω_1 od nuly různý.

Budiž dále obor Ω, resp. Ω_1, obsažen cele v oboru $\bar{\Omega}$, resp. $\bar{\Omega}_1$, a to tak, že všechny body oboru Ω, resp. Ω_1 jsou vnitřními body oboru $\bar{\Omega}$, resp. $\bar{\Omega}_1$; i pro tyto širší obory nechť jest v platnosti vzájemné jednoznačné přiřadění jejich bodů pomocí (1) (1_1). Jsou tedy funkce φ_1, ψ_1, φ, ψ i pro tyto obory definovány a nechť jsou i pro ty obory funkce spojité a konečné. O derivacích funkcí $\varphi,\ldots$ v bodech vně Ω, resp. Ω_1, netřeba činiti žádných předpokladů. Konečně předpokládejme, že obor Ω_1 jest protínán rovnoběžkami s osou V pouze ve dvou bodech.

Sestrojme nyní v rovině bodů $[u,v]$ síť pravoúhlých trojúhelníků, jež vesměs jsou položeny na $\bar{\Omega}_1$ a jsou takové, že každý bod oboru Ω_1, není-li na hranicích dvou nebo více trojúhelníků jest obsažen v jednom a jen v jednom z těch pravoúhlých trojúhelníků. Takovou síť bychom na příklad dostali ze sítě čtvercové (o straně dosti malé), ve které bychom každý čtverec úhlopříčkou rozdělili ve dva pravoúhlé trojúhelníky. Buď P jeden z takových trojúhelníků, vrcholy jeho nechť jsou body $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$. Bod $[a_0, b_0]$ nechť jest vrchol pravého úhlu. Plochu jeho označíme rovněž P. Pro tuto plochu jest známý vztah

$$P=\pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1-a_0, & b_1-b_0 \\ a_2-a_0, & b_2-b_0 \end{vmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \Delta a_1, & \Delta b_1 \\ \Delta a_2, & \Delta b_2 \end{vmatrix} \tag{X}$$

Při tom jsme kladli $\Delta a_1=a_1-a_0$, $\Delta a_2=a_2-a_0,\ldots$ Plochu lze ovšem vyjádřiti též výrazem

$$P=\tfrac{1}{2}\sqrt{(a_1-a_0)^2+(b_1-b_0)^2}\,\sqrt{(a_2-a_0)^2+(b_2-b_0)^2}.$$

Z tohoto výrazu vyplývá ihned

$$\tfrac{1}{4}(|\Delta a_1|+|\Delta b_1|)(|\Delta a_2|+|\Delta b_2|)\leq P\leq\tfrac{1}{2}(|\Delta a_1|+|\Delta b_1|)(|\Delta a_2|+|\Delta b_2|). \tag{+}$$

Bodům $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1],\ldots$ jsou rovnicemi (1) v Ω přiřaděny body $[\varphi(a_0, b_0), \psi(a_0, b_0)]$, $[\varphi(a_1, b_1), \psi(a_1, b_1)],\ldots$ Plocha *přímočarého trojúhelníku* Q o těchto třech vrcholech jest

$$Q=\pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \varphi(a_1,b_1)-\varphi(a_0,b_0), & \psi(a_1,b_1)-\psi(a_0,b_0) \\ \varphi(a_2,b_2)-\varphi(a_0,b_0), & \psi(a_2,b_2)-\psi(a_0,b_0) \end{vmatrix}. \tag{X'}$$

Avšak, je-li trojúhelník P celý na Ω_1, jak dále budeme předpokládati, pak v důsledku předpokladu o funkcích φ, ψ mají tyto funkce v bodě $[a_0, b_0]$ totální diferenciál, takže lze psáti na příklad

$$\varphi(a_1, b_1) - \varphi(a_0, b_0) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_{a_0, b_0} \Delta a_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_{a_0, b_0} \Delta b_1 + \varepsilon'(|\Delta a_1| + |\Delta b_1|),$$

kde ε' jest veličina, jež zároveň s Δa_1 a Δb_1 konverguje k nule. V důsledku této (a obdobných relací), v důsledku věty o násobení determinantů a konečně v důsledku, že lze na příklad psáti

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_{a_0, b_0} \Delta a_1 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_{a_0, b_0} \Delta b_1 = \lambda(|\Delta a_1| + |\Delta b_1|),$$

kde λ jest funkce čísel a_0, b_0, Δa_1, Δb_1 mající pro všecky body $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$ jistou horní hranici, dostáváme pro Q výraz

$$Q = \pm \tfrac{1}{2}\left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right]_{a_0, b_0} \begin{vmatrix} \Delta a_1, & \Delta b_1 \\ \Delta a_2, & \Delta b_2 \end{vmatrix} + \varepsilon(|\Delta a_1| + |\Delta b_1|)(|\Delta a_2| + |\Delta b_2|).$$

kde ε jest funkce čísel a_0, b_0, $\Delta a_1, \dots$ konvergující k nule, když Δa_1, Δb_1, Δa_2, Δb_2 konvergují současně k nule. Rovnici této můžeme vzhledem k předcházejícím, zejména se zřetelem k (+) dáti tvar

$$Q = \pm(|\mathrm{D}(a_0, b_0)| + \varepsilon) P. \tag{5}$$

V tomto výraze jest ε číslo konvergující k nule, když $|\Delta a_1| + |\Delta b_1|$, $|\Delta a_2| + |\Delta b_2|$ současně konvergují k nule. Tato konvergence jest zřejmě stejnoměrná vzhledem ke všem bodům $[a_0, b_0]$ oboru Ω_1; můžeme tedy udati číslo kladné η tak, aby, jsou-li obě čísla $|\Delta a_1| + |\Delta b_1|$, $|\Delta a_2| + |\Delta b_2|$ menší než $\eta/\sqrt{2}$,*) příslušné ε bylo menší než číslo $\mathfrak{m}$ rovné dolní hranici absolutní hodnoty $\mathrm{D}(u, v)$ na Ω_1. Pak závorka v poslední rovnici jest stále číslo kladné a jest v té rovnici voliti znaménko +.

Jest tedy za této volby v rovnicích (X), (X') současně v platnosti znaménko stejné, jestliže $\mathrm{D}(u, v)$ jest na Ω_1 kladné: znaménka pak protivná tenkráte, jestliže tam $\mathrm{D}(u, v) < 0$. T. j., následují-li body $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ po sobě na obvodě trojúhelníka P ve směru kladném, následují vrcholy $[\varphi(a_0, b_0), \psi(a_0, b_0)]$, $[\varphi(a_1, b_1), \dots]$, … na obvodě trojúhelníka Q rovněž ve směru kladném, jestliže $\mathrm{D}(u, v) > 0$, ve směru pak záporném, je-li $\mathrm{D}(u, v) < 0$. Z toho však dále plyne, že dvěma trojúhelníkům P o vrcholích $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$; $[a_1, b_1]$, $[a_0, b_0]$, $[a_2, b_2]$ — které mají společnou stranu (úsečku spojující vrcholy $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$) a jsou po-

*) Rozměr trojúhelníka pravoúhlého, pro nějž obě uvedená čísla jsou menší než $\eta/\sqrt{2}$, jest menší než η.

loženy na různých stranách této strany — odpovídají dva trojúhelníky Q téže vlastnosti (společná strana, oba položeny na různých stranách této strany). Dvěma trojúhelníkům P o společné straně odpovídají dva trojúhelníky Q rovněž o společné straně a *se nepřekrývající.*

Jest účelno provésti sestrojení trojúhelníků P určitým přehledným způsobem. Učiníme to takto: Nejprve rozdělíme obor Ω_1 rovnoběžkami s osou V, přímkami o rovnicích $u = u_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, m$, kde $u_{k-1} < u_k$ a $u_k - u_{k-1} < \eta/\sqrt{2}$. Obor Ω_1 nechť jest celý obsažen mezi přímkami $u = u_1$, $u = u_m$. Přímkám $u = u_k$ jsou přiřaděny substitucí (1) čáry o parametrických rovnicích $x = \varphi(u_k, v)$, $y = \psi(u_k, v)$. Tyto čáry, značme je C_k, v důsledku předpokladů o substituci (1) učiněných se na Ω vzájemně ani sebe neprotínají a rozdělují obor Ω na řadu pásů, jež jsou jedno-jednoznačně přiřaděny pásům, jež vznikají z oboru Ω_1 přímkami $u = u_k$. Další rozdělení oboru Ω_1 provedeme pomocí přímek o rovnicích $v = v_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Čísla v_j volíme takto: Nejprve nechť každým průsekem ohraničení Ω_1 a přímky $u = u_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$ prochází jedna přímka $v = v_j$. K číslům v_j tak docíleným připojíme další čísla tak volená, aby řada jejich hověla podmínkám $0 < v_j - v_{j-1} < \eta/\sqrt{2}$. A ještě jednu vlastnost budeme požadovati na číslech v_i. Nechť body, které vytínají přímky $v = v_j$ na přímce $u = u_r$, pokud ty body spadají na Ω_1, jsou tyto: $[u_r, v_i]$, $i = m_0, m_0 + 1, m_0 + 2, \ldots, m_1$. (Body odpovídající hodnotám $i = m_0, m_1$ jsou na hranici oboru Ω_1.) Těmto bodům na Ω odpovídají body $[\varphi(u_r, v_i), \psi(u_r, v_i)] = A_{ri}$. Body A_{ri} jsou na čáře C_r a, postupujeme-li od bodu A_{rm_0} po této čáře dovnitř oboru Ω_1, dospějeme nejprve k bodu A_{r, m_0+1} atd., proběhneme-li čáru až ke konci, proběhneme po pořádku všemi body A_{ri} (jak plyne snadnou úvahou z předpokladů o substituci (1)). Sestrojme polygonální čáru skládající se z úseček spojujících body A_{ri}, $A_{r, i+1}$, $i = m_0, m_0 + 1, \ldots, m_1 - 1$; značme ji D_r. Budeme pak požadovati na číslech v_j, aby žádná z polygonálních čar tak vznikajících ani sebe sama ani jinou polygonální čáru na Ω neprotínala. Požadavku tomu lze vždy vyhověti, zvolíme-li rozdíly $v_j - v_{j-1}$ dosti malé, neboť běží tu v podstatě o konečný počet čar ($< m$) spojitých bez dvojných bodů a vzájemně se neprotínajících. Přímkami $u = u_k$, $v = v_j$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ rozpadá se jistý obor roviny UV na pravoúhelníky; každý z těchto pravoúhelníků rozdělíme úhlopříčkou na dva trojúhelníky. Dostaneme tak obor onen rozdělený na trojúhelníky, jejichž rozměr vesměs jest menší než η. Trojúhelníky, jež padnou cele vně oboru Ω_1, nepřicházejí vůbec v úvahu. Trojúhelníky, jež zčásti spadají do Ω_1, zčásti leží vně Ω_1, mají celkový součet ploch konvergující k nule, když η konverguje k nule (a totéž platí o přímočarých trojúhelnících jim substitucí (1) přiřaděných v důsledku předpokladů o spojitosti funkcí φ, ψ). Zůstávají tedy pouze trojúhelníky na rovině UV, jež jsou cele na Ω_1: jim jsou přiřazeny v rovině XY substitucí (1) trojúhelníky přímočaré, jejichž vrcholy jsou na Ω. Některé z těchto mohou míti strany zčásti probíhající vně Ω. Tyto rovněž potlačíme a rovněž trojúhelníky jim na Ω_1 příslušející (součet ploch trojúhelníků těch v obojím případě konverguje s η k nule a při počítání integrálu nepadá tudíž na váhu). Trojúhelníky přímočaré na Ω zbývající rozpadají se na řadu pásů trojúhelníků (vrcholy trojúhelníků na jednom takovém pásu leží na čarách o rovnicích $x=\varphi(u_s, v)$, $y=\psi(u_s, v)$; $x=\varphi(u_{s+1}, v)$, $y=\ldots$). A tu z vývodů učiněných jasně vyplývá, že jeden takový pás trojúhelníků sám sebe nepřekrývá ani jiný takový pás; že všecky trojúhelníky přímočaré uvažované pokrývají jednoduše (bez mezer) celý obor Ω, nehledě ovšem k částem toho oboru položeným v okolí jeho hranic a že celková plocha trojúhelníků na Ω konverguje pro $\lim \eta=0$ k ploše zaujaté oborem Ω. Označíme pak trojúhelníky na Ω v úvahu přicházející hromadně písmenem Q a jim substitucí (1) na Ω_1 přiřaděné písmenem P.

Uvažujeme nyní součet

$$\sum_Q Q\,.\,f(x_0, y_0)\,; \qquad x_0=\varphi(a_0, b_0), \qquad y_0=\psi(a_0, b_0),$$

který vztahuje se na všecky trojúhelníky Q. Je-li však rozměr všech trojúhelníků P menší než η, jest rozměr trojúhelníků jim substitucí (1) přiřaděných menší než η_1, kteréžto číslo η_1 současně s η konverguje k nule (neboť funkce φ, ψ, jsou na Ω_1 incl. hranic spojité).

Jelikož Q jest násobeno za znaménkem součtovým hodnotou funkce $f(x, y)$ ve vrchole trojúhelníku Q a funkci $f(x, y)$ pokládáme za integrace schopnou, jest

$$\lim \sum_Q Q\,.\,f(x_0, y_0)=\iint_\Omega f(x, y)\,dx\,dy \text{ pro } \lim \eta=0.$$

V důsledku (3) však jest

$$\sum_Q Q\,.\,f(x_0, y_0)=\sum_P |\,\mathrm{D}(a_0, b_0)\,|\,.\,P\,.\,f(\varphi(a_0, b_0), \psi(a_0, b_0))+\sum_P \varepsilon P\,.\,f(\varphi(a_0, b_0), \psi(a_0, b_0)).$$

Avšak $f(x, y)$ jest funkce na Ω konečná (tedy $|f(x, y)| < \mathfrak{M}$, kde $\mathfrak{M}$ číslo kladné), ε konverguje stejnoměrně k nule s η a tudíž $\varepsilon < \varepsilon_0$ pro všecky trojúhelníky P, zvolíme-li si jen η dosti malé. Jest tedy poslední člen pravé strany v absolutní hodnotě menší než $\mathfrak{M}\varepsilon_0 \Sigma P$, t. j. menší než $\mathfrak{M}\varepsilon_0\Omega_1$. Přejdeme-li tedy k limitě v poslední rovnici pro $\lim \eta = 0$ — pak i za ε_0 můžeme dosazovati čísla konvergující k nule — dostaneme

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\Omega_1} \mathrm{D}(u, v)\ f(\varphi(u, v), \psi(u, v))\, du\, dv$$

za předpokladu ovšem, že součin $|\mathrm{D}(u, v)|\, f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ jest funkce integrace schopna. Předpoklad tento však jest vždy splněn v důsledku předpokladů již učiněných, z nichž hlavní tu jest, že $\mathrm{D}(u, v)$ jest v Ω_1 funkcí spojitou; otázkou tou však nechci se tu podrobněji zabývati. Rovnici získanou můžeme podrobněji poněkud vypisovati takto

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\Omega_1} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| du\, dv.$$

Výsledek tu podaný bylo by lze stejným způsobem odvoditi pro integrály n-rozměrné. Jediná potíž v tomto odvození spočívala by v tom, že bychom byli místo trojúhelníků pravoúhlých při dvou proměnných nuceni zaváděti při n-proměnných obdobné útvary vícerozměrné (tak při tří proměnných čtyřstěny, jejichž hrany při jednom vrcholu svírají vesměs pravé úhly). Ačkoliv analytické zavedení těch útvarů neposkytuje žádné obtíže, bylo by přece spojeno s obšírnějšími výklady (definicemi a výpočty); jeví se tudíž účelnější postup jiný a to postup úplné indukce. Budeme totiž předpokládati, že věta jest dokázána pro integrály 1-, 2-, 3-, ..., $(n-1)$-rozměrné a dokážeme ji pro integrály n-rozměrné. Stačí ostatně větu předpokládati pro integrály jednoduché a $(n-1)$-rozměrné, abychom odvodili příslušnou formuli pro integrály n-rozměrné. Aby výklad se zbytečně bezvýznamnou abstrakcí neztížil, provedu úvahu příslušnou pro $n = 3$. Ve vývodech následujících budeme o oborech integračních T, $\mathrm{T}_1, \ldots$ vesměs předpokládati, že jsou to obory, v nichž každá rovnoběžka s osami protíná jeho hranice v konečném počtu bodů. O funkcích integrovaných pak učiníme předpoklad, že jsou takové, že integrál trojný dá se v libovolném pořadí rozložiti ve sled integrálu jednoduchého podle kterékoliv proměnné a integrálu dvojného.

POZNÁMKA 1. K důkazu, že číslo ε rovnice (3) stejnoměrně konverguje k nule se zřetelem ke všem bodům $[a_0, b_0]$ oboru Ω_1, kterýžto důkaz ve vývodech podaných neproveden, může použíti čtenář této věty: Jsou-li částečné derivace $f(x, y)$ v jistém spojitém uzavřeném oboru Ω funkce spojité bodu $[x, y]$, pak lze udati ke každému číslu kladnému δ číslo kladné η tak, že

$$\left|f(x+h, y+k)-f(x, y)-\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|<\delta(|h|+|k|) \qquad (a$$

pro všecky dvojice bodové $[x+h, y+k]$, $[x, y]$ položené na konvexním oboru rozměru menšího než η a ležícím na Ω. Věta tato plyne snadno z předpokladů; neboť ze spojitosti derivací následuje ihned, že existuje k δ číslo η tak, že

$$|f'_x(x+h, y+k)-f'_x(x, y)|<\delta, \qquad |f'_y(x+h, y+k)-f'_y(x, y)|<\delta \qquad (b)$$

pro všecky $[x, y]$ daného oboru a všecky $|h|$, $|k|<\eta$. Levou stranu rovnice (a) lze však psáti takto

$$hf'_x(x+\Theta h, y+\Theta k)+kf'_y(x+\Theta h, y+\Theta k)-hf'_x(x, y)-kf'_y(x, y)\,, \qquad 0<\Theta<1$$

což jest v důsledku (b) vskutku menší než $\delta(|k|+|h|)$, je-li bod $[x+\Theta h, y+\Theta h]$ na Ω (což jest jistě splněno, jsou-li body $[x+h, y+h]$, $[x, y]$ položené na konvexním oboru rozměru menšího než η a ležícím na Ω).

POZNÁMKA 2. Výsledek docílený byl odvozen za předpokladu, že hranice oboru Ω_1 jest protínána přímkami rovnoběžnými s osou V pouze ve dvou bodech. Stačí však, když to jest splněno pro jakýkoliv systém přímek rovnoběžných. Neboť k rozdělení roviny UV na pravoúhlé trojúhelníky lze použíti jakýchkoli dvou systémů rovnoběžných přímek k sobě kolmých. Ostatně zdá se, že i tento předpoklad není podstatný, jakož i předpoklad, že funkce $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ jsou spojité v oboru Ω_1, širším ještě než Ω. Snad by bylo lze předpoklady tyto odstraniti pomocí věty odstavce 270. Otázkou touto však se nechci zabývati, jelikož v následujícím podáno nové odvození.

279. Budiž tedy dán integrál trojnásobný

$$\iiint_{\mathbf{T}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

kde $f(x, y, z)$ jest nejprve spojitá funkce v $\mathbf{T}$ a $\mathbf{T}$ jest dáno jistým okolím bodu $[x_0, y_0, z_0]$, takže jest možno psáti rozklad integrálu trojnásobného ve dvě integrace, jak vyjadřuje rovnice

$$\iiint_{\mathbf{T}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \underbrace{\iint dy\, dz \int}_{\mathbf{T}} f(x, y, z)\, dx.$$

Zavedeme do integrálu na pravé straně místo proměnných x, y, z nové proměnné x', y', z' a to prostřednictvím dvou po sobě následujících transformací

$$\text{I.}\begin{cases} x = F(x', y, z), \\ y = y, \\ z = z, \end{cases} \qquad \text{II.}\begin{cases} x' = x', \\ y = M(x', y', z'), \\ z = N(x', y', z'). \end{cases}$$

První transformací se místo jedné proměnné x zavádí nová proměnná x'; proměnné y, z se podržují beze změny. Bodu $[x, y, z]$ oboru $\mathbf{T}$ přiřaděn jest bod $[x', y, z]$; probíhá-li bod $[x, y, z]$ všecky body oboru $\mathbf{T}$, nechť probíhá příslušný bod $[x', y, z]$ všecky body jistého oboru $\mathbf{T}_1$. Nechť jest dále toto přiřadění oborů $\mathbf{T}$ a $\mathbf{T}_1$ jedno-jednoznačné. Poslednímu požadavku jistě bude vyhověno, nemění-li derivace $\partial F(x, y, z)/\partial x'$, jejíž existenci jakož i existenci derivací podle y a z budeme předpokládati v oboru $\mathbf{T}_1$, své znaménko. Vedle toho učiníme předpoklad, že i $F(x', y, z)$, i její derivace v oboru $\mathbf{T}_1$ jsou funkce spojité (včetně hranic). Pak můžeme ihned psáti užívajíce věty o zavedení nové proměnné do integrálu určitého (odstavec 107) (a symbolů snadno srozumitelných)

$$\iiint_{\mathbf{T}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\mathbf{T}} dy\, dz \int f(x, y, z)\, dx =$$
$$= \iint_{\mathbf{T}_1} dy\, dz \int f[F(x', y, z), y, z] \left|\frac{\partial F}{\partial x'}\right| dx'. \tag{7}$$

Proč byla psána v rovnicích právě napsaných $|\partial F/\partial x'|$ a ne $\partial F/\partial x'$ — jak by se při povrchním užití věty dalo očekávati —, jest nasnadě; i při jednoduchém integrálu v (1') odstavce 107 museli bychom psáti $|\varphi'(t)|$ místo $\varphi'(t)$, kdybychom vypisovali pouze obor integrační (interval integrálu) a ne zároveň směr, ve kterém jest integrovati, což se činí při jednoduchém integrálu tím, že se rozeznává mez dolní a mez horní intervalu integrálního.

Druhou transformací se místo proměnných y, z zavádějí proměnné y', z'; proměnná x' se ponechává beze změny. Bodu $[x', y, z]$ oboru $\mathbf{T}_1$ přiřaděn jest bod $[x', y', z']$ oboru $\mathbf{T}'$; probíhá-li bod $[x', y, z]$ všecky body oboru $\mathbf{T}_1$, nechť příslušný jemu (na základě transformace II) bod $[x', y', z']$ probíhá všecky body oboru $\mathbf{T}'$. Nechť jest dále toto vzájemné přiřadění bodů v oborech $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}'$ jedno-jednoznačné. Pak existují-li prvé derivace funkcí M, N podle x', y' z' pro všecky body oboru $\mathbf{T}'$ a jsou-li (jakož budeme předpokládati) derivace tyto a funkce M, N v oboru $\mathbf{T}'$ včetně hranic funkce spojité a jestliže determinant funkcionální

$$\frac{D(M,N)}{D(y',z')}=\frac{\partial M}{\partial y'}\frac{\partial N}{\partial z'}-\frac{\partial M}{\partial z'}\frac{\partial N}{\partial y'}$$

nemění v $\mathbf{T}'$ své znaménko, pak můžeme užívajíce věty, jichž chceme dokázati, pro $n=2$, psáti, je-li $f_1(x', y, z)$ funkce v $\mathbf{T}_1$ spojitá,

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbf{T}_1} f_1(x',y,z)\,dx'\,dy\,dz &= \int dx' \iint_{\mathbf{T}_1} f_1(x',y,z)\,dy\,dz = \\ &= \int dx' \iint_{\mathbf{T}'} f_1(x',M,N)\left|\frac{D(M,N)}{D(y',z')}\right| dy'\,dz' = \\ &= \iiint_{\mathbf{T}'} f_1(x',M,N)\left|\frac{D(M,N)}{D(y',z')}\right| dx'\,dy'\,dz'.\end{aligned} \tag{8}$$

Provedeme-li tudíž na integrál z funkce $f(x, y, z)$ v oboru $\mathbf{T}$ nejprve transformaci I a potom transformaci II, máme za předpokladů o funkcích F, M, N v předch. učiněných na základě rovnic (7) a (8) ihned

$$\begin{aligned}&\iiint_{\mathbf{T}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \\ &= \iiint_{\mathbf{T}} f[F(x',M,N),M,N]\left|\frac{\partial F(x',M,N)}{\partial x'}\cdot\frac{D(M,N)}{D(y',z')}\right| dx'\,dy'\,dz',\end{aligned} \tag{9}$$

při čemž psáno stručněji M, N místo $M(x', y', z')$, $N(x', y', z')$ a derivaci $\partial F(x', M, N)/\partial x'$ jest počítati tak, jako by M a N byly nezávislé na x'. Klaďme však

$$F(x',M,N)=L(x',y',z'); \tag{10}$$

pak sled transformace I a II dává za výslednou transformaci transformaci

$$\left.\begin{aligned} x &= L(x',y',z') \\ y &= M(x',y',z') \\ z &= N(x',y',z') \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Derivujeme-li rovnici (10) postupně podle x', y', z', máme (podržujíce pro $\partial F/\partial x'$ význam svrchu jí daný)

$$\frac{\partial F}{\partial x'}+\frac{\partial F}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial x'}+\frac{\partial F}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial x'}=\frac{\partial L}{\partial x'},$$
$$\frac{\partial F}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial y'}+\frac{\partial F}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial y'}=\frac{\partial L}{\partial y'},$$
$$\frac{\partial F}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial z'}+\frac{\partial F}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial z'}=\frac{\partial L}{\partial z'}.$$

Násobíme-li tyto tři rovnice po řadě čísly

$$\frac{D(M, N)}{D(y', z')}, \quad \frac{D(M, N)}{D(z', x')}, \quad \frac{D(M, N)}{D(x', y')} \tag{12}$$

a pak je takto znásobené sečteme, máme ihned

$$\frac{\partial F}{\partial x'} \cdot \frac{D(M, N)}{D(y', z')} = \frac{D(L, M, N)}{D(x', y', z')} . \tag{13}$$

Vztah tento ovšem následuje též a to bezprostředně z okolnosti, že součin determinantů funkcionálních transformace I a transformace II jest rovný funkcionálnímu determinantu výsledné transformace (11).

Použijeme-li poslední rovnice, máme konečně vztah

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{T'} f(L, M, N) \frac{D(L, M, N)}{D(x', y', z')}\, dx'\, dy'\, dz'. \tag{14}$$

280. Při odvozování tohoto vztahu, který je symetrický vzhledem k proměnným x, y, z resp. x', y', z' měly proměnné x, y, z různou roli a mohli bychom tudíž postupovati k odvození výsledné rovnice trojím různým způsobem (ovšem za náležitě pozměněných předpokladů o funkcích L, M, N). Můžeme však výsledek docílený vysloviti za předpokladů značně obecnějších.

Učiníme totiž předpoklad: *Funkce* $L(x', y', z')$, $M(x', y', z')$, $N(x', y', z')$ jsou v oboru uzavřeném T' — který pro naše další účely může býti obor zcela jednoduchý, na příklad *obor pravoúhelníkový* — *funkce spojité mající prvé derivace podle* x', y', z' *rovněž spojité* (všecko incl. hranic oboru T'). *Jejich determinant funkcionální jest v* T' *stále od nuly různý.* Substituce (11) přiřaďuje každému bodu $[x', y', z']$ oboru T' bod $[x, y, z]$ oboru spojitého uzavřeného T: *budiž toto přiřadění vzájemně jedno-jednoznačné* (mohlo by se totiž státi, že by některá část (některé části) oboru T dvakrát — po případě i vícekráte — byly substitucí (11) z oboru T' vytvořována, t. j. že by obor T sebe sama částečně dvakrát — po případě i vícekráte — pokrýval; tento případ právě předpokladem učiněným chceme vyloučiti).

Budiž nyní bod $[x'_0, y'_0, z'_0]$ bod vnitřní oboru T', jemu přísluší v T rovněž vnitřní bod $[x_0, y_0, z_0]$. Podle předpokladů o funkcionálním determinantu jedno z čísel (12) jest jistě v bodě $[x'_0, y'_0, z'_0]$ jistě různo od nuly (ta tři čísla jsou minory funkcionálního determinantu patřící k prvnímu sloupci). Budiž to na příklad první z těchto tří čísel. Pak můžeme rovnice

$$y = M(x', y', z'), \qquad z = N(x', y', z')$$

řešiti podle y', z', jež dostáváme jakožto funkce proměnných $[x', y, z]$ definované v jistém okolí bodu $[x'_0, y_0, z_0]$ doplněném tímto bodem jakožto funkce spojité, s prvými derivacemi podle jednotlivých proměnných rovněž spojitými a nabývající v tom bodě hodnot y'_0, z'_0. Buďtež tyto funkce $y' = \psi(x', y, z)$, $z' = \chi(x', y, z)$ a dosaďme do rovnice $x = L(x', y', z')$ ty funkce za y' a z'. Dostaneme

$$x = L(x', \psi, \chi) = F(x', y, z).$$

Derivace funkce $F(x', y, z)$ podle x' v bodě $[x'_0, y_0, z_0]$ jest od nuly různa; to vyplývá z rovnice (13), kterou lze i tu stejnou úvahou odvoditi. Dá se tedy každá substituce (11) rozložiti ve sled dvou transformací (I) a (II) odstavce předcházejícího (po případě transformací lišících se od I a II záměnou proměnných) a to v oboru, který při proměnných $[x, y, z]$ jest dán jistým okolím bodu $[x_0, y_0, z_0]$ — vnitřního to bodu oboru **T** — na příklad okolím $O(x_0, y_0, z_0; \delta)$, kde δ jest číslo kladné na $[x_0, y_0, z_0]$ závislé. Přísluší-li tomuto okolí, jež krátce označíme $\mathbf{O}_\delta$, v oboru proměnných $[x', y', z']$ obor $\mathbf{O}'$, máme podle předcházejícího odstavce

$$\iiint\limits_{\mathbf{O}_\delta} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{\mathbf{O}'} f(L, M, N) \left|\frac{D(L, M, N)}{D(x', y', z')}\right| dx'\, dy'\, dz'. \tag{15}$$

Buďiž nyní **P** libovolný pravoúhelníkový obor, jehož body jsou vesměs vnitřními body oboru **T**. Každý bod na **P** jest obsažen uvnitř jednoho z $\mathbf{O}_\delta$ i lze tedy **P** překrýti konečným počtem takovýchto $\mathbf{O}_\delta$ (podle věty Borelovy, odstavec 190 a následující) a tudíž **P** rozložiti na konečný počet částí, pro kterou každou jest splněna rovnice (15). Sčítáme-li tudíž příslušné rovnice, vyplyne vztah

$$\iiint\limits_{\mathbf{P}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{\mathbf{P}'} f(L, M, N) \left|\frac{D(L, M, N)}{D(x', y', z')}\right| dx'\, dy'\, dz',$$

kde $\mathbf{P}'$ jest obor odpovídající v $\mathbf{T}'$ oboru **P**.

Z této rovnice však jednoduchou úvahou vyplývá ihned vztah (14) odstavce předcházejícího dokázaný tak obecně. Úvaha ta opírající se o větu (11) odstavce 269 a větu odstavce 270 jest samozřejma a netřeba ji tady prováděti. Obory spojité **T** a **T**' ve vztahu (14) mohou pak býti libovolné s tím omezením, aby vzájemné přiřadění jejich bodů substitucí (11) bylo jedno-jednoznačné a aby v nich byly splněny předpoklady v tomto odstavci učiněné o funkcích L, M, N a jejich derivacích.

281. PŘÍKLAD 1. Polární souřadnice. Uvažujme zavedení souřadnic polárních r, φ daných rovnicemi

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi; \qquad r > 0. \tag{α}$$

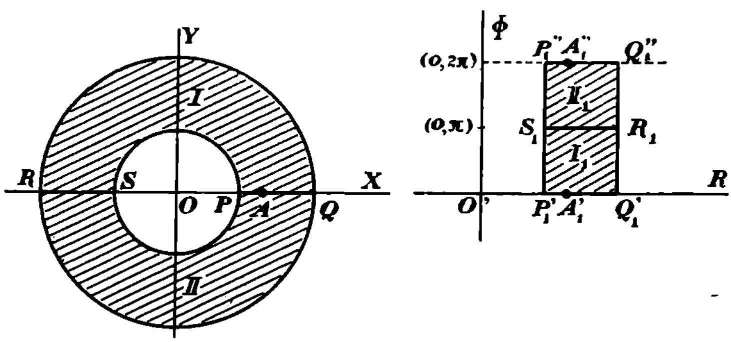
Zde jsou různé případy možné. Nejjednodušší jest ten, že spojitý obor Ω (roviny XY) neobsahuje bod $(0, 0)$ ve svém nitru, ani na hranici a jest obsažen mezi dvěma polopaprsky vycházejícími z počátku a svírajícími s osou X úhly Φ_0, Φ_1, při čemž určení úhlů Φ_0 a Φ_1 jest takové, že $0 < \Phi_1 - \Phi_0 < 2\pi$; pak polopaprsky vedené z bodu libovolného na oboru Ω k počátku svírají s osou X úhel obsažený v intervalu (Φ_0, Φ_1). Pak rovnicemi (α) jest r, φ určeno jednoznačně pomocí x, y, stanovíme-li, že úhel φ (jimi daný až na násobek celistvý čísla 2π) má býti v intervalu (Φ_0, Φ_1), a ovšem i x, y jsou těmito rovnicemi jednoznačně pomocí r, φ dány. Tím hlavnímu požadavku pro transformaci dvojného integrálu rovnicemi (α) vyhověno.

Pro determinant funkcionální jest

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

což jest číslo stále kladné (neboť počátek, pro nějž jedině jest $r = 0$, není v oboru Ω podle předpokladu). Můžeme tudíž užíti dokázané rovnice a psáti

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\Omega} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi. \qquad (\beta)$$



Obr. 21.

Abychom vysvětlili další případ možný, vezmeme v úvahu hned jednoduchý obor Ω, který nechť jest mezikruží, jehož střed jest v počátku souřadnic a při němž poloměry obou kruhů jsou R_1, R_2, $R_1 > R_2$. Zde stanovíme-li, že úhel φ rovnicemi (α) daný jest v intervalu $(0, 2\pi)$, bude přiřaděno danému mezikruží jakožto obor Ω_1 pravoúhelník. (Při tom ovšem body (r, φ) znázorňujeme v rovině opatřené rovněž dvěma pravoúhlými osami R, Φ; viz obr. 21.)

Tu však požadavku, aby bodům oboru Ω jednoznačně byly přiřaděny body oboru Ω_1, úplně vyhověno není. Neboť bodům na úsečce PQ (položené na ose X) odpovídají body, jejichž φ se rovná jednak 0, jednak 2π (neboť podle předpokladů při vyvození základní věty odstavce 278 byly obory Ω, Ω_1 v úvahu brány i s hranicemi). Tedy jest úsečce PQ přiřaděna v Ω_1 jednak úsečka $P'_1 Q'_1$, jednak $P''_1 Q''_1$.

V tomto případě však si můžeme lehce odpomoci. Rozdělíme si obor Ω ve dva, na příklad jej rozřízneme podél osy X; tím se rozpadne obor ten ve dva obory označené v obr. I, II, jimž jednoznačně jsou přiřaděny obory I′, II′. Poněvadž pak obory I i II spadají do případu zprvu projednávaného a tedy platí pro ně jednotlivě rovnice (β), platí ta rovnice i pro součet těch oborů t. j. pro dané mezikruží. Výsledek tento však bezprostředně se rozšiřuje pro obory obecnější, v nichž ohraničení zevnější (místo kružnicí QR) jest dáno libovolnou spojitou čarou se neprotínající.

Konečně vezmeme v úvahu případ, že obor Ω má počátek ve svém nitru. V tomto případě odejmeme z toho oboru kruh s poloměrem ε (dosti malým, aby kruh ten byl uvnitř Ω); tak vznikne z Ω obor $\Omega^{(\varepsilon)}$, pro který podle předcházejícího platí ($\Omega_1^{(\varepsilon)}$ jest obor odpovídající $\Omega^{(\varepsilon)}$)

$$\iint\limits_{\Omega^{(\varepsilon)}} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega_1^{(\varepsilon)}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\,.\, dr\, d\varphi,$$

ze kteréžto rovnice, necháme-li ε konvergovati k nule, následuje opět (β), jejíž platnost tudíž v každém případě*) dokázána.

282. PŘÍKLAD 2. Integrál Laplaceův. Abychom užitečnost formule (β) na specielním případě objasnili, počítejme na základě transformace (α) integrál

$$\iint\limits_{K_R} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

při čemž integrační obor jest kruh s poloměrem R a středem v počátku. Zavedeme-li rovnicemi (α) souřadnice polární, bude kruhu příslušeti pravoúhelník, jehož jeden vrchol jest v počátku ($r = 0$, $\varphi = 0$) a jehož strany jsou R, 2π. Tak dostaneme

$$\iint\limits_{K_R} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2}\, r\, dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\tfrac{1}{2} e^{-r^2}\right)_0^R = 2\pi\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-R^2}\right) = \pi\left(1 - e^{-R^2}\right).$$

Z tohoto výsledku lze snadně odvoditi výraz pro integrál Laplaceův. Do čtverce $\check{C}$, jehož strany mají rovnice $x = R$, $x = -R$, $y = R$, $y = -R$, jest kruh K_R vepsán, kruh pak $K_{R\sqrt{2}}$ jest mu opsán. Poněvadž pak $e^{-x^2-y^2}$ jest funkce stále kladná, jest

$$\iint\limits_{K_R} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy < \iint\limits_{\check{C}} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy < \iint\limits_{K_{R\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy\,;$$

aneb nahradíme-li prostřední z těchto integrálů dvojnásobným integrálem

$$\iint\limits_{\check{C}} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_{-R}^{R} e^{-y^2}\, dy \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx\right)^2$$

a užijeme-li zároveň hodnoty svrchu pro krajní integrály vypočtené,

$$\pi\left(1 - e^{-R^2}\right) < \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx\right)^2 < \pi\left(1 - e^{-2R^2}\right).$$

*) Nevzat sice v úvahu případ, že počátek jest na hranici oboru Ω; avšak tento případ stejně lze projednati jako případ, kdy počátek jest uvnitř Ω.

Necháme-li v této nerovnině R růsti nade všecky meze a odmocníme-li, dostaneme konečně

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi},$$

čímž jest hodnota pro Laplaceův integrál vypočtena.

283. PŘÍKLAD 3. Budiž dána křivka uzavřená, uvnitř které nachází se počátek a jejíž rovnici lze psáti ve tvaru

$$x = g(t), \qquad y = h(t),$$

při čemž všecky body křivky nechť se proběhnou, roste-li t od t_0 do T; (jest tedy $g(t_0) = g(T)$, $h(t_0) = h(T)$). O funkcích $g(t)$ a $h(t)$ učiníme dále předpoklad, že jsou spojité a mají derivace v intervalu (t_0, T). Konečně budeme předpokládati, že každý polopaprsek z počátku vycházející, protne křivku toliko v jednom bodě.

Zavedeme nové proměnné (u, t) rovnicemi

$$x = ug(t), \qquad y = uh(t); \qquad u \geqq 0. \tag{γ}$$

I jest patrno, že každému bodu $[x, y]$ v oboru Ω, který jest omezen jedinou uzavřenou křivkou a který neobsahuje bod $[0, 0]$, přísluší jeden bod $[u, t]$ v jistém oboru Ω_1 a naopak. Pro funkcionální determinant pak máme

$$\frac{D(x, y)}{D(u, t)} = u\,(g(t)\,h'(t) - g'(t)\,h(t)).$$

Jest tedy

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\Omega_1} f(u\,.\,g(t),\ u\,.\,h(t))\, u\, |\, g(t)\, h'(t) - g'(t)\, h(t)\, |\, du\, dt.$$

Tato rovnice odvozená pouze pro obory Ω svrchu vytčené rozšiřuje se pro libovolné obory obsahující i bod $[0, 0]$ stejným způsobem, jaký byl použit při polárních souřadnicích. Ostatně substituce (γ) jest jisté zevšeobecnění substituce polárních souřadnic, místo pravoúhlých (propočítané v příkladě 1). Kdyby tu obor integrační Ω byl omezen uzavřenou spojitou křivkou o rovnicích $x = g(t)$, $y = h(t)$ (t probíhá interval (t_0, T)), byl by příslušný obor Ω_1 pravoúhelník o vrcholech $[0, t_0]$, $[1, t_0]$, $[1, T]$, $[0, T]$ a integrál daný by se převáděl ihned na dvojnásobný integrál o konstantních mezích; takže by bylo v tomto případě (za náležitých předpokladů o funkcích $f(x, y)$, $g'(t)$, $h'(t)$)

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{t_0}^{T} dt \int_{0}^{1} f(ug(t),\ uh(t))\, u\, |\, g(t)\, h'(t) - g'(t)\, h(t)\, |\, du.$$

Kdybychom na příklad měli počítati daný integrál pro trojúhelník o vrcholech $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, dostali bychom po snadném počtu ten integrál jakožto součet tří integrálů dvojnásobných, z nichž první jest dvojnásobný integrál

$$|\, x_1 y_0 - x_0 y_1\, | \int_0^1\!\!\int_0^1 f[ux_1 t + ux_0(1 - t),\ uy_1 t + uy_0(1 - t)]\, u\, dt\, du$$

a ostatní dva vyplývají cyklickou záměnou čísel 0, 1, 2. Počátek $[0, 0]$ předpokládán i tu uprostřed daného trojúhelníka.

284. PŘÍKLAD 4. Transformace

$$x=\frac{Rx'}{x'^2+y'^2},\qquad y=\frac{Ry'}{x'^2+y'^2}\tag{δ}$$

(tak zvaná *transformace inversní vzhledem ke kruhu* $x^2+y^2=R^2$) jest transformace jedno-jednoznačná pro každý obor roviny XY resp. $X'Y'$ neobsahující počátek. Neboť z rovnic (δ) vyplývá

$$x^2+y^2=\frac{R^2}{x'^2+y'^2},\qquad x'=\frac{Rx}{x^2+y^2},\qquad y'=\frac{Ry}{x^2+y^2}.$$

Dále jest

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(x',y')}\right|=\frac{R^2}{(x'^2+y'^2)^2}.$$

I jest tedy

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy=R^2\iint\limits_{\Omega_1} f\left(\frac{Rx'}{x'^2+y'^2},\ \frac{Ry'}{x'^2+y'^2}\right)\frac{dx'\,dy'}{(x'^2+y'^2)^2}.\tag{ε}$$

Význam a platnost této rovnice i v tom případě, že obor Ω obsahuje bod $|0,0|$ — počátek souřadnic — bude vyložen resp. odůvodněn později.

285. PŘÍKLAD 5. Souřadnice eliptické v oboru dvojrozměrném. Rovnice

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{a-e^2}=1\tag{ι}$$

jest v pravoúhlých souřadnicích $[x, y]$ rovnicí elipsy, je-li $a>e^2$; jestliže však $a<e^2$, jest to rovnice hyperboly. Ohniska všech kuželoseček, jejichž rovnice dostáváme různými volbami čísla a, nacházejí se na ose X ve vzdálenosti vesměs rovné $\pm e$ od počátku. Představuje nám tedy rovnice daná při proměnném parametru a systém kuželoseček konfokálních. Každým bodem roviny procházejí dvě kuželosečky toho systému a to jedna elipsa a jedna hyperbola; neboť rovnice (ι) má, zvolíme-li si pevně $[x, y]$ a pokládáme-li a za neznámou, vždy dva kořeny reálné, jeden jest v intervalu $(0, e^2)$, druhý v intervalu (e^2, ∞). Kořen v intervalu (e^2, ∞) označíme λ, kořen v intervalu $(0, e^2)$ pak μ. Jest tudíž rovnicí (ι) každé reálné dvojici hodnot $|x, y|$ přiřaděna nová reálná dvojice hodnot $|\lambda, \mu|$; čísla $|\lambda, \mu|$ slují eliptické souřadnice bodu $|\lambda, \mu|$. Snadno můžeme x, y pomocí příslušných λ, μ vypočítati a naopak. Řešíme-li na příklad rovnice

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-e^2}=1,\qquad \frac{x^2}{\mu}+\frac{y^2}{\mu-e^2}=1,$$

dostaneme snadno

$$x=\pm\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{e},\qquad y=\pm\frac{\sqrt{(\lambda-e^2)(e^2-\mu)}}{e},\qquad 0\leqq\mu\leqq e^2\leqq\lambda.$$

Z těchto rovnic naopak jest zřejmo, že jednomu páru hodnot (λ, μ) — nehledíme-li ke krajním hodnotám příslušných intervalů $(0, e^2)$, (e^2, ∞) — jsou přiřaděny čtyři dvojice hodnot $|x, y|$ a tudíž čtyři body roviny XY a to v každém kvadrantu roviny XY (vzniklých osami XY) jeden bod. Abychom dostali mezi $|x, y|$ a $|\lambda, \mu|$ vztahy jedno-jednoznačné, omezíme se tudíž na jeden kvadrant roviny XY, na příklad na kvadrant první, ve kterém $x\geqq 0$, $y\geqq 0$. Omezíme-li se na tento kvadrant, pak jednomu páru hodnot (λ, μ), kde

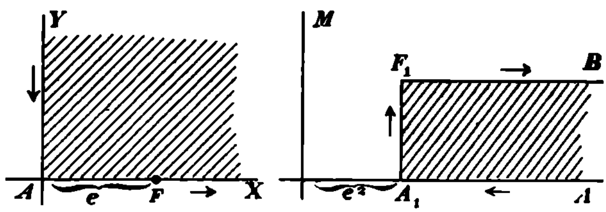
$0 \leqq \mu \leqq e^2 \leqq \lambda$, jest přiřaděn jeden pár hodnot (x, y), kde $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ a naopak. V obrazci 22 znázorněny oba obory sobě tak příslušící čárkováním, při čemž i pro znázorňování dvojic $[x, y]$ i pro znázorňování dvojic $[\lambda, \mu]$ užito pravoúhlých systémů souřadnicových (jednak při osách XY, jednak při osách ΛM). Přímce AFX — kladné to části osy X — odpovídá v rovině ΛM lomená čára A_1F_1B, poloose AY odpovídá pak paprsek $A_1\Lambda$.

Pro funkcionální determinant dostáváme

$$\frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} = -\tfrac{1}{4} \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{\lambda\mu(\lambda - e^2)(e^2 - \mu)}},$$

což jest číslo stále téhož znaménka a jest to funkce konečná ve vyčárkovaném oboru, vyjmeme-li z něho okolí přímek $\mu = 0$, $\mu = e^2$, $\lambda = e^2$, t. j. okolí bodů ležících na hranicích. Jest tedy pro každý obor Ω ležící *uvnitř* prvého kvadrantu

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \tfrac{1}{4} \iint_{\Omega_1} f\left(\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{e}, \frac{\sqrt{(\lambda - e^2)(e^2 - \mu)}}{e}\right) \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{\lambda\mu(\lambda - e^2)(e^2 - \mu)}}\, d\lambda\, d\mu.$$



Obr. 22.

Rovnice tato však bez potíží rozšiřuje se na takové obory Ω, jejichž hranice z části splývají s hranicemi prvého kvadrantu (při čemž ovšem na pravé straně může se vyskytovati integrál, ve kterémž funkce za znaménkem integračním stává se nekonečnou; tu pak nastává případ dvojného integrálu nevlastního, o kterýchž integrálech však budeme teprve později jednati).

286. PŘÍKLAD 6. Transformace ortogonální. Transformace (1) sluje ortogonální (DP 235), jsou-li splněny vztahy

$$\frac{\partial L}{\partial x'}\frac{\partial L}{\partial y'} + \frac{\partial M}{\partial x'}\frac{\partial M}{\partial y'} + \frac{\partial N}{\partial x'}\frac{\partial N}{\partial y'} = 0,\quad \frac{\partial L}{\partial y'}\frac{\partial L}{\partial z'} + \frac{\partial M}{\partial y'}\frac{\partial M}{\partial z'} + \frac{\partial N}{\partial y'}\frac{\partial N}{\partial z'} = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial z'}\frac{\partial L}{\partial x'} + \frac{\partial M}{\partial z'}\frac{\partial M}{\partial x'} + \frac{\partial N}{\partial z'}\frac{\partial N}{\partial x'} = 0. \tag{8}$$

V tomto případě ortogonální transformace lze pro funkcionální determinant (2) odvoditi výraz jednodušší. Neboť povýšíme-li determinat ten na čtverec, máme (podle známého pravidla o násobení determinantů)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial L}{\partial x'}, & \frac{\partial M}{\partial x'}, & \frac{\partial N}{\partial x'} \\ \frac{\partial L}{\partial y'}, & \frac{\partial M}{\partial y'}, & \frac{\partial N}{\partial y'} \\ \frac{\partial L}{\partial z'}, & \frac{\partial M}{\partial z'}, & \frac{\partial N}{\partial z'} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} C_{11}, & C_{12}, & C_{13} \\ C_{21}, & C_{22}, & C_{23} \\ C_{31}, & C_{32}, & C_{33} \end{vmatrix},$$

při čemž $C_{12} = C_{21}$, $C_{13} = C_{31}$, $C_{23} = C_{32}$ jsou levé strany rovnic (8) a tudíž rovny nule a

$$C_{11} = \left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial x'}\right)^2, \quad C_{22} = \left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial y'}\right)^2,$$

$$C_{33} = \left(\frac{\partial L}{\partial z'}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial z'}\right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial z'}\right)^2.$$

Jest tedy

$$\left|\frac{D(L, M, N)}{D(x', y', z')}\right| = \sqrt{C_{11}\, C_{22}\, C_{33}},$$

čímž jest při transformacích ortogonálních dán jednoduchý prostředek pro výpočet absolutní hodnoty funkcionálního determinantu.

287. PŘÍKLAD 7. Polární souřadnice v oborech trojrozměrných. Vyšetřme formuli pro přeměnu trojných integr. při zavedení polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi\cos\Theta, \quad y = r\sin\varphi\cos\Theta, \quad z = r\sin\Theta,$$

$$r \geqq 0, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqq \Theta \leqq \tfrac{1}{2}\pi. \tag{9}$$

Transformace tato vznikající zavedením souřadnic polárních místo pravoúhlých jest ortogonální; neboť jest na příklad

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -r\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\Theta + r\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\Theta = 0$$

atd. Jest dále v našem případě

$$C_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1,$$

$$C_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2\cos^2\Theta,$$

$$C_{33} = \left(\frac{\partial x}{\partial \Theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \Theta}\right)^2 = r^2$$

a tedy

$$\left|\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \Theta)}\right| = \sqrt{1 \,.\, r^2\cos^2\Theta \,.\, r^2} = r^2\cos\Theta.$$

Transformace (9) přiřaďuje oboru T takovému, že žádná z uzavřených ploch jej omezujících nemá počátek [0, 0, 0] ve svém nitru, jistý obor T' jednojednoznačně (při čemž pokládáme hodnoty r, φ, Θ za pravoúhlé souřadnice jistého bodu). Máme tudíž pro takové obory T

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{T'} f(r\cos\varphi\cos\Theta, r\sin\varphi\cos\Theta, r\sin\Theta)\, r^2\cos\Theta\, dr\, d\varphi\, d\Theta. \tag{10}$$

Rovnice tato se však rozšiřuje pro libovolné obory T způsobem obšírně vyloženým při dvou proměnných v příkladu 2.

288. Souřadnice eliptické v oborech trojrozměrných. Rovnice

$$\frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} + \frac{z^2}{c^2 - u} - 1 = 0; \; a^2 > b^2 > c^2 \tag{11}$$

má, pokládáme-li u za neznámou a jsou-li čísla x, y, z vesměs od nuly různa, tři kořeny. Všecky tři kořeny jsou reálné. Jeden jest v intervalu $(-\infty, c^2)$, neboť dosadíme-li do levé strany rovnice za u číslo $-A$, kde A jest číslo kladné dosti veliké, nabude levá stana hodnotu zápornou; dosadíme-li pak za u číslo $c^2-\varepsilon$, kde ε jest číslo kladné dosti malé, nabude levá strana hodnotu kladnou. Stejně se dokáže, že jeden kořen rovnice (11) jest v intervalu (c^2, b^2) a jeden kořen v intervalu $(b^2, a^2$. Kořeny tyto označíme λ, μ, ν, při čemž bude

$$-\infty < \lambda < c^2, \quad c^2 < \mu < b^2, \quad b^2 < \nu < a^2. \tag{12}$$

Z předcházejícího jest patrno, že každému bodu $[x, y, z]$, který není položen v rovinách XY, YZ, ZX, jsou přiřaděna rovnicí (11) tři čísla λ, μ, ν hovící nerovninám (12); čísla ta slují *eliptické souřadnice* toho bodu a jsou př bodech neležících v rovinách souřadných stanovena jednoznačně. Jest však ještě naopak rozhodnouti, zda svými eliptickými souřadnicemi jest bod jednoznačně určen, a k tomu cíli vypočteme si pravoúhlé souřadnice bodu pomocí eliptických. Dostaneme (viz DP 236), klademe-li pro krátkost $f(u) = (u-\lambda)(u-\mu)(u-\nu)$,

$$x^2 = \frac{f(a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \quad y^2 = \frac{f(b^2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}, \quad z^2 = \frac{f(c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \tag{14}$$

Z rovnic těchto jest patrno, že každému systému hodnot $[\lambda, \mu, \nu]$ hovících nerovninám (12) jest přiřaděno 8 systémů hodnot $[x\ y, z]$, avšak toliko jediný systém $[x, y, z]$, klademe-li na příklad požadavek, aby čísla x, y, z byla vesměs kladná. Jest tedy oboru T proměnných x, y, z položenému uvnitř prvého oktantu (pro body $[x, y, z]$ tohoto oboru jsou tedy platny nerovniny $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$) přiřaděn v proměnných λ, μ, ν jistý obor T′ určený nerovninami (12), při čemž jest vzájemné přiřazení bodů těchto dvou oborů jedno-jednoznačné. I tato transformace jest ortogonální (viz DP 236 (11); místo C_{ki} užito v DP označení b_{ik}), Dostáváme pak po snadném počtu

$$C_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)},$$

$$C_{22} = \frac{1}{4}\,\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}, \; C_{33} = \ldots,$$

čímž získána absolutní hodnota determinantu funkcionálního $(= \sqrt{C_{11}C_{22}C_{33}})$ a veškeré počty potřebné k transformaci integrálu trojného o proměnných x, y, z, v integrál trojný o proměnných λ, μ, ν provedeny.

Výsledky předcházející rozšiřují se snadno i pro případ, že hranice oboru T splývají z části s rovinami souřadnými XY, YZ, ZX; pro body na těchto rovinách jedno (nebo i některá) z čísel x. y, z může býti rovno nule. Při tom však jest připustiti ve vztazích (12) určujících intervaly pro λ, μ, ν vedle znaménka $<$ i znaménko rovnosti; integrály pak zavedením eliptických souřadnic vznikající mohou býti integrály nevlastní, i když původní integrály nebyly nevlastní.

289. PŘÍKLAD 9. Vypočítati jest obsah oboru konečného — „rovnoběžnostěnu" — vymezeného v prostoru n-rozměrném $2n$ „rovinami" o rovnicích

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n &= 0, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n &= \Delta_i, \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Označíme-li obor ten (jakož i jeho obsah) **R**, jest

$$\mathrm{R} = \int\int\limits_{\mathrm{R}}\ldots\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Zavedeme proměnné $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rovnicemi

$$y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Obor R' příslušný oboru R jest obor pravoúhelníkový $(0, 0, \ldots 0; \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$, jeho obsah (podle definice obsahu, jež se opírá právě o obsah oboru pravoúhelníkového) jest $|\Delta_1| . |\Delta_2| \ldots |\Delta_n|$. Podle formule pro transformaci integrálů mnohonásobných pak jest

$$|\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n| = |D| \int\int\limits_{\mathrm{R}}\ldots\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

kde D jest determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix},$$

t. j.

$$\mathrm{R} = \frac{|\Delta_1| . |\Delta_2| \ldots |\Delta_n|}{|D|}.$$

Při tom mlčky ovšem předpokládáno, že $D \neq 0$.

290. PŘÍKLAD 10. V prostoru n-rozměrném jest dán obor T obdobný čtyřstěnu v prostoru 3-rozměrném a to $n + 1$ svými vrcholy (rohy). Jest stanoviti jeho obsah.

Provedeme výpočet pro prostor 4-rozměrný. Vrcholy oboru T nechť jsou body $A_i \equiv [x_i, y_i, z_i, u_i]$, kde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Bod

$$E_\lambda \equiv [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2, \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2, \lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2]$$

probíhá, je-li λ proměnná útvar lineární — „přímku" —, na niž jsou body A_1 (pro $\lambda = 1$) a A_2 (pro $\lambda = 0$). Je-li λ v intervalu $(0, 1)$ jest bod E_λ na „úsečce" spojující body $A_1\, A_2$. Vypočteme-li stejně — užívajíce parametru μ — souřadnice bodu na spojnici bodu E_λ a A_3, dostaneme bod

$$F_{\lambda\mu} = [\lambda\mu x_1 + (1 - \lambda)\mu x_2 + (1 - \mu) x_3, \lambda\mu y_1 + \ldots].$$

Body $F_{\lambda\mu}$ vyplňují v lineárním prostoru dvojrozměrném (v rovině) obor trojúhelníkový, jehož vrcholy jsou A_1, A_2, A_3, probíhají-li obě proměnné λ, μ nezávisle na sobě interval $(0, 1)$. Dále — jak stále stejným způsobem získáváme — body

$$G_{\lambda\mu\nu} = [\lambda\mu\nu x_1 + (1 - \lambda)\mu\nu x_2 + (1 - \mu)\nu x_3 + (1 - \nu) x_4, \ldots]$$

vyplňují — jsou-li λ, μ, ν proměnné omezeny na interval $(0, 1)$ — v lineárním prostoru trojrozměrném obor čtyrstěnový, jehož vrcholy jsou A_1, A_2, A_3, A_4 a konečně body

$$H_{\lambda\mu\nu\pi} = [\lambda\mu\nu\pi x_1 + (1 - \lambda)\mu\nu\pi x_2 + (1 - \mu)\nu\pi x_3 + (1 - \nu)\pi x_4 + (1 - \pi) x_5, \ldots]$$

vyplňují obor T, probíhají-li proměnné λ, μ, ν, π interval $(0, 1)$.

Jest nyní vypočítati integrál

$$\mathrm{T} = \int\int\int\limits_{\mathrm{T}}\int dx\, dy\, dz\, du.$$

K tomu cíli zavedeme nové integrační proměnné λ, μ, ν, π rovnicemi

$$x = \lambda\mu\nu\pi x_1 + (1-\lambda)\mu\nu\pi x_2 + (1-\mu)\nu\pi x_3 + (1-\nu)\pi x_4 + (1-\pi)x_5 + \ldots,$$
$$y = \lambda\mu\nu\pi y_2 + (1-\lambda)\mu\nu\pi y_2 + \ldots, \quad z = \lambda\mu\nu\pi z_1 + \ldots, \quad u = \lambda\mu\nu\pi u_1 + \ldots$$

Jacobien proměnných x, y, z, u podle λ, μ, ν, π jest determinant čtvrtého řádu, jehož první řádek má prvky

$$\mu\nu\pi x_1 - \mu\nu\pi x_2,\ \lambda\nu\pi x_1 + (1-\lambda)\nu\pi x_2 - \nu\pi x_3,\ \lambda\mu\pi x_1 + (1-\lambda)\mu\pi x_2 + (1-\mu)\pi x_3 - \pi x_4,$$
$$\lambda\mu\nu x_1 + (1-\lambda)\mu\nu x_2 + (1-\mu)\nu x_3 + (1-\nu)x_4 - x_5.$$

Dělíme-li první sloupec $\mu\nu\pi$, druhý $\nu\pi$, třetí π, pak postupně odečítáme od čtvrtého sloupce třetí, od třetího druhý, od druhého první, dostaneme pro funkcionální determinant relaci

$$\frac{D(x, y, z, u)}{D(\lambda, \mu, \nu, \pi)} = \mathfrak{A}\mu\nu^2\pi^3,$$

kde $\mathfrak{A}$ jest dáno vztahem

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2, & x_2 - x_3, & x_3 - x_4, & x_4 - x_5 \\ y_1 - y_2, & y_2 - y_3, & y_3 - y_4, & y_4 - y_5 \\ z_1 - z_2, & z_2 - z_3, & z_3 - z_4, & z_4 - z_5 \\ u_1 - u_2, & u_2 - u_3, & u_3 - u_4, & u_4 - u_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, y_1, z_1, u_1, 1 \\ x_2, y_2, z_2, u_2, 1 \\ x_3, y_3, z_3, u_3, 1 \\ x_4, y_4, z_4, u_4, 1 \\ x_5, y_5, z_5, u_5, 1 \end{vmatrix}.$$

Pro T pak v důsledku věty o transformaci množných integrálů máme

$$\mathrm{T} = |\mathfrak{A}| \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \mu\nu^2\pi^3\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\, d\pi = \frac{|\mathfrak{A}|}{1.2.3.4},$$

čímž hledaný obsah vypočten.

290a. PŘÍKLAD 11. V prostoru n-rozměrném jest dán obor T omezený $n+1$ rovinami o rovnicích

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = A_i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Ustanoviti jest obsah oboru T.

Zavedeme nové proměnné ξ_j rovnicemi

$$\xi_j = a_{j1}x_1 + a_{j1}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n - A_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Obor T změní se v obor T′ omezený rovinami $\xi_1=0, \xi_2=0, \ldots, \xi_n=0$ a rovinou

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \ldots + \alpha_n\xi_n = D.$$

Při tom jest D hodnota determinantu $(n+1)$-ho řádu

$$D = \begin{vmatrix} a_{01}, a_{02}, \ldots, a_{0n}, A \\ a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, A_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}, A_n \end{vmatrix}$$

a $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou minory, jež v D přináleží k $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$. Formule pro transformaci mnohonásobných integrálů nám ihned dává (za předpokladu, že $\alpha \neq 0$)

$$\int\int_{\mathrm{T}'}\ldots\int d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n = |\alpha| \int\int_{\mathrm{T}}\ldots\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

odkudž, použijeme-li výsledku příkladu 2 odstavce 277, máme ihned za dalšího předpokladu, že i všecka $\alpha_j \neq 0$, pro žádaný obsah výraz

$$T = \frac{D_1^n}{|\alpha \alpha_1 \ldots \alpha_n|}.$$

3. GEOMETRICKÁ POUŽITÍ DVOJNÝCH INTEGRÁLŮ.

291. Krychlový obsah těles. Pojem obsahu oboru n-rozměrného dán byl zevšeobecněním příslušných pojmů při dvou proměnných již v odstavci 259. Je-li $n = 3$ a obor daný omezen plochami spojitými, nazýváme obor obyčejně tělesem a obsah jeho krychlovým obsahem.

Pro krychlový obsah V tělesa **T** máme v důsledku podané definice tento vzorec (při pravoúhlých souřadnicích prostorových)

$$V = \iiint_{\mathbf{T}} dx\, dy\, dz. \tag{1}$$

Hodnota výrazu pro krychlový obsah není závislá od polohy pravoúhlých souřadnic. Výraz ten se totiž nemění ortogonální transformací (DP 229):

$$x = ax' + a'y' + a''z', \quad y = bx' + \ldots, \quad z = cx' + \ldots$$

Neboť determinant této substituce (viz l. c.) jest rovný ± 1 a máme tedy podle formule základní pro transformaci množných integrálů též (označení integračních proměnných můžeme libovolně měniti)

$$V = \iiint_{\mathbf{T}'} dx'\, dy'\, dz' = \iiint_{\mathbf{T}'} dx\, dy\, dz,$$

kde $\mathbf{T}'$ jest těleso shodné s **T** pouze v jiné poloze (vzniklé otočením **T** kolem počátku) se nacházející. Rovněž transformací $x = \alpha + x'$, $y = \beta + y'$, $z = \gamma + z'$ (translací) zůstává hodnota pro krychlový obsah nezměněna. Má tedy krychlový obsah tělesa tyto tři základní vlastnosti.

1. Patří-li k nějaké části prostoru (omezené spojitou, uzavřenou a se neprotínající plochou) číslo V jakožto její krychlový obsah, patří k shodné části totéž číslo.

2. Jestliže část prostoru, jež jest omezena plochou spojitou, uzavřenou a se neprotínající a jíž přísluší číslo V jakožto krychlový obsah, rozdělíme plochou spojitou ve dvě části, jimž přísluší krychlové obsahy V_1, V_2, pak jest

$$V = V_1 + V_2.$$

3. *Krychle, jejíž strana se rovná 1, má krychlový obsah rovný 1.*

Na základě těchto tří základních vlastností, z nichž druhá vyplývá ze základní vlastnosti trojných integrálů, pro krychlový obsah tělesa, mohli bychom naopak (aspoň za zjednodušujících předpokladů) odvoditi snadno vzorec (I).

292. Z (I) lze odvoditi některé vzorce jednodušší často používané. Budiž dána nejprve plocha rovnicí

$$z = f(x, y),$$

v rovině XY pak budiž vymezen jistý obor Ω čarou uzavřenou K v užším smyslu kvadratury schopnou. O funkci $f(x, y)$ učiníme předpoklad, že jest pro všecky body (x, y) oboru Ω spojitou funkcí obou proměnných a zároveň funkcí stále kladnou.

Vezmeme v úvahu těleso omezené rovinou XY, pak plochou válcovou, jejíž přímka vytvořující jest kolma na rovinu XY (a tedy rovnoběžna s osou Z) a křivka řídící jest K (t. j. ohraničení oboru Ω), a konečně plochou $z = f(x, y)$. Krychlový obsah pak tělesa daného označíme V.

Za těchto předpokladů lze integrál trojný (I) převésti na integrál mnohonásobný a integrovati napřed podle proměnné z v mezích 0, $f(x, y)$, čímž dostaneme

$$V = \iint f(x, y)\, dx\, dy, \tag{II}$$

kterážto formule se psává také ve tvaru

$$V = \iint\limits_{\Omega} z\, dx\, dy. \tag{II}$$

293. Budiž dána nyní plocha spojitá a uzavřená; promítneme-li veškeré její body kolmo na rovinu XY, nechť souhrn těch průmětů vyplňuje na rovině XY obor Ω omezený spojitou uzavřenou křivkou K (po případě i několika křivkami uzavřenými). Předpokládejme dále, každá přímka rovnoběžná s osou Z a probíhající bodem (x, y) uvnitř Ω protíná danou plochu ve dvou bodech a to v bodě (x, y, z_1), (x, y, z_2), při čemž $z_2 > z_1$. Plocha daná rozpadá se tak ve dvě části; jedna část jest souhrn bodů (x, y, z_1), — rovnici její můžeme psáti ve tvaru $z = f_1(x, y)$ — druhá část jest souhrn bodů (x, y, z_2) a její rovnice nechť má tvar $z = f_2(x, y)$. Při tom budiž $f_2(x, y) > f_1(x, y)$ pro všecky body (x, y) uvnitř Ω.

I v tomto případě stejně jako v předcházejícím lze integrál trojný převésti na integrál jednoduchý (podle z), který jest funkcí bodu $[x, y]$ a který se pak integruje v Ω podle x, y. Dostáváme, jelikož integraci podle z v mezích $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ můžeme bezprostředně provésti, ihned

$$V = \iint_{\Omega} [f_2(x, y) - f_1(x, y)\, dx\, dy, \tag{II'}$$

aneb též

$$V = \iint_{\Omega} [z_2 - z_1]\, dx\, dy. \tag{II'}$$

Jak by se tento výsledek upravil, kdyby rovnoběžky se Z protínaly plochu omezující $\mathbf{T}$ ve více bodech než dvou, jest nasnadě.

294. Integrál v (I) lze konečně psáti též ve tvaru

$$V = \int_c^d dz \iint_{\Omega_z} dx\, dy,$$

při čemž se předpokládá, že $\mathbf{T}$ jest položeno mezi rovinami o rovnicích $z = c$, $z = d$ a že ty body na $\mathbf{T}$, jejichž $z = \zeta$, t. j. body $[x, y, \zeta]$ určují svými prvými dvěma souřadnicemi x, y jistý obor Ω_ζ dvojic $[x, y]$. Je-li Ω_ζ kvadratury schopný a má velikost plošnou, již taktéž značíme Ω_ζ, jest podle poznámky odstavce 271

$$\iint_{\Omega_\zeta} dx\, dy = \Omega_\zeta,$$

takže rovnici pro V můžeme psáti

$$V = \int_c^d \Omega_z\, dz. \tag{III}$$

Při tom Ω_z nemusí existovati pro množství bodů $[z]$ míry nulové (a stačí dokonce v důsledku odstavce 94, aby existoval pro množství bodové v (c, d) všude husté). Ω_ζ jest t. zv. průsek tělesa $\mathbf{T}$ s rovinou $z = \zeta$ resp. jest velikost plošná (v užším smyslu) toho průseku.

295. PŘÍKLAD 1. Abychom vypočetli krychlový obsah *trojosého elipsoidu* o rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

zvolíme si za obor Ω roviny XY elipsu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ke každému bodu (x, y) uvnitř elipsy patří dva body na elipsoidu o souřadnicích (x, y, z_1), (x, y, z_2), kde

$$z_2 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, \qquad z_1 = -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Užijeme-li tedy formule (II'), máme pro obsah elipsoidu

$$V = 2c\iint_\Omega \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy. \tag{m}$$

Píšeme-li tento integrál jako dvojnásobný integrujíce napřed podle y, pak podle x, máme

$$V = 2c\int_{-a}^{a} dx \int_{-y_1}^{y_1} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy, \tag{n}$$

kde $y_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Výpočet integrálu (m) však nejsnáze provedeme na základě transformace proměnných

$$x = ar\cos\varphi, \qquad y = br\sin\varphi; \qquad \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = abr,$$

čímž obdržíme snadno

$$V = 2abc\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr = 4\pi\, abc\left[-\tfrac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \tfrac{4}{3}\pi\, abc$$

a krychlový obsah elipsoidu vypočten. Kdybychom chtěli počítati krychlový obsah vrstvy omezené elipsoidem a rovinami rovnoběžnými o rovnicích $x=\alpha$, $x=\beta$ $(\beta>\alpha)$, postačilo by v integrálu (n) poněkud změniti meze; dostáváme tu, značíme-li krychlový obsah té vrstvy $V_{\alpha,\beta}$,

$$V_{\alpha,\beta} = 2c\int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{-y_1}^{y_1} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx.$$

K vyčíslení tohoto integrálu použijeme substituce

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin\psi;$$

máme ihned

$$V_{\alpha,\beta} = 2bc\int_{\alpha}^{\beta} dx\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cos^2\psi\, d\psi = \pi\, bc\left[(\beta-\alpha)-\frac{\beta^3-\alpha^3}{3a^2}\right].$$

PŘÍKLAD 2. Počítejme krychlový obsah tělesa omezeného dvěma rovinami rovnoběžnými s rovinou YZ o rovnicích $x=a$, $x=-a$ a plochou přímkovou. Povrch plochy přímkové budiž složen z přímek o rovnicích

$$y = ax + p, \qquad z = bx + q, \tag{r}$$

při čemž a, b, p, q jsou funkce proměnného parametru t a to spojité funkce v intervalu (t_0, T). Všecky přímky na povrchu dané plochy přímkové nechť dostaneme, necháme-li v rovnicích (r) probíhati t všecky hodnoty t intervalu

(t_0, T); všecky body pak na každé z přímek (r), při nichž $-\alpha \leqq x \leqq \alpha$, buďtež položeny na hranici daného tělesa.

Budeme čítati podle formule (III). K tomu cíli vypočteme si plochu části rovinné omezené průsekem plochy přímkové a roviny rovnoběžné s YZ ve vzdálenosti rovné x od té roviny. Plocha její

$$\mathfrak{P}_x = +\int_k y\,dz = \int_{t_0}^{T} (ax+p)(b'x+q')\,dt = Ax^2 + Bx + C, \tag{s}$$

kde b', q' jsou derivace funkcí b, q podle t a kde A, B, C jsou jistá čísla nezávislá na x. Jest tedy v našem případě podle (2)

$$V = \int_{-\alpha}^{\alpha} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \tfrac{2}{3}A\alpha^3 + 2C\alpha.$$

Výsledek tento má jednoduchý geometrický důsledek. Označíme-li plochu omezenou průsekem přímkové plochy dané na rovině $x = -\alpha$ písmenem Z_0, na rovině pak $x = \alpha$ značkou Z_2 a konečně Z_1 plochu řezu na rovině $x = 0$ (jsou to tak zvané v elementární geometrii obě základny tělesa a plocha středního řezu), máme nejprve podle (s)

$$Z_2 = A\alpha^2 + B\alpha + C,\quad Z_1 = C,\quad Z_0 = A\alpha^2 - B\alpha + C$$

a tedy

$$V = \tfrac{1}{3}\alpha\,[Z_0 + Z_2 + 4Z_1] = \tfrac{1}{6}v\,[Z_0 + Z_2 + 4Z_1], \tag{t}$$

při čemž v značí ještě t. zv. *výšku* tělesa.

Derivace b', q' nemusí pro jistý konečný počet hodnot proměnné t existovati a mohou míti pro tyto hodnoty i diskontinuity. To na příklad nastane, jestliže přímková plocha daná se skládá z několika rovin; tu diskontinuity funkcí b', q' nastávají pro ta t, jež jsou přiřaděna průsečným bodům dvou sousedních rovin.

296. PŘÍKLAD 3. *Krychlový obsah tělesa omezeného plochou rotační a dvěma rovinami kolmými k ose rotační* lze vyjádřiti jednoduchým integrálem. Odvoďme příslušnou formuli z obecného vzorce (II′). Osa rotační budiž osa X a rovnice křivky, jež rotací kolem osy X vytvořuje danou rotační plochu, budiž v tom případě, že běží o polohu křivky spadající v rovinu XY, $y = \varphi(x)$. Pak jest rovnice rotační plochy

$$y^2 + z^2 = \varphi^2(x). \tag{u}$$

Rovnice rovin kolmých k ose X a vymezujících dané těleso buďtež $x = x_0$, $x = x_1$; $x_1 > x_0$. Budiž dále k vůli jenoduchosti $\varphi(x)$ v intervalu (x_0, x_1) stále kladná. Řešením rovnice (u) dostáváme pro z dvě hodnoty

$$z_1 = -\sqrt{\varphi^2(x) - y^2},\qquad z_2 = +\sqrt{\varphi^2(x) - y^2},$$

a dosadíme-li do (II′), máme

$$V = \iint_\Omega (z_2 - z_1)\,dx\,dy = 2\iint_\Omega \sqrt{[\varphi(x)]^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

při čemž Ω jest obor v rovině XY omezený křivkami o rovnicích $y = \varphi(x)$ (rovnice křivky v původní poloze na rovině XY), $y = -\varphi(x)$ (rovnice křivky otočené o 180°) a přímkami o rovnicích $x = x_0$, $x = x_1$. Vyjádříme-li tedy V dvojnásobným integrálem, máme

$$V = 2\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)} \sqrt{[\varphi(x)]^2 - y^2}\, dy = \pi \int_{x_0}^{x_1} [\varphi(x)]^2\, dx.^{*)}$$

Výsledek tento vyplývá však bezprostředně ze vzorce (III).

Kdybychom podle toho vzorce chtěli vypočítati krychlový obsah celého tělesa omezeného plochou opisovanou body kruhu, jehož rovnice jest $x^2 + (y - a)^2 = R^2$ a který se otáčí kolem osy X, kladli bychom za předpokladu $a \geqq R$ nejprve $\varphi(x) = a + \sqrt{R^2 - x^2}$, pak bychom výpočet provedli pro $\varphi(x) = a - \sqrt{R^2 - x^2}$, v obou pak případech bychom kladli $x_1 = R$, $x_0 = -R$ a výsledky odečetli. Tak bychom dostali

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (a + \sqrt{R^2 - x^2})^2\, dx - \pi \int_{-R}^{R} (a - \sqrt{R^2 - x^2})^2\, dx =$$

$$= 4\pi a \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 2\pi^2 a R^2$$

(viz poznámku pod čarou).

297. Povrch křivé plochy. Budiž dána na křivé ploše část vymezená křivkou uzavřenou K a taková, že všecky body její hoví v souřadnicích pravoúhlých rovnici $z = f(x, y)$, při čemž jest $f(x, y)$ *funkcí spojitou obou proměnných* x, y, *mající i prvé derivace spojité* v oboru omezeném v rovině XY čarou uzavřenou, jež vznikne, promítneme-li čáru K na rovinu XY; obor tento označíme — jako obyčejně — Ω a čáru jej omezující K'. V tomto jednoduchém případě můžeme dospěti k definici a vyjádření velikosti části povrchové dané plochy úvahou následující.

Obor Ω rozdělíme pomocnými čarami na obory menší $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; sestrojíme pak válcové plochy, jejichž řiditelky jsou právě čáry omezující jednotlivé tyto obory ω_i a jejichž přímky vytvořující jsou rovnoběžny s osou Z. Válcová plocha vytínající z roviny XY obor ω_i vytíná z dané plochy jistou část její w_i. V libovolném bodě $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i = f(\xi_i, \eta_i))$, položeném na části w_i sestrojíme tečnou rovinu k dané ploše a vezmeme v úvahu též plochu vyťatou na této rovině tečné právě zmíněnou plochou válcovou; velikost té plochy vyťaté na rovině tečné označíme π_i.

---

*) Použili jsme tady vzorce

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\pi a^2.$$

Pak definujeme: *Velikost dané části povrchu plošného jest dána výrazem*

$$\lim \sum_i \pi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

pro ten případ, že $\lim n = \infty$ *a rozměry částí* ω_i *konvergují k nule.*

Lze snadno dokázati, že tato limita existuje; neboť jest (podle známé věty stereometrické udávající vztah mezi velikostí dvou ploch rovinných, z nichž jedna jest kolmým průmětem druhé*))

$$\pi_i = \frac{\omega_i}{\cos \gamma_i},$$

při čemž jest $\cos \gamma_i$ kosinus úhlu, který svírá normála roviny tečné v bodě $[\xi_i, \eta_i, \zeta_i]$ s osou Z. Avšak kosiny směrné normály roviny tečné v bodě $[\xi_i, \eta_i, \zeta_i]$ jsou

$$\cos \alpha_i = \frac{-p_i}{\sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}}, \quad \cos \beta_i = \frac{-q_i}{\sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}}, \quad \cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}}, \tag{2}$$

kde

$$p_i = \frac{\partial f(\xi_i, \eta_i)}{\partial \xi_i}, \qquad q_i = \frac{\partial f(\xi_i, \eta_i)}{\partial \eta_i};$$

a tedy

$$\pi_i = \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \cdot \omega_i$$

a pro limitu (1) máme výraz

$$\lim \sum \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \cdot \omega_i.$$

Limita tato však vždy existuje (podle předpokladu, že derivace funkce $f(x, y)$ jsou spojité funkce v Ω) a jest dána dvojným integrálem

---

*) Máme-li dvě roviny svírající úhel γ a zvolíme-li v obou rovinách pravoúhlé osy souřadnicové XY, $X'Y'$ tak, že osy Y, Y' splývají s průsečnicí obou rovin a že počátek souřadnicový v obou soustavách jest týž, pak jest, je-li bod $[x', y']$ z roviny druhé pravoúhlým průmětem bodu $[x, y]$ na rovině prvé, patrně

$$x' = x \cos \gamma, \qquad y' = y.$$

Tudíž, je-li uzavřená křivka K' z roviny druhé pravoúhlým průmětem křivky K na rovině prvé, jest pro plochy P' resp. P těmito křivkami uzavřenými omezené platna tato relace (odstavec 248 (III))

$$\int_{K'} x'\, dy' = \cos \gamma \int_K x\, dy,$$

t. j.

$$P' = P \cos \gamma,$$

čímž věta v textu užitá dokázána.

$$P_\Omega = \iint\limits_\Omega \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{I}$$

čímž zároveň vyjádřena analyticky velikost plošná dané části křivé plochy.

PŘÍKLAD. Vypočítati jest povrch části kulové, useknuté z **koule** rovinou. Rovnice koule nechť jest $x^2+y^2+z^2=R^2$, rovnice roviny budiž $z=R-h$. Pro p, q a $\sqrt{1+p^2+q^2}$ máme

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \qquad q = -\frac{y}{z}; \ \sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{R}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Rovina daná protíná kouli ve křivce rovinné, jejíž rovnice jest

$$x^2+y^2+(R-h)^2 = R^2 \quad \text{aneb} \quad x^2+y^2 = h(2R-h),$$

což jest zároveň rovnice průmětu křivky do roviny XY a tudíž omezení oboru Ω. Máme tedy podle (I)

$$P_\Omega = R\iint\limits_\Omega \frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

aneb, zavedeme-li souřadnice polární,

$$P_\Omega = R\iint\limits_{\Omega_1} \frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{R^2-r^2}} = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{h(2R-h)}} \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}} = [R-(R-h)]\,2\pi R = 2\pi Rh,$$

což jest známý ze stereometrie výsledek. Položíme-li $h=R$, dostanete pro povrch polokoule číslo $2\pi R^2$.

298. Vzorec právě odvozený lze upraviti i pro ten případ, že plocha jest dána ve tvaru parametrickém rovnicemi

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \psi(u,v), \qquad z = \chi(u,v). \tag{3}$$

Buďtež φ, ψ, χ funkce spojité v jistém oboru Ω_1 obou proměnných u, v a mějtež tam i prvé derivace spojité. Probíhají-li u, v všecky hodnoty oboru Ω_1, nechť bod $[x, y, z]$ opisuje všecky body dané části plošné. Povrch té části plošné vypočteme z (I), zavedeme-li tam prostě místo proměnných x, y proměnné u, v za předpokladu ovšem, že determinant funkcionální $D(x,y)/D(u,v) = D(\varphi,\psi)/D(u,v)$ jest v oboru Ω_1 od nuly různý a stále téhož znaménka a že $[x, y]$ a $[u, v]$ na základě rovnic $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ sobě jsou přiřaděny jedno-jednoznačně. Nejprve vypočteme si z (3) p a q. K výpočtu p budeme derivovati rovnice (3) podle x (pokládajíce u, v a z za funkce x, y). Dostaneme

$$1 = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Eliminujeme-li z těchto rovnic $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, dostaneme $\partial z/\partial x = p$ a podobně získáme q. Obdržíme, zavedeme-li ještě k vůli stručnosti značky

$$A = \frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}, \qquad B = \frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)}, \qquad C = \frac{D(\varphi, \psi)}{(D u, v)},$$

pro p, q tyto výsledky

$$p = -\frac{A}{C}, \qquad q = -\frac{B}{C},$$

což dosazeno do (I) dává (zavedeme-li ještě místo integračních proměnných (x, y) proměnné (u, v))

$$P_\Omega = \iint_{\Omega_1} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv, \tag{II}$$

kterážto formule odvozena na základě jistých omezení, jež následují jednak z předpokladů učiněných při odvození rovnice (I), jednak z předpokladů učiněných při zavádění nových proměnných do dvojného integrálu. Omezení tato však z velké části lze odstraniti, užíváme-li metody stejné jako v odstavci 280.

V rovnici (II) jest jako zvláštní případ obsažena naopak rovnice (I); neboť jestliže plocha má rovnici $z = f(x, y)$, můžeme její rovnici též psáti ve tvaru parametrickém takto $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$.

Ze tvaru (II) odvodíme si také snadno vzorec pro počítání povrchu v souřadnicích polárních. Jestliže na příklad v těchto souřadnicích jest rovnice plochy $r = F(\varphi, \Theta)$, můžeme rovnice (3) nahraditi těmito

$$x = r \cos\varphi \cos\Theta, \qquad y = r \sin\varphi \cos\Theta, \qquad z = r \sin\Theta,$$

při čemž r pokládáme na základě dané rovnice plochy jakožto funkci proměnných φ, Θ. Tím vyjádřena rovnice plochy ve tvaru parametrickém, při čemž parametry jsou právě φ, Θ. V tomto případě máme

$$A = \frac{D(y, z)}{D(\varphi, \Theta)} = \frac{\partial r}{\partial\varphi} r \sin\varphi + \frac{\partial r}{\partial\Theta} r \cos\varphi \sin\Theta \cos\Theta + r^2 \cos\varphi \cos^2\Theta,$$

$$B = \frac{D(z, x)}{D(\varphi, \Theta)} = -\frac{\partial r}{\partial\varphi} r \cos\varphi + \frac{\partial r}{\partial\Theta} r \sin\varphi \sin\Theta \cos\Theta + r^2 \sin\varphi \cos^2\Theta,$$

$$C = \frac{D(x, y)}{D(\varphi, \Theta)} = -\frac{\partial r}{\partial\Theta} r \cos^2\Theta + r^2 \sin\Theta \cos\Theta;$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\Theta}\right)^2 r^2 \cos^2\Theta + r^4 \cos^2\Theta,$$

a tedy

$$P_\Omega = \iint_{\Omega_1} r \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial r}{\partial\Theta}\right)^2 + r^2\right] \cos^2\Theta}\; d\varphi\, d\Theta. \tag{III}$$

299. PŘÍKLAD 1. *Povrch rotační plochy.* Rovnici rotační plochy — je-li osa rotace osa Z — můžeme psáti ve tvaru

$$z = \psi(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Užijeme-li k výpočtu povrchu formule (I), dostaneme snadným počtem pro povrch P

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \psi'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \psi'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$P = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + [\psi'(\sqrt{x^2 + y^2})]^2}\, dx\, dy;$$

při tom jest Ω jistý obor roviny XY (průmět to části plošné, jejíž velikost počítáme, na rovinu XY). Zavedeme-li do tohoto výrazu souřadnice polární, kladouce $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, obdržíme

$$P = \iint\limits_{\Omega_1} \sqrt{1 + [\psi'(r)]^2}\, r\, dr\, d\varphi, \tag{4}$$

kterýžto tvar nám dovoluje při daném Ω resp. Ω_1 vyjádřiti povrch hledaný jednoduchým integrálem; neboť integrace podle φ se dá bezprostředně provésti.

Počítejme na příklad povrch té části rotační plochy, jež jest omezena jednak dvěma poledníky, jednak dvěma rovnoběžníky*). Pak obor Ω jest výsek mezikruží, vytvořený dvěma paprsky vycházejícími ze středu obou kruhů, Ω_1 se redukuje na pravoúhelník (znázorňuje-li body o souřadnicích r, φ v pravoúhlé soustavě souřadnicové o osách R, Φ) a P na dvojnásobný integrál

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + [\psi'(r)]^2}\, r\, dr = (\varphi_2 - \varphi_1) \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + [\psi'(r)]^2}\, r\, dr,$$

kde φ_1, φ_2 jsou úhly, jež svírají roviny poledníků s rovinou ZX; r_1, r_2 pak poloměry obou rovnoběžníků (předpokládáno pro jednoduchost v poslední rovnici $\varphi^2 > \varphi_1$, $r_2 > r_1$).

PŘÍKLAD 2. *Jest vypočísti povrch části koule o rovnici* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, *jež jest odetínána válcem* $x^2 + y^2 = ax$. (Vivianův problém). Můžeme, poněvadž koule jest rotační plocha, použíti formule (4); v ní jest patrně $\psi(r) = \sqrt{a^2 - r^2}$ a tedy hledaný povrch

$$P = \iint\limits_{\Omega_1} \frac{a r\, dr\, d\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \tag{5}$$

Rovnice válce dostává, zavedeme-li souřadnice polární, tvar $r = a\cos\varphi$; souřadnice všech bodů oboru Ω_1 pak dostaneme, necháme-li φ probíhati všecky

*) Při tom k vůli stručnosti rozumíme pod poledníky různé polohy křivky, která otáčejíc se kolem osy Z vytvořuje plochu rotační, pod rovnoběžníky pak vyrozumíme kruhy opisované při tom otáčení jednotlivými body vytvořující křivky.

hodnoty intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, r pak při určitém φ hodnoty intervalu $(0, a\cos\varphi)$, takže dvojný integrál ve formuli (5) se mění v tento dvojnásobný integrál

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{ar\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = a\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} [-\sqrt{a^2-r^2}]_0^{a\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (a - a\,|\sin\varphi|)\, d\varphi = \pi a^2 - 2a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\varphi\, d\varphi = (\pi - 2)\, a^2.$$

300. PŘÍKLAD 3. *Jest vypočísti povrch části koule o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ položené v prvém oktantu a omezené jednak rovinami XZ, YZ, jednak rovinou* **R** *o rovnici $Ax + By + Cz = 0$,* při čemž předpokládáme, že průsek rovin XZ a **R**, jakož i průsek rovin YZ a **R** spadají do prvého oktantu (ovšem na jeho hranice).

Koeficienty A, B, C v rovnici roviny **R** jsou úměrny kosinům směrným, jež svírá normála roviny **R** s osami X, Y, Z; můžeme předpokládati k vůli zjednodušení, že koeficienty ony jsou kosinům směrným rovny. Jest tedy A též rovno $\cos\alpha$, kde α jest úhel, který svírá rovina **R** s rovinou YZ a $B = \cos\beta$, kde β jest úhel sevřený rovinami **R**, XZ; lze pak se zřetelem k předpokladu učiněnému o poloze roviny **R** předpokládati o úhlech α, β, že jsou oba v intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Jsou pak α, β dva úhly sférického trojúhelníku vymezeného na kouli rovinami **R**, XZ, YZ a položeného v prvém oktantu; třetí úhel jeho jest $\frac{1}{2}\pi$. Můžeme užíti opět formule (4) resp. formule (5) předcházejícího příkladu. Obor Ω jest obor vymezený na rovině XY průmětem průseku ploch o rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad Ax + By + Cz = 0$$

na rovinu XY a přímkami o rovnicích $x = 0$, $z = 0$ resp. $y = 0$, $z = 0$. Rovnici průmětu v souřadnicích (x, y) dostaneme z (6) eliminací proměnné z; obdržíme (poněvadž $A^2 + B^2 + C^2 = 1$)

$$(Ax + By)^2 = C^2z^2 = (1 - A^2 - B^2)(a^2 - x^2 - y^2)$$

aneb

$$x^2 + y^2 - (Ay - Bx)^2 = (1 - A^2 - B^2)\, a^2$$

a v souřadnicích polárních $(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi)$

$$r^2 = \frac{(1 - A^2 - B^2)\, a^2}{1 - (A\sin\varphi - B\cos\varphi)^2}.$$

Budeme tedy užívajíce formule (5) integrovati napřed podle r v mezích $(0, r)$, při čemž r jest dáno jakožto funkce proměnné φ poslední rovnicí; dostaneme tak

$$a[-\sqrt{a^2 - r^2}]_0^r = a^2 - a\sqrt{a^2 - \frac{(1 - A^2 - B^2)\, a^2}{1 - (A\sin\varphi - B\cos\varphi)^2}} =$$

$$= a^2\left[1 - \frac{A\cos\varphi + B\sin\varphi}{\sqrt{1 - (A\sin\varphi - B\cos\varphi)^2}}\right].$$

Integrujeme-li ještě tento výraz podle φ v mezích $(0, \frac{1}{2}\pi)$, obdržíme plochu P daného sférického trojúhelníku. Jest pak touto integrací

$$P = a^2\left\{\tfrac{1}{2}\pi - [\arcsin(A\sin\varphi - B\cos\varphi)]_0^{\frac{1}{2}\pi}\right\},$$

$$P = a^2(\tfrac{1}{2}\pi - \arcsin A - \arcsin B)$$

aneb se zřetelem k významu čísel A, B ($A = \cos\alpha$, $B = \cos\beta$, kde α, β jsou úhly v intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$)

$$P = a^2(\alpha + \beta + \tfrac{1}{2}\pi - \pi) \tag{7}$$

Máme-li trojúhelník sférický položený úplně na jednom oktantu koule a mající úhly α, β, γ, při čemž budiž $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$, můžeme jej rovinou procházející vrcholem úhlu γ (a středem koule) rozděliti ve dva sférické trojúhelníky pravoúhlé vedle sebe položené o úhlech α, γ_2, $\frac{1}{2}\pi$ resp. β, γ_1, $\frac{1}{2}\pi$; $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$. Použijeme-li vzorce (7), dostaneme pro povrch sférického trojúhelníka o úhlech α, β, γ a položeného úplně na jednom oktantu koule

$$P = a^2(\alpha + \gamma_1 + \tfrac{1}{2}\pi - \pi) + a^2(\beta + \gamma_2 + \tfrac{1}{2}\pi - \pi) = a^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

což jest patrně zevšeobecnění formule (7). Poněvadž však každý trojúhelník sférický se dá rozložiti ve sférické trojúhelníky, jež položeny jsou na jednom oktantu koule, platí, jak snadno čtenář nahlédne, formule poslední pro každý sférický trojúhelník o úhlech α, β, γ; úhly α, β, γ v tomto obecném případě se nacházejí v intervalu $(0, 2\pi)$.

301. PŘÍKLAD 4. Povrch elipsoidu. Rovnice elipsoidu budiž

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{δ}$$

Z té vyplývá derivováním

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \qquad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$$

a tedy

$$\frac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \tag{ε}$$

a pro povrch elipsoidu máme formuli — počítáme-li část povrchu, jejíž průmět na rovinu XY jest dán oborem Ω a při níž jest $z > 0$ —

$$P_\Omega = \iint_\Omega \frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\, dx\, dy, \quad \text{kde } z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Budeme počítati tu část povrchu (na té polovině elipsoidu, pro niž $z > 0$), jež jest omezena čarou, podél které normála k elipsoidu svírá s osou Z stále týž úhel γ_0. Souřadnice bodů té čáry hoví jednak rovnici elipsoidu (δ), jednak podle (ε) rovnici

$$\frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \frac{1}{\cos\gamma_0}, \qquad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{z^2}{c^4\cos^2\gamma_0}. \tag{ι}$$

Se zřetelem k tomuto omezení oboru Ω zavedeme si místo x, y vhodně nové integrační proměnné u, v. Jednu proměnnou volíme jakožto funkci proměnných x, y tak, aby podél hranic oboru Ω byla funkce ta konstantní; mohli bychom ji tudíž položiti rovnou hodnotě $\cos\gamma$ dané rovnici (ε) (neboť pak by měla podél hranice oboru Ω stále tutéž hodnotu, totiž $\cos\gamma_0$), volíme však ji. abychom docílili symetrii ve výsledku, na základě rovnice

$$\frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \sqrt{1 + c^2 u}, \quad \text{odkudž} \quad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{u z^2}{c^2}, \tag{$\varkappa$}$$

čímž ovšem jest u dáno jakožto jistá jednoduchá funkce čísla $\cos\gamma$. Druhá roměnná v nechť jest dána vztahem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = v. \tag{λ}$$

odle (δ) a ($\varkappa$)

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - v, \quad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = (1 - v)\,u. \tag{μ}$$

Vypočteme-li z (λ) a (μ) x, y pomocí u, v, máme, učiníme-li k vůli jednoduššímu psaní předpoklad, že $a > b$, a značíme-li ještě $a^2 - b^2 = e^2$,

$$x = \frac{a^2}{e}\sqrt{v - b^2(1-v)\,u}, \qquad y = \frac{b^2}{e}\sqrt{-v + a^2(1-v)\,u}, \tag{ν}$$

při čemž odmocniny budeme bráti se znaménkem kladným. Tím ovšem obdržíme body (x, y, z) v oktantu prvém vyplňující toliko čtvrtinu dané části povrchu elipsoidického. Souřadnice těch bodů, a to každého bodu jednou, dostaneme, necháme-li u probíhati hodnoty intervalu $(0, \operatorname{tg}^2\gamma_0/c^2)$, viz rovnice ($\varepsilon$) a ($\varkappa$); příslušné v k danému u hoví nerovninám

$$v - b^2(1-v)\,u \geqq 0, \qquad -v + a^2(1-v)\,u \geqq 0$$

aneb

$$b^2u \leqq \frac{v}{1-v} \leqq a^2u,$$

čímž jest pro v dán jistý interval (v_1, v_2) obsažený v intervalu $(0, 1)$. Hodnoty v_1, v_2 jsou závislé na u a jsou to nulové body výrazů nacházejících se pod odmocninou v (ν). Poněvadž závislost mezi (x, y) a mezi (u, v) jest jedno-jednoznačná — omezujeme-li se na prvý oktant — můžeme přistoupiti k zavedení proměnných (u, v) do výrazu pro P_Ω. Dostaneme nejdříve

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{a^2b^2}{4}\,\frac{1-v}{\sqrt{[v - b^2(1-v)\,u]\,[-v + a^2(1-v)\,u]}}$$

a tedy na základě této rovnice a rovnice ($\varkappa$)

$$P_\Omega = a^2b^2\int_0^{c^{-2}\operatorname{tg}^2\gamma_0} du \int_{v_1}^{v_2} \frac{(1-v)\sqrt{1+c^2u}\,dv}{\sqrt{[v - b^2(1-v)\,u]\,[-v + a^2(1-v)\,u]}}. \tag{π}$$

Dvojný integrál vypsán tu hned jako integrál dvojnásobný; první integraci (podle v) můžeme provésti a obdržíme*)

*) Užíváme tu formule z odstavce 67 (5). Výraz (π) pod odmocninou se nacházející jest mnohočlen druhého stupně ve v, značme jej pro krátkost $Av^2 + Bv + C$; kořeny rovnice $Av^2 + Bv + C = 0$ jsou právě čísla v_1, v_2. Jest tedy podle citované formule

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{\sqrt{Av^2 + Bv + C}} = \frac{\pi}{\sqrt{-A}}.$$

Dále jest

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{(1-v)\,dv}{\sqrt{Av^2+Bv+C}} = -\frac{1}{2A}\int_{v_1}^{v_2} \frac{2Av - 2A}{\sqrt{Av^2+Bv+C}}\,dv = -\frac{1}{2A}\int_{v_1}^{v_2} \frac{(2Av+B)\,dv}{\sqrt{Av^2+Bv+C}} +$$

$$+\frac{1}{2A}\int_{v_1}^{v_2} \frac{(2A+B)\,dv}{\sqrt{Av^2+Bv+C}} = -\frac{1}{A}\Big[\sqrt{Av^2+Bv+C}\Big]_{v_1}^{v_2} + \frac{(2A+B)\pi}{2A\sqrt{-A}} = \frac{(2A+B)\pi}{2A\sqrt{-A}}.$$

Dosadíme-li $A = -(1 + b^2u)(1 + a^2u)$, $B = a^2u(1 + b^2u) + b^2u(1 + a^2u)$, dostaneme ihned svrchu uvedený výraz.

$$P_\Omega = \tfrac{1}{4}\pi a^2 b^2 \int_0^{c^{-2}\operatorname{tg}^2\gamma_0} \frac{(u(a^2+b^2)+2)\sqrt{1+c^2u}}{(1+a^2u)^{\frac{3}{2}}(1+b^2u)^{\frac{3}{2}}}\,du.$$

Výraz tento můžeme dále zjednodušiti. Neboť jest

$$\frac{u(a^2+b^2)+2}{(1+a^2u)^{\frac{3}{2}}(1+b^2u)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(a^2+b^2)u^{-2}+2u^{-3}}{(a^2+u^{-1})^{\frac{3}{2}}(b^2+u^{-1})^{\frac{3}{2}}} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{(a^2+u^{-1})(b^2+u^{-1})}}\right]';$$

užijeme tedy integrace částečné a píšeme

$$\begin{aligned} P_\Omega = \pi a^2 b^2 \left[\frac{u\sqrt{1+c^2u}}{\sqrt{(1+a^2u)(1+b^2u)}}\right]_0^{c^{-2}\operatorname{tg}^2\gamma_0} - \\ - \tfrac{1}{2}\pi a^2 b^2 c^2 \int_0^{c^{-2}\operatorname{tg}^2\gamma_0} \frac{u\,du}{\sqrt{(1+a^2u)(1+b^2u)(1+c^2u)}}, \end{aligned} \qquad (\varrho)$$

čímž hledaný povrch vypočten a vyjádřen integrálem eliptickým. Kdybychom chtěli vypočítati povrch celé poloviny elipsoidu, nemohli bychom bezprostředně použíti této rovnice; neboť pak bychom měli nechati γ_0 konvergovati k $\frac{1}{2}\pi$, čímž by hodnota $c^{-2}\operatorname{tg}^2\gamma_0$ vzrůstala nade všecky meze a i člen integrovaný i integrál sám přestaly by míti význam. Můžeme však od funkce za integračním znaménkem se nacházející odečísti $a^{-1}b^{-1}c^{-1}u^{-\frac{1}{2}}$, čímž dostaneme funkci, jež pro $\lim u = \infty$ stává se nekonečnou řádu $\frac{3}{2}$ (vyššího než prvého). Ke členu pak integrovanému ovšem musíme připočítati

$$-\tfrac{1}{2}\pi a^2 b^2 c^2 \int_0^{c^{-2}\operatorname{tg}^2\gamma_0} a^{-1}b^{-1}c^{-1}u^{-\frac{1}{2}}\,du = -\pi abc\,[u^{\frac{1}{2}}]_0^{c^{-2}\operatorname{tg}^2\gamma_0},$$

čímž obdržíme

$$\begin{aligned} P_\Omega = \pi ab \left[\frac{ab\,u\sqrt{1+c^2u}}{\sqrt{(1+a^2u)(1+b^2u)}} - c\sqrt{u}\right]_0^{c^{-2}\operatorname{tg}^2\gamma_0} - \\ - \tfrac{1}{2}\pi abc \int_0^{c^{-2}\operatorname{tg}^2\gamma_0} \left(\frac{abc\,u}{\sqrt{(1+a^2u)(1+b^2u)(1+c^2u)}} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right) du. \end{aligned} \qquad (\sigma)$$

Dosadíme-li v tomto výrazu $\lim \gamma_0 = \frac{1}{2}\pi$, dostaneme (násobíme-li ještě dvěma)

$$\text{povrch elipsoidu} = -\pi abc \int_0^\infty \left(\frac{abc\,u}{\sqrt{(1+a^2u)(1+b^2u)(1+c^2u)}} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right) du.$$

Výraz tento vyjadřující povrch elipsoidu pomocí eliptického integrálu má tu výhodu, že jest symetrický vzhledem k číslům a, b, c. Lze jej jakož i integrál v (σ) snadno transformovati na kanonický tvar Weierstrassův a i na kanonický tvar Legendreův. Od provedení příslušných výpočtů upouštím, jakož i od uvádění geometrických důsledků formule (ϱ) obsažených v okolnosti, že formule ta jest platna, ať čísla a, b, c co do velikosti následují v pořádku jakémkoliv.

302. Způsob, kterým jsme definovali velikost povrchu křivé plochy, podstatně se liší od způsobu, jakým jsme definovali délku křivé čáry. Délku oblouku křivé čáry jsme stanovili jakožto limitu délky jisté lomené čáry, jejíž vrcholy leží na oblouku a jejíž strany konvergují co do délky své k nule (odstavec 241). Kdybychom tuto definici chtěli zevšeobecniti a podati na obdobném podkladě definici velikosti povrchu křivé plochy, musili bychom patrně vzíti v úvahu plochu mnohostěnnou (t. j. plochu skládající se vesměs z rovinných mnohoúhelníků) a takovou, že vrcholy její jsou vesměs položeny na té části dané plochy, jejíž povrch počítáme (jakož i na jejím ohraničení). Při tom bychom čítali limitu povrchu té mnohostěnné plochy pro ten případ, že oba rozměry a tudíž zároveň i plochy jednotlivých stěn konvergují k nule a že nejmenší vzdálenosti všech bodů na hranici dané části plošné od mnohoúhelníkové čáry tvořící hranici oné mnohostěnné plochy konvergují rovněž k nule. Avšak taková limita povrchu mnohostěnné plochy ani v případech nejjednodušších ploch nemusí existovati, jak po prvé na příkladě ukázal *Schwarz**), nepřidáme-li další podmínku pro jednotlivé stěny plochy mnohostěnné. Přirozeně jest nutno nejprve omeziti se jenom na takové plochy mnohostěnné, jejichž veškeré stěny jsou trojúhelníky; jakožto podmínku omezující volbu těchto trojúhelníků stanovíme, že nejmenší úhel trojúhelníků, z nichž se skládá mnohostěnná plocha vepsaná naznačeným způsobem, jest stále větší než jistý pevný úhel nacházející se uvnitř intervalu $(0^0, 60^0)$. Je-li tato podmínka splněna, pak existuje, hoví-li ovšem rovnice té části plošné jistým podmínkám, vždy limita povrchu mnohostěnné plochy (svrchu podrobněji vytčená), jakož v následujícím bude naznačeno**).

---

*) Gesammelte mathem. Abhandlungen, svazek 2, str. 309. Viz též *Hermite*, Cours d'analyse, 2. vydání z r. 1883, str. 35 a 36.

**) Jestliže nejmenší úhel trojúhelníku jest α a je-li $\alpha \geqq \alpha_0$, kde α_0 jest daný pevný úhel $(0 < \alpha_0 \leqq \frac{1}{3}\pi)$, tu jest a nejmenší strana trojúhelníku a z rovnice

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha = (b-c)^2 + 4bc \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

plyne

$$4bc = \frac{a^2 - (b-c)^2}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha} \leqq \frac{a^2}{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha_0};$$

t. j. největší strana trojúhelníku jest menší než $a/4 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha$; plocha pak trojúhelníku jest menší než $a^2/4 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha_0$ a větší než $\frac{1}{2}a^2 \sin\alpha_0$. Jsou tedy poměry stran resp. plochy trojúhelníka k nejmenší straně resp. ke čtverci nejmenší strany v jistých pevných, konečných intervalech závislých na čísle α_0. Platí však také opak: Je-li poměr plochy trojúhelníku ke čtverci nejmenší strany anebo vůbec ke čtverci kterékoliv strany stále obsažen mezi dvěma pevnými čísly, nemůže nejmenší úhel trojúhelníku klesnouti pod jistou hranici $\alpha_0 > 0$, již snadno bychom mohli udati.

303. Budiž dána plocha v souřadnicích pravoúhlých rovnicemi

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \chi(u, v) \tag{α}$$

a vyšetřujme tu část Ω povrchu dané plochy, kterou dostaneme, probíhají-li proměnné (u, v) všecky hodnoty oboru Ω_0 (včetně hranic). Obor Ω_0 pak budiž část roviny, opatřená pravoúhlými osami UV, omezená čarou spojitou kvadratury a rektifikace schopnou. O funkcích $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ učiníme předpoklad, že jsou spojité funkce v oboru Ω_0 (stále i s hranicemi) obou proměnných u, v; dále, že mají tam první derivace podle u a v, kteréž jsou rovněž spojité; konečně učiníme předpoklad, že funkcionální determinanty A, B, C (viz odstavec 298) nejsou současně v Ω_0 rovny nule. Jest tedy v tomto oboru stále

$$A^2 + B^2 + C^2 \geqq \mathbf{m},$$

kde $\mathbf{m}$ — dolní to hranice funkce $A^2 + B^2 + C^2$ v Ω_0 — jest jisté číslo kladné. Z předpokladu tohoto zároveň vyplývá, že ani derivace

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial u}, \quad \text{ani derivace} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial v}$$

současně v žádném bodě oboru Ω_0 nejsou rovny nule.

Uvažujme pak tři body oboru Ω_0 a to body M_0, N_0, P_0 o souřadnicích (u_0, v_0), $(u_0 + \lambda, v_0 + \mu)$, $(u_0 + \lambda', v_0 + \mu')$. Plocha trojúhelníku $M_0N_0P_0$ jest dána absolutní hodnotou výrazu

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} u_0, & v_0, & 1 \\ u_0 + \lambda, & v_0 + \mu, & 1 \\ u_0 + \lambda', & v_0 + \mu', & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(\lambda\mu' - \lambda'\mu)$$

a čtverce stran toho trojúhelníka jsou dány čísly $\lambda^2 + \mu^2$, $\lambda'^2 + \mu'^2$, $(\lambda - \lambda')^2 + (\mu - \mu')^2$. V následujícím budou čísla λ, μ, λ', μ' čísly konvergujícími k nule, avšak způsobem takovým, že nejmenší úhel trojúhelníka $M_0N_0P_0$ neklesne pod určitou pevnou hranici. Následkem toho budou i poměry

$$\frac{\lambda^2 + \mu^2}{|\lambda\mu' - \lambda'\mu|}, \quad \frac{\lambda'^2 + \mu'^2}{|\lambda\mu' - \lambda'\mu|}, \quad \frac{(\lambda - \lambda')^2 + (\mu - \mu')^2}{|\lambda\mu' - \lambda'\mu|} \tag{β}$$

v tom případě, když λ, μ, λ', μ' budou konvergovati k nule právě naznačeným způsobem, stále obsaženy v určitém intervalu (a, b), kde obě čísla a, b jsou jistá čísla kladná.

Bodům M_0, N_0, P_0 jsou na základě rovnic (α) na dané ploše přiřaděny body M, N, P. Počítejme délky stran $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PM}$ trojúhelníka MNP. Pro délku $\overline{MN}$ máme

$$\begin{aligned}\overline{MN}^2 &= [\varphi(u_0+\lambda,\ v_0+\mu) - \varphi(u_0, v_0)]^2 + \\ &+ [\psi(u_0+\lambda,\ v_0+\mu) - \psi(u_0, v_0)]^2 + [\chi(u_0+\lambda,\ v_0+\mu) - \chi(u_0, v_0)]^2,\end{aligned} \qquad (\gamma)$$

což lze psáti též takto*)

$$\overline{MN}^2 = E_0\lambda^2 + 2F_0\lambda\mu + G_0\mu^2 + \varepsilon(\lambda\mu' - \lambda'\mu), \qquad ($$

kde E_0, F_0, G_0 dostaneme, dosadíme-li do výrazů E, F, G danýc rovnicemi

$$E = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)^2, \qquad G = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)^2,$$
$$F = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}$$

u_0, v_0 místo u, v a kde ε jest jistá funkce čísel u_0, v_0, λ, μ, λ', μ', která konverguje k nule, když λ, μ, λ', μ' konvergují k nule způsobem svrchu naznačeným. Stejně vyplývá

$$\begin{aligned}\overline{MP}^2 &= E_0\lambda'^2 + 2F_0\lambda'\mu' + G_0\mu'^2 + \varepsilon'(\lambda\mu' - \lambda'\mu), \\ \overline{NP}^2 &= E_0(\lambda-\lambda')^2 + 2F_0(\lambda-\lambda')(\mu-\mu') + G_0(\mu-\mu')^2 + \varepsilon''(\lambda\mu' - \lambda'\mu);\end{aligned} \qquad (\delta')$$

ε', ε'' jsou opět funkce čísel u_0, v_0, λ, μ, λ', μ' konvergující k nule, když λ, μ, λ', μ' konvergují k nule způsobem svrchu naznačeným.

Jelikož podle věty Carnotovy, značíme-li $\mathfrak{m}$ úhel stran MN, MP,

$$\overline{NP}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{MP}^2 - 2\overline{MN}\,.\,\overline{MP}\cos\mathfrak{m},$$

jest na základě rovnic (δ), (δ') ihned

*) Neboť jest podle formule Taylorovy (při u, v vynechávám v této poznámce index 0), značíme-li $\partial\varphi/\partial u$ resp. $\partial\varphi/\partial v$ pro okamžik φ_u, resp. φ_v

$$\varphi(u+\lambda, v+\mu) - \varphi(u,v) = \varphi_u(u+\Theta\lambda,\ v+\Theta\mu)\lambda + \varphi_v(u+\Theta\lambda,\ v+\Theta\mu)\mu,$$
$$0 < \Theta < 1$$

aneb, jelikož φ_u, φ_v jsou funkce spojité obou proměnných

$$\varphi(u+\lambda, v+\mu) - \varphi(u,v) = \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}\lambda + \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}\mu + \varrho_1\lambda + \varrho_2\mu,$$

při čemž čísla ϱ_1, ϱ_2 konvergují k nule zároveň s λ, μ. Dosadíme-li tento výraz do (γ), jakož i obdobně pro $\psi(u+\lambda, v+\mu) - \psi(u, v), \ldots$, dostaneme nejprve

$$\overline{MN}^2 = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 + \sigma_1\lambda^2 + \sigma_2\lambda\mu + \sigma_3\mu^2,$$

kde σ_1, σ_2, σ_3 jsou funkce čísel u, v, λ, μ konvergující k nule zároveň s λ, μ. Avšak

$$\begin{aligned}&\sigma_1\lambda^2 + \sigma_2\lambda\mu + \sigma_3\mu^2 = \\ &= \left[\sigma_1\frac{\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2} + \sigma_2\frac{\lambda\mu}{\lambda^2+\mu^2} + \sigma_3\frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}\right](\lambda^2+\mu^2) = \sigma\,.\,(\lambda^2+\mu^2),\end{aligned}$$

při čemž σ jest číslo dané hranatou závorkou (závislé na u, v, λ, μ) a konverguje, jak bezprostředně patrno, rovněž jako σ_1, σ_2, σ_3 zároveň s λ, μ k nule. Výraz však možno se zřetelem ke svrchu vytčené vlastnosti poměrů (β) nahraditi výrazem $\varepsilon(\lambda\mu' - \lambda'\mu)$, čímž dostaneme rovnici (δ).

$$\overline{MN}\,.\,\overline{MP}\,.\cos \mathrm{m} = E_0\lambda\lambda' + F_0(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + G_0\mu\mu' + \varepsilon'''(\lambda\mu' - \lambda'\mu),$$

odkudž po snadném počtu

$$\overline{MN}^2\,.\,\overline{MP}^2 - \overline{MN}^2\,.\,\overline{MP}^2\cos^2 \mathrm{m} = \overline{MN}^2\,.\,\overline{MP}^2 \sin^2 \mathrm{m} =$$
$$= (E_0G_0 - F_0^2)\,(\lambda\mu' - \lambda'\mu)^2 + \varepsilon^{IV}(\lambda\mu' - \lambda'\mu)^2.$$

Jest však pro všecka u, v v oboru Ω_0*)

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2 \geqq \mathrm{m} > 0$$

a tudíž (při dosti malých $|\lambda|$, $|\lambda'|$, ... a následkem toho i dosti malém $|\varepsilon^{IV}|$)

$$\overline{MN}\,.\,\overline{MP}\,.\sin \mathrm{m} = |\lambda\mu' - \lambda'\mu|\,(\sqrt{E_0G_0 - F_0^2} + \varepsilon^V).$$

aneb označíme-li plochy trojúhelníků MNP, $M_0N_0P_0$ značkami ω, $\omega^{(0)}$

$$\omega = \omega^{(0)}\,(\sqrt{E_0G_0 - F_0^2} + \varepsilon^V). \qquad (\varepsilon)$$

V důsledku předpokladů vyplývá pak nejprve, že ε^V (stejně jako čísla $\varepsilon, \varepsilon', \ldots$) konverguje k nule současně s čísly $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ (při čemž ovšem $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ konvergují k nule udaným způsobem), jelikož však funkce φ, ψ, χ, jakož i jejich první derivace jsou spojité v oboru Ω_0 i s hranicemi, následuje snadno, že konvergence ta jest stejnoměrná vzhledem ke všem bodům (u_0, v_0) oboru Ω_0.

Dále následuje z předpokladů, že poměry čtverců stran trojúhelníka MNP k jeho ploše jsou v určitém intervalu, jehož dolní hranice jest větší než jisté číslo kladné, jež bychom mohli bez potíží udati, za předpokladu ovšem, že $|\lambda|$, $|\mu|$, $|\lambda'|$, $|\mu'|$ jsou již dostatečně malá a že čísla (β) jsou v intervalu (a, b), $b > a > 0$.**) Jest tudíž nejmenší úhel trojúhelníka MNP, když

*) Plyne z významu čísel A, B, C, E, F, G na základě známé identity

$$(a^2 + b^2 + c^2)\,(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 =$$
$$= (ab' - a'b)^2 + (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2.$$

**) Důkaz, jehož podrobné provedení tu pro stručnost pomíjíme, plyne snadno z okolnosti, že dolní i horní hranice funkcí $E_0G_0 - F_0^2$, E_0, jsou jistá čísla kladná (jestliže (u_0, v_0) jest v oboru Ω_0). Dále lze při straně $\overline{MN}$ použíti nerovnin z této okolnosti ihned plynoucích

$$E_0\lambda^2 + 2F_0\lambda\mu + G_0\mu^2 < (\sqrt{E_0}\,|\lambda| + \sqrt{G_0}\,|\mu|)^2 \leqq (E_0 + G_0)\,(\lambda^2 + \mu^2),$$

$$E_0\lambda^2 + 2F_0\lambda\mu + G_0\mu^2 =$$
$$= \frac{1}{E_0 + G_0}\,[(\lambda^2 + \mu^2)\,(E_0G_0 - F_0^2) + (E_0\lambda + F_0\mu)^2 + (F_0\lambda + G_0\mu)^2] >$$
$$> \frac{E_0G_0 - F_0^2}{E_0 + G_0}\,(\lambda^2 + \mu^2)$$

a podobně při ostatních stranách.

$\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ konvergují k nule vytčeným způsobem, stále větší než jistý pevný úhel (položený mezi 0 a $\frac{1}{3}\pi$), i když při tom bod (u_0, v_0) libovolně mění svou polohu na Ω_0.

POZNÁMKA. Že výraz, ke kterému jsme dospěli se ve tvaru svém nemění, zavedeme-li místo parametrů u, v přípustnou substitucí nové parametry u', v' jest se zřetelem k identitě $EG-F^2 = A^2+B^2+C^2$ a se zřetelem k větě o transformaci dvojných integrálů a větě o funkcionálních determinantech nasnadě. Že ten výraz jest i vzhledem k orthogonální transformaci souřadnic x, y, z invariantním jest téměř bezprostředně patrno.

304. Sestrojíme nyní mnohoúhelník, který jest položen na oboru Ω_0 tak, aby plocha toho mnohoúhelníka byla menší než plocha oboru Ω_0 o méně než η (kde η jest číslo kladné, libovolně malé) a zároveň tak, aby mnohoúhelník ten bylo lze rozděliti na trojúhelníky, jejichž nejmenší úhel jest stále větší než jistý pevný úhel nacházející se v intervalu $(0, \frac{1}{3}\pi)$. Abychom dokázali, že mnohoúhelníky žádaných vlastností vskutku jsou, podáme návod ku provedení konstrukce jednoho takového mnohoúhelníka.

K tomu cíli provedeme v rovině proměnných (u, v) pomocí dvou systémů přímek rovnoběžných s osami UV dělení celé roviny na čtverce o straně δ. Souhrn čtverců spadajících do oboru Ω_0 tvoří jistý mnohoúhelník $M_\delta^{(0)}$, jehož všecky body jsou buď uvnitř oboru Ω_0 anebo na jeho hranici. Rozdělíme-li každý ze čtverců, jež skládají mnohoúhelník $M_\delta^{(0)}$, úhlopříčkou na dva trojúhelníky, rozpadne se $M_\delta^{(0)}$ na trojúhelníky $T_\delta^{(0)}$, jejichž nejmenší úhel jest 45^0. Zároveň jest patrno (jelikož hranice oboru Ω_0 jest kvadratury schopna), že plocha mnohoúhelníha $M_\delta^{(0)}$ když δ blíží se k nule, konverguje ku ploše oboru Ω_0. Jest tedy mnohoúhelník $M_\delta^{(0)}$ mnohoúhelníkem vlastností svrchu požadovaných,

Abych další úvahy poněkud zjednodušil a tím učinil čtenáři přístupnějšími, provedu je hned na podkladě mnohoúhelníka $M_\delta^{(0)}$ a trojúhelníků $T_\delta^{(0)}$. Každému bodu položenému na jednom z těchto trojúhelníků $T_\delta^{(0)}$ odpovídá jeden bod na části Ω dané plochy. Zvláště pak třem vrcholům trojúhelníka $T_\delta^{(0)}$ jsou přiřaděny tři body na Ω, jež pojímati budeme jakožto vrcholy nového přímočarého trojúhelníka rovinného T_δ. Souhrn všech trojúhelníků T_δ (přiřaděných tak souhrnu trojúhelníků $T_\delta^{(0)}$) tvoří mnohostěnnou plochu složenou z trojúhelníků; hranice této mnohostěnné plochy jest čára mnohoúhelníková M_δ, jejíž vrcholy jsou položeny uvnitř oboru Ω anebo na hranici oboru Ω. Trojúhelníky T_δ jsou pak takové, že jejich nejmenší úhel jest stále větší než jistý pevný úhel, je-li ovšem δ již dosti malé; značí-li pak $\omega_\delta^{(0)}$ resp. ω_δ plochu trojúhelníka $T_\delta^{(0)}$ resp. plochu trojúhelníka T_δ přiřaděného trojúhelníku $T_\delta^{(0)}$, jest mezi ω_δ, $\omega_\delta^{(0)}$ platný vztah (ε), v němž $\sqrt{E_0F_0-G_0^2}$ značí výraz vznikající z $\sqrt{EF-G^2}$, dosadíme-li tam za u, v souřadnice jednoho z vrcholů trojúhelníka $T_\delta^{(0)}$ (po případě i souřadnice některého bodu položeného uvnitř trojúhelníka $T_\delta^{(0)}$, jak patrno z předpokládané spojitosti příslušných funkcí pro všecky body oboru Ω_0).

Konverguje-li δ k nule, konverguje i nejmenší vzdálenost každého z bodů na hranici mnohoúhelníka $M_\delta^{(0)}$ od hranice oboru Ω_0 k nule a obdobně i nejmenší vzdálenost každého z bodů čáry M_δ od hranice oboru Ω konverguje k nule. Jednotlivé trojúhelníky T_δ jsou položeny v rovinách, jež, když δ se blíží k nule, blíží se polohou svojí — jak známo — k rovině tečné, sestrojené v některém z vrcholů trojúhelníka T_δ. Tak jest patrno, že s δ blížícím se k nule mnohostěnná plocha průběhem svým i tvarem stále více se blíží dané části plošné Ω. Jest tedy přirozeno, že *definujíce velikost P_Ω povrchu části plošné Ω, klademe*

$$P_\Omega = \lim_{\delta=0} \sum \omega_\delta, \tag{ι}$$

kdež součtové znaménko vztahuje se ku plochám ω_δ všech trojúhelníků T_δ svrchu popsaných a kdež limitu jest bráti za předpokladu, že δ blíží se k nule, jakož ostatně vytčeno v (ι). Při tom ovšem počet trojúhelníků T_δ vzrůstá nade všecky meze.

Dosadíme do (ι) podle (ε); pak se zřetelem k tomu, že ε^V konverguje stejnoměrně v celém oboru Ω_0 k nule, když λ, μ, λ', μ' konvergují k nule způsobem vytčeným a tudíž, když δ konverguje k nule*), jest

$$\lim_{\delta=0} \sum \varepsilon^V \omega_\delta^{(0)} = 0$$

(součtové znaménko vztahuje se ke všem trojúhelníkům $T_\delta^{(0)}$). Dostaneme tedy

$$P_\Omega = \lim_{\delta=0} \sum \sqrt{E_0G_0 - F_0^2}\, \omega_\delta^{(0)},$$

aneb se zřetelem k definici dvojného integrálu

$$P_\Omega = \iint\limits_{\Omega_0} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

*) Ve zvláštním případě trojúhelníků $T_\delta^{(0)}$ totiž, zvolíme-li vrchol pravého úhlu za bod (u_0, v_0), jest $\lambda = \pm\delta$, $\mu = 0$; $\lambda' = 0$, $\mu' = \pm\delta$.

Tím jsme získali vzorec pro povrch plochy shodující se se vzorcem (II) v odstavci 298 odvozeným. Odvození to však podáno na podkladě poněkud obecnějším a na základě definice, která se více blíží definici délky oblouku křivé čáry a která více hoví obvyklému nazírání.