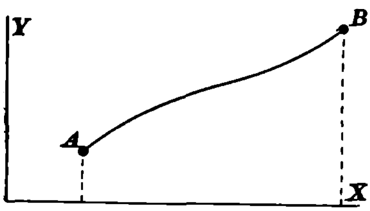
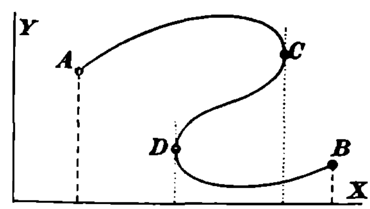
IX. KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY A ÚPLNÉ DIFERENCIÁLY.

197. Pro jednoduché vyjádření jistých výrazů a formulí jest užitečno zavésti t. zv. **integrály křivkové,** pojem to, který zpravidla — a to právě v případech nejdůležitějších — se dá převésti na pojem integrálu určitého, avšak v obecném pojetí jest jistým zevšeobecněním toho pojmu.

Vycházeti budeme nejprve od případu nejjednoduššího. Budiž dán oblouk křivky K spojující body $A[x_0, y_0]$, $B[X, Y]$ a mějmež



Obr. 8_1.



Obr. 8_2.

nejprve ten případ na mysli, že každá pořadnice mezi přímkami $x = x_0$, $x = X$ položená protíná oblouk AB jenom v jednom bodě (viz obr. 8_1). Pak lze rovnici křivky K, pokud běží o body na oblouku AB, psáti ve tvaru $y = \varphi(x)$, při čemž $\varphi(x)$ jest spojitá funkce proměnné x.

Budiž dále $f(x, y)$ funkce dvou proměnných x, y definovaná v jistém oboru, uvnitř něhož probíhá oblouk AB dané křivky. Pak definujeme *integrál podle oblouku AB dané křivky K z funkce $f(x, y)$ při proměnné integrační x* touto rovnicí

$$\int_{K(AB)} f(x, y)\, dx = \int_{x_0}^{X} f(x, \varphi(x))\, dx, \tag{1}$$

jestliže integrál na pravé straně se nacházející má význam. Nemá-li integrál na pravé straně této rovnice se nacházející význam, říkáme, že symbol $\int\limits_{K(AB)} f(x, y)\,dx$ nemá význam.

Definice tato bez potíží se rozšiřuje na oblouk AB, jejž každá pořadnice položená mezi nejkrajnějšími pořadnicemi při bodech toho oblouku se vyskytujícími neprotíná sice v jednom bodě, kde však daný oblouk lze rozděliti na části (v konečném počtu) tak, aby na jednotlivých částech požadavek ten sloužící za podklad definici (1) byl splněn. Tak na obr. 8_2 postačí rozděliti oblouk AB body $C[x_1, y_1]$, $D[x_2, y_2]$, následkem čehož lze rovnici křivky K pro body na oblouku AC psáti ve tvaru $y = \varphi_1(x)$, na CD pak $y = \varphi_2(x)$ a konečně na DB $y = \varphi_3(x)$, při čemž jsou $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ tři různé spojité funkce, a bude tu

$$\int\limits_{K(AB)} f(x, y)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, \varphi_1(x))\,dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi_2(x))\,dx + \int\limits_{x_2}^{X} f(x, \varphi_3(x))\,dx,$$

takže obecně stanovíme: *Lze-li oblouk AB křivky K rozděliti body $A_i[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \ldots m-1$, na m částí tak, že rovnice křivky K pro body na oblouku $A_{i-1}A_i$ jest $y = \varphi_i(x)$, při čemž $\varphi_i(x)$ jest funkce spojitá proměnné x v intervalu (x_{i-1}, x_i) a A_0, A_m jsou body A, B,* jest

$$\int\limits_{K(AB)} f(x, y)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \varphi_i(x))\,dx, \qquad x_m = X. \tag{I}$$

Zcela analogicky definujeme křivkový integrál při integrační proměnné y rovnicí

$$\int\limits_{K(AB)} g(x, y)\,dy = \sum_{i=1}^{\overline{m}} \int\limits_{\overline{y}_{i-1}}^{\overline{y}_i} g(\psi_i(y), y)\,dy, \tag{II}$$

kde $[\overline{x}_{i-1}, \overline{y}_{i-1}]$, $[\overline{x}_i, \overline{y}_i]$ jsou souřadnice dvou bodů $\overline{A}_{i-1}$, $\overline{A}_i$ na křivce takových, že rovnice křivky K pro body na oblouku $\overline{A}_{i-1}\overline{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots \overline{m}$, jest $x = \psi_i(y)$, kde $\psi_i(y)$ jest spojitá funkce proměnné y.

Budeme dále psáti

$$\int\limits_{K(AB)} f(x, y)\,dx + \int\limits_{K(AB)} g(x, y)\,dy = \int\limits_{K(AB)} (f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy). \tag{III}$$

Rovnicemi (I), (II), (III) jsou definovány *křivkové* integrály pro velmi *obecnou skupinu křivek K*, a převedeny jsou těmito rovnicemi na integrály z funkcí o jedné proměnné v určitých mezích. Jestliže tyto integrály určité neexistují, říkáme (jak už svrchu ve specielním případě bylo vytčeno), že příslušné symboly pro integrály křivkové nemají význam (neexistují).

198. Abychom pojem křivkového integrálu rozšířili na obecnější skupinu křivek, jest účelno zavésti parametrické rovnice křivky K; nechť bod $[x, y]$, kde

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{α}$$

a $\varphi(t)$, $\psi(t)$ jsou spojité funkce proměnné t v intervalu (t_0, T), probíhá všemi body oblouku AB a každým bodem jenom jednou, když t probíhá monotonně interval (t_0, T). Tím jednak docílíme, že každý bod oblouku AB jest charakterisován (určen) jedním číslem intervalu (t_0, T) a zároveň jsou body na AB uspořádány a my říkáme, že C_2 následuje na AB po C_1, jestliže parametry k nim příslušné t_2, t_1 následují po sobě v intervalu (t_0, T) (t. j. je-li $T > t_0$, jest $t_2 > t_1$). Na tomto podkladě můžeme vyjádřiti integrály křivkové (I), (II), (III) pomocí limitních výrazů.

Klaďme k tomu cíli $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < T = t_N$

$$x'_i = \varphi(t_i), \quad y'_i = \psi(t_i), \quad \xi_i = \varphi(\tau_i), \quad \eta_i = \psi(\tau_i), \quad \tau_i \text{ číslo v } (t_{i-1}, t_i),$$

$[x'_0, y'_0] = A$, $[x'_N, y'_N] = B$; $\Delta x'_i = x'_i - x'_{i-1}$, $\Delta y'_i = y'_i - y'_{i-1}$. Konvergují-li $\Delta x'_i$, $\Delta y'_i$ současně k nule, pak body $[x'_{i-1}, y'_{i-1}]$, $[x'_i, y'_i]$ konvergují na křivce dané k témuž bodu a rovněž t_i a t_{i-1} k téže hodnotě a tedy i $t_i - t_{i-1} = \Delta t_i$ k nule (a naopak, konverguje-li Δt_i k nule, konverguje $\Delta x'_i$, $\Delta y'_i$ k nule). Pak lze psáti v důsledku (I) za předpokladu, že $f(x, y)$ jest na oblouku AB křivky K konečnou,

$$\int\limits_{K(AB)} f(x, y)\, dx = \lim \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j, \eta_j)\, \Delta x'_j; \tag{IV}$$
$$\text{pro } \lim \Delta x'_j = 0 \text{ a } \lim \Delta y'_j = 0,$$

ať $[\xi_j, \eta_j]$ jest kterýkoliv bod na K položený mezi $[x_{j-1}, y_{j-1}]$, $[x_j, y_j]$.

Avšak limita ve (IV) může míti význam pro mnohem obecnější křivky K, než jaké svrchu při definici (I) byly předpokládány; bude pak rovnice (IV) nám *podkladem pro rozšíření pojmu křivkového integrálu i pro takové křivky, jež do ustanovení hořejšího nebyly zahrnuty.* Neexistuje-li určitá limita ve (IV) uvedená a vždy táž, ať Δx_j, Δy_j jakkoliv konvergují k nule a ať $[\xi_j, \eta_j]$ *jest jakýkoliv bod na K mezi* $[x_{j-1}, y_{j-1}]$, $[x_j, y_j]$ říkati budeme, že *příslušný křivkový integrál nemá významu.*

Obdobně stanovíme (používajíce stále téhož označení opírajícího se o parametrické vyjádření bodů na K)

$$\int\limits_{K(AB)} [f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy] = \lim \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j, \eta_j)\,\Delta x'_j + \lim \sum_{j=1}^{n} g(\xi_j, \eta_j)\,\Delta y'_j. \qquad (\mathrm{IV}_1)$$

$$\text{pro } \lim \Delta x'_j = 0,\ \lim \Delta y'_j = 0.$$

Zvláště pak ještě položíme (v souhlase s odstavcem 97, poznámkou 3)

$$\int\limits_{(\beta)} f(x,y)\,dx = 0, \text{ je-li } (\beta) \text{ úsečka přímky rovnoběžné s osou } Y.$$

$$\int\limits_{(\alpha)} g(x,y)\,dy = 0, \text{ je-li } (\alpha) \text{ úsečka přímky rovnoběžné s osou } X.$$

POZNÁMKA. Podmínku „pro $\lim \Delta x'_j = 0$, $\lim \Delta y'_j$" vyskytující se v definicích (IV) a (IV_1) můžeme nahraditi podmínkou požadující, aby $\lim \Delta t_j = 0$, kde $\Delta t_j = t_i - t_{j-1}$.

199. Jsou-li funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$ vyskytující se v parametrickém vyjádření křivky K funkce mající derivace v intervalu (t_0, T), pak limitní výraz ve (IV_1) lze vyjádřiti snadno (viz příslušnou úvahu v odstavci 107) obyčejným integrálem určitým. Dostaneme totiž

$$\int\limits_{K(AB)} [f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy] = \int_{t_0}^{T} [f(\varphi,\psi)\,\varphi'(t) + g(\varphi,\psi)\,\psi'(t)]\,dt \qquad (\mathrm{IV}_3)$$

za předpokladu ovšem, že jednak křivkový integrál ve (IV_1) má význam a že funkce $f(\varphi,\psi)\varphi'(t)$, $g(\varphi,\psi)\psi'(t)$ jsou v (t_0, T) integrace schopny. Derivace $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ nemusí ani ostatně v intervalu (t_0, T) existovati v množství bodovém míry nulové.

PŘÍKLAD. Je-li ku příkladu K kružnice o poloměru R a se středem v počátku, položíme $\varphi(t) = R\cos t$, $\psi(t) = R\sin t$ a

$$\int\limits_{K(AB)} [f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy] = R\int_{t_0}^{T} [-f(R\cos t, R\sin t)\sin t + g(R\cos t, R\sin t)\cos t]\,dt.$$

Vztahuje-li se integrace k celému obvodu kruhu, položíme ku příkladu $t_0 = 0$ a tedy $T = 2\pi$.

200. Jest snadno za jistých omezujících předpokladů nalézti podmínky pro funkce $f(x, y)$, $g(x, y)$ nutné a postačující, aby křivkový integrál (III) měl význam, jestliže ovšem křivka K jest taková, že integrál (III) lze rozložiti v konečný počet určitých integrálů podle jedné proměnné. Avšak i v případě obecnějším lze takové podmínky bez potíží odvoditi. Učiníme to za předpokladu, že funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$ vyskytující se v parametrickém vyjádření křivky K jsou **funkce spojité a v intervalu** (t_0, T) **s variací konečnou.**

Rozdělíme-li za tohoto předpokladu interval (t_0, T) body $t_1, t_2, \dots t_{n-1}$ na n intervalů menších (takže, je-li ku příkladu $t_0 < T$, jest $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < T$), můžeme klásti

$$x_k = \varphi(t_k), \quad y_k = \psi(t_k), \quad \xi_k = \varphi(\tau_k), \quad \eta_k = \psi(\tau_k),$$

kde τ_k jest libovolná hodnota intervalu (t_{k-1}, t_k). Vedle toho klademe

$$\delta_k = \text{Variaci funkce } \varphi(t) \text{ v intervalu } (t_{k-1}, t_k) \text{ (odst. 133)}$$

a označíme M_k resp. m_k horní resp. dolní hranici funkčních hodnot funkce $f(x, y)$, když t probíhá interval (t_{k-1}, t_k). Uvažujme pak tyto čtyři součty

$$S_I = \sum_j M_j(\delta_j + \Delta x_j), \qquad s_I = \sum_j m_j(\delta_j + \Delta x_j);$$

$$S_{II} = \sum_j M_j(\delta_j - \Delta x_j), \qquad s_{II} = \sum_j m_j(\delta_j - \Delta x_j).$$

$$j = 1, 2, 3, \dots n.$$

Pro každou z dvojic (S_I, s_I), (S_{II}, s_{II}) lze provésti přesně tytéž úvahy jako v odstavci 85—87 pro součty S, s. Jest tedy patrno z důvodů odstavce 86 že vždy existují limity $\lim S_I$, $\lim s_I$, $\lim S_{II}$, $\lim s_{II}$ pro $\lim \Delta t_j = 0$ a $\lim n = \infty$. Existují tedy také limity

$$\tfrac{1}{2} \lim (S_I - S_{II}) = \lim \sum M_j \Delta x_j, \qquad \tfrac{1}{2} \lim (s_I - s_{II}) = \lim \sum m_j \Delta x_j.$$

Avšak limita ve (IV) se vyskytující, t. j. $\lim \sum f(\xi_j, \eta_j) \Delta x_j$ existuje-li při libovolné poloze bodu τ_j na (t_{j-1}, t_j), pak obě limity právě vypsané jsou si rovny, t. j.

$$\lim \sum (M_j - m_j) \Delta x_j = 0,$$

odkudž vyplývá věta:

Nutná podmínka, aby existovala limita (IV) *pro oblouk AB křivky K o rovnicích $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$* (při čemž probíhá-li t interval (t_0, T), probíhá příslušný bod celý oblouk AB křivky K) *jest, jestliže $\varphi(t)$, $\psi(t)$ jsou funkce spojité a $\varphi(t)$ nadto s variací konečnou, aby*

$$\lim \sum (M_j - m_j) \Delta x_j = 0 \quad \text{pro } \lim \Delta t_j = 0, \quad \lim n = \infty. \tag{s}$$

Této podmínce jest vyhověno, jestliže

$$\lim \sum (M_j - m_j) \, |\Delta x_j| = 0, \quad \text{pro } \lim \Delta t_j = 0, \quad \lim n = \infty. \tag{t}$$

Avšak, je-li podmínka právě napsaná splněna, pak limita ve (IV) jistě existuje při libovolné poloze bodu τ_j a jest rovna každé z obou limit v (r), neboť výraz ku př. $\left|\sum(M_j - f(\xi_j, \eta_j))\, \Delta x_j\right| \leq \leq \sum(M_j - m_j)\, |\Delta x_j|$. *Jest tedy podmínka* (t) *postačitelná.*

Tato postačující podmínka jistě bude splněna, jestliže jest splněna podmínka

$$\lim \sum (M_j - m_j)\, \delta_j = 0 \quad \text{pro} \lim \Delta t_j = 0 \quad \text{a} \lim n = \infty$$

neboť $\delta_j \geq |\Delta x_j|$.

Obdobné podmínky bylo by lze snadno napsati pro existenci limit dávajících integrály

$$\int\limits_{K(AB)} g(x, y)\, dy \quad \text{resp.} \quad \int\limits_{K(AB)} f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy$$

za předpokladu, že $\psi(t)$ resp. obě funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$ jsou funkce s variací konečnou. *Nutná a postačující podmínka pro existenci těchto integrálů jakož i integrálu ve* (IV) *jistě jest splněna, jsou-li* $f(x, y)$, $g(x, y)$ *funkce spojité bodu* $[x, y]$ *v oboru, na němž probíhá oblouk* AB *křivky* K.

Předcházející vývody předpokládají, že $f(x, y)$ resp. $g(x, y)$ jsou na oblouku AB konečné. Jak by se od tohoto případu přešlo ku případu, že $f(x, y)$ resp. $g(x, y)$ stává se na AB nekonečnou (ve kterémž případě pak běží v podstatě o integrály nevlastní), jest nasnadě.

201. Z příslušných vět o integrálech určitých a rovnic definujících (I), (II), (III), po případě (IV), vyplývají ihned tyto vztahy, v nichž body A, B, C jsou libovolné body křivky K určující jednoznačně oblouky $K(AB)$, $K(BC)$, $K(AC)$

$$\int\limits_{K(AB)} (f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy) = -\int\limits_{K(BA)} (f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy), \tag{2}$$

$$\int\limits_{K(AB)} (f\, dx + g\, dy) + \int\limits_{K(BC)} (f\, dx + g\, dy) = \int\limits_{K(AC)} (f\, dx + g\, dy). \tag{3}$$

Rovnice tyto jsou zároveň důsledek a zevšeobecnění rovnic (I) a (II) odstavce 95, 96. V tom případě, že by pouhými koncovými body příslušný oblouk křivky nebyl úplně určen (jako jest tomu u křivek uzavřených, ku příkladu u kruhu, kde jest oblouk svými koncovými body určen dvojznačně), jest třeba v rovnicích (2) a (3) připojiti bližší vyznačení příslušných oblouků, aby symboly tam se vyskytující měly náležitý význam. Podstatné jest v (2), že $K(AB)$, $K(BA)$ *jsou tytéž oblouky a integrály tam* *se vyskytující liší se jenom záměnou mezí* (či jinak „směrem“, ve kterém se integruje). V rovnici (3) jest pak ta okolnost podstatná, že k její obecné platnosti *se nutně vyrozumívá, že souhrn oblouků $K(AB)$, $K(BC)$ tvoří oblouk $K(AC)$.*

202. Se zřetelem k důležitosti příslušných pojmů v integrálním počtu a teorii funkční jest třeba zavésti některá pojmenování pro křivky rovinné v následujícím častěji užívaná. Křivku danou rovnicemi (α) budeme nazývati **křivkou spojitou** spojující body A, B o souřadnicích $[\varphi(t_0), \psi(t_0)]$ resp. $[\varphi(T), \psi(T)]$. Mění-li se t monotonně (t. j. stále buď rostouc anebo klesajíc podle toho, zda $t_0 < T$ či $t_0 > T$) od t_0 do T, zaujímá bod M o souřadnicích $[\varphi(t), \psi(t)]$ na té křivce postupně různé polohy a říkáme krátce, že se *pohybuje* na oblouku AB ve směru od A ku B, anebo také, že *postupujeme* na K od A ku B. Při tomto pohybu (resp. postupování) může se sice státi, že poloha bodu M jest pro různá t intervalu (t_0, T) táž; pro jednoduchost však připustíme se zřetelem k následujícím úvahám, že to může nastati toliko pro konečný počet hodnot intervalu (t_0, T). V tomto případě říkáme, že oblouk AB sám sebe (v tom konečném počtu bodů) *protíná* (aneb též, že má body mnohonásobné). Neprotíná-li oblouk AB sám sebe, přísluší různým t různé dvojice hodnot $\varphi(t)$, $\psi(t)$.

Konečně lze pojmy zde zavedené beze všeho převésti na křivky v prostoru trojrozměrném, stanovené rovnicemi

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t); \quad t \text{ v intervalu } (t_0, T);$$

a obecně na „křivky“ v prostorech vícerozměrných.

203. Zvláštních stanovení vyžadují integrály křivkové podle **uzavřených křivek se neprotínajících.** Pod uzavřenou křivkou K se neprotínající budeme vyrozumívati křivku, která dělí celou rovinu ve dvě části souvislé (DP 189); jednu konečnou (souřadnice x, y bodů této části jsou vesměs co do absolutní hodnoty menší než jisté číslo D), druhou do nekonečna se prostírající. Část konečnou budeme nazývati *vnitřek* uzavřené křivky se neprotínající, část nekonečnou *vnějšek*. Při tom v okolí každého bodu na křivce K nacházejí se body z obou částí, v něž se rovina křivkou K rozpadá, a jsou tedy všechny body křivky K hraničními body oboru daného vnitřkem, avšak také oboru daného vnějškem křivky K.

Na uzavřené křivce se neprotínající budeme rozeznávati směr kladný a směr záporný. Stanovení těchto směrů činí se zpravidla závislým na vzájemné poloze os souřadných OX, OY. Stojí-li pozorovatel v počátku souřadnic, dívaje se ve směru OX

(rostoucích x), pak OY (a tedy půlrovina kladných y), může býti buď na levé anebo na pravé straně. Pro následující stanovíme (jakož jest obvyklo), že kladná část osy Y jest na levé straně. V souhlase s tím stanovíme, že *postupujeme po uzavřené křivce se neprotínající ve směru kladném, je-li vnitřek její po levé straně.* Směr protivný pak kladnému jest záporný.

Jsou-li A, B, C tři různé body uzavřené křivky se neprotínající, pak oblouky AB, BC, CA jsou úplně dány na základě předpokladů, které učiníme, že bod C není na oblouku AB, že bod B není na oblouku CA a že bod A konečně není na oblouku BC. Probíháme-li pak oblouk AB (postupujíce ovšem stále v témž směru) od A k B, dále oblouk BC od B k C a oblouk CA od C k A, postupujeme ve všech třech případech v témž směru. Je-li směr od A k B na daném oblouku AB kladný, stanovíme křivkový integrál podle uzavřené křivky K ve směru kladném touto rovnicí

$$\int_{K_+} f(x, y)\,dx = \int_{K(AB)} f(x, y)\,dx + \int_{K(BC)} f(x, y)\,dx + \int_{K(CA)} f(x, y)\,dx$$

a podobně týž integrál ve směru záporném

$$\int_{K_-} f(x, y)\,dx = \int_{K(BA)} f(x, y)\,dx + \int_{K(AC)} f(x, y)\,dx + \int_{K(CB)} f(x, y)\,dx.$$

Místo K_+ budeme psáti též pouze K. Jest jasno z (2), že

$$\int_{K_+} f(x, y)\,dx = -\int_{K_-} f(x, y)\,dx.$$

POZNÁMKA. Křivka spojitá o rovnicích $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ jsou spojité funkce v intervalu (t_0, T) a takové, že různým t uvnitř (t_0, T) přísluší různé body, hranicím pak t_0, T intervalu (t_0, T) týž bod roviny XY ($\varphi(t_0) = \varphi(T)$, $\psi(t_0) = \psi(T)$), jest, jak po prvé dokázal *Jordan*, čára uzavřená se neprotínající ve smyslu horní definice (v Cours d'Analyse, 2. vyd., sv. I, odst. 96 a násl.*)). Vedle toho lze v tomto případě křivek uzavřených a zároveň spojitých jasně definovati rčení, že postupujeme na K určitým směrem, ku příkladu směrem rostoucích t, následkem čehož na takové čáry (uzavřené a zároveň spojité) se v této kapitole omezíme, majíce zřetel zároveň k tomu, že jest to skupina křivek velmi obecná a názoru nejvíce přístupná. Avšak

*) Spisovatel této knihy uveřejnil důkaz Jordanovy věty v Časopise pro pěst. mat. a fys., sv. 53, str. 149 a později poněkud zjednodušený a podrobněji provedený ve Spisech vydávaných přírodovědeckou fakultou univ. Karlovy, č. 11, r. 1924.

i pro definici směru kladného resp. záporného na uzavřené křivce se neprotínající můžeme dáti obecnější stanovení, než svrchu bylo dáno (které se výhradně opírá o názor a hodí se tudíž pouze pro křivky mající v jednotlivých svých bodech tečny resp. tečny zprava a zleva). Jelikož však to stanovení by vyžadovalo poněkud obšírnějšího výkladu, spokojíme se se stanovením hořejším, které postačí k ustanovení směru kladného v bodech v nichž křivka má tečnu, a které lze nahraditi výrokem, že tečna ve směru kladném a normála *do vnitřku* mají touž relativní polohu jako přímka mající kladný směr osy X a přímka mající kladný směr osy Y.

Můžeme též bráti v úvahu čáry uzavřené spojité se protínající; to jsou ty, jež dělí rovinu v několik částí souvislých a kde, píšeme-li jejich rovnici ve tvaru $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$ nabývají týchž hodnot ještě pro jiné hodnoty argumentu t než pouze pro $t=t_0$ a $t=T$.

204. Je-li část roviny XY, tvořící jistý souvislý obor Ω, omezena několika čarami spojitými, uzavřenými, se neprotínajícími a obsahujícími veškeré body hraniční oboru Ω (a žádné jiné body), lze čáry ty roztříditi vždy v čáry dvojího druhu.

1. Čáry takové že obor Ω jest celý uvnitř té uzavřené čáry spojité se neprotínající. Čára taková očividně může býti při daném souvislém oboru Ω nejvýš jediná a obor Ω tvoří buď část vnitřku té čáry (nehledíme-li k hraničním bodům oboru Ω) aneb obor Ω shoduje se s vnitřkem celým (zase nehledě k hraničním bodům). V tomto posledním případě jest obor Ω omezen vůbec toliko jedinou čarou spojitou a uzavřenou, se neprotínající.

2. Čáry takové, že obor Ω jest celý vně té čáry. Čar takových může býti u souvislého oboru několik.

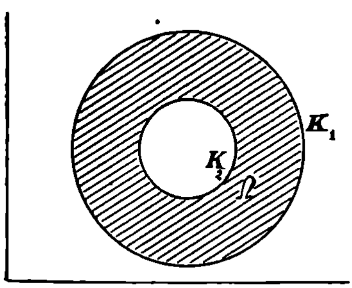
V prvém případě říkáme, že čára tvoří *vnější ohraničení oboru* Ω; v případě druhém tvoří čáry (čára) *vnitřní ohraničení oboru* Ω.

Jestliže obor Ω není souvislý, může býti i čar tvořících vnější ohraničení (a které jsou definovány tím, že vnitřek té spojité, uzavřené čáry se neprotínající obsahuje část oboru Ω, při čemž čára ta obsahuje jenom hraniční body té části; po případě jest celý vnitřek částí oboru Ω) několik. Obdobně jest třeba pozměniti při oborech nesouvislých i definici vnitřního ohraničení.

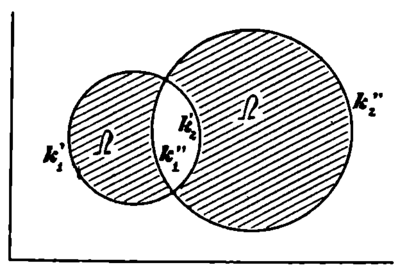
Tak v obr. 9_1 tvoří K_1 vnější, K_2 vnitřní ohraničení vyčárkovaného oboru; při nevyčárkované části roviny, která není souvislým oborem (skládajíc se ze dvou částí od sebe oddělených), jest K_1 vnitřní, K_2 vnější ohraničení její. V obrazci 9_2 jest $k'_1 k''_1$ i $k'_2 k''_2$ vnější ohraničení oboru vyčárkovaného. Při oboru nevyčárkovaném jest $k'_1 k''_2$ vnitřní, $k''_1 k'_2$ vnější ohraničení jeho.

Říkáme pak, že *probíháme ohraničení oboru Ω ve směru kladném, je-li* (při svrchu zvolené vzájemné poloze os OX, OY) *část oboru Ω sousedící s právě probíhaným ohraničením na levé straně.* Chceme-li ku příkladu proběhnouti ohraničení oboru Ω v obr. 9_1 ve směru kladném, musíme proběhnouti uzavřenou křivku K_1 ve směru kladném a uzavřenou křivku K_2 ve směru záporném.

Na základě předcházejícího stanovení jest patrný význam pojmu **„integrál z funkce $f(x, y)$ podle ohraničení oboru Ω“** (při



Obr. 9_1.



Obr. 9_2.

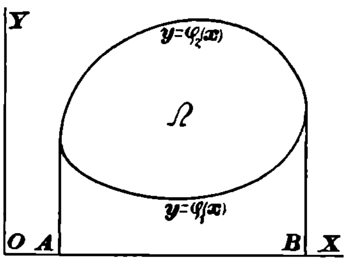
čemž se vyrozumívá samo sebou integrace ve směru kladném po ohraničení oboru Ω). Jest to součet křivkových integrálů z funkce $f(x, y)$ podle křivek tvořících celé ohraničení oboru Ω, při čemž integrály podle křivek tvořících ohraničení vnější se počítají ve směru kladném, podle křivek tvořících ohraničení vnitřní ve směru záporném. Ohraničení oboru Ω značme K_Ω; pak můžeme pro integrál podle ohraničení oboru Ω v obr. 9_1 psáti, rozkládajíce jej ve dva integrály křivkové,

$$\int_{K_\Omega} f(x, y)\,dx = \int_{K_1 +} f(x, y)\,dx + \int_{K_2 -} f(x, y)\,dx = \int_{K_1} f(x, y)\,dx - \int_{K_2} f(x, y)\,dx$$

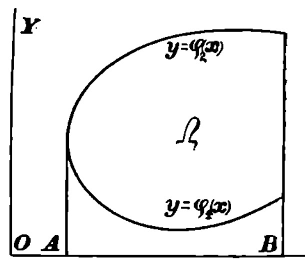
a podobně při obr. 9_2

$$\int_{K_\Omega} f(x, y)\,dx = \int_{k''_1 + k'_1} f(x, y)\,dx + \int_{k''_2 + k'_2} f(x, y)\,dx.$$

205. Rovnice Greenova pro 2 proměnné. Budiž dán v rovině XY obor Ω konečný, omezený uzavřenou, spojitou křivkou K. Tato křivka nechť je obsažena mezi pořadnicemi $x = a$, $x = b$ a nechť každá pořadnice mezi těmito dvěma probíhající protíná K ve dvou bodech (viz obr. 10; tu jest předpokládáno $OA = a$, $OB = b$; rovněž v obr. 11). Pak můžeme křivku K, pokud běží o body, jejichž x jest uvnitř intervalu (a, b), rozděliti ve dvě části, takže na jedné části jest rovnice té křivky $y = \varphi_1(x)$, na druhé pak $y = \varphi_2(x)$; buď $\varphi_2(x) > \varphi_1(x)$.



Obr. 10.



Obr. 11.

Uvažujme pak integrál dvojnásobný

$$\int_{\Omega} dx \int \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \tag{4}$$

mající význam; při tom samozřejmě činíme o $P(x, y)$ předpoklad, že jest funkce mající derivaci podle y, kteréžto derivace jest na Ω konečná a podle y integrace (ve smyslu definice C.-R.) schopna a to v intervalu $(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$, ať jest x jakákoliv hodnota v (a, b). Aby potomní integrace podle x měla význam, *učiníme další předpoklad, že $P(x, y)$ jest spojitou funkcí bodu $[x, y]$ na Ω* (inclusive hranic). Provedeme-li integraci podle y, obdržíme pro ten integrál

$$\int_{\Omega} dx \int \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))]\, dx,$$

aneb

$$\int_{\Omega} dx \int \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int_{K_\Omega} P(x, y)\, dx. \tag{5}$$

Rovnice tato zůstává v platnosti i tenkráte, když obor Ω jest částečně omezen přímkami rovnoběžnými s osou Y. Tak ku příkladu v obr. 11 jest obor Ω omezen částí pořadnice patřící k abscisse OB; jelikož pak křivkový integrál podle proměnné x vzatý podél té části pořadnice jest podle (IV_1) roven nule, jest i tu správna rovnice (5).

Rovnice (5) se ihned rozšiřuje i pro ten případ složitějších křivek K, při kterých pořadnice mezi krajními pořadnicemi položené protínají K i ve více bodech, avšak v konečném počtu, i pro případ, že obor Ω jest omezen několika křivkami, viz odstavec 179. (Čtenář nechť provede toto rozšíření pro obory Ω znázorněné obr. 6 a 7 toho odstavce.)

Za obdobných supposicí pro funkci $Q(x, y)$ a obor Ω vyplývá stejně

$$\int_{\Omega} dy \int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = +\int_{K_\Omega} Q(x, y)\, dy. \tag{6}$$

Je-li pak funkce $Q(x, y)$ taková, že lze *pořad integrační ve dvojnásobném integrálu* (6) *zaměniti*, k čemuž postačí, aby $\partial Q/\partial x$, která jest podle dosavadního předpokladu ve smyslu definice C.-R. v jistých intervalech (závislých na y) podle x integrace schopna, *byla i podle y integrace schopna stejně jako $\partial P/\partial y$*, můžeme rovnice (4) a (6) shrnouti v jednu a psáti ji ve tvaru

$$\int_{\Omega} dx \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy = \int_{K_\Omega} (P\, dx + Q\, dy). \tag{7}$$

Rovnice tato nazývá se obyčejně formule *Greenova*, někteří pak autoři říkají jí formule *Riemannova*.

Za náležitě změněných předpokladů lze poslední rovnici též psáti

$$\int_{\Omega} dy \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx = \int_{K_\Omega} (P\, dx + Q\, dy). \tag{7'}$$

Obě tyto rovnice jsou současně platny, jestliže P, Q jsou spojité funkce bodu $[x, y]$ na Ω i s hranicemi a derivace $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ jsou funkce na Ω konečné a integrace schopné i podle x, i podle y v jistých intervalech vymezených oborem Ω.

206. Cauchyova integrální věta. Úplné diferenciály. Budiž dále za předpokladů ke konci předcházejícího odstavce uvedených

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

pro všecky body oboru Ω. Pak vyplývá z (7)

$$\int_{K_\Omega} (P\, dx + Q\, dy) = 0, \tag{8}$$

což jest t. zv. *integrální věta Cauchyova* (Comptes Rendus sv. 23, r. 1846). Mějmež nyní obor Ω_0, který jest omezen jedinou uzavřenou čarou a ve kterém jsou funkce P, Q spojité a konečné funkce bodu $[x, y]$, jež mají derivace $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$, hovící rovnici $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, kteréžto derivace jsou podle x i podle y integrace schopny (podle C.-R.). Uvažujme pak dvě spojité křivky K_1, K_2 spojující dva body $[x_0, y_0], [X, Y]$ uvnitř Ω_0 a mající vlastnost, že každá rovnoběžka s osou X resp. Y protíná je v konečném počtu bodů. Zvolíme si ještě třetí čáru rovněž spojující body $[x_0, y_0]$, $[X, Y]$ a probíhající uvnitř Ω_0 a mající vlastnost, že každá rovnoběžka s osou X resp. Y protíná ji v konečném počtu bodů; dále budeme od této třetí čáry požadovati, aby ani s K_1 ani s K_2 neměla jiných bodů společných než body $[x_0, y_0]$, $[X, Y]$. Označíme tuto třetí čáru K_0. Pak K_0 s K_1 tvoří dohromady uzavřenou čáru omezující jistý obor Ω, jehož ohraničení probíháme stále v témž směru, probíháme-li čáru K_1 ve směru od bodu $[x_0, y_0]$ k $[X, Y]$ a pak K_0 ve směru od $[X, Y]$ k $[x_0, y_0]$. Podle (8) tedy jest, značíme-li body $[x_0, y_0]$, $[X, Y]$ krátce A_0, A a užíváme-li označení odstavce 197

$$\int\limits_{K_1(A_0 A)} (P\,dx + Q\,dy) + \int\limits_{K_0(A A_0)} (P\,dx + Q\,dy) = 0$$

aneb

$$\int\limits_{K_1(A_0 A)} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{K_0(A_0 A)} (P\,dx + Q\,dy).$$

Stejně jest

$$\int\limits_{K_2(A_0 A)} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{K_0(A_0 A)} (P\,dx + Q\,dy).$$

Z obou posledních následuje

$$\int\limits_{K_1(A_0 A)} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{K_2(A_0 A)} (P\,dx + Q\,dy), \tag{9}$$

t. j. za učiněných předpokladů (o funkcích P, Q a o čarách K_1, K_2) nezávisí integrály (9) na čarách body $[x_0, y_0]$, $[X, Y]$ spojujících; abychom jejich možnou závislost na hodnotách $[x_0, y_0]$, $[X, Y]$ vytkli, budeme je vypisovati symboly závislost tuto jasně vyznačujícími

$$\int\limits_{[x_0, y_0]}^{[X, Y]} (P\,dx + Q\,dy) = \Phi(X, Y; x_0, y_0). \tag{10}$$

Následkem této věty jest patrně, je-li také bod (x_1, y_1) uvnitř oboru Ω_0,

$$\int_{[x_0,\,y_0]}^{[X,\,Y]}(P\,dx+Q\,dy)+\int_{[X,\,Y]}^{[x_1,\,y_1]}(P\,dx+Q\,dy)=\int_{[x_0,\,y_0]}^{[x_1,\,y_1]}(P\,dx+Q\,dy)$$

aneb jinak

$$\Phi(X,Y;\,x_0,y_0)+\Phi(x_1,y_1;\,X,Y)=\Phi(x_1,y_1;\,x_0,y_0), \qquad (11)$$

neboť lze ty tři body (x_0, y_0), (X, Y), (x_1, y_1) spojiti čarami uvnitř oboru Ω_0 probíhajícími. Počítejme na základě poslední rovnice derivaci funkce $\Phi(X, Y;\, x_0, y_0)$ podle X. Zvolme si na přímce $y = Y$ bod $(X + h, Y)$ tak, aby úsečka spojující bod $(X+h, Y)$ s bodem (X, Y) byla celá uvnitř Ω_0, a dosaďme do (11) za $x_1 = X + h$, $y_1 = Y$. Dostaneme

$$\Phi(X+h,Y;x_0,y_0)-\Phi(X,Y;x_0,y_0)=\Phi(X+h,Y;X,Y).$$

V integrálu posledním $\Phi(X+h, Y;\, X, Y)$ zvolíme si za čáru integrační právě přímku spojující oba mezné body integrálu; i jest podle (IV$_1$) a podle věty o střední hodnotě

$$\Phi(X+h,Y;X,Y)=\int_{[X,\,Y]}^{[X+h,\,Y]}(P\,dx+Q\,dy)=\int_X^{X+h}P(x,Y)\,dx=hP(X+\Theta h,Y) \qquad 0<\Theta<1$$

a tedy

$$\frac{\Phi(X+h,Y;x_0,y_0)-\Phi(X,Y;x_0,y_0)}{h}=P(X+\Theta h,Y).$$

Limita na pravé straně pro $\lim h = 0$ existuje, ať h jakkoliv konverguje k nule (neboť $P(x, y)$ jest v Ω_0 spojitá), a tudíž i existuje limita levé strany, jež jest derivací funkce $\Phi(X, Y;\, x_0, y_0)$ podle X, a jest

$$\frac{\partial\Phi(X,Y;x_0,y_0)}{\partial X}=P(X,Y)$$

a rovněž

$$\frac{\partial\Phi(X,Y;x_0,y_0)}{\partial Y}=Q(X,Y).$$

Jsou tedy $P(X, Y)$, $Q(X, Y)$ derivace jedné a téže funkce o proměnných X, Y podle X, resp. podle Y definované integrálem (10) v oboru Ω_0. Takových funkcí však podle předcházejícího jest neomezeně mnoho; bod (x_0, y_0), na němž získaný pro ně výraz závisí, můžeme si totiž zvoliti libovolně; ze známé pak věty o funkcích majících v (a, b) derivace identické vyplývá ihned, že dvě takové funkce (jejichž derivace podle X resp. podle Y v oboru Ω_0 existují a jsou rovny $P(X, Y)$, resp. $Q(X, Y)$) mají rozdíl rovný v Ω_0 konstantě. Budiž $F(X, Y)$ jedna z těch funkcí daných v Ω_0, jejichž derivace podle X, Y jsou $P(X, Y)$, resp. $Q(X, Y)$; pak jest v Ω_0

$$\Phi(X,Y;x_0,y_0)=F(X,Y)+\text{konst.} \qquad \text{(DP, 107)}$$

Klademe-li v této rovnici $X = x_0$, $Y = y_0$, dostaneme ihned

$$0 = F(x_0, y_0) + \text{konst.}, \qquad \text{konst.} = -F(x_0, y_0)$$

a tedy

$$\Phi(X, Y; x_0, y_0) = F(X, Y) - F(x_0, y_0)$$

aneb

$$\int\limits_{[x_0, y_0]}^{[X, Y]} (P\,dx + Q\,dy) = F(X, Y) - F(x_0, y_0).$$

Postačitelná podmínka, aby funkce $P(x, y)$, $Q(x, y)$, v Ω_0 spojité to funkce x, y a o derivacích $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ v Ω_0 konečných a podle x i podle y v Ω_0 integrace schopných, byly v Ω_0 derivacemi jisté funkce, a to $P(x, y)$ derivací podle x, $Q(x, y)$ derivací podle y, jest

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Je-li tato podmínka splněna, jest výraz $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ **úplný diferenciál** *funkce $F(x, y)$ dané integrálem křivkovým*

$$\int\limits_{[x_0, y_0]}^{[X, Y]} (P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy) = F(X, Y) - F(x_0, y_0),$$

ať integraci provádíme podle jakékoliv čáry oborem Ω_0 probíhající.) Při tom jest obor Ω_0 omezen jedinou čarou uzavřenou.* Že vskutku jest $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ úplným diferenciálem funkce $F(x, y)$, vyplyne z poslední rovnice, dosadíme-li v ní $[X, Y] = [x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y]$, při čemž přírůstky Δx, Δy volíme již tak malé, aby lomená čára spojující po řadě body $[x_0, y_0]$, $[x_0 + \Delta x, y_0]$, $[x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y]$ byla celá v Ω_0. Volíme-li při tom za integrační čáru právě tuto lomenou čáru, vyplývá z rovnice poslední ihned

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = \int\limits_{[x_0, y_0]}^{[x_0 + \Delta x, y_0]} (P\,dx + Q\,dy) + \int\limits_{[x_0 + \Delta x, y_0]}^{[x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y]} (P\,dx + Q\,dy) =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_0 + \Delta x} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y_0 + \Delta y} Q(x_0 + \Delta x, y)\,dy = P(x_0 + \Theta \Delta x, y_0)\Delta x + Q_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Theta' \Delta y)\Delta y,$$

při čemž použito věty o střední hodnotě a $0 < \Theta < 1$, $0 < \Theta' < 1$. Se zřetelem k tomu však, že $P(x, y)$, $Q(x, y)$ jsou spojité funkce bodu $[x, y]$ v Ω_0, jest dále

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = P(x_0, y_0)\,\Delta x + Q(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon(|\Delta x| + |\Delta y|),$$

kde ε jest funkce závislá na x_0, y_0, Δx, Δy a taková, že $\lim \varepsilon = 0$ pro $\lim \Delta x = \lim \Delta y = 0$. Tím však tvrzení ve větě uvedené (že

*) Ovšem čáry druhu tu uvažovaného. Rozšíření pro čáry obecnějšího druhu podáno bude později v odstavci 208.

$P\,dx + Q\,dy$ jest totální diferenciál funkce $F(x, y)$ v Ω_0) dokázáno, neboť $[x_0, y_0]$ jest libovolný bod v Ω_0. (Viz DP 194.)

POZNÁMKA. Že spojité funkce $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ jsou derivacemi jedné a téže funkce, vyplynulo v předcházejících úvahách pouze z té okolnosti, že integrál

$$\int_{[x_0, y_0]}^{[X, Y]} (P\,dx + Q\,dx) \tag{a}$$

závisí toliko na mezných bodech $[X, Y]$, $[x_0, y_0]$ a nezávisí na integrační čáře mezné body spojující a v Ω_0 probíhající. Při tom jsou mezné body dva libovolné body uvnitř oboru Ω_0 a jako čáry integrační jsme brali v úvahu jenom takové, že rovnoběžky s X resp. Y protínají je v konečném počtu bodů. Následkem toho jest v předcházejících úvahách obsažen také důkaz věty:

Nutná a postačující podmínka, aby integrál (a) *byl nezávislý na integrační čáře mezné body* $[X, Y]$, $[x_0, y_0]$ *spojující a v* Ω_0 *probíhající, jest za předpokladu, že* P, Q, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ *jsou konečné funkce v* Ω_0, prvé pak dvě spojité funkce bodu $[x, y]$ v Ω_0 a druhé dvě integrace schopné podle x a podle y v Ω_0, *dána rovnicí* $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ *splněnou pro všecky body* $[x, y]$ *oboru* Ω_0.

K tomu jest ještě poznamenati, že, je-li (a) nezávislo na integrační čáře při jisté dvojici mezných bodů $[X, Y]$, $[x_0, y_0]$ v Ω_0, jest nezávislo též na integrační čáře při každé jiné dvojici mezných bodů v Ω_0 se nacházejících.

207. Výpočet integrálu z totálního diferenciálu. Ku praktickému výpočtu funkce $F(x, y)$ z daného totálního diferenciálu $P\,dx + Q\,dy$ jest vhodno vypočísti integrál z totálního diferenciálu podle zvlášť jednoduché integrační čáry. Bod (X, Y) můžeme si zvoliti libovolně; bod (x_0, y_0) tak, aby lomená čára složená z obou úseček spojujících po řadě bod (x_0, y_0) s (X, y_0), pak bod (X, y_0) s (X, Y) byla obsažena v Ω_0. Dostaneme integrujíce postupně podle jednotlivých přímek podle (IV_1)

$$\int_{[x_0, y_0]}^{[X, y_0]} (P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy) = \int_{x_0}^{X} P(x, y_0)\,dx,$$

$$\int_{[X, y_0]}^{[X, Y]} (P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy) = \int_{y_0}^{Y} Q(X, y)\,dy$$

a tedy

$$F(X, Y) - F(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{X} P(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{Y} Q(X, y)\, dy, \tag{12}$$

čímž výpočet funkce $F(X, Y)$ převeden na dvě jednoduché integrace.

PŘÍKLAD 1. Vypočítati jest $F(x, y)$ patřící k úplnému diferenciálu

$$\frac{-x+y}{(x+y+1)^2}\, dx - \frac{+3x+y+2}{(x+y+1)^2}\, dy.$$

Že tento výraz jest vskutku úplný diferenciál, čtenář snadno se derivováním přesvědčí. Funkce $P(x, y)$, $Q(x, y)$, jakož i jejich derivace jsou spojité ve všech bodech roviny vyjma body přímky $x+y+1=0$, v jejichž okolí zmíněné funkce stávají se nekonečnými. Za obor Ω_0 můžeme si tedy zvoliti libovolný obor neobsahující body přímky $x+y+1=0$; ku příkladu omezíme jej obloukem kruhu $x^2+y^2=R^2$ a tětivou kruhu položenou na přímce $x+y+1-\varepsilon=0$. Při tom si můžeme zvoliti R libovolně veliké a kladné číslo ε libovolně malé. Zvolíme si $\varepsilon < 1$, takže počátek nachází se v oboru Ω_0, a položíme $x_0=0$, $y_0=0$.

Pak jest podle (12)

$$F(X, Y) - F(0, 0) = \int_0^X \frac{-x}{(x+1)^2}\, dx - \int_0^Y \frac{3X+y+2}{(X+y+1)^2}\, dy.$$

Provedeme-li naznačené integrace, dostaneme

$$F(X, Y) - F(0, 0) = \left[-\log(X+1) - \frac{1}{X+1} + 1\right] +$$

$$+ \left[-\log(X+Y+1) + \log(X+1) + \frac{2X+1}{X+Y+1} - \frac{2X+1}{X+1}\right] =$$

$$= -\log(X+Y+1) + \frac{X-Y}{X+Y+1},$$

čímž hledaná funkce $F(x, y)$ nalezena a to pro obor libovolný v té polovině roviny XY rozpůlené přímkou $x+y+1$, která obsahuje bod $(0, 0)$. Pro druhou polovinu roviny dostali bychom počtem stejným

$$F(X, Y) = \text{konst.} - \log[-(X+Y+1)] + \frac{X-Y}{X+Y+1}.$$

PŘÍKLAD 2. K úplnému diferenciálu

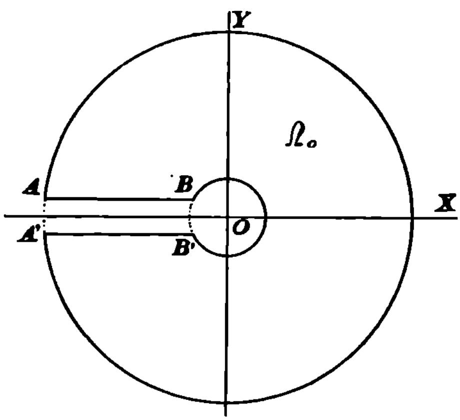
$$\frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2+y^2}$$

příslušný obor Ω_0 nesmí obsahovati bod $(0, 0)$, má-li býti přípustno použití vět svrchu odvozených. Kdybychom sestrojili mezikruží pomocí kruhů $x^2+y^2=R^2$, $x^2+y^2=\varepsilon^2$, dostali bychom sice obor, ve kterém v našem případě funkce P, Q i jejich derivace jsou spojité a konečné, avšak nebyl by to obor omezený jedinou uzavřenou čarou. Abychom takový obor Ω_0 dostali, odstraníme z mezikruží pás pomocí dvou rovnoběžných úseček jdoucích od kruhu vnitřního ke vnějšímu, jejichž rovnice jsou ku příkladu $y=+\varepsilon'$, $y=-\varepsilon'$, $0<\varepsilon'\leqq\varepsilon$ a jež jsou zúplna obsaženy v půlrovině o záporných x

(viz obr. 12). V oboru Ω_0 tak vzniklém lze vypočítati funkci spojitou, jejíž úplný diferenciál jest všady daný výraz.

Lze ji pomocí funkce arctg v oboru Ω_0 definovati rovnicemi

$$
\begin{array}{ll}
F(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & \text{pro } x > 0 \\
F(x, y) = \dfrac{\pi}{2} & \text{pro } x = 0,\ y > 0 \\
F(x, y) = -\dfrac{\pi}{2} & \text{pro } x = 0,\ y < 0 \\
F(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi & \text{pro } x < 0,\ y > 0 \\
F(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - \pi & \text{pro } x < 0,\ y < 0,
\end{array}
$$



Obr. 12.

aneb prostěji pomocí hlavní hodnoty amplitudy čísla komplexního $x + iy$ rovnicí

$$F(x, y) = \overline{\text{ampl}}\,(x + iy).$$

Přímky AB, $A'B'$ můžeme zvoliti sobě libovolně blízko; pro zjednodušení představujeme si je obyčejně jakožto splývající, zde splývající s osou X; příslušnou část osy X nazýváme pak *řezem*. Není snad třeba ani podotýkati, že řez nemusí býti přímočarý. Řez podrží povahu čáry dvojité; chceme-li proběhnouti celé ohraničení oboru Ω_0 (o kterém se vyžaduje, aby se skládalo z jedné uzavřené čáry), musíme proběhnouti řez dvakráte; funkce $F(x, y)$ na obou „březích" řezu (AB, $A'B'$) nabývá hodnoty, jejichž rozdíl v stejnolehlých bodech jest stálý a rovný 2π.

Oboru Ω_0 se říká obor *jednoduše souvislý*. Jest charakterisován též tím, že čára spojující dva body toho oboru a probíhající uvnitř oboru dá se spojitě přeměnit v každou jinou čáru toho oboru ty dva body spojující. Jiná charakteristická vlastnost oboru jednoduše souvislého dvojrozměrného jest ta, že každá čára spojující dva body ohraničení oboru Ω_0 a v Ω_0 probíhající rozděluje Ω_0 ve dvě (po případě i více) částí. Mezikruží podle této poslední definice není oborem jednoduše souvislým; neboť část poloměru spojující jeden bod vnějšího s jedním bodem vnitřního kruhu nerozděluje mezikruží ve dvě části.

208. Integrály z úplného diferenciálu podél obecnějších křivek integračních. Je-li $P\,dx + Q\,dy$ úplný diferenciál funkce $F(x, y)$ takový, že P, Q jsou funkce spojité bodu $[x, y]$ a že existují derivace $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$, jež jsou sobě rovné, konečné a integrace schopné i podle x, i podle y (všecko to platno v oboru Ω_0), pak podle předcházejícího víme, že integrál křivkový

$$\int_{[x_0, y_0]}^{[X, Y]} (P\,dx + Q\,dy) = F(X, Y) - F(x_0, y_0) \tag{I}$$

a to podle všech křivek spojujících body $[x_0, y_0]$, $[X, Y]$ a probíhajících uvnitř Ω_0, jež jsou protínány rovnoběžkami podle osy X i podle osy Y v konečném počtu bodů. Rozšíříme však výsledek (I) i pro integrační křivky (spojující oba body a probíhající uvnitř Ω_0) spojité o rovnicích $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ jsou funkce v příslušných intervalech spojité a s variací konečnou. Budiž dále $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, $X = \varphi(T)$, $Y = \psi(T)$, kde $T > t_0$, a označme body $[x_0, y_0]$, $[X, Y]$ krátce A_0, A a křivku danou tyto body spojující K.

Rozdělme interval (t_0, T) body $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ na intervaly menší tak, že $t_i - t_{i-1}$ jest kladné a menší než η pro $i = 1, 2, \ldots n$; $(t_n = T)$. Pak, je-li ε číslo kladné libovolně zvolené,

$$\left|\int_{K(A_0 A)} (P\,dx + Q\,dy) - \sum_1^n (P(x_{i-1}, y_{i-1})\,\Delta x_i + Q(x_{i-1}, y_{i-1})\,\Delta y_i)\right| < \varepsilon, \tag{—}$$

kde $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$, zvolíme-li si jenom η dosti malé (a n dosti veliké); viz odstavec 198, 200.

Budiž dále Π polygonální čára skládající se z n úseček spojujících body $[x_{i-1}, y_{i-1}]$, $[x_i, y_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Není-li η již dosti malé, aby všecky tyto úsečky se nacházely uvnitř Ω_0, umenšíme ještě dále η, aby tato okolnost nastala. Pak patří polygonální čára Π mezi křivky, pro něž jest splněn vztah (I) a tedy

$$\int_{\Pi} (P\,dx + Q\,dy) = F(X, Y) - F(x_0, y_0). \tag{—}$$

Dále budeme požadovati, aby $|\Delta x_i| < \eta'$, $|\Delta y_i| < \eta'$; nejsou-li již tyto vztahy splněny, stačí místo užívaného právě η zavésti nové η dosti malé (a n dosti veliké), aby tomu tak bylo. Číslo kladné η' nechť pak jest takové, aby bylo

$$|P(x, y) - P(x', y')| < \frac{\varepsilon}{V_1}, \quad |Q(x, y) - Q(x', y')| < \frac{\varepsilon}{V_2}$$

pro všecka $[x, y]$, $[x', y']$ oboru Ω_0, pro něž $|x - x'| < \eta'$, $|y - y'| < \eta'$, při tom V_1, V_2 jsou variace funkcí $\varphi(t)$, $\psi(t)$ v intervalu (t_0, T); což jest možno v důsledku předpokládané spojitosti funkcí P, Q v oboru Ω_0. Potom však jest pro integrál podle úsečky $[x_{i-1}, y_{i-1}]$, $[x_i, y_i]$ podle věty o střední hodnotě

$$\left|\int_{[x_{i-1}, y_{i-1}]}^{[x_i, y_i]} (P\,dx + Q\,dy) - (P(x_{i-1}, y_{i-1})\,\Delta x_i + Q(x_{i-1}, y_{i-1})\,\Delta y_i)\right| < \frac{\varepsilon|\Delta x_i|}{V_1} + \frac{\varepsilon|\Delta y_i|}{V_2}$$

a tedy

$$\left|\int_{\Pi} (P\,dx + Q\,dy) - \sum_1^n (P(x_{i-1}, y_{i-1})\,\Delta x_i + Q(x_{i-1}, y_{i-1})\,\Delta y_i)\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{V_1} \sum_1^n |\Delta x_i| + \frac{\varepsilon}{V_2} \sum_1^n |\Delta y_i| \leqq 2\varepsilon.$$

Z tohoto vztahu a z (+), pak z (—) následuje ihned

$$\left|\int_{K(A_0 A)} (P\,dx + Q\,dy) - (F(X, Y) - F(x_0, y_0))\right| < 3\varepsilon.$$

Poněvadž pak levá strana jest na ε nezávislá a ε si můžeme zvoliti libovolně malé, jest

$$\int_{K(A_0 A)} (P\,dx + Q\,dy) = F(X, Y) - F(x_0, y_0)$$

a platnost rovnice (I) rozšířena i pro *křivky spojité o rovnicích $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ jsou funkce s variací konečnou v (t_0, T).*

209. Křivkové integrály při třech a více proměnných. Pojem integrálu křivkového dá se beze změny přenésti na m proměnných a lze ku příkladu způsobem týmž jako při dvou proměnných definovati integrál (budiž $m = 3$)

$$\int_{K(AB)} [P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz], \tag{1}$$

kde $K(AB)$ jest oblouk křivky spojité o rovnicích $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, při čemž $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ jsou funkce spojité a s variací konečnou v příslušném intervalu. Integrál daný bude míti v případě tomto zejména tenkráte význam, *jsou-li P, Q, R funkce spojité bodu $[x, y, z]$ v oboru přicházejícím v úvahu, což v následujícím stále pro jednoduchost budeme předpokládati.*

Na základě tohoto předpokladu můžeme (abychom získali pomůcku k odvození vět o totálních diferenciálech i při m proměnných) definici pro integrál (1) poněkud jinak upraviti. Body A, B nechť jsou dány stále v souřadnicích prostoru trojrozměrného souřadnicemi $[x_0, y_0, z_0]$, $[X, Y, Z]$ a nechť jest dále

$$x_0 = \varphi(t_0), \quad y_0 = \psi(t_0), \quad z_0 = \chi(t_0); \quad X = \varphi(T), \quad Y = \ldots$$

Interval (t_0, T) rozdělme si na n intervalů menších body t_1, $t_2, \ldots, t_{n-1}$ a nechť jest

$$x_i = \varphi(t_i), \quad y_i = \psi(t_i), \quad z_i = \chi(t_i); \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

při čemž $[X, Y, Z] = [x_n, y_n, z_n]$. Značme dále bod $[x_k, y_k, z_k]$ krátce A_k a budiž oblouk AB křivky K uvnitř jistého spojitého oboru trojrozměrného Ω. Body $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, B$ nechť jsou k sobě již tak blízko, aby tětivy $\overline{AA_1}, \overline{A_1A_2}, \ldots, \overline{A_{n-1}B}$ byly celé uvnitř oboru Ω. Potom bod (ξ_k, η_k, ζ_k), kde

$$\begin{aligned} \xi_k &= x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})u_k, \\ \eta_k &= y_{k-1} + (y_k - y_{k-1})u_k, \qquad 0 \leqq u_k \leqq 1, \\ \zeta_k &= z_{k-1} + (z_k - z_{k-1})u_k, \end{aligned} \tag{2}$$

jest právě na tětivě $\overline{A_{k-1}A_k}$ mezi body A_{k-1}, A_k. Pak *položíme definujíce, že integrál* (1) *se rovná*

$$\lim \sum_k [P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \Delta z_k], \tag{3}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

pro ten případ, že n roste nade všecky meze a $\lim \Delta x_k = 0$, $\lim \Delta y_k = 0$, $\lim \Delta z_k = 0$; *t. j.* $\lim \Delta t_k = 0$.

Definice tu podaná byla by úplně obdobná k definici (IV) odstavce 198 pro dvě proměnné, kdyby (ξ_k, η_k, ζ_k) byl bod na *oblouku* $A_{k-1}A_k$ křivky K a odpovídal hodnotě τ_k z intervalu (t_{k-1}, t_k) tak že ξ_k by bylo rovno $\varphi(\tau_k)$, $\eta_k \ldots$ Jest však jasno, že definice tu podaná a definice obdobná k (IV) vedou k týmž číslům, jakož by se zevrubně na základě předpokladu, že P, Q, R jsou spojité v Ω, dalo bez potíží prokázati (srovnej ku příkladu obdobné obraty užité v odstavci předcházejícím), takže existence limity (3) a integrálu (1) jest zajištěna (na základě učiněných předpokladů), ať bod (ξ_k, η_k, ζ_k) jest kterýkoliv bod tětivy $\overline{A_{k-1}A_k}$ (a tedy u_k jakékoliv číslo intervalu $(0, 1)$).

POZNÁMKA. Jsou-li funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ takové, že mají derivace prvního řádu v intervalu (t_0, T) — nehledě k bodům z množství míry nulové, v nichž derivace ty nemusí existovati — pak lze integrál (1) obdobně jako při dvou proměnných vyjádřiti ve tvaru určitého integrálu

$$\int_{t_0}^{T} (P(\varphi, \psi, \chi)\,\varphi'(t) + Q(\varphi, \psi, \chi)\,\psi'(t) + R(\varphi, \psi, \chi)\,\chi'(t))\,dt, \tag{1'}$$

na základě kterého tvaru lze křivkový integrál často snadno počítati.

210. Vzhledem ke křivkovým integrálům plyne nejprve věta: *Je-li v oboru Ω $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ totálním diferenciálem funkce $F(x, y, z)$, takže jest*

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial F}{\partial z}, \tag{4}$$

tu integrál (1) *počítaný podle oblouku AB křivky K probíhající v Ω a definovaný výrazem* (3) *závisí toliko na souřadnicích koncových bodů té křivky a jest, označíme-li souřadnice bodu A resp. B (x_0, y_0, z_0) resp. (X, Y, Z),*

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(X, Y, Z)} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = F(X, Y, Z) - F(x_0, y_0, z_0),$$

a to ať K jest jakákoliv křivka druhu svrchu (v předcházejícím odstavci) *vytčeného body A, B spojující a v Ω probíhající.* (Věta prvá.)

Abychom to dokázali, zvolíme si čísla u_k v (2) tak, že

$$P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k =$$
$$= F(x_k, y_k, z_k) - F(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1});$$

(DP 208, pozn. 1); i jest tedy

$$\sum_k (P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \ldots)\Delta y_k + R(\xi_k, \ldots)\Delta z_k) = (F(x_1, y_1, z_1) - F(x_0, y_0, z_0)) +$$
$$+ (F(x_2, y_2, z_2) - F(x_1, y_1, z_1)) + \ldots + (F(X, Y, Z) - F(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})) =$$
$$= F(X, Y, Z) - F(x_0, y_0, z_0),$$

kterýžto výraz jest na n a Δx_k, Δy_k, Δz_k nezávislý a kterémuž se rovná tudíž i limita (3), a důkaz jest proveden.

Dále následuje věta: *Jestliže pro funkce P, Q, R bodu $[x, y, z]$ v oboru Ω spojité jsou v tom oboru splněny podmínky*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \tag{5}$$

při čemž se předpokládá, že vypsané derivace existují a dále, že jsou v oboru Ω konečné a prvé dvě podle x a y, druhé dvě podle z a x a třetí dvě podle y a z v Ω integrace schopné (C.-R.), *lze P, Q, R v jistém oboru ω obsaženém uvnitř Ω a obsahujícím libovolný bod oboru Ω ve svém nitru pokládati za derivace jedné a téže funkce $F(x, y, z)$ a $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ za její totální diferenciál.* (Věta druhá.)

Budiž (ξ_0, η_0, ζ_0) ten libovolný bod oboru Ω. Sestrojme si lomenou čáru skládající se ze tří úseček po řadě rovnoběžných s osami X, Y, Z. Ta lomená čára nechť počíná v (ξ_0, η_0, ζ_0), nechť končí v (ξ, η, ζ) a nechť je celá obsažena v oboru Ω. Body (ξ, η, ζ), ke kterým po všech možných takovýchto lomených čarách (probíhajících uvnitř Ω) můžeme dospěti, tvoří jistý obor ω obsažený v Ω a v tomto oboru jest výrazem

$$\int_{\xi_0}^{\xi} P(x, \eta_0, \zeta_0)\,dx + \int_{\eta_0}^{\eta} Q(\xi, y, \zeta_0)\,dy + \int_{\zeta_0}^{\zeta} R(\xi, \eta, z)\,dz \tag{6}$$

definována funkce, jež má právě vlastnost přisouzenou ve svrchu uvedené větě funkci $F(\xi, \eta, \zeta)$. Utvořme ku příkladu derivaci výrazu (6) podle ξ. Dostaneme podle pravidel o derivování integrálu podle horní meze resp. podle parametru

$$P(\xi, \eta_0, \zeta_0) + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\partial Q(\xi, y, \zeta_0)}{\partial \xi}\,dy + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial R(\xi, \eta, z)}{\partial \xi}\,dz,$$

což podle (5) jest rovno výrazu

$$P(\xi, \eta_0, \zeta_0) + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\partial P(\xi, y, \zeta_0)}{\partial y}\,dy + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\partial P(\xi, \eta, z)}{\partial z}\,dz =$$

$$= P(\xi, \eta_0, \zeta_0) + [P(\xi, \eta, \zeta_0) - P(\xi, \eta_0, \zeta_0)] + [P(\xi, \eta, \zeta) - P(\xi, \eta, \zeta_0)] = P(\xi, \eta, \zeta).$$

Obdobně se vypočte, že derivace výrazu (6) podle η, resp. podle ζ jest $Q(\xi, \eta, \zeta)$, resp. $R(\xi, \eta, \zeta)$, a věta dokázána.

Výraz $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ jest jistě úplným diferenciálem funkce $F(x, y, z)$ v jistém oboru, jsou-li v tom oboru splněny rovnice (4) a jsou-li P, Q, R spojité funkce bodu $[x, y, z]$ v tom oboru (což právě předpokládáme); viz DP 193.

Z obou vět tedy následuje: *Nutná a postačitelná podmínka, aby výraz*

$$P\,dx + Q\,dy + Q\,dz$$

byl v jistém okolí ω_A bodu A úplným diferenciálem, jest za předpokladu, že P, Q, R jsou v ω_A spojité funkce bodu $[x, y, z]$ a že *existují derivace* $\partial P/\partial y$, $\partial P/\partial z$, $\partial Q/\partial z$, $\partial Q/\partial x$, $\partial R/\partial x$, $\partial R/\partial y$ *v* ω_A *konečné a podle proměnných* x, y *resp.* x, z; y, z; y, x; z, x; z, y *integrace schopné, splnění rovnic*

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

v ω_A. (Věta třetí.)

Věta prvá jest platna pro jakýkoliv obor; věty druhá a třetí bez potíže dají se rozšířiti na obory Ω_0 jednoduše souvislé, jež se definují v případě tří (i více) proměnných jakožto obory, v nichž lze křivku spojující dva libovolné body toho oboru spojitými změnami převésti na každou jinou křivku ty dva body spojující a v oboru Ω_0 probíhající.

Tedy ku příkladu obor omezený dvěma soustřednými koulemi jest jednoduše souvislý; naproti tomu obor (prstenového tvaru), který zůstane z koule

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

po odnětí té její části, jež jest obsažena ve válci $x^2+y^2=r^2$ ($r^2<R^2$), není obor jednoduše souvislý.

Podrobné rozšíření důkazů věty druhé a třetí pro obory Ω_0 opomíjím přenechávaje je čtenáři.

PŘÍKLAD. Výraz

$$(x^2+yz)\,dx+(y^2+xz)\,dy+(z^2+xy)\,dz$$

jest úplným diferenciálem jisté funkce; neboť jsou splněny příslušné nutné a postačitelné podmínky (věty třetí) a to v oboru libovolném. Příslušnou funkci vypočteme podle rovnice (6) kladouce $\xi_0=0$, $\eta_0=0$, $\zeta_0=0$; $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=z$ Obdržíme

$$\int_0^x x^2\,dx+\int_0^y y^2\,dy+\int_0^z (z^2+xy)\,dz=\tfrac{1}{3}(x^3+y^3+z^3+3xyz).$$

POZNAMKA. Větu prvou lze obrátiti a tvrditi: *Jestliže integrál*

$$\int_{(x_0,\,y_0,\,z_0)}^{(X,\,Y,\,Z)} (P\,dx+Q\,dy+R\,dz), \tag{7}$$

kde P, Q, R *jsou spojité funkce proměnných* (x, y, z) *v oboru* Ω *a* (x_0, y_0, z_0), (X, Y, Z) *dva libovolné body toho oboru, jest nezávislý na integrační čáře* (body (x_0, y_0, z_0), (X, Y, Z) spojující a v Ω probíhající), *tu jsou* P, Q, R *derivace jedné a téže funkce* $F(x, y, z)$ *podle* x, y, z; *t. j. jsou platny vztahy* (4).

Nejprve jest patrno, že integrál (7) na základě předpokladu úplně definuje v oboru Ω jistou funkci proměnných X, Y, Z; značme ji $\Phi(X, Y, Z)$. Budiž (x'_0, Y, Z) bod v Ω takový, že spojnice přímočará toho bodu s bodem (X, Y, Z) jest také celá uvnitř Ω; pak jest též

$$\Phi(X, Y, Z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(X, Y, Z)} (P\,dx + \ldots) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x'_0, Y, Z)} (P\,dx + \ldots) + \int_{(x'_0, Y, Z)}^{(X, Y, Z)} (P\,dx + \ldots). \tag{8}$$

Integrační čáru v prvém integrálu pravé strany můžeme voliti libovolně (ovšem uvnitř Ω), v druhém budiž integrační čarou svrchu zmíněná přímočará spojnice (rovnoběžná to přímka s osou X). Druhý integrál převedeme na tvar (1′), kladouce $x = x'_0 + t$, $y = Y$, $z = Z$; dostaneme

$$\int_{(x'_0, Y, Z)}^{(X, Y, Z)} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \int_0^{X - x'_0} P(x'_0 + t, Y, Z)\,dt.$$

Z posledních dvou rovnic následuje derivováním (neboť prvý integrál pravé strany rovnice (8) jest nezávislý na X)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = P(X, Y, Z).$$

Podobně vyplývá

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = Q(X, Y, Z), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = R(X, Y, Z),$$

čímž věta dokázána. (Za funkci $F(x, y, z)$ lze voliti $\Phi(x, y, z) +$ + konst.) Lze ji jakož i větu prvou zároveň též takto vysloviti: *Nutná a postačující podmínka, aby integrál* (7) *byl nezávislý na integrační čáře uvnitř oboru Ω probíhající, jest dána, jsou-li P, Q, R spojité funkce proměnných x, y, z v Ω, rovnicemi* (4), *jež splněny býti musí v celém oboru Ω.*