IV. Integrály z některých funkcí transcendentních

In: Karel Petr (author); Vojtěch Jarník (author): Počet integrální. s dodatkem Úvod do teorie množství. (Czech). : Jednota československých mathematiků a fysiků, 1931. pp. 127--136.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402666

IV. INTEGRÁLY Z NĚKTERÝCH FUNKCÍ TRANSCENDENTNÍCH.

46. V následujících odstavcích zabývati se budeme některými obecnějšími případy integrálů z funkcí transcendentních a to hlavně těmi, jež se dají převésti na integrály racionálních funkcí a tudíž v ukončeném tvaru pomocí elementárních transcendent vyjádřiti.

Na prvém místě vezmeme v úvahu integrály tvaru

$$\int R(\cos x,\ \sin x)\, dx,$$

kde $R(u, v)$ jest racionální funkcí proměnných u, v. Při těchto integrálech vždy vede k cíli substituce

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \tag{a}$$

ze které

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt}\,\frac{1}{2\cos^2 \frac{1}{2} x} = 1, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Tedy

$$\int R(\cos x,\ \sin x)\, dx = 2\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2},$$

čímž převeden daný integrál na integrál racionální funkce z t, následkem čehož jest patrno, že daný integrál vždy lze vyjádřiti pomocí členů obsahujících:

1. Racionální funkci výrazu $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x$.

2. Výrazy tvaru $A \log (\operatorname{tg} \frac{1}{2} x - \alpha)$, kde A, α mohou nabývati hodnot komplexních.

POZNÁMKA. Místo substituce (*a*) lze někdy účelněji (viz př. 2. v odst. 50.) užíti substituce $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(R - x) = t$, $R = \frac{1}{2}\pi$ lišící se však od (*a*) jenom nepodstatně.

47. Má-li $R(\cos x,\ \sin x)$ zvláštní tvar, lze často udati substituci jednodušší. Tak zejména:

α) Jestliže $R(u, v) = R(-u, -v)$, postačí k transformaci integrálu $\int R(\cos x, \sin x)\, dx$ substituce

$$\operatorname{tg} x = t, \tag{b}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin x = \frac{\varepsilon t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \varepsilon = \pm 1$$

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx = \int R\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

Změníme-li v posledním integrálu u $\sqrt{1+t^2}$ znaménko, funkce za integračním znaménkem následkem předpokládané vlastnosti funkce $R(u, v)$ se nezmění, odkudž je patrno, že výraz za znaménkem integračním se redukuje na racionální funkci proměnné t.

β) V integrálech, jež lze uvésti na tvar

$$\int r(\cos x) \sin x\, dx, \qquad \int r(\sin x) \cos x\, dx,$$

kde $r(u)$ jest racionální funkce u, lze užíti substituce

$$\cos x = t \quad \text{resp.} \quad \sin x = t, \tag{c}$$

kterými se redukují ihned na integrály

$$-\int r(t)\, dt \quad \text{resp.} \quad \int r(t)\, dt.$$

POZNÁMKA. Substituce tu použité lze použíti, i když $R(u, v)$ jest libovolná racionální funkce proměnných u, v. Pak ovšem integrál substitucí vznikající jest integrál Abelův příslušný buď k $\sqrt{1+t^2}$ (při subtituci (b)) aneb k $\sqrt{1-t^2}$ (při substituci (c)).

Rovněž substituce (a) odst. předcházejícího lze použíti i tenkráte, když $R(u, v)$ není funkcí racionální proměnných u, v, nýbrž obecněji algebraickou funkcí těch proměnných: pak substitucí použitou vzniká integrál Abelův.

48. Integrály tvaru

$$\int R(e^x)\, dx, \qquad \int R(e^{ax})\, dx, \tag{d}$$

kde $R(\xi)$ jest racionální funkce ξ, převádějí se substitucí $e^x = \xi$ resp. $e^{ax} = \xi$ ihned na integrály

$$\int R(\xi) \frac{d\xi}{\xi}, \qquad \frac{1}{a}\int R(\xi) \frac{d\xi}{\xi}.$$

49. Používáme-li funkcí exponenciálních definovaných i pro komplexní hodnoty argumentu, jest

$$2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}, \quad 2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$$

a můžeme i integrály odst. 46 zahrnouti mezi integrály tvaru (d),

t. j. mezi integrály z funkce $R(e^{ax})$, kde $a = i$. Jestliže však (obecněji) a jest číslo komplexní — pišme, abychom to zdůraznili, bi místo a (při čemž však nevylučujeme případ, že bi jest reálné) — můžeme při počítání integrálů (d) postupovati takto:

Předpokládejme nejprve k vůli zjednodušení výkladu, že racionální funkce $R(z)$ má jmenovatele, jehož nulové body — *pokud jsou různy od nuly* — jsou vesměs jednonásobné. Pak lze $R(z)$ vyjádřiti jakožto součet členů

$$\frac{A_k}{z-\zeta_k}, \qquad B_0, \qquad B_j z^j, \qquad B_{-j'} z^{-j'}$$

anebo též členů

$$A'_k i\,\frac{z+\zeta_k}{z-\zeta_k}, \qquad B'_0, \qquad B_j z^j, \qquad B_{-j'} z^{-j'},$$

kde $A'_k = A_k(i\zeta_k)^{-1}$. Čísla ζ_k jsou právě nulové body jmenovatele různé od nuly. Klademe-li tedy $\zeta_k = e^{ib\alpha_k}$ — tudíž $ib\alpha_k = \overline{\log}\,\zeta_k$ — a $z = e^{ibx}$, jest

$$(A) \qquad R(e^{ibx}) = \sum_k A'_k \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} b(x-\alpha_k) + B'_0 + \sum_l (C_l \cos blx + D_l \sin blx).$$

Členy tohoto výrazu lze snadno integrovati podle reálné proměnné x; jest na př. (odst. 18b, př. 1)

$$\int \operatorname{cotg} \frac{1}{2} b(x-\alpha_k)\, dx = \frac{2}{b} \log \sin \frac{1}{2} b(x-\alpha_k) + \text{konst.},$$

neboť derivace pravé strany počítá se podle týchž pravidel při komplexních b, α_k, jako při reálných b, α_k.

Má-li jmenovatel racionální funkce $R(z)$ nulové body mnohonásobné, přistoupí v (A) ještě členy tvaru

$$A_k^{(\lambda)} D_x^{\lambda} [\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} b(x-\alpha_k)],$$

kde D_x jest symbol vyznačující derivaci podle proměnné x. Integrace takovýchto členů jest bezprostřední.

Vztah (A) nám představuje rozklad funkce $R(e^{ibx})$ v jednoduché prvky a jest obdobný rozkladu funkce racionální ve zlomky částečné, jehožto ostatně jest důsledkem.

50. **PŘÍKLAD 1.** Propočítejme na základě uvedeného integrál

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b \sin x + c}.$$

Zavedeme-li proměnnou t, dostáváme

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c} = 2\int \frac{dt}{(c-a)t^2 + 2bt + c + a}.$$

Avšak (odst. 18)

α) $$\int \frac{dt}{(c-a)t^2+2bt+c+a}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \log \left| \frac{(c-a)t+b-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{(c-a)t+b+\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \right| + k,$$
když $a^2+b^2-c^2>0$;

β) $$\int \frac{dt}{(c-a)t^2+2bt+c+a} = \frac{1}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(c-a)t+b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}},$$
když $c^2-a^2-b^2>0$;

γ) $$\int \frac{dt}{(c-a)t^2+2bt+c+a} = -\frac{1}{(c-a)t+b} + k,$$
když $c^2-a^2-b^2=0$.

Tak jest
$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \log \left| \frac{(c-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+b-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{(c-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+b+\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \right| + k$$
pro $a^2+b^2-c^2>0$,
$$= \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(c-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} + k \qquad \text{pro} \quad a^2+b^2-c^2<0,$$
$$= -\frac{2}{(c-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+b} + k \qquad \text{pro} \quad a^2+b^2-c^2=0.$$

Jako zvláštní případ vyplývá z předcházejícího pro $r \neq 1$
$$\int \frac{(1-r^2)\,dx}{1+2r\cos x+r^2} = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1-r}{1+r}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\right) + \text{konst.} \tag{a}$$

Odčítáme-li tuto rovnici od rovnice očividně platné
$$\int \frac{1+2r\cos x+r^2}{1+2r\cos x+r^2}\,dx = x + \text{konst.},$$
obdržíme vztah
$$\int \frac{2\cos x+2r}{1+2r\cos x+r^2}\,dx = \frac{x}{r} - \frac{2}{r}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-r}{1+r}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\right) + \text{konst.}, \tag{b}$$
jehož později použijeme.

PŘÍKLAD 2. V integrálu
$$\int \frac{A+B\sin x}{a+b\sin x+c\sin^2 x}\,dx, \qquad b^2-4ac<0$$
použijeme substituce (viz pozn. k odst. 46)
$$\operatorname{tg}\frac{R-x}{2}=t, \qquad dx=-\frac{2\,dt}{1+t^2}, \qquad \sin x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$
čímž se daný integrál změní na integrál
$$-2\int \frac{(A+B)+(A-B)t^2}{(a+b+c)+2(a-c)t^2+(a-b+c)t^4}\,dt,$$
který vypočten v odst. 18, př. 2.

PŘÍKLAD 3. Používajíce substituce (*b*) odst. 47 máme ihned

$$J=\int\frac{dx}{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x}=\int\frac{dt}{at^2+bt+c},$$

čímž dostaneme (používajíce odst. 18, příkl. 1) — klaďme $D=b^2-4ac$ —

$$J=\frac{2}{\sqrt{-D}}\operatorname{arctg}\frac{2a\operatorname{tg}x+b}{\sqrt{-D}}+k \qquad \text{pro } D<0,$$

$$=\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{2a\operatorname{tg}x+b-\sqrt{D}}{2a\operatorname{tg}x+b+\sqrt{D}}+k \qquad D>0,$$

$$=-\frac{1}{a\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}b}+k \qquad D=0.$$

PŘÍKLAD 4. Integrál $\displaystyle\int\frac{dx}{a+be^x}$

se změní substitucí $e^x=t$ na integrál

$$\int\frac{dt}{t(a+bt)}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}-\frac{b}{a}\int\frac{dt}{a+bt}=\frac{1}{a}\overline{\log}\frac{t}{a+bt}+k$$

a tedy

$$\int\frac{dx}{a+be^x}=\frac{1}{a}\overline{\log}\frac{e^x}{a+be^x}+k.$$

PŘÍKLAD 5. Integrály tvaru $\int\sin^p x\cos^q x\,dx$.*) Integrál

$$\int\sin^{2m+1}x\cos^n x\,dx \qquad m \text{ celé},$$

se přemění ihned substitucí $\cos x=v$ na integrál

$$-\int(1-v^2)^m v^n\,dv,$$

jenž se lehce vypočte, je-li m kladné. Na př.

$$\int\sin^5 x\,dx=-\cos x+\tfrac{2}{3}\cos^3 x-\tfrac{1}{5}\cos^5 x+k.$$

Podobně lze stanoviti

$$\int\cos^{2m+1}x\sin^n x\,dx, \qquad m \text{ celé kladné}.$$

Konečně integrál

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx,$$

kde $m+n$ jest *záporné* a *sudé*, $m+n=-2p$, se přemění substitucí $\operatorname{tg}x=v$ ihned na integrál

$$\int v^m(1+v^2)^{p-1}\,dv.$$

Na př.

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx=\int v^3\,dv=\tfrac{1}{4}v^4+k=\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+k.$$

*) Integrály tyto souvisí úzce s integrály binomickými (odst. 20, 21). Obraty tu vykládané byly již v podstatě vyloženy v citovaných odstavcích. Viz pozn. 1 a 2 odst. 20 a odst. 21.

V ostatních případech lze pro výpočet integrálů

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

užíti formulí redukčních následujících, jež čtenář (používaje při přímém odvození integrace per partes a vztahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) snadno dokáže.

$$1) \int \sin^m x \cos^n x = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx.$$

$$2) \qquad = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx.$$

$$3) \qquad = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx.$$

$$4) \qquad = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx,$$

$$5) \qquad = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^n x \, dx.$$

$$6) \qquad = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin^m x \cos^{n+2} x \, dx.$$

Použitím těchto formulí lze převésti každý integrál tvaru

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

kde m a n jsou celá čísla, zejména integrál nespadající do speciálních tvarů svrchu řešených, na integrály

$$\int dx, \qquad \int \frac{dx}{\cos x}, \qquad \int \frac{dx}{\sin x}, \qquad \int \frac{dx}{\sin x \cos x},$$

jichž výpočet jest snadný.

Užiji těchto formulí redukčních ve dvou speciálních případech, jež nám budou později užitečny. Nejprve, abych vyjádřil integrál ze $\sin^{2n} x$. Pro tento integrál máme v důsledku vzorce 3:

$$\int \sin^{2n} x \, dx = -\frac{1}{2n} \sin^{2n-1} x \cos x + \frac{2n-1}{2n} \int \sin^{2n-2} x \, dx. \qquad (!)$$

Opětným použitím této relace dostaneme (n celé, kladné)

$$\int \sin^{2n} x \, dx = c_n x - \left(\frac{1}{2n} \sin^{2n-2} x + \frac{(2n-1)}{2n(2n-2)} \sin^{2n-4} x + \right.$$

$$\left. + \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)(2n-4)} \sin^{2n-6} x + \cdots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 2} \right) \sin x \cos x + \text{konst.}$$

Při tom jest

$$c_n = \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.\ 2n} = \binom{-\frac{1}{2}}{n} \cdot (-1)^n.$$

Zavedeme-li ještě k vůli stručnosti polynom

$$g_n(\xi) = 1 + \frac{2}{3}\xi + \frac{2.4}{3.5}\xi^2 + \cdots + \frac{2.4\ldots.(2n-2)}{3.5\ldots.(2n-1)}\xi^{n-1},$$

lze dáti výsledku dosaženému tvar

$$\int \sin^{2n} x\, dx = c_n x - c_n \cos x \sin x \,.\, g_n(\sin^2 x).$$

Obdobně, používáme-li vzorce 1., máme

$$\int \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n+1} x}\, dx = \frac{1}{2n} \frac{\sin^{2n-1} x}{\cos^{2n} x} - \frac{2n-1}{2n} \int \frac{\sin^{2n-2} x}{\cos^{2n-1} x}\, dx.$$

V rovnici této jsou, nehledě k protivným znaménkům na pravé straně, titíž numeričtí součinitelé jako v (!). Opětným jejím použitím dostaneme (používáme-li opětně výrazu $g_n(\xi)$ a znaku c_n)

$$\int \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n+1} x}\, dx = (-1)^n c_n \int \frac{dx}{\cos x} + (-1)^{n+1} c_n \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} g_n(-\operatorname{tg}^2 x). \qquad (!!)$$

Konečně z rovnice (!), píšeme-li v ní $2n-1$ místo $2n$, dostaneme za předpokladu, že n je celé, kladné

$$\int \sin^{2n-1} x\, dx = -\left(\frac{1}{2n-1} \sin^{2n-2} x + \frac{(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)} \sin^{2n-4} x + \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \sin^{2n-6} x + \cdots + \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots.2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1} \right) \cos x + \text{konst.}$$

51. Další dosti obecný případ integrálů z funkcí transcendentních, jež se dají snadno vypočítati pomocí elementárních transcendent, jest dán výrazem

$$\int P(x, e^{\alpha x}, e^{\beta x}, \ldots \sin ax, \cos ax, \sin bx, \ldots)\, dx.$$

Při tom P značí mnohočlen (racionální celistvou funkci) v závorce vyznačených argumentů.

Tu nejjednodušeji dospějeme k výsledku, nahradíme-li funkce goniometrické pomocí exponenciely (užívajíce formulí Eulerových, odst. 18c). Jest na př.

$$\sin ax = \frac{e^{aix} - e^{-aix}}{2i}, \qquad \cos ax = \frac{e^{aix} + e^{-aix}}{2}.$$

Provedeme-li tuto náhradu, změní se integrál daný na součet integrálů tvaru

$$\int x^n e^{Ax}\, dx,$$

kde v obecném případě jest číslo A komplexní a kde n jest celé $\geqq 0$. Integrál tento však pomocí integrace per partes připouští jednoduchou formuli redukční (stejnou, ať jest A reálné či komplexní) a lze jej snadno vypočítati.

PŘÍKLAD 1. Jest

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{2} \int [e^{(a+bi)x} + e^{(a-bi)x}]\, dx = \frac{1}{2} \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} + \frac{1}{2} \frac{e^{(a-bi)x}}{a-bi} + k =$$

$$= \frac{(a \cos bx + b \sin bx)\, e^{ax}}{a^2 + b^2} + k \quad \text{(viz příkl. 2, odst. 7).}$$

Obdobně jest

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{2i}\frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} - \frac{1}{2i}\frac{e^{(a-bi)x}}{a-bi} = \frac{(a \sin bx - b \cos bx)e^{ax}}{a^2+b^2} + k'.$$

PŘÍKLAD 2. Jest vypočítati

$$J = \int e^{ax} \sin^2 x \cos^3 x\, dx.$$

Tu jest

$$\sin^2 x \cos^3 x = -\frac{1}{2^5}(e^{ix} - e^{-ix})^2 (e^{ix} + e^{-ix})^3 =$$

$$= -\frac{1}{2^5}[e^{5ix} + e^{-5ix} + e^{3ix} + e^{-3ix} - 2(e^{ix} + e^{-ix})] =$$

$$= -\frac{1}{2^4}(\cos 5x + \cos 3x - 2 \cos x).$$

$$J = -\frac{1}{2^4}\int e^{ax} \cos 5x\, dx - \frac{1}{2^4}\int e^{ax} \cos 3x\, dx + \frac{1}{2^3}\int e^{ax} \cos x\, dx =$$

$$= -\frac{e^{ax}(5 \sin 5x + a \cos 5x)}{16(a^2+25)} - \frac{e^{ax}(3 \sin 3x + a \cos 3x)}{16(a^2+9)} + \frac{e^{ax}(\sin x + a \cos x)}{8(a^2+1)} + k.$$

52. Integrály tvaru

$$\int R(x) \log x\, dx, \qquad x > 0 \tag{a}$$

kde $R(x)$ jest racionální funkce proměnné x, dají se převésti rozkladem $R(x)$ na zlomky částečné na tyto integrály

$$\int x^m \log x\, dx, \qquad \int \frac{\log x}{(x-a)^n}\, dx, \qquad m \geqq 0,\ n \geqq 0.$$

Integrál prvý se vypočítá ihned integrací per partes (odst. 7), pro integrál druhý dostáváme integrací částečnou, jestliže $n > 1$,

$$\int \frac{\log x}{(x-a)^n}\, dx = -\frac{\log x}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{x(x-a)^{n-1}},$$

čímž integrál převeden na integrál z racionální funkce. Výsledek tento jest platný, ať jest a číslo reálné nebo komplexní.

Integrál

$$\int \frac{\log x}{x-a}\, dx \tag{b}$$

nelze vyjádřiti elementárními funkcemi; můžeme jej však vyjádřiti řadou mocninnou (potenční). Budiž nejprve a reálné kladné a předpokládejme, že x jest v intervalu $(0, a)$. Pak jest

$$\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} - \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} \cdots \tag{c}$$

K řadě této dovedeme sestrojiti funkci primitivní tím, že utvoříme řadu mocninnou, jejíž členové jsou primitivní funkce k členům řady (c). A stejně sestrojíme primitivní funkci k řadě (c) násobené $\log x$. I jest*)

$$\int \frac{\log x}{x-a}\,dx = -\frac{1}{a}\int \log x\,dx - \frac{1}{a^2}\int x \log x\,dx - \frac{1}{a^3}\int x^2 \log x\,dx - \cdots$$

$$= k - \left[\frac{x}{1a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \cdots\right]\log x + \left[\frac{x}{1^2 a} + \frac{x^2}{2^2 a^2} + \frac{x^3}{3^2 a^3} + \cdots\right]$$

$$= k' + \log x \,.\, \log(a-x) + \psi\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$\text{kde } \psi(x) = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots$$

Vyjádřili jsme tedy integrál (b) pomocí funkce $\psi(x)$ a funkcí logaritmických za předpokladu ovšem, že a jest číslo reálné kladné a x v intervalu $(0, a)$. Avšak, když a jest komplexní, pak $\psi\left(\frac{x}{a}\right)$ (za předpokladu, že x jest v $(0, |a|)$) se stane komplexní funkcí reálné proměnné x, při čemž reálná i imaginární část jsou dány řadou potenční proměnné x. Čtenář pak snadno dokáže, že i v tomto případě (a komplexní) derivace získané funkce (komplexní) jest dána funkcí $\log x/(x-a)$, čímž pro interval $(0, |a|)$ jest vyjádřen integrál (b).

S transcendentou $\psi(x)$, která se v některých spisech nazývá *dilogaritmus* a značí někdy znakem $\mathrm{dl}\, x$ a již lze vyjádřiti integrálem

$$-\int \frac{\log(1-x)}{x}\,dx,$$

volíme-li integrační konstantu tak, aby integrál byl roven nule pro $x = 0$ (jak čtenář na základě rozvoje logaritmického snadno dokáže), zabývali se *Euler, Legendre* a *Abel.***)

53. Zcela obdobně lze vyšetřovati i integrály

$$\int R(x)\, e^x\,dx, \qquad \int R(x) \cos x\,dx, \qquad \int R(x) \sin x\,dx.$$

I tyto integrály dávají podnět — úplně obdobně jako integrál (a) — k zavedení nových funkcí, jež jednak jsou vlastností jednoduchých a snadno přístupny k vyšetřování analy-

*) Integrací částečnou (odst. 7) máme ihned

$$\int x^n \log x\,dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} \log x - \frac{1}{(n+1)^2}\, x^{n+1} + k_1.$$

Konstanta k_1 byla volena při integraci jednotlivých členů řady rovna nule.

**) Viz Abel, Oeuvres, t. II, str. 189 a násl., kde čtenář najde odvození různých jejích vlastností.

tickému, jednak se vyskytují v aplikacích analyse na jiné větve matematiky. Jsou to funkce

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

v oboru čísel komplexních spolu ostatně úzce souvisící. První z těchto funkcí dá se substitucí $e^x = \xi$ převésti na funkci danou integrálem

$$\int \frac{d\xi}{\log \xi},$$

jež při vhodné volbě integrační konstanty sluje *logaritmus integrál*. Obdobně vedou druhé dva integrály k funkcím kosinus integrál, sinus integrál.

Pojem integrálu nám umožňuje zavádění nových funkcí v neomezeném množství. V předcházejícím byl vzat zřetel jenom k případům zcela jednoduchým. Matematika se zabývá ovšem jenom takovými z těch funkcí, jichž se vyžaduje k řešení úkolu jí předkládaných anebo jež podstatně souvisí s rozšířením a zdokonalením vědy. V následujícím opětovně se budeme zabývati funkcemi, k jichž zavedení dal pojem integrálu podnět.