# Počet integrální

## II. Integrály z racionálních funkcí

In: Karel Petr (author); Vojtěch Jarník (author): Počet integrální. s dodatkem Úvod do teorie množství. (Czech). : Jednota československých mathematiků a fysiků, 1931. pp. 16--57.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402664

**Terms of use:**

© Jednota československých mathematiků a fysiků

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

# II. INTEGRÁLY Z RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ.

## DEFINICE ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ PRO KOMPLEXNÍ HODNOTY ARGUMENTU.

**11. Rozklad racionální funkce ve zlomky částečné.** Buď dána racionální funkce proměnné $x$

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde

$$P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m,$$
$$Q(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_{n-1} x + B_n.$$

O polynomech $P(x)$ a $Q(x)$ učiníme předpoklad snadno splnitelný, že nemají společné míry. Jestliže $m > n$, můžeme děliti $P(x)$ mnohočlenem $Q(x)$ a dělení budeme prováděti tak dlouho, až stupeň zbytku nepřevyšuje $n$. Dostaneme tak vztah

$$P(x) = p(x)\, Q(x) + P_1(x), \tag{1}$$

kde podíl $p(x) = a_0 x^{m-n} + a_1 x^{m-n-1} + \cdots + a_{m-n-1} x$

a zbytek $P_1(x) = A'_0 x^n + A'_1 x^{n-1} + \cdots + A'_{n-1} x + A'_n;$

daný zlomek obdrží pak tvar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}. \tag{2}$$

Převeden je tedy v případě, že $m > n$, daný zlomek na součet polynomu a zlomku, kde stupeň čitatele nepřevyšuje stupeň jmenovatele. Zároveň jest patrno, že v novém zlomku čitatel a jmenovatel nemají společné míry. Zlomek ten můžeme pak dále rozkládati, známe-li kořeny rovnice $Q(x) = 0$. Mějž rovnice $Q(x) = 0$ kořen $b$ $\beta$-násobný. Pak lze psáti

$$Q(x) = (x-b)^\beta\, Q_1(x), \qquad \beta > 0$$

kde tedy

$$Q_1(b) \neq 0 \quad \text{a zároveň } P_1(b) \neq 0 \tag{3}$$

se zřetelem ku předpokladu, že $P_1(x)$ a $Q(x)$ nemají společné míry.

Dosaďme do zlomku $P_1(x)/Q(x)$

$$x = b + \frac{1}{y}, \quad y = \frac{1}{x-b}.$$

Tím dostaneme

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{(x-b)^\beta Q_1(x)} = \frac{P_1\left(b+\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y^\beta} \cdot Q_1\left(b+\frac{1}{y}\right)} = \frac{y^n P_1\left(b+\frac{1}{y}\right)}{y^{n-\beta} Q_1\left(b+\frac{1}{y}\right)}.$$

Ježto $Q_1(x)$ je stupně $n-\beta$, jest $y^{n-\beta} Q_1\left(b+\frac{1}{y}\right)$ mnohočlen obsahující toliko členy s mocninami proměnné $y$ o kladných mocnitelích a je vzhledem k (3) stupně $n-\beta$. Ze stejných příčin jest $y^n P_1\left(b+\frac{1}{y}\right)$ mnohočlen $n$-tého stupně. Zavedeme-li pro tyto mnohočleny označení

$$y^n P_1\left(b+\frac{1}{y}\right) = \overline{P_1}(y), \qquad y^{n-\beta} Q_1\left(b+\frac{1}{y}\right) = \overline{Q_1}(y),$$

jest

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{\overline{P_1}(y)}{\overline{Q_1}(y)}.$$

Užijeme-li však na tento zlomek výsledku (2) svrchu odvozeného, obdržíme provedše dělení $\overline{P_1}(y) : \overline{Q_1}(y)$, až dospějeme ke zbytku o stupni ne větším než $n-\beta$,

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{\overline{P_1}(y)}{\overline{Q_1}(y)} = p_1(y) + \frac{\overline{P_2}(y)}{\overline{Q_1}(y)}, \tag{4}$$

kde

$$p_1(y) = a'_0 y^\beta + a'_1 y^{\beta-1} + \cdots a'_{\beta-1} y$$

a kde stupeň polynomu $\overline{P_2}(y)$ nepřevyšuje $n-\beta$, stupeň to mnohočlenu $\overline{Q_1}(y)$. Vrátíme-li se v rovnici (4) opět ku proměnné $x$, máme konečně po jednoduché úpravě

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{a'_0}{(x-b)^\beta} + \frac{a'_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{a'_{\beta-1}}{x-b} + \frac{P_2(x)}{Q_1(x)}.$$

Dospěli jsme tak ke zlomku $P_2(x)/Q_1(x)$, ve kterém stupeň čitatele nepřevyšuje stupeň jmenovatele a kde stupeň jmenovatele jest $n-\beta$. Jmenovatel $Q_1(x)$ neobsahuje již kořenového činitele $(x-b)^\beta$, který byl v původním jmenovateli $Q(x)$. Má-li dále $Q(x)$ kořen $c$ $\gamma$-násobný, obsahuje $Q_1(x)$ kořenový činitel $(x-c)^\gamma$ a lze opět psáti $Q_1(x) = (x-c)^\gamma Q_2(x)$ a užíti na zlomek $P_2(x)/Q_1(x)$ téže metody jako svrchu na $P_1(x)/Q(x)$. Takovýmto způsobem pokračujíce dojdeme konečně ke zlomku, ve kterém stupeň jmenovatele i čitatele bude rovný nule a který je tudíž na $x$ nezávislý (konstanta).

*Tím získáváme pro daný zlomek $P(x)/Q(x)$, jehož jmenovatel jest $Q(x) = B_0(x-b)^\beta (x-c)^\gamma (x-d)^\delta \ldots;\ \beta+\gamma+\delta+\ldots = n$, kde kořenoví činitelé $x-b, x-c, x-d, \ldots$ jsou vesměs různi, rozklad tvaru*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + p_1\left(\frac{1}{x-b}\right) + p_2\left(\frac{1}{x-c}\right) + p_3\left(\frac{1}{x-d}\right) + \cdots + \text{konst.}$$

*anebo obšírněji psáno* (při čemž konst. značíme $a_{m-n}$)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = a_0x^{m-n} + a_1x^{m-n-1} + \cdots + a_{m-n-1}x + a_{m-n} + \tag{5}$$
$$+ \frac{a'_0}{(x-b)^\beta} + \frac{a'_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{a'_{\beta-1}}{x-b} +$$
$$+ \frac{a''_0}{(x-c)^\gamma} + \frac{a''_1}{(x-c)^{\gamma-1}} + \cdots + \frac{a''_{\gamma-1}}{x+c}$$
$$+ \frac{a'''_0}{(x-d)^\delta} + \frac{a'''_1}{(x-d)^{\delta-1}} + \cdots + \frac{a'''_{\delta-1}}{x-d} +$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

*Při tom jsou čísla $a_0, a_1, \ldots a_{m-n-1}$, a jak snadno patrno, též $a_{m-n}$ vesměs rovna nule, když $m < n$.*

Rovněž jest snadno patrno, že $a'_0, a''_0, a'''_0, \ldots$ nemohou býti rovna nule; neboť kdyby na př. $a'_0$ bylo rovno nule, nemohli bychom, sloučivše pravou stranu rovnice (5) v jediný zlomek, obdržeti zlomek, jehož jmenovatel by byl dělitelný $(x-b)^\beta$ a zároveň nesoudělný s čitatelem.

**12.** Pro čísla $a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a''_0, a''_1, \ldots, a'''_0, \ldots$ můžeme si zjednati jednoduchým způsobem vztahy, které mají zvláště při obecných vyšetřováních důležitost. Abychom stanovili na př. $a_0', a'_1, a'_2, \ldots a'_{\beta-1}$, násobíme obě strany rovnice (5) $(x-b)^\beta$, při čemž klademe jako svrchu $Q(x) = (x-b)^\beta Q_1(x)$. Dostaneme vztah, píšeme-li na pravé straně členy v řádku druhém na prvé místo a sloučíme-li ostatní členy v jediný zlomek,

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)} = a'_0 + a'_1(x-b) + a'_2(x-b)^2 + \cdots + a'_{\beta-1}(x-b)^{\beta-1} + (x-b)^\beta \frac{R(x)}{Q_1(x)}.$$

Tu jest ihned patrno, že $a_0'$ stanovíme, když v této rovnici klademe $x = b$; $a'_\lambda$ pak obdržíme, když obě strany $\lambda$-kráte derivujeme podle $x$ a potom učiníme $x = b$.

Tak máme

$$a'_0 = \frac{P(b)}{Q_1(b)}, \quad \lambda!\, a'_\lambda = \left[\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right]_{x=b}; \qquad \lambda < \beta, \tag{6}$$

což lze také psáti

$$a'_0 = \left[\frac{(x-b)^\beta P(x)}{Q(x)}\right]_{\lim x = b}, \quad a'_\lambda = \frac{1}{\lambda!}\left[\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\frac{(x-b)^\beta P(x)}{Q(x)}\right]_{\lim x = b}. \tag{6_1}$$

Rovněž jest pro $\mu < \gamma$

$$a''_0 = \left[\frac{(x-c)^\gamma P(x)}{Q(x)}\right]_{\lim x = c}, \quad a''_\mu = \frac{1}{\mu!}\left[\frac{d^\mu}{dx^\mu}\frac{(x-c)^\gamma P(x)}{Q(x)}\right]_{\lim x = c} \tag{6$_2$}$$

atd.

Z těchto výsledků jest jasno, že *koeficienty* $a_i'$, $a_i''$, $a_i'''$ ... ***a tudíž i koeficienty*** $a_i$ ***jsou čísla jednoznačně stanovená. Ať k rozkladu*** (5) ***dospějeme jakoukoli cestou, vždy přijdeme k témuž výrazu.*** Výrok tento dokáže ostatně snadno čtenář bez pomoci rovnic (6) důkazem nepřímým, vycházeje z předpokladu, že by existovala dvě různá vyjádření tvaru (5) pro danou racionální funkci.

**13.** Zvláště jednoduchý tvar nabývají vzorce odvozené pro rozklad racionální funkce ve zlomky částečné, když kořeny rovnice $Q(x) = 0$ jsou vesměs jednoduché. Označíme-li je $a_1, a_2, \ldots a_n$ a je-li stupeň čitatele $P(x)$ menší než $n$, jest

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{x - a_1} + \frac{C_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{C_n}{x - a_n},$$

kde podle (6)

$$C_k = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$$

a tedy

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)}\frac{1}{x - a_1} + \frac{P(a_2)}{Q'(a_2)}\frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)}\frac{1}{x - a_n}. \tag{7}$$

Rovněž užitečnou nám bude v následujícím formule pro rozklad ve zlomky částečné v tom případě, že kořeny jmenovatele jsou vesměs dvojnásobné. Označme je opět $a_1, a_2 \ldots a_n$ a jmenovatele k vůli větší jasnosti $Q^2(x)$; nechť pak zase stupeň čitatele jest menší než stupeň jmenovatele $2n$. Pak podle předcházejícího můžeme psáti rozklad ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q^2(x)} = \frac{C_1}{(x - a_1)^2} + \frac{D_1}{x - a_1} + \frac{C_2}{(x - a_2)^2} + \frac{D_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{C_n}{(x - a_n)^2} + \frac{D_n}{x - a_n}, \tag{8}$$

kde

$$C_k = \frac{P(a_k)}{Q'^2(a_k)}, \qquad D_k = \frac{P'(a_k)\,Q'(a_k) - P(a_k)\,Q''(a_k)}{Q'^2(a_k)},$$

jak snadným počtem podle (6) můžeme vypočísti.

**14.** *K praktickému výpočtu* koeficientů při rozkladu racionální funkce ve zlomky částečné můžeme použíti jednak formulí (6) (po případě vzorce (7), když kořeny rovnice $Q(x) = 0$ jsou jednoduché), jednak metody neurčitých součinitelů známým způsobem. Konečně, což v případech poněkud složitějších jest nejúčelnější, můžeme koeficienty $a, a', a'', \ldots$ vesměs určiti dělením, jakož vlastně bylo již ukázáno. Tak koeficienty $a'_0, a'_1 \dots a'_{\beta-1}$ mnohočlenu $p_1(y)$ v (4) vyplývají výpočtem $\beta$ členů v podílu $\overline{P}_1(y):\overline{Q}_1(y)$, t. j. v podílu

$$\frac{y^n P_1\left(b+\frac{1}{y}\right)}{y^{n-\beta} Q_1\left(b+\frac{1}{y}\right)} = \frac{P_1\left(b+\frac{1}{y}\right)}{Q\left(b+\frac{1}{y}\right)}.$$

V tomto podílu rozvinutém podle klesajících mocností proměnné $y$ je tedy vypočísti koeficienty mocnin $y^\beta$, $y^{\beta-1}, \dots y$, což jest však totéž jako vypočísti v podílu

$$\frac{P_1(b+t)}{Q(b+t)} \tag{9}$$

počítaném podle stoupajících mocností proměnné $t$ koeficienty mocnin $t^{-\beta}$, $t^{-\beta+1}$, $t^{-\beta+2}, \dots t^{-1}$. *Místo podílu* (9) *však postačí bráti v úvahu podíl*

$$\frac{P(b+t)}{Q(b+t)},$$

neboť oba podíly liší se podle (2) toliko o $p(b+t)$ a tedy toliko ve členech obsahujících mocniny $t$ s kladnými exponenty. *Při tomto dělení,* jelikož běží o výpočet toliko $\beta$ členů podílu, *postačí v čitateli i jmenovateli vzíti $\beta$ členů s nejnižšími mocninami $t$.*

**PŘÍKLAD.** Provésti jest rozklad v částečné zlomky racionální funkce

$$\frac{x^8 - x^5 - x^4 + x^2 + 1}{(x-1)^3 x^2 (x^2+1)^2}.$$

Dostaneme výsledek tvaru

$$\frac{x^8 - x^5 - x^4 + x^2 + 1}{(x-1)^3 x^2 (x^2+1)^2} = \frac{a'_0}{(x-1)^3} + \frac{a'_1}{(x-1)^2} + \frac{a'_2}{x-1} + \frac{a''_0}{x^2} + \frac{a''_1}{x} +$$
$$+ \frac{a'''_0}{(x-i)^2} + \frac{a'''_1}{x-i} + \frac{a_0^{(IV)}}{(x+i)^2} + \frac{a_1^{(IV)}}{x+i}.$$

K výpočtu čísel $a_0'$, $a_1'$, $a_2'$ klademe $x = 1 + t$ a ponechávajíce v čitateli i jmenovateli tři členy s nejnižšími mocninami, stanovíme tři členy podílu. I jest

$$\frac{x^8 - x^5 - x^4 + x^2 + 1}{(x-1)^3 x^2 (x^2+1)^2} = \frac{1 + t + 13t^2 + \cdots}{4t^3 + 16t^4 + 28t^5 + \cdots} = \frac{1}{4t^3} - \frac{3}{4t^2} + \frac{9}{2t} + \cdots,$$

tudíž

$$a_0' = \tfrac{1}{4}, \qquad a_1' = -\tfrac{3}{4}, \qquad a_2' = \tfrac{9}{2}.$$

K určení čísel $a_0''$, $a_1''$ není třeba zaváděti nové proměnné, postačí provésti dělení daným zlomkem naznačené podle stoupajících mocnin a vyčísliti prvé dva členy:

$$\frac{x^8 - x^5 - x^4 + x^2 + 1}{(x-1)^3 x^2 (x^2+1)^2} = \frac{1 + \cdots}{-x^2 + 3x^3 + \cdots} = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \cdots$$

$$a_0'' = -1, \qquad a_1'' = -3.$$

Konečně klademe $x = i + t$; tu změní se daný zlomek ve

$$\frac{-i-(5+2i)t+\cdots}{(8+8i)t^2+(24-48i)t^3+\cdots} = -\frac{1+i}{16t^2} - \frac{4+3i}{16t} + \cdots,$$

tedy

$$a'''_0 = -\frac{1+i}{16}, \qquad a'''_1 = -\frac{4+3i}{16},$$

a poněvadž koeficienty daného zlomku jsou reálné, jsou hodnoty pro $a_0^{(IV)}$, $a_1^{(IV)}$ komplexně sdružené s hodnotami $a'''_0$, $a'''_1$. Jest tudíž

$$a_0^{(IV)} = -\frac{1-i}{16}, \qquad a_1^{(IV)} = -\frac{4-3i}{16}.$$

Rozklad dané funkce ve zlomky částečné jest tak úplně proveden.

**15.** Výsledky, které byly odvozeny pro rozklad racionální funkce ve zlomky částečné, jsou platny, ať její koeficienty jsou čísla reálná nebo komplexní. V následujícím budeme pojednávati o integraci racionálních funkcí s reálnými koeficienty; z té příčiny je třeba vyšetřovati, jaké důsledky bude míti předpoklad, který učiníme, že *koeficienty racionální funkce dané jsou reálné.* Tu, jak známo, rovnice $Q(x) = 0$ může míti kořeny komplexní; je-li však jeden kořen komplexní, jest zároveň jejím kořenem hodnota komplexně sdružená; jsou pak oba kořeny téže násobnosti. Buďtež takové dva kořeny $p + qi$, $p - qi$, oba $k$-násobné; část jim příslušná v součtu zlomků částečných dávajícím danou racionální funkci [podle (5)] bude míti tvar

$$\begin{aligned} &\frac{c_0}{(x-p-qi)^k} + \frac{c_1}{(x-p-qi)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{x-p-qi} + \\ &+ \frac{c'_0}{(x-p+qi)^k} + \frac{c'_1}{(x-p+qi)^{k-1}} + \cdots + \frac{c'_{k-1}}{x-p+qi}. \end{aligned} \tag{10}$$

Nejprve jest patrno, že $c_\lambda$ jest komplexně sdruženo s $c_\lambda'$. Neboť změníme-li $i$ v $-i$, $P(x)/Q(x)$ se nezmění; v součtu zlomků částečných mění se $(x-p-qi)^\lambda$ v $(x-p+qi)^\lambda$, poněvadž však rozklad jest jednoznačný, musí při té záměně přejíti $c_\lambda$ v $c_\lambda'$ (a naopak). Jelikož v (10) prvý a druhý řádek jsou výrazy navzájem komplexně sdružené, jest součet jich zlomek o koeficientech reálných. Utvoříme-li jej, obdržíme výraz tvaru

$$\frac{C_0 x^{2k-1} + C_1 x^{2k-2} + \cdots + C_{2k-2} x + C_{2k-1}}{[(x-p)^2+q^2]^k}, \tag{r}$$

kterémuž snadno (na př. postupným dělením) můžeme dáti tvar

$$\frac{m_0 x + n_0}{[(x-p)^2+q^2]^k} + \frac{m_1 x + n_1}{[(x-p)^2+q^2]^{k-1}} + \cdots + \frac{m_{k-1} x + n_{k-1}}{(x-p)^2+q^2} \tag{s}$$

obsahující konstanty vesměs reálné.

Můžeme tudíž vysloviti tuto výslednou větu: *Dána-li jest racionální funkce $P(x)/Q(x)$ s reálnými koeficienty, můžeme, známe-li kořeny rovnice $Q(x)=0$, ji psáti jako součet racionální funkce celistvé a zlomků tvaru*

$$\frac{A}{(x-a)^{\varrho}}, \qquad \frac{Mx+N}{[(x-p)^2+q^2]^{\sigma}}. \tag{11}$$

*kde $A$, $M$, $N$, $p$, $q$ jsou konstanty reálné, kteréž jednoznačně jsou stanoveny, a to operacemi racionálními.*

**16.** Podle věty o rozkladu funkce racionální postačí k integraci racionálních funkcí provésti integraci zlomků (11). A tu jest nejprve

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^{\varrho}} = -\frac{A}{(\varrho-1)(x-a)^{\varrho-1}} + C; \qquad \varrho \neq 1.$$

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A \log|x-a| + C,$$

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{[(x-p)^2+q^2]^{\sigma}} = \int \frac{M(x-p)\,dx}{[(x-p)^2+q^2]^{\sigma}} + \int \frac{(N+Mp)\,dx}{[(x-p)^2+q^2]^{\sigma}}.$$

Pro první z integrálů pravé strany učiníme substituci $(x-p)^2+$ $+q^2=u$, $2(x-p)\,dx=du$, čímž obdržíme

$$\int \frac{M(x-p)\,dx}{[(x-p)^2+q^2]^{\sigma}} = \frac{M}{2}\int \frac{du}{u^{\sigma}} = -\frac{M}{2}\,\frac{1}{(\sigma-1)u^{\sigma-1}} + C =$$

$$= -\frac{M}{2(\sigma-1)}\cdot\frac{1}{[(x-p)^2+q^2]^{\sigma-1}} + C \qquad \text{pro } \sigma \neq 1, \tag{12}$$

$$= \tfrac{1}{2}M \log u + C = \tfrac{1}{2}M \log[(x-p)^2+q^2] + C \qquad \text{pro } \sigma = 1.$$

Integrál druhý zjednodušíme substitucí $x-p=qt$, $dx/dt=q$, odkudž vyplývá

$$\int \frac{dx}{[(x-p)^2+q^2]^{\sigma}} = \frac{1}{q^{2\sigma-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{\sigma}}. \tag{13}$$

Pro $\sigma=1$ máme bezprostředně

$$\int \frac{dx}{(x-p)^2+q^2} = \frac{1}{q}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{q}\operatorname{arctg}\frac{x-p}{q} + C,$$

$$= -\frac{1}{q}\operatorname{arctg}\frac{q}{x-p} + C'$$

takže zbývá vypočísti integrály

$$I_{\sigma} = \int \frac{dt}{(t^2+1)^{\sigma}}$$

pro $\sigma$ celé a větší než 1. Výpočet $I_{\sigma}$ jest v tomto případě pohodlný pomocí formule redukční. Integrujeme $I_{\sigma}$ částečnou integrací (odst. 7) volíce

$$u = \frac{1}{(t^2+1)^{\sigma}}, \qquad v'=1; \qquad v=t, \qquad u' = \frac{-2\sigma t}{(t^2+1)^{\sigma+1}};$$

i máme
$$I_\sigma=\int\frac{dt}{(t^2+1)^\sigma}=\frac{t}{(t^2+1)^\sigma}+2\sigma\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^{\sigma+1}}=$$
$$=\frac{t}{(t^2+1)^\sigma}+2\sigma\int\frac{(t^2+1)\,dt}{(t^2+1)^{\sigma+1}}-2\sigma\int\frac{dt}{(t^2+1)^{\sigma+1}},$$
tedy
$$I_\sigma=\frac{t}{(t^2+1)^\sigma}+2\sigma I_\sigma-2\sigma I_{\sigma+1},$$
$$I_{\sigma+1}=\frac{1}{2\sigma}\,\frac{t}{(t^2+1)^\sigma}+\frac{2\sigma-1}{2\sigma}\,I_\sigma;\qquad \sigma>0. \tag{14}$$

Z této rovnice snadno vyplývají postupně hodnoty integrálů $I_2$, $I_3\ldots$ Na př.

$$I_2=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t,$$
$$I_3=\frac{t}{4(t^2+1)^2}+\frac{3}{4\,.\,2}\,\frac{t}{t^2+1}+\frac{3\,.\,1}{4\,.\,2}\operatorname{arc\,tg} t,$$
$$I_4=\frac{1}{6}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^3}+\frac{5}{6\,.\,4}\,\frac{t}{(t^2+1)^2}+\frac{5\,.\,3}{6\,.\,4\,.\,2}\,\frac{t}{t^2+1}+\frac{5\,.\,3\,.\,1}{6\,.\,4\,.\,2}\operatorname{arc\,tg} t,$$

atd.; bylo by snadno napsati obecnou formuli pro $I_\sigma$. Sloučíme-li na její pravé straně členy racionální, dostáváme pro $I_\sigma$ výraz tvaru
$$I_\sigma=\frac{t\,P_{\sigma-2}(t^2)}{(t^2+1)^{\sigma-1}}+\frac{(2\sigma-3)\,(2\sigma-5)\ldots3\,.\,1}{(2\sigma-2)\,(2\sigma-4)\ldots4\,.\,2}\operatorname{arc\,tg} t, \tag{15}$$
při čemž $P_{\sigma-2}(t^2)$ jest polynom v $t^2$ *stupně* $\sigma-2$.

– **PŘÍKLAD 1.** $\displaystyle\int\frac{x^8-x^5-x^4+x^2+1}{(x-1)^3\,x^2\,(x^2+1)^2}\,dx$. Rozklad dané funkce racionální je již proveden v odst. 14. Sloučíme-li členy komplexně sdružené, máme

$$\frac{x^8-x^5-x^4+x^2+1}{(x-1)^3\,x^2\,(x^2+1)^2}=\frac{1}{4(x-1)^3}-\frac{3}{4(x-1)^2}+\frac{9}{2(x-1)}-$$
$$-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+\frac{x+1}{4(x^2+1)^2}-\frac{2x-1}{4\,(x^2+1)}.$$

Tedy
$$\int\frac{x^8-x^5-x^4+x^2+1}{(x-1)^3\,x^2\,(x^2+1)^2}\,dx=-\frac{1}{8(x-1)^2}+\frac{3}{4(x-1)}+$$
$$+\tfrac{9}{2}\log(x-1)+\frac{1}{x}-3\log x-\frac{1}{8(x^2+1)}+\frac{x}{8(x^2+1)}+$$
$$+\tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tg} x-\tfrac{1}{4}\log(x^2+1)+\tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x+C=$$
$$=\frac{6x-7}{8(x-1)^2}+\frac{1}{x}+\frac{x-1}{8(x^2+1)}+\tfrac{9}{2}\log(x-1)-3\log x-$$
$$-\tfrac{1}{4}\log(x^2+1)+\tfrac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} x+C.$$

**PŘÍKLAD 2.** Abychom vypočetli

$$J = \int \frac{x^2\,dx}{(x^2-x+1)^2}$$

upravíme nejprve zlomek na předepsaný tvar. Dostáváme snadno

$$\frac{x^2}{(x^2-x+1)^2} = \frac{x^2-x+1}{(x^2-x+1)^2} + \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}.$$

Čísla $p$, $q$ jsou tu $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, tedy $t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ a máme nejprve podle (12) a (13)

$$\int \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}\,dx = \int \frac{(x-\frac{1}{2})\,dx}{(x^2-x+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1} - \frac{4}{3\sqrt{3}}\,I_2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{6}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Připočteme-li ještě

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

dostáváme

$$J = -\frac{1}{3}\,\frac{x+1}{x^2-x+1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

*POZNÁMKA.* Někdy může býti počet podstatně usnadněn tím, že se integrál z racionálního zlomku napřed vhodnou substitucí zjednoduší. Takový případ nastává na př., když jmenovatel racionálního zlomku obsahuje toliko dva různé kořenové činitele, jak již v odst. 8, př. 6 bylo ukázáno. Jiné takové příklady jsou

$$\int \frac{x^2\,dx}{ax^3+b}, \qquad \int \frac{dx}{x(ax^4+b)}.$$

První z obou integrálů převádí se substitucí $x^3 = t$ na integrál

$$\tfrac{1}{3}\int \frac{dt}{at+b},$$

druhý pak substitucí $x^4 = u$ na integrál

$$\tfrac{1}{4}\int \frac{du}{u(au+b)}.$$

**17.** Podle předcházejícího jest patrno, že *integrál z dané racionální funkce $P(x)/Q(x)$ je součet*

1. *racionální funkce proměnné $x$,*
2. *členů tvaru*

$$A\log(x-a),\ A\log[(x-p)^2+q^2],\ A\operatorname{arc\,tg}\frac{x-p}{q}.$$

Racionální část v integrálu z $P(x)/Q(x)$ tenkráte a jenom tenkráte úplně odpadá, když stupeň čitatele $P(x)$ jest menší než stupeň jmenovatele $Q(x)$ a když zároveň rovnice $Q(x)=0$ nemá kořenů mnohonásobných (při předpokladu, že $P(x)$ a $Q(x)$ nemají společné míry). Zároveň jest jasno, že, píšeme-li racionální část integrálu z dané racionální funkce jako zlomek, jeho jmenovatel má jenom takové kořenové faktory, kterými jest dělitelno také $Q(x)$, avšak ve stupni vyšším nežli prvním; násobnost jejich jest pak o jednotku menší nežli u $Q(x)$.

Má-li $Q(x)$ mnohonásobné faktory kořenové, lze, jak známo, prostřednictvím racionálních operací psáti $Q(x)$ ve tvaru

$$Q(x)=X_1\,X_2^2\,X_3^3\ldots X_r^r,\quad X_i \text{ polynom v } x,\quad i=1,2,\ldots r,$$

kde $X_i^i$ obsahuje všecky kořenové činitele odpovídající kořenům $i$-násobným. Mají tedy podle takto voleného označení rovnice $X_1=0$, $X_2=0,\ldots X_r=0$ vesměs jednoduché kořeny a žádné dva z polynomů $X_1, X_2\ldots X_r$ nemají společné míry (závislé na $x$).

Podle okolností svrchu vytčených je tedy racionální část integrálu z racionální funkce zlomek tvaru

$$\frac{U(x)}{X_2\,X_3^2\ldots X_r^{r-1}},\qquad U(x) \text{ mnohočlen v } x,$$

členy pak transcendentní v integrálu tom (pod 2 uvedené) jsou integrálem z výrazu tvaru

$$\frac{V(x)}{X_1\,.\,X_2\ldots X_r},\qquad V(x) \text{ mnohočlen v } x,$$

kde stupeň $V(x)$ jest menší než stupeň součinu $X_1\,.\,X_2\ldots X_r$. Můžeme tedy psáti

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{U(x)}{X_2\,X_3^2\ldots X_r^{r-1}}+\int\frac{V(x)}{X_1\,X_2\ldots X_r}\,dx. \tag{16}$$

Je-li stupeň $P(x)$ menší než stupeň $Q(x)$, můžeme také stupeň $U(x)$ pokládati za menší než stupeň $s$ výrazu $X_2X_3^2\ldots X_r^{r-1}$; je-li pak stupeň čitatele $P(x)$ větší o $\mu\geq 0$ než stupeň jmenovatele $Q(x)$, je stupeň $U(x)$ o $\mu+1$ větší než $s$ (jak vyplývá opět snadno z rozkladu ve zlomky částečné). V tomto případě však se zřetelem k tomu, že k prvému členu rovnice (16) můžeme přičítati libovolnou konstantu (integrační), můžeme a budeme předpokládati, že součinitel při $x^s$ v $U(x)$ jest roven nule. Koeficienty polynomů $U(x)$ a $V(x)$ jsou pak jednoznačně stanoveny, jakž vyplývá z obdobné vlastnosti při rozkladu racionální funkce ve zlomky částečné. Rovnice (16) jest (podle definice integrálu) ekvivalentní rovnici

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{U(x)}{X_2 X_3^2 \dots X_r^{r-1}}\right) + \frac{V(x)}{X_1 X_2 \dots X_r}.$$

Aby tato rovnice byla platna při daném $P(x)$ a $Q(x)$ identicky (t. j. při každém $x$), jest nutno a postačí, aby pro koeficienty polynomů $U(x)$, $V(x)$ byla splněna řada rovnic lineárních, které dostaneme, odstraníme-li z rovnice zlomky a srovnáme-li na obou stranách koeficienty stejných mocnin proměnné $x$. Jelikož pak ty polynomy jsou polynomy úplně (jednoznačně) stanovené, víme napřed, že ony lineární rovnice pro koeficienty polynomů $U(x)$, a $V(x)$ jsou jistě řešitelny a že mají toliko jediné řešení. Tak jest patrno, že polynomy $U(x)$ a $V(x)$ lze si zjednati operacemi racionálními; zejména netřeba k jich výpočtu řešiti rovnice $X_i = 0$.

Máme tudíž větu: *Integrál* $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ *lze, má-li rovnice* $Q(x) = 0$ *kořeny mnohonásobné, vyjádřiti pomocí operací racionálních jako součet racionální funkce a integrálu* $\int \frac{\overline{P(x)}}{\overline{Q(x)}}\,dx$, *kde* $\overline{Q(x)}$ *dělí* $Q(x)$, *nemá však již kořenů mnohonásobných.**)

**PŘÍKLAD.** Integrál $\int \frac{x^2}{(x^4+1)^2}\,dx$ se dá vyjádřiti jako součet

$$\int \frac{x^2}{(x^4+1)^2} = \frac{U(x)}{x^4+1} + \int \frac{V(x)}{x^4+1}\,dx,$$

kde $U(x) = A_0x^3 + A_1x^2 + \cdots$, $V(x) = B_0x^3 + \cdots$ Z rovnice té plyne derivováním

$$\frac{x^2}{(x^4+1)^2} = -\frac{U(x)}{(x^4+1)^2}\,4x^3 + \frac{U'(x)}{x^4+1} + \frac{V(x)}{x^4+1}.$$

Násobíme-li $(x^4+1)^2$ a klademe-li $x^4 = -1$, dostáváme

$$x^2 = +4A_0x^2 + 4A_1x + 4A_2 - 4A_3x^3.$$

Tato rovnice má býti splněna pro všecky *čtyři* kořeny rovnice $x^4 = -1$ a tedy, poněvadž jest *třetího* stupně v $x$, musí býti splněna identicky, t. j.

$$A_0 = \tfrac{1}{4},\quad A_1 = 0,\quad A_2 = 0,\quad A_3 = 0.$$

Dosazením těchto hodnot do hořejšího vztahu zjednáme si snadno, že $V(x) = \frac{1}{4}x^2$ a tak

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^4+1)^2} = \frac{\frac{1}{4}x^3}{x^4+1} + \frac{1}{4}\int \frac{x^2\,dx}{x^4+1}.$$

---

*) *Hermite* podal k snazšímu výpočtu racionální části daného integrálu zvláštní metodu redukční. Její výklad najde čtenář ve článku Ed. Weyra, Časopis, r. XI, str. 125. Viz ostatně též v následujícím odst. 35, kde příslušné redukční vzorce jsou odvozeny pro případ ještě obecnější.

**18.** *Několik obecnějších příkladů pro integraci racionálních funkcí.*

**PŘÍKLAD 1.** Vyjádření integrálu

$$J=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

závisí na hodnotě výrazu (diskriminantu jmenovatele)

$$D=b^2-4ac$$

a to dostáváme snadným počtem,

*a*) když $D<0$, $\quad J=\frac{2}{\sqrt{-D}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{-D}}+k;$

*b*) když $D>0$, $\quad J=\frac{1}{\sqrt{D}}\cdot\log\left|\frac{2ax+b-\sqrt{D}}{2ax+b+\sqrt{D}}\right|+k;$

*c*) když $D=0$, $\quad J=-\frac{1}{ax+\frac{1}{2}b}+k.$

Obecněji jest pro $D<0$

*d*) $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx=\frac{M}{2a}\log|ax^2+bx+c|+(-\tfrac{1}{2}M\frac{b}{a}+N)\,J+k.$

**PŘÍKLAD 2.** Abychom vypočetli integrál

$$\int\frac{dx}{ax^4+bx^2+c}$$

při $b^2-4ac<0$, provedeme nejprve rozklad jmenovatele v reálné činitele. Jest (budiž $a>0$ a tedy i $c>0$)

$$ax^4+bx^2+c=(ax^4+2\sqrt{ac}\,x^2+c)-(2\sqrt{ac}-b)\,x^2=$$
$$=(\sqrt{a}\,x^2+\sqrt{\delta_1}\,x+\sqrt{c})(\sqrt{a}\,x^2-\sqrt{\delta_1}\,x+\sqrt{c}),$$

kde $\delta_1=2\sqrt{ac}-b$ jest kladné číslo; píšeme-li ještě $\delta_2=2\sqrt{ac}+b$ a vykonáme-li rozklad ve zlomky částečné (na př. metodou neurčitých součinitelů), máme po snadné úpravě (sloučením členů obsahujících arc tg) podle (*d*) příkladu předcházejícího

$$\int\frac{dx}{ax^4+bx^2+c}=\frac{1}{4\sqrt{c\delta_1}}\log\frac{\sqrt{a}\,x^2+\sqrt{\delta_1}\,x+\sqrt{c}}{\sqrt{a}\,x^2-\sqrt{\delta_1}\,x+\sqrt{c}}-$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{c\delta_2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\delta_2}\,x}{\sqrt{a}\,x^2-\sqrt{c}}+k.$$

Podobně dostaneme (též z rovnice právě odvozené substitucí $x=1/x'$)

$$\int\frac{x^2dx}{ax^4+bx^2+c}=-\frac{1}{4\sqrt{a\delta_1}}\log\frac{\sqrt{a}\,x^2+\sqrt{\delta_1}\,x+\sqrt{c}}{\sqrt{a}\,x^2-\sqrt{\delta_1}\,x+\sqrt{c}}-$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{a\delta_2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\delta_2}\,x}{\sqrt{a}\,x^2-\sqrt{c}}+k.$$

**PŘÍKLAD 3.** Derivováním obou stran snadno se dokáže rovnost

$$\int\frac{(Ax^2+Bx+C)\,dx}{(ax^2+bx+c)(a'x^2+b'x+c')}=\log\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}+k, \qquad (+)$$

je-li $Ax^2+Bx+C\equiv(ab'-a'b)\,x^2+2\,(ac'-a'c)\,x+(bc'-b'c)$. Forma $Ax^2+$ $+Bxy+Cy^2$ (je-li $A=ab'-a'b$, $B=\ldots$, $C=\ldots$) jest, jak známo, funkcionální determinant forem $ax^2+bxy+cy^2$, $a'x^2+b'xy+c'y^2$ podle proměnných $x, y$ (DP 213). Z rovnice (+) odvodí snadno čtenář, že, mají-li $ax^2+bx+c$, $a'x^2+$ $+b'x+c'$ společný kořenový činitel $x-\alpha$, $Ax^2+Bx+C$ jest dělitelno kvadrátem toho kořenového činitele; t. j. diskriminant $B^2-4AC$ jest dělitelný resultantem $R$ polynomů $ax^2+bx+c$, $a'x^2+b'x+c'$; jelikož pak resultant dvou polynomů druhého stupně jest druhého stupně v koeficientech každého z těch polynomů, můžeme dokonce psáti (disponujíce numerickým činitelem v $R$)

$$R=B^2-4AC.$$

Pomocí vztahu (+), dále pomocí rovnice dávající v příkladu prvém $J$ (jež lze psáti stejně jako integrál na levé straně rovnice (+), předpokládáme-li, že $Ax^2+Bx+C\equiv a'x^2+b'x+c'$) a konečně pomocí rovnice dávající $J'$, jež vzniká z $J$, dosadíme-li $a', b', c'$ za $a, b, c$, odvodíme za předpokladu, že $R\neq 0$, řešením tří rovnic lineárních hodnotu integrálu

$$\int\frac{(\mathfrak{A}x^2+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C})\,dx}{(ax^2+bx+c)(a'x^2+b'x+c')}=pJ+p'J'+qK,$$

kde $K$ je integrál v (+), $p$, $p'$, $q$ jsou konstanty závislé na $a$, $b$, $c$; $a'$, $b'$, $c'$; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ (na posledních třech lineárně); $p, p', q$ jeví se při řešení jako zlomky, jichž jmenovatel jest právě $R$.

**PŘÍKLAD 4.** Při integrálu

$$J=\int\frac{x^{m-1}}{x^{2n}-2\cos\varphi\, x^n+1}\,dx$$

stanovíme nejprve kořeny jmenovatele. Kvadratická rovnice

$$\xi^2-2\cos\varphi\,.\,\xi+1=0$$

má kořeny*)

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi},\quad \cos\varphi-i\sin\varphi=e^{-i\varphi};$$

tudíž rovnice

$$x^{2n}-2\cos\varphi\, x^n+1=0$$

má za kořeny $n$-té odmocniny těchto čísel, t. j. kořeny její jsou

$$a\alpha^k,\ a^{-1}\alpha^{-k};\quad k=0, 1, 2, \ldots n-1,$$

kde

$$a=e^{i\frac{\varphi}{n}},\quad \alpha=e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Je tedy podle odst. 13, když $m\leqq 2n$, a zároveň $\cos\varphi\neq 0$,

$$\frac{x^{m-1}}{x^{2n}-2\cos\varphi\, x^n+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{A_k}{x-a\alpha^k}+\frac{A_{-k}}{x-a^{-1}\alpha^{-k}}\right),$$

při čemž jest

$$A_k=\frac{a^{m-n}\,\alpha^{km}}{n\,(a^n-a^{-n})};\quad A_{-k}=-\frac{a^{-m+n}\,\alpha^{-km}}{n\,(a^n-a^{-n})}.$$

Sloučením komplexně sdružených členů dostáváme po jednoduché úpravě

$$\frac{x^{m-1}}{x^{2n}-2\cos\varphi\,.\,x^n+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\left[B_k\frac{2x-(a\alpha^k+a^{-1}\alpha^{-k})}{x^2-(a\alpha^k+a^{-1}\alpha^{-k})\,x+1}+\right.$$
$$\left.+B'_k\frac{a\alpha^k-a^{-1}\alpha^{-k}}{x^2-(a\alpha^k+a^{-1}\alpha^{-k})\,x+1}\right],$$

*) O významu rovnice

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi},\ldots\ldots$$

viz odst. 18c. V příkladě 3 téhož odst. naznačeno je též stručně, jak počítati v oboru komplexních čísel $m$-té odmocniny z daného čísla, resp. z 1.

kde
$$B_k = \frac{a^{m-n}\,\alpha^{km} - a^{-m+n}\,\alpha^{-km}}{2n\,(a^n - a^{-n})},$$
$$B'_k = \frac{a^{m-n}\,\alpha^{km} + a^{-m+n}\,\alpha^{-km}}{2n\,(a^n - a^{-n})}.$$
Integrací vyplývá ihned
$$\int \frac{x^{m-1}}{x^{2n} - 2\cos\varphi\, x^n + 1}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\Big[B_k \log\left(x^2 - (a\alpha^k + a^{-1}\alpha^{-k})\,x + 1\right) +$$
$$+ 2B'_k\, i \operatorname{arc\,tg} \frac{2x - (a\alpha^k + a^{-1}\alpha^{-k})}{-\,i\,(a\alpha^k - a^{-1}\alpha^{-k})}\Big].$$
Není snad třeba ani zvláště vytýkati, že
$$B_k,\ B'_k i,\ a\alpha^k + a^{-1}\alpha^{-k},\ i\,(a\alpha^k - a^{-1}\alpha^{-k})$$
jsou čísla vesměs reálná; zvláště pak jest
$$a\alpha^k + a^{-1}\alpha^{-k} = 2\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n},\quad -\,i\,(a\alpha^k - a^{-1}\alpha^{-k}) = 2\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

**18a. Zavedení komplexních čísel za koeficienty racionálních funkcí.** Integrace racionálních funkcí podstatně se zjednoduší, připustíme-li pro jejich koeficienty také komplexní čísla. Racionální funkci proměnné $x$ o komplexních koeficientech lze, jak známo, vždy převésti na součet dvou racionálních funkcí s reálnými koeficienty, při čemž druhá z funkcí jest násobena imaginární jednotkou $i$. Na př. za předpokladu, že $a$, $b$ jsou čísla reálná ($i$ jest v následujícím vždy jednotka imaginární, pro kterou $i^2 = -1$), jest

(a) $$\frac{1}{x - (a + bi)} = \frac{1}{(x - a) - bi} = \frac{x - a}{(x - a)^2 + b^2} + i\,\frac{b}{(x - a)^2 + b^2}.$$

Obecně lze psáti pro racionální funci $R(x)$ proměnné $x$ s komplexními koeficienty rovnost

(b) $$R(x) = M(x) + i\,N(x),$$

kde $M(x)$, $N(x)$ jsou racionální funkce proměnné $x$ s koeficienty reálnými. Odtud následuje (neodvisle proměnná $x$, jakož i číslo $h$ jsou stále čísla reálná):
$$\frac{R(x + h) - R(x)}{h} = \frac{M(x + h) - M(x)}{h} + i\,\frac{N(x + h) - N(x)}{h}.$$
Provedeme-li na pravé straně naznačené operace, krátí se $h$ a tudíž i na levé straně lze krátiti $h$ (což ostatně předem jest jasno, neboť *pro počítání s čísly komplexními platí se zřetelem k čtyřem základním operacím aritmetickým tatáž pravidla, jako pro počítání s čísly reálnými).* Po zkrácení vzniknou na pravé straně spojité funkce proměnné $h$ v okolí bodu $h = 0$; klademe-li tedy po zkrácení v rovnici napsané $h = 0$, vznikne z ní vztah tvaru

(c) $$R_1(x) = M_1(x) + i\,N_1(x),$$

při čemž patrně zároveň

(d) $$M_1(x)=\lim_{h=0}\frac{M(x+h)-M(x)}{h}=M'(x),\quad N_1(x)=N'(x),$$

a budeme také značiti $R_1(x) = R'(x)$ *a nazývati $R'(x)$ derivací racionální funkce $R(x)$ s komplexními koeficienty podle* (reálné) *proměnné $x$. Tuto derivaci, jak z předcházejícího patrno, můžeme počítati stejně, (podle týchž pravidel) jako derivaci při funkci rac. s koeficienty reálnými**); zejména pak jest

(e) $$\left[\frac{1}{(x-(a+bi))^m}\right]'=-\frac{m}{(x-(a+bi))^{m+1}}.$$

Pojmenujeme-li obdobně výraz

$$\int M(x)\,dx+i\int N(x)\,dx$$

jakožto *integrál racionální funkce $R(x)$ s komplexními koeficienty,* značíce jej znakem

$$\int R(x)\,dx=\int M(x)\,dx+i\int N(x)\,dx,$$

máme v důsledku rovnic (c), (d), (b) ihned

$$\int R_1(x)\,dx \text{ aneb} \int R'(x)\,dx=\int M'(x)\,dx+i\int N'(x)dx=M(x)+i\,N(x)+k=R(x)+k,$$

tedy i tomto případě jsou integrace a diferenciace operace inversní.

Definicí derivace a integrálu funkce racionální s komplexními koeficienty není zaveden v podstatě nový pojem; ve skutečnosti ta derivace a integrál jsou derivace a integrály dvou racionálních funkcí s reálnými koeficienty. Tyto dvě funkce jsou sice sloučeny znaménkem sčítání; tím však, že druhá jest současně při tom násobena imaginární jednotkou $i$ (s níž při integraci a derivování se počítá jako s konstantou), zůstávají při reálné proměnné vždy od sebe odlišeny a rovněž tak při derivování a integraci jich derivace a integrály.

Pro integrály z funkcí racionálních o komplexních koeficientech zůstávají v platnosti základní metody (odst. 5, odst. 7, 8, 9), při čemž ovšem je třeba jednak poznamenati, že substituce nové proměnné smí se prováděti jenom taková, aby reálné proměnné (staré) odpovídala zase reálná proměnná (nová), jednak, že derivaci podle parametru lze prováděti jenom, je-li parametr ten reálný. Neboť derivace i integrace jest v předcházejícím definována pouze pro reálné proměnné.

*) Neboť jest z definice patrno, že derivaci funkce rac. s kompl. koef. $R(x)$ dostaneme, dosadíme-li do výrazu $(R(x+h)-R(x))/h$, když jsme dříve krátili $h$, za $h=0$, stejně jakoby koeficienty dané funkce byla čísla reálná.

Že však zavedení derivace, resp. integrálu může nám podstatně ulehčiti náš úkol vyhledati integrál racionální funkce s koeficienty reálnými, vyplývá z této úvahy. Jest se zřetelem k $(e)$

$$\int \frac{(a' + b'i)\,dx}{(x-(a+bi))^{m+1}} = -\frac{1}{m}\,\frac{a'+b'i}{(x-(a+bi))^m} \qquad m > 0$$

a též

$$\int \frac{(a' - b'i)\,dx}{(x-(a-bi))^{m+1}} = -\frac{1}{m}\,\frac{a'-b'i}{(x-(a+bi))^m};$$

tedy, sčítáme-li obě rovnice,

$$\int \left( \frac{(a'+b'i)}{(x-(a+bi))^{m+1}} + \frac{a'-b'i}{(x-(a-bi))^{m+1}} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{m}\,\frac{a'+b'i}{(x-(a+bi))^m} - \frac{1}{m}\,\frac{a'-b'i}{(x-(a+bi))^m},$$

čímž jest dán jedním rázem integrál racionální funkce reálné

$$\frac{a'+b'i}{(x-(a+bi))^{m+1}} + \frac{a'-b'i}{(x-(a-bi))^{m+1}}$$

opět ve tvaru reálné funkce racionální a není vůbec třeba uváděti výraz (10) nejprve na tvar $(r)$ potom na $(s)$ a užívati rekurentního vzorce odvozeného svrchu pro integrál I.

*DODATEK.* **Definice obecné komplexní funkce, jejího diferenciálu a integrálu.** V předcházejícím jsme definovali racionálnou komplexní funci (reálné) proměnné $x$. *Definice tato se beze změny rozšiřuje na libovolné funkce jedné i několika proměnných.* Tak jsou-li $M(x)$, $N(x)$, resp. $P(x, y, \ldots)$, $Q(x, y, \ldots)$ funkce jedné proměnné reálné $x$, resp. několika reálných proměnných $x, y, \ldots$, slují

$$R(x) = M(x) + i\,N(x) \quad , \quad S(x, y, \ldots) = P(x, y, \ldots) + i\,Q(x, y, \ldots)$$

*komplexní funkce jedné* (reálné), *resp. několika* (reálných) *proměnných. Mají-li $M(x)$, $N(x)$ derivace, resp. $P(x, y, \ldots)$, $Q(x, y, \ldots)$ totální diferenciály, říkáme, že $R(x)$* — jakožto komplexní funkce reálné proměnné $x$ — *má derivaci podle $x$ a že $S(x, y, \ldots)$* — jakožto komplexní funkce reálných proměnných — *má totální diferenciál, jež definujeme rovnicemi*

$$\frac{dR}{dx} = R'(x) = M'(x) + i\,N'(x) \quad , \quad dS(x, y, \ldots) = dP(x, y, \ldots) + i\,dQ(x, y, \ldots).$$

Obdobně stanoví se *integrál z komplexní funkce reálné proměnné $x$ rovnicí*

$$\int R(x)\,dx = \int M(x)\,dx + i \int N(x)\,dx,$$

mající ovšem význam jenom pro ty intervaly proměnné $x$, v nichž funkcím $M(x)$, $N(x)$ přísluší integrál.

**18b. Definice logaritmu pro komplexní hodnoty argumentu.** Avšak i pro integraci výrazů (a) můžeme, zavedením nového pojmu, podati výsledky ve tvaru zjednodušeném, účelném i pro praktické použití. Z definice integrálu komplexní funkce reálné proměnné plyne

$$\int \frac{dx}{x+(a+bi)} = \int \frac{(x+a)\,dx}{(x+a)^2+b^2} - ib\int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\log [(x+a)^2+b^2] + i \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x+a} + \text{konst.}, \qquad (g)$$

kde konst. jest přirozeně v obecném případě číslem komplexním (neboť i integrál v reálné části i v imaginární části můžeme zvětšiti o integrační konstantu).

Pokusím se podati definici logaritmu čísla komplexního tak, abychom pravou stranu rovnice mohli psáti ve tvaru

$$\log [x+(a+bi)] = \log [(x+a)+bi].$$

K tomu jest vhodno připomenouti, že každému číslu komplexnímu $A+Bi$ od nuly různému lze dáti tvar

$$A+Bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (h)$$

kde $A$, $B$, jakož i $r, \varphi$ jsou čísla reálná a $r>0$. Mezi $A, B, r, \varphi$ jsou očividně tyto vztahy:

$$A = r\cos\varphi,\quad B = r\sin\varphi,\quad r=\sqrt{A^2+B^2},\quad \cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}; \qquad (k)$$

$r$ sluje **absolutní hodnota** čísla $A+Bi$ a značívá se též znakem $|A+Bi|$, $\varphi$ sluje **amplituda** čísla $A+Bi$.*) Budeme ji vyznačovati pomocí symbolu ampl a psáti

$$\varphi = \operatorname{ampl}(A+Bi) \quad \text{aneb též} \quad \varphi = \operatorname{ampl}(A, B).$$

Rovnice dávající amplitudu neurčují ji jednoznačně; různá určení její liší se o celistvý násobek čísla $2\pi$. Jedno z těch určení stanovíme jednoznačně pomocí vedlejších podmínek, příslušné amplitudě budeme říkati **hlavní amplituda** *patřící k číslu* $A+Bi$

---

*) Čísla $r$, $\varphi$ mají jednoduchý geometrický význam, zobrazujeme-li číslo komplexní známým způsobem. Tu se číslo $A+Bi$ zobrazujeme bodem $[A, B]$ v rovině o dvou pravoúhlých osách: ose čísel $A$ (*ose čísel reálných*) a ose čísel $Bi$ (*ose čísel ryze imaginárních*). V důsledku toho zobrazování užíváme často výraz „*bod*“ $A+Bi$ místo „číslo“ $A+Bi$; rovněž užíváme pojmenování *horní půlrovina* pro tu část roviny kompl. čísel ve které $B \geqq 0$, *pravá půlrovina* (ve které $A \geqq 0$), *záporná část reálné osy* (na níž jsou body, pro něž $A<0, B=0$) atd. Při tomto zobrazování jest $r$ vzdálenost bodu $A+Bi \equiv [A, B]$ od bodu $0 \equiv [0,0]$, $\varphi$ pak jest úhel, který polopaprsek směřující od 0 k $A+Bi$ svírá s kladným směrem reálné osy.

a označovati ji budeme symbolem ampl. Pro hlavní amplitudu budeme pak požadovati

$$-\pi < \operatorname{ampl}(A + Bi) \leqq \pi, \tag{l}$$

kterýmižto podmínkami a rovnicemi ($k$) jest amplituda jednoznačně určena. Ostatní amplitudy patřící k číslu $A + Bi$ jsou dány výrazem $\varphi = \overline{\operatorname{ampl}}\,(A + Bi) + 2k\pi$, kde $k$ probíhá všecka čísla celá (kladná i záporná). Pro amplitudu vyplývá dále z rovnic ($k$)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A},$$

jest tedy úzká souvislost mezi arc tg $B/A$ a ampl $(A+Bi)$. Zvláště pak jsou mezi hlavní amplitudou a arc tg tyto vztahy

$$\operatorname{ampl}(A + Bi) = \operatorname{arc\,tg}\frac{B}{A}, \qquad \text{je-li} \quad A > 0 \tag{l'}$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{B}{A} + \begin{cases} \pi, \\ -\pi \end{cases} \quad \text{je-li} \quad A < 0 \begin{cases} B \geqq 0 \\ B < 0. \end{cases}$$

Vztahy tyto vyplývají ihned, uvědomíme-li si, že arc tg $\cdot x$ jest úhel, jehožto tangenta jest $x$ a který jest obsažen v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Na základě vztahu mezi $\overline{\text{ampl}}$ a arc tg lze rovnici ($g$) psáti ve tvaru

$$\int \frac{dx}{x + (a + bi)} = \log\sqrt{(x + a)^2 + b^2} + i\,\overline{\operatorname{ampl}}\,[(x + a) + bi] + k$$

a jest rovnice takto upravená v širším ještě intervalu platna než ($g$), která vztahovala se pouze na intervaly proměnné $x$ neobsahující bod $-a$.

Z výrazu pro integrál tak docíleného lze již snadno odvoditi tvar pro log $(A + Bi)$, má-li výraz, jemuž integrál se rovná, býti log $[(x + a) + bi]$.

**Definujeme**

$$\log(A + Bi) = \log\sqrt{A^2 + B^2} + i\,.\operatorname{ampl}(A + Bi). \tag{I}$$

Avšak amplituda čísla komplexního není určena jednoznačně, není tedy i touto rovnicí $\log(A + Bi)$ určen jednoznačně, nýbrž jest nekonečné množství hodnot, jež touto rovnicí logaritmu čísla kompl. přisuzujeme. Známe-li jednu z nich, všecky ostatní dostaneme, když k ní přidáváme různé násobky celistvé čísla $2\pi i$, t. j. čísla $2k\pi i$, kde $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots.$ Jest však účelno pro další vyšetřování z toho nekonečného množství hodnot pro log $(A + Bi)$ vybrati jednu, jíž říkati budeme **hlavní hodnota** *logaritmu čísla*

$A+Bi$ *a značiti* $\overline{\log}\,(A+Bi)$. *Definována pak bude* (jednoznačně) *ta hlavní hodnota rovnicí*

$$\overline{\log}\,(A+Bi)=\log\sqrt{A^2+B^2}+i\,\mathrm{ampl}\,(A+Bi). \qquad (\mathrm{l}')$$

*Je-li však číslo C dáno jako číslo reálné, kladné,* jako jest tomu při $\sqrt{A^2+B^2}$ v rovnici právě napsané, *bude značiti již* log $C$, *jako dosud, reálný logaritmus čísla C* a *jest tedy v tomto případě* $\log C=\overline{\log}\,C$.

Tím jsme docílili, že lze psáti

$$\int\frac{dx}{x+a}=\overline{\log}\,(x+a)+\text{konst.}, \qquad (m)$$

ať jest $\alpha$ jakékoli číslo komplexní. Vztah ten však zůstává v platnosti i když $\alpha$ jest číslo reálné a může tu $x+\alpha$ býti kladné i záporné. Vyjádření integrálu z racionální funkce rozložené ve zlomky částečné jest vždy i tenkráte, má-li jmenovatel kořenové činitele komplexní, velmi jednoduché a pro výpočet integrálu mnohem pohodlnější než metoda nepoužívající čísel komplexních.

Tak na př. v př. 1. běží mimo jiné o výpočet integrálu z výrazu

$$(l)\qquad -\frac{1+i}{16}\cdot\frac{1}{(x-i)^2}-\frac{1-i}{16}\cdot\frac{1}{(x+i)^2}-\frac{4+3i}{16}\,\frac{1}{x-i}-\frac{4-3i}{16}\,\frac{1}{x+i}.$$

Avšak $-\dfrac{1+i}{16}\displaystyle\int\frac{dx}{(x-i)^2}-\frac{4+3i}{16}\int\frac{dx}{x-i}=+\frac{1+i}{16}\,\frac{1}{x-i}-\frac{4+3i}{16}\,\overline{\log}\,(x-i)+k.$

Integrál ze zbývajících dvou členů jest výraz komplexně sdružený k výrazu právě napsanému. I je tedy integrál z ($l$) roven dvojnásobné reálné části posledního výrazu a tudíž jest

$$\frac{1}{8}\,\frac{x-1}{x^2+1}-\frac{1}{4}\log(x^2+1)-\frac{3}{8}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{x}+k',$$

což souhlasí v podstatě s výsledkem uvedeným v odst. 16.

Na základě definice logaritmu čísla komplexního lze též psáti, jsou-li $r$, $\varphi$ reálná a $r>0$

$$\log|r(\cos\varphi+i\sin\varphi)|=\log r+i(\varphi+2k\pi),\quad k \text{ celé}. \qquad (\mathrm{l}''')$$

Máme-li dvě čísla komplexní

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

pak jest pro součin jich podle *Moivreovy věty**)

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \qquad (n)$$

I jest tedy nejprve: *Absolutní hodnota součinu dvou (nebo i více) komplexních čísel jest rovna součinu absolutních hodnot jedno-*

---

*) *Moivreova věta* nám praví, že

$$(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

a vyplývá roznásobením a použitím adičních formulí pro funkce cos a sin.

*tlivých činitelů. Amplituda součinu dvou komplexních čísel jest rovna součtu amplitud jednotlivých činitelů.*

Pro logaritmus pak komplexního čísla vyplývá z výrazu pro součin dvou komplexních čísel a z (I‴) tento vztah

$$\log(z_1 z_2) = \log(r_1 r_2) + i(\varphi_1 + \varphi_2) + 2k\pi i = (\log r_1 + i\varphi_1) + (\log r_2 + i\varphi_2) + 2k\pi i$$

(neboť pro reálná kladná čísla $r_1, r_2$, jest $\log(r_1 r_2) = \log r_1 + \log r_2$)

a tedy $$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 + 2k'\pi i, \quad k' \text{ celé.} \qquad (11)$$

což jest **základní funkcionální relace pro logaritmus komplexního čísla,** jak jsme jej v předcházejícím definovali. Číslo celé $k'$ můžeme vždy v relaci té klásti rovné nule, lze-li amplitudu aspoň jednoho ze tří čísel $z_1, z_2, z_1 . z_2$ v rovnici té se vyskytujících libovolně si vybrati z nekonečného množství amplitud tomu číslu příslušících (a o celistvé násobky $2\pi i$ se lišících).

Stejně snadno, jako byla odvozena funkcionální relace pro logaritmus, lze odvoditi i funkcionální relace pro jiné elementární funkce komplexní proměnné v následujícím zaváděné a následkem toho bude odvození těch funkcionálních relací ponecháno jako cvičení (v nichž budou relace ty uvedeny) čtenáři k podrobnému provedení. Všechny ty funkcionální relace souvisí velmi úzce s funkcionální relací pro logaritmus, jsouce jejím téměř bezprostředním důsledkem.

Funkcionální relaci pro log z viz př. 1 ve cvičení odst. 18c.

*POZNÁMKA* 1. Je-li bod $[A_0, B_0]$ různý od bodu $[0,0]$, pak amplituda čísla $A_0 + B_0 i$ — značíme ji ampl $(A_0 + B_0 i)$ — jest, nehledě ovšem k násobku čísla $2\pi$, stanovena; zvolme si pro ni některou určitou hodnotu. Zvolíme-li dále kladné číslo $\varepsilon$ tak, aby bod $[0,0]$ *nebyl* v okolí $O(A_0, B_0; \varepsilon)$,*) jest pro všechny body $[A, B]$ toho okolí požadavkem, aby

$$|\,\mathrm{ampl}\,(A + Bi) - \mathrm{ampl}\,(A_0 + B_0 i)\,| < \pi,$$

ampl $(A + Bi)$ *stanovena jednoznačně, a to očividně jakožto funkce spojitá bodu* $[A, B]$. Neboť jest patrně rozdíl ampl $(A + Bi)$ — — ampl $(A_0 + B_0 i)$ buď rovný arc tg $B/A$ — arc tg $B_0/A_0$ aneb, jsou-li body v tom okolí, pro něž $A = 0$ (anebo jinak, prochází-li tím okolím přímka $A = 0$), jest rovný arc cotg $A/B$ — arc cotg $A_0/B_0$. Jest však amplituda tak stanovená i funkcí bodu $[A, B]$ mající totální diferenciál. Neboť jest (v důsledku toho, jak jsme vyjá-

*) Okolí tu a dále v této části používané jest čtvercem se středem v $[A_0, B_0]$; viz DP 177, kde je podáno přesné jeho vymezení.

dřili právě rozdíl amplitud pomocí rozdílu arc tg, resp. arc cotg):

$$d \operatorname{ampl}(A+iB) = \frac{A\,dB - B\,dA}{A^2+B^2}.$$

Z úvahy té však následuje, že i $\overline{\log}(A+iB)$ v okolí každého bodu různého od [0, 0] (stanovíme-li vhodně, jak bylo naznačeno, ampl $(A+iB)$ pro body toho okolí) jest funkcí komplexní bodu $[A, B]$, v níž reálná i imaginárná část jsou funkce spojité, mající totální diferenciály. Má tedy i $\overline{\log}(A+iB)$ — tak stanovený — jakožto komplexní funkce dvou reálných proměnných totální diferenciál (viz dodatek k odst. 18a), pro nějž lze psáti

$$\begin{aligned} d\,\overline{\log}(A+iB) &= d \log \sqrt{A^2+B^2} + i\,d \operatorname{ampl}(A+iB) \\ &= \frac{A\,dA + B\,dB}{A^2+B^2} + i\,\frac{A\,dB - B\,dA}{A^2+B^2} \\ &= \frac{(A-iB)\,dA + i(A-iB)\,dB}{A^2+B^2} = \frac{dA + i\,dB}{A+iB}. \end{aligned} \tag{+}$$

Specielně jest platný tento výsledek pro $\overline{\log}(A+iB)$ v okolí každého bodu neležícího na záporné části osy čísel $A$. Pro body na záporné části osy čísel reálných jest $B=0$, $A<0$ a není v okolí takovýchto bodů $\overline{\log}(A+iB)$ — podle definice amplitudy při hlavní hodnotě logaritmu — funkcí spojitou bodu $[A, B]$. Jest totiž na základě definice

$$\left.\begin{aligned} \lim_{B=0} \overline{\log}(A+Bi) &= \log A \\ \lim_{B=0} \overline{\log}(A-Bi) &= \log A - 2\pi i \end{aligned}\right\} A<0, \quad B>0.$$

Co největší obor, pro který $\overline{\log}(A+Bi)$ jest funkce spojitá bodu $A+Bi \equiv [A, B]$, obdržíme z roviny komplexní proměnné tím, že ji *„rozřízneme"* podél záporné části osy $A$ a stanovíme, že bod $A+Bi$, měně v rovině čísel kompl. svoji polohu, nepřekročí učiněný ***řez***; na řez pak sám smí dospěti toliko z horní půlroviny (z půlroviny $B>0$) anebo kratčeji vyjádřeno: bod $A+Bi$ smí dospěti toliko na horní okraj (břeh) řezu.

Kdybychom definici funkce $\overline{\log}(A+Bi)$ pozměnili v tom smyslu, že na dolním břehu řezu nabývá týchž hodnot, jako na horním zmenšených o $2\pi i$, vznikla by funkce spojitá bodu $A+Bi$, který při změně své polohy nesmí ovšem i nyní překročiti učiněný řez, má-li změna funkční hodnoty býti spojitá, kde však bod $A+Bi$ může zaujati polohu na horním i dolním břehu řezu. Podél řezu mají hodnoty funkce tak upravené na obou březích rozdíl konstantní rovný $2\pi i$. Ovšem hodnota funkce získané jest v bodě $A$, kde $A < 0$, dána dvojznačně a jednoznačně pouze tenkráte, známe-li na kterém břehu řezu bod $A$ jest.

*POZNÁMKA* 2. Volíme-li v každém bodě $[A, B]$ daného spojitého oboru dvojrozměrného jednu hodnotu pro $\log(A + iB)$ — stanovíce jednoznačně ampl $(A + iB)$ v každém tom bodě $[A, B]$ — avšak tak, aby $\log(A + iB)$ byla komplexní funkcí *spojitou**) obou proměnných v každém bodě oboru, říkáme, že jsme v daném spojitém oboru *volili jednu* **větev funkce** $\log(A + iB)$. Podle předcházející poznámky jest taková volba vždy možná v každém uzavřeném okolí bodu $[A_0, B_0]$, v němž neleží bod $[0, 0]$. Rovněž funkce $\overline{\log}(A + iB)$ jest takovou větví pro celou rovinu rozříznutou podél záporné osy $A$ (v tomto případě jsou body, pro něž $A \leqq 0$, $B = 0$, hraničními body oboru a ohraničují především půl půlroviny $B > 0$, k níž — podle definice $\overline{\log}(A + iB)$ — přináleží s výjimkou ovšem bodu $[0, 0]$; jsou však také zároveň hraničními body polovice druhé půlroviny $B < 0$).

Z definice funkce $\log(A + iB)$ následuje, že dvě různé větve stanovené pro týž obor mají ve všech bodech oboru rozdíl konstantní a rovný celočíselnému násobku čísla $2\pi i$.

Dále následuje, že každá větev $\log(A + iB)$ má v každém bodě oboru, pro který jest stanovena, totální diferenciál a všechny větve v jednom bodě týž totální diferenciál.

*Stejně definovaný pojem větve budeme používati i při ostatních funkcích mnohoznačných v následujících odst. zaváděných.*

**PŘÍKLAD 1.** Jest $\displaystyle\int \frac{G'_1(x) + iG'_2(x)}{G_1(x) + iG_2(x)}\,dx = \overline{\log}\,[G_1(x) + iG_2(x)] + k$

pro každý interval neobsahující bod $x_0$, pro nějž zároveň $G_1(x_0) \leqq 0$, $G_2(x_0) = 0$. Jest to jednak důsledek vztahu (+), jednak zevšeobecnění př. 4, odst. 8. Pro intervaly, v nichž jest bod $x_0$, lze psáti stejnou relaci, nahradíme-li na pravé straně hlavní hodnotu logaritmu jinou větví té funkce.

**PŘÍKLAD 2.** Vyloučíme-li pro jednoduchost hodnoty $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, pak z rovnice

$$\int \frac{dx}{x + (a_1 + b_1 i)} + \int \frac{dx}{x + (a_2 + b_2 i)} = \int \left[\frac{1}{x + (a_1 + b_1 i)} + \frac{1}{x + (a_2 + b_2 i)}\right] dx$$

následuje ihned vztah

$$\overline{\log}\,[x + (a_1 + b_1 i)] + \overline{\log}\,[x + (a_2 + b_2 i)] =$$
$$= \overline{\log}\,\{[x + (a_1 + b_1 i)] \cdot [x + (a_2 + b_2 i)]\} + k.$$

*Návod.* K vyčíslení integrálu na pravé straně se použije — po sečtení obou zlomků v hranaté závorce se vyskytujících — výsledku př. 1.

*) T. j. funkcí komplexní, jejíž reálná i imaginární část jsou spojité funkce.

V jakých intervalech jest získaný vztah při téže hodnotě konstanty $k$ platný? Stanovte hodnotu konstanty $k$, předpokládajíce funkcionální vztah pro logaritmus při reálné proměnné a odvoďte tak funkcionální vztah pro $\overline{\log}$ při proměnné komplexní.

**PŘÍKLAD 3.** Jestliže $R(x)$ je racionální funkce proměnné $x$ a známe-li integrál

$$\int R(x)\,dx = \varphi(x),$$

pak z rovnice této substitucí $x = ax'$, kde $a$ jest reálná konstanta, následuje ihned (čárku u $x$ vynecháváme)

$$\int R(a\,.\,x)\,a\,dx = \varphi(a\,.\,x).$$

Vztah ten však jest platný, ať jest $a$ jakékoliv číslo komplexní. (Tvrzení to postačí dokázati pro nejjednodušší funkce, na něž lze $R(x)$ rozkladem ve zlomky částečné převésti, na př. na výraz $(x-a)^{-l}$; $l$ celé, kladné; pro tento výraz jest však tvrzení to v důsledku podaných definicí téměř samozřejmé.)

**PŘÍKLAD 4.** Tvrzení příkladu předešlého lze rozšířiti i pro substituci $x = r(x')$, kde $r(x)$ jest racionální funkce proměnné $x$ s koeficienty komplexními. Neboť jednak derivování funkcí racionálních s koeficienty komplexními podle (reálné) proměnné lze prováděti podle týchž pravidel jako derivování racionální funkce s koeficienty reálnými, jednak jest ihned

$$\int \frac{r'(x)\,dx}{r(x)-a} = \overline{\log}\,(r(x)-a) + \text{konst.}$$

dle př. 1.

**PŘÍKLAD 5.** Dokažte (pomocí rozkladu ve zlomky částečné) vztah

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n + e^{ai}} = -\frac{1}{ne^{\left(1-\frac{m}{n}\right)ai}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)\frac{m}{n}\pi i}\,\overline{\log}\left(x - e^{i\frac{a+(2k+1)\pi}{n}}\right).$$

Odvoďte na podkladě tohoto výsledku integrál 3. př. odst. 18!

**18c. Definice funkce exponenciální a funkcí goniometrických pro komplexní hodnoty argumentu.** Současně s definicí logaritmu komplexních čísel (logaritmu komplexní proměnné) podám definici i jiných elementárních funkcí — souvisících s logaritmem — pro komplexní proměnnou. V oboru reálných čísel (reálných proměnných) jest funkce exponenciální inversní funkcí k logaritmické funkci. Na tomto podkladě rozšíříme význam exponenciální funkce i pro komplexní proměnné a *stanovíme:* **Je-li**

$$\log(A + iB) = x + iy,$$

***za předpokladu, že*** $A, B, x, y$ ***jsou čísla reálná,*** **jest**

$$e^{x+iy} = A + iB.$$

Avšak podle definice logaritmu čísla komplexního $A + iB$ jest, klademe-li $A + iB = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $r, \varphi$ jsou rovněž čísla reálná a $r > 0$, $x = \log r$ a $y = \varphi + 2k\pi$ (kde $k$ jest celé) a tedy $r = e^x$, $\varphi = y - 2k\pi$ a $A + iB = e^x(\cos y + i\sin y)$, *čímž rovnice definující funkci exponenciální pro komplexní hodnoty argumentu se mění v rovnici*

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{p}$$

Z $(p)$ následuje při $x=0$ *rovnost* (**Eulerova**)

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \tag{q}$$

a tedy též podle $(p)$ $$e^{x+iy}=e^x\,.\,e^{iy}.$$

Z definice dané následuje — komplexní číslo $x+iy$ označíme krátce $z$, kladouce $z=x+iy$ — že exponenciální funkce komplexní proměnné $z$ jest funkce pro každé $z$ jednoznačně definovaná. Jest dále funkce periodická o periodě $2\pi i$ (neboť nabývá téže hodnoty pro $x+i(y+2\pi)$ jako pro $x+iy$), t. j. jest platen vztah $$e^{z+2\pi i}=e^z.$$

Funkcionální relace pro $e^z$ a jiné vlastnosti této funkce viz ve cvič., př. 5, 6, 8, 9, 11.

Jest dále z $(q)$. klademe-li tam $-y$ místo $y$,

$$e^{-iy}=\cos y-i\sin y$$

a tedy $$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\quad,\quad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}. \tag{r}$$

Rovnice tyto jsou dosud platny pouze pro $y$ reálné (neboť dosavádní definice funkcí goniometrických vztahuje se pouze k reálným proměnným.) *Stanovíme-li však, rozšiřujíce tak definici funkcí goniometrických pro hodnoty komplexní, že zůstávají platny, i když $y$ nabývá hodnot komplexních, obdržíme* (místo $y$ dosadíme do rovnic těch $z=x+iy$ a na pravé straně použijeme $(p)$):

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^y+e^{-y})\cos x-\frac{i}{2}(e^y-e^{-y})\sin x=\mathrm{Ch}\,y\,.\,\cos x-i\,\mathrm{Sh}\,y\,.\,\sin x.$$

$$\sin z=\frac{1}{2}(e^y+e^{-y})\sin x+\frac{i}{2}(e^y-e^{-y})\cos x=\mathrm{Ch}\,y\,.\,\sin x+i\,\mathrm{Sh}\,y\,.\,\cos x.$$

Stejně definují se pro komplexní hodnoty proměnné i *funkce hyperbolické.* Po snadném počtu tu dostáváme

$$\mathrm{Ch}\,z=\cos iz\quad,\quad \mathrm{Sh}\,z=-i\sin iz.$$

Odtud jest patrno, že mezi funkcemi goniometrickými a hyperbolickými není v oboru komplexní proměnné podstatného rozdílu.

## Cvičení.

1. Dokažte, že pro $\overline{\log}\,z$ jest platna funkcionální relace

$$\overline{\log}\,z_1+\overline{\log}\,z_2=\log(z_1z_2)+\begin{cases}2\pi i\\ 0\\ -2\pi i\end{cases},$$

při čemž na pravé straně jest voliti tu ze tří hodnot $2\pi i$, 0, $-2\pi i$, která dohromady s imaginární části výrazu $\overline{\log}(z_1z_2)$ dává imaginární část součtu $\overline{\log}\,z_1+\overline{\log}\,z_2$.

2. Ukažte, že $\overline{\log}(x+iy)$ jest komplexní funkce proměnných $x, y$, jejíž reálná část jest na kruhu o rovnici $x^2+y^2=R^2$ konstantní a rovna $\log R$

Imaginární část její jest konstantní na polopaprscích z počátku souřadnic vycházejících a rovna $i\varphi$, kde $\varphi$ jest úhel, který polopaprsek ten svírá s osou $X$, tak volený, aby $-\pi < \varphi \leqq \pi$.

3. Je-li $m$ celistvé, jest

$$\log(z^m) + 2k\pi i = m \log z \quad \text{aneb} \quad \log z = \frac{1}{m} (\log(z^m) + 2k\pi i),$$

kde $k$ jest číslo celé závislé od toho, která z nekonečně mnohých určení logaritmů v rovnici vypsané se vyskytujících si volíme. (Plyne z funkcionální relace pro logaritmus; viz př. předch.)

3a. Dosadíme-li v druhé rovnici příkladu předch. $z^{\frac{1}{m}}$ místo $z$, obdržíme, je-li $m$ celé

$$\log z^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} (\log z + 2k\pi i).$$

Při tom jsme kladli $(z^{\frac{1}{m}})^m = z$, t. j. pokládali jsme i při $z$ komplexním $z^{\frac{1}{m}}$ za číslo, jež $m$krát samo sebou násobeno dává $z$. Pro toto číslo dostáváme v důsledku poslední rovnice (v oboru čísel komplexních) celkem $m$ různých hodnot, jež označíme $w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}$. Hodnoty ty jsou jednoznačně stanoveny jich logaritmy, pro něž dostáváme vztahy

$$\log w_r = \frac{1}{m} (\overline{\log} z + 2r\pi i) + 2k'\pi i \quad , \quad r = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

$k'$ jest libovolné číslo celé (nemající vliv na stanovení čísla $w_r$). Mezi čísly $w_0, w_1, \ldots$ jsou relace

$$w_r = w_0 e^{\frac{2r\pi i}{m}} , \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Specielně, je-li $z = 1$, jest $w_0 = 1$ a dostáváme pro $m$ různých $m$-tých odmocnin z 1 tyto hodnoty:

$$1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}, \quad \text{kde } \alpha = e^{\frac{2\pi i}{m}}.$$

4. $\overline{\log}(-1) = \pi i, \qquad \overline{\log}\, i = \frac{1}{2} \pi i, \qquad \overline{\log}(-i) = -\frac{1}{2} \pi i.$

5. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$. (Použije se formule Moivreovy; viz pozn. pod čarou na str. 34.)

6. $e^{2\pi i} = 1, \qquad e^{\pi i} = -1, \qquad e^{\frac{\pi i}{2}} = i, \qquad e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i.$ (Viz př. 4.)

7. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1,$$

$$\mathrm{Ch}(z_1 + z_2) = \mathrm{Ch}\, z_1 \,.\, \mathrm{Ch}\, z_2 + \mathrm{Sh}\, z_1 \,\mathrm{Sh}\, z_2,$$

$$\mathrm{Sh}(z_1 + z_2) = \mathrm{Sh}\, z_1 \,\mathrm{Ch}\, z_2 + \mathrm{Sh}\, z_2 \,\mathrm{Ch}\, z_1,$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad , \quad \mathrm{Ch}^2 z - \mathrm{Sh}^2 z = 1;$$

vyšetřte periodicitu funkcí goniometrických a hyperbolických a odvoďte další vztahy shodné se vztahy vám známými pro případ, že $z_1, z_2$ jsou čísla reálná

8. Ukažte, že dosadíte-li do $\cos y + i \sin y = e^{iy}$ za $\cos y$, $\sin y$ známé mocninné řady v $y$, výraz získaný bude týž, jako kdybyste do mocninného rozvoje pro $e^x$ dosadili $iy$ za $x$. T. j. pro $e^{iy}$ jest platný tento rozvoj

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots$$

Poněvadž pak pro mocninné řady v $u$ a $v$ dávající $e^u$, $e^v$, platí *identicky* (t. j. ať jest $u$, $v$ jakékoliv)

$$e^u \cdot e^v = 1 + \frac{u+v}{1!} + \frac{(u+v)^2}{2!} + \cdots,$$

jest i

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = 1 + \frac{x+iy}{1!} + \frac{(x+iy)^2}{2!} + \frac{(x+iy)^3}{3!} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

Zevrubnější výklad o řadách nekonečných s komplexními členy viz v odst. 18h a násl.

**9.** Ukažte, že rovnice $e^z = e^{a+bi}$ tenkrát a jenom tenkráte jest splněna, když

$$z = a + bi + 2k\pi i \quad . \quad a, b \text{ reálné.}$$

**10.** Vyšetřte (obdobně jako v př. předch.), pro která $z$ jsou splněny rovnice

$\alpha$) $\cos z = \cos(a+bi)$, $\quad\gamma$) $\operatorname{Ch} z = \operatorname{Ch}(a+bi)$,

$\beta$) $\sin z = \sin(a+bi)$, $\quad\delta$) $\operatorname{Sh} z = \operatorname{Sh}(a+bi)$.

**11.** Dokažte, že rovnice

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad , \quad \overline{\log}(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) = \log r + i\varphi + 2k\pi i,$$

dále rovnice definující $\cos(x+iy)$ ...., jež vesměs byly zavedeny za předpokladu, že $x$, $y$, $r$, $\varphi$ jsou čísla reálná ($r > 0$), jsou platny i tenkráte, když $x$, $y$, $r$, $\varphi$ jsou libovolná čísla komplexní.

**18d. Funkce cyklometrické pro komplexní argumenty.** Inversní funkce k funkcím goniometrickým a hyperbolickým v oboru čísel komplexních se přirozeně v podstatě své neliší (stejně jako funkce goniometrické a hyperbolické samy) a lze je obojí převésti snadno na funkci logaritmickou.

Z rovnice $\sin z = w$ aneb obšírněji

$$\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = w \quad \text{následuje řešením podle } e^{iz} \text{ vztah } e^{iz} = iw \pm \sqrt{1-w^2} \qquad (o)$$

a tedy pro $z$, jež budeme pojímati jakožto $\arcsin w$,

$$z = \arcsin w = \frac{1}{i}\log(iw \pm \sqrt{1-w^2}). \qquad (p)$$

V této rovnici nejprve určitým způsobem definujeme druhou odmocninu z čísla komplexního tam se vyskytující; stanovíme ve shodě s pozdějším ustanovením, že reálná část druhé odmocniny z čísla komplexního jest $\geq 0$, je-li pak ta reálná část rovna nule, že imaginární část (nehledě ovšem k činiteli $i$) jest kladná.*)

Označíme-li ta $z$, která z rovnice ($p$) plynou, vezmeme-li v ní znaménko +, značkou $z'$, volíme-li pak znaménko —, značkou $z''$, jest

$$e^{iz'} = iw + \sqrt{1-w^2} \quad , \quad e^{iz''} = iw - \sqrt{1-w^2} \quad \text{a tedy} \quad e^{i(z'+z'')} = -1,$$

takže (viz cvičení k předch. odstavci př. 6 a 9) $z' + z'' = \pi + 2k'\pi$.

*) Viz př. 1 ve cvičení k odst. 18$m$, kde vyjádřena $\sqrt{x+iy}$.

Z toho (a z mnohoznačnosti funkce log při kompl. hodnotách argumentu) pak jest patrno, že, je-li $z$ jednou hodnotou funkce arc sin z dané rovnicí ($p$), všecky ostatní jsou dány výrazy

$$z+2k\pi \quad , \quad \pi-z+2k\pi \quad , \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots .$$

Abychom z nekonečného množství hodnot pro tuto funkci vyjmuli jednu, již označíme $\overline{\arcsin}\, w$ a již nazveme **hlavní hodnotou** (*větví*) **funkce** $\arcsin w$, budeme požadovati:

*Reálná část výrazu* $\overline{\arcsin}\, w$ *jest v intervalu* $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. *Jestliže však reálná část jest rovna buď* $\frac{1}{2}\pi$ *anebo* $-\frac{1}{2}\pi$, *budeme ještě požadovati, aby imaginárná část výrazu* $\overline{\arcsin}\, w$ (bez činitele $i$) *byla, je-li od nuly různa, protivného znaménka. Anebo, — ve značkách matematických — označíme-li reálnou část komplexního čísla z znakem* $\Re(z)$, *imaginárnou část bez činitele i znakem* $\Im(z)$, *budiž stanoveno*

$$-\tfrac{1}{2}\pi \leqq \Re(\overline{\arcsin}\, w) \leqq \tfrac{1}{2}\pi\,; \text{ jestliže však } \Re(\overline{\arcsin}\, w) = \pm\tfrac{1}{2}\pi,\ \mp\Im(\overline{\arcsin}\, w) \geqq 0.$$

Čtenář snadno dokáže, že $\overline{\arcsin}\, w$ jest dáno tímto analytickým výrazem

$$\overline{\arcsin}\, w = \frac{1}{i}\,\overline{\log}\,(iw+\sqrt{1-w^2}). \tag{q}$$

*Pro* arcsin (a rovněž tak pro arccos a s malou změnou i pro arctg, . . .) *čísel, které již napřed jsou dána jako čísla reálná intervalu* $(-1, 1)$, *budeme však i nadále užívati označení dosavádního;* t. j. je-li $a$ dáno jako číslo reálné intervalu $(-1, 1)$, jest $\arcsin a$ číslo intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $\arcsin a = \overline{\arcsin}\, a$.

Zcela obdobně jako $\arcsin w$, definují se funkce arccos, arctg. Není třeba, abych obšírněji věc vykládal, a postačí, když uvedu *hlavní hodnoty* těch funkcí a jich vyjádření pomocí logaritmu. Jest

$$\overline{\arccos}\, w = \frac{1}{i}\,\overline{\log}\,(w+i\sqrt{1-w^2})\,, \tag{r}$$

$$\overline{\operatorname{arc\,tg}}\, w = \frac{1}{2i}\,\overline{\log}\,\frac{1+iw}{1-iw} = \frac{1}{2i}\,\overline{\log}\,\frac{i-w}{i+w}. \tag{s}$$

Pro tyto funkce jest

$$0 \leqq \Re\,(\overline{\arccos}\, w) \leqq \pi \qquad , \qquad -\frac{\pi}{2} < \Re\,(\overline{\operatorname{arc\,tg}}\, w) \leqq \frac{\pi}{2}$$

a ocitáme se ve shodě s definicemi DP 94 danými v případě, že $w$ je číslo reálné.

*POZNÁMKA* 1. Výrazy pro arcsin z, arccos z lze odvoditi jednodušeji, než svrchu bylo pro arcsin z podáno. Je-li na př. $\cos z = w$, jest $\sin z = \pm\sqrt{1-w^2}$ a tedy

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z = w \pm i\sqrt{1-w^2}, \text{ t. j. } \arccos w = \frac{1}{i}\log(w \pm i\sqrt{1-w^2}).$$

*POZNÁMKA* 2. Jsou to právě funkce cyklometrické a funkce logaritmická, jichž rozšíření pro komplexní hodnoty neodvisle proměnné při vyjadřování neurčitých integrálů jest spojeno se značným zjednodušením a zevšeobecněním vzorců. Tak na př. podle př. 2, odst. 8 jest vztah

$$(\lambda)\qquad \int \frac{dx}{ax^2+b} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} \frac{ax}{\sqrt{ab}} + k$$

platný pouze pro $ab > 0$. Avšak je-li $ab < 0$, můžeme nyní do vzorce toho dosaditi $\sqrt{ab} = i\sqrt{-ab}$ a obdržíme podle $(s)$ zavádějíce hned hlavní větev

$$\frac{1}{i\sqrt{-ab}} \operatorname{arc\,tg} \frac{-iax}{\sqrt{-ab}} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{ax - \sqrt{-ab}}{ax + \sqrt{-ab}} + k',$$

t. j. dostaneme z integrálního vzorce $(\lambda)$ vzorec uvedený na cit. místě pro případ, že $ab < 0$.

Jiný příklad užitečnosti zmíněného rozšíření vysvitne z následujícího příkladu. Jest

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + k, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log \overline{x + \sqrt{x^2-1}} + k'.$$

V obou integrálech se vyskytuje za znaménkem integračním druhá odmocnina dvou funkcí až na znaménko shodných; funkce však, jimž integrály dané jsou rovny, zdají se na prvý pohled zcela různého druhu. Ale podle $(p)$ jest $\left(\overline{\log}\, i = \frac{\pi i}{2}\right)$:

$$\overline{\log}\, i + \overline{\log}\, |x + \sqrt{x^2-1}| = \overline{\log}\,(ix + i\sqrt{x^2-1}) = i\, \overline{\arcsin}\, x;\ x \text{ reálné a} > 1.$$

Tedy v oboru čísel komplexních i funkce vyjadřující oba integrály dají se psáti ve tvarech skoro shodných, jež rovněž se liší, nehledíme-li k integrační konstantě, toliko faktorem $i$.

## Cvičení.

1. Buďtež zdůvodněny definice inversních funkcí ke cotg, Sh, Ch, Th, Cth (jich oprávněnost a účelnost)

$$\operatorname{arc\,cotg} w = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2i}\log\frac{1+iw}{1-iw} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2i}\log\frac{i-w}{i+w}$$

$$\overline{\operatorname{arg\,Sh}}\, w = \frac{1}{i}\,\overline{\arcsin}\, iw, \qquad \overline{\operatorname{arg\,Ch}}\, w = i\,\overline{\arccos}\, w$$

$$\overline{\operatorname{arg\,Th}}\, w = \frac{1}{i}\,\overline{\operatorname{arc\,tg}}\, iw, \qquad \overline{\operatorname{arg\,Cth}}\, w = \overline{\operatorname{arg\,Th}}\, \frac{1}{w}\,.$$

2. Mezi cyklometrickými funkcemi komplexního argumentu jsou obdobné relace funkcionální jako mezi cyklometrickými funkcemi reálné proměnné.

Zejména jest

$$\overline{\operatorname{arc\,tg}}\, w + \overline{\operatorname{arc\,tg}}\, w' = \overline{\operatorname{arc\,tg}}\, \frac{w + w'}{1 - ww'} + \begin{cases} \pi \\ 0 \\ -\pi \end{cases}$$

$$\overline{\arcsin}\, w + \overline{\arcsin}\, w' \text{ buď} = \overline{\arcsin}\, (w\sqrt{1 - w'^2} + w'\sqrt{1 - w^2})$$

$$\text{aneb} = \pm\pi - \overline{\arcsin}\, (w\sqrt{1 - w'^2} + w'\sqrt{1 - w^2}).$$

Důkaz prvé z těchto dvou relací jest snadný, plyne bezprostředně z rovnice (s). Druhá z nich následuje rovněž bezprostředně téměř ze (q), uváží-li se, že jest identicky

$$(w\sqrt{1 - w'^2} + w'\sqrt{1 - w^2})^2 + (\sqrt{1 - w^2}\sqrt{1 - w'^2} - ww')^2 = 1.$$

Při tom jest ovšem nutno vycházeti z funkcionální relace pro logaritmus. (Cvičení k 18c, příklad 1.)

3. Budiž dokázáno, že rovnice platná pro $A > 0$.

$$\int \frac{dx}{x^2 + A} = \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{A}} + k$$

zůstane v platnosti, dosadíme-li za $A$ číslo komplexní $a + bi$ (a na pravé straně místo arc tg píšeme $\overline{\operatorname{arc\,tg}}$). Návod: Provede se rozklad ve zlomky částečné, pak použije se rovnice (m) z odst. 18b a konečně rovnice (s) v 18d.

**18e. Obecná exponenciální funkce a mocnina v oboru komplexních čísel.** Jsou-li $a, x$ čísla reálná a $a$ zároveň kladné, jest platný vztah

$$a^x = e^{x \log a}.$$

Jsou-li $A, z$ čísla komplexní, užíváme pojmenování *mocnina* i pro symbol $A^z$, jenž jest definován obdobnou rovnicí ($A \neq 0$)

(l) $$A^z = e^{z \log A}; \quad A \text{ mocněnec, } z \text{ mocnitel (exponent).}$$

Jí jest symbolu $A^z$ přisouzeno nekonečně mnoho hodnot, neboť $\log A$ má v oboru čísel komplexních nekonečné množství hodnot lišících se o celistvý násobek čísla $2\pi i$.*) Mezi těmi hodnotami vybereme si opět jednu, t. zv. *hlavní* hodnotu mocniny $A^z$, která vyplyne z rovnice definující $A^z$, klademe-li v ní místo $\log A$ jeho hlavní hodnotu. Označení a definice té hlavní hodnoty jest dána rovnicí

$$\overline{A^z} = e^{z \overline{\log} A}.$$

*Je-li však $A$ dáno jakožto číslo reálné, kladné, bude značiti**) již $A^z$ hlavní hodnotu té funkce (i při komplexním $z$)*: bude tedy $A^z$ při reálném kladném $A$ funkcí jednoznačně stanovenou. Stejně jako ostatní elementární funkce jest i $A^z$ v oboru komplexních čísel definováno tak, že je to číslo komplexní, jehožto reálná i imaginární část jsou reálné funkce reálných čísel (proměnných) určujících čísla komplexní $z$, $A$. Klademe-li $z = x + iy$, $\overline{\log} A =$

---

*) Je-li $z$ číslo reálné racionálné jest mezi hodnotami, jež definicí jsou symbolu $A^z$ přiřazeny, jenom konečný počet různých (v důsledku okolnosti, že exponenciální funkce jest periodická s periodou $2\pi i$).

**) Pokud ovšem není jiné stanovení zvláště výslovně zavedeno.

$= \log a + i\alpha$, kde $x, y, a, \alpha$ jsou čísla reálná, — při tom $a > 0$ a $\alpha$ v intervalu $(-\pi + 0, \pi)$ — jest po dosazení do rovnice definující hlavní hodnotu v důsledku vztahů odst. 18c

$$\overline{A^z} = a^x e^{-y\alpha} [\cos(\alpha x + y \log a) + i \sin(\alpha x + y \log a)]$$

a obecněji $\qquad A^z = \overline{A^z} \,.\, e^{-2k\pi y} [\cos 2k\pi x + i \sin 2k\pi x]$.

**PŘÍKLAD 1.** Dokažte, že, jsou-li $a, b$ čísla reálná, kladná, $z_1, z_2, z$ čísla komplexní, platny jsou relace

$$a^{z_1} . a^{z_2} = a^{z_1 + z_2} \quad , \quad (a^{z_1})^{z_2} = a^{z_1 z_2} \quad , \quad a^z . b^z = (ab)^z.$$

Vyšetřte, zda a za jakých podmínek lze rozšířiti platnost těchto relací, i když v nich zavedete za $a, b$ čísla komplexní $A, B$. Zvláště pak vyšetřte, zda rovnice ty zůstávají v platnosti pro hlavní hodnoty příslušných mocnin, a pak, zavedete-li na jedné straně těch rovnic nějaké jiné určení (větev) příslušné mocniny (než hlavní hodnotu), zda na druhé straně lze voliti určení příslušné mocniny (příslušných mocnin) tak, aby relace zůstala správná.

**PŘÍKLAD 2.** Jest (k označení viz poznámku 3.)

$$\frac{1}{\sqrt{A}} = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{A}},$$

kde $\varepsilon = -1$, je-li $A$ číslo záporné reálné, jinak $\varepsilon = +1$.

*POZNÁMKA* 1. Funkce $A^z$ tudefinovaná jest funkcí závislou na dvou veličinách komplexních, jednak na $A$, jednak na $z$. Je-li $A$ pevně dáno a $z$ veličina proměnná, sluje $A^z$ **obecná exponenciální funkce při základu** $A$. Zvolíme-li v rovnici (1) funkci tu definující také $\log A$ pevně (volíce jedno z nekonečně mnohých určení toho logaritmu), jest $A^z$ funkcí v celé rovině jednoznačně definovanou a spojitou proměnné $z$.

Jestliže naopak jest $A$ veličina proměnná a $z$ pevně dáno, jest $A^z$ **obecnou mocninou** *proměnné veličiny $A$ povýšené na exponent komplexní $z$.* Abychom se přiblížili obvyklému označení, zaměníme $A$ a $z$ navzájem a budeme pak opět pokládati $A$ za pevné, $z$ za proměnnou. *Obecná mocnina proměnné $z$ na exponent $A$* jest dána vztahem

$$z^A = e^{A \log z} = e^{A \log z + 2Ak\pi i}, \qquad k \text{ celé}$$

jest to funkce mající, není-li $A$ číslem reálným racionálným, pro každé $z$ různé od nuly nekonečné množství hodnot lišících se různými hodnotami veličiny $k$. Zvolíme-li si v rovnici právě napsané $k$ pevně, dostaneme jednu větev té funkce, kterážto jest funkcí spojitou proměnné komplexní $z$ s výjimkou bodů $z = x + iy$, pro něž $x \leq 0$, $y = 0$.

*POZNÁMKA* 2. Rovnice jako na př. $\log z_1 + \log z_2 = \log (z_1 z_2)$, $A^{z_1} . A^{z_2} = A^{z_1 + z_2}$ pro případ, že $z_1, z_2, A$ jsou čísla komplexní, jsou jakýmsi novým druhem rovnic: neboť veličiny v nich se vyskytující nejsou určeny jednoznačně. Zpravidla se rovnicím toho druhu přikládá tento význam: Dosadíme-li na levou stranu těch rovnic některá libovolně zvolená určení veličin (veličiny) tam se vyskytujících, pak vždy existují (existuje) určení veličin (veličiny) na pravé straně se vyskytujících taková, že, dosadíme-li také na pravou stranu tato určení, rovnost obyčejná tak vznikající jest splněna. V tomto smyslu rovnice $\log z_1 + \log z_2 = \log (z_1 z_2)$ jest správná: rovnice však $A^{z_1} . A^{z_2} = A^{z_1+z_2}$ neplatna.*) Naproti tomu i rovnice $\log (z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$ i rovnice $A^{z_1+z_2} = A^{z_1} . A^{z_2}$ jsou platny. V důsledku toho označujeme rovnost $\log z_1 + \log z_2 = \log (z_1 z_2)$ jakožto úplnou: *rovnost pak* $A^{z_1+z_2} = A^{z_1} . A^{z_2}$, *ve které nelze zaměniti obě strany navzájem, za neúplnou.*

*POZNÁMKA* 3. Jestliže exponent mocniny jest číslo racionálné, užívá se často znaménka odmocninového. V tomto případě značiti bude $\sqrt{A}$ vždy hlavní hodnotu výrazu $A^{\frac{1}{2}}$, ať jest $A$ číslo reálné či komplexní. Jsme-li pak v oboru čísel reálných, značiti bude $\sqrt[n]{A}$ reálnou hodnotu výrazu $A^{\frac{1}{n}}$, která jest nad to při $n$ sudém (v tomto případě jest $A \geqq 0$) kladna ($\geqq 0$).

V každém jiném případě bude nutno význam symbolu $\sqrt[n]{A}$ zvláště stanoviti.

**18f. Elementární funkce transcendentní.** Funkce v předcházejících odstavcích definované i pro komplexní proměnnou $z$, t. j. funkce

$$e^z,\ \log z,\ \cos z,\ \sin z,\ \operatorname{tg} z,\ \operatorname{cotg} z,\ \operatorname{Ch} z,\ \operatorname{Sh} z,\ \operatorname{arc\,cos} z,\ \operatorname{arc\,sin} z,\ \operatorname{arc\,tg} z,\ A^z,\ z^A$$

slují elementární funkce transcendentní. Všecky tyto funkce jsou, je-li $z = x + iy$, v podstatě komplexní funkce dvou reálných proměnných $x, y$: platna pak jest pro ně jedna důležitá věta. Odvoďme ji na př. pro $e^z$. Z rovnice ($p$), odst. 18c následuje ihned

$$\frac{\partial e^z}{\partial x} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z \quad , \quad \frac{\partial e^z}{\partial y} = e^x (-\sin y + i \cos y) = i e^z$$

a tedy pro totální diferenciál funkce $e^z$

$$de^z = \frac{\partial e^z}{\partial x} dx + \frac{\partial e^z}{\partial y} dy = e^z (dx + i dy) \quad , \quad \text{t. j. } de^z = e^z dz.$$

Při tom jest ovšem $dz = dx + idy$. *Lze-li psáti totální diferenciál komplexní funkce* $f(z) = f(x + iy)$ *dvou reálných proměnných* $x, y$ *ve tvaru* $df(z) = g(z)(dx + i dy)$ aneb $df(z) = g(z) dz$

*) Viz příklad 1 tohoto odst.

*pro všecka* $z = x + iy$ *jistého oboru proměnné* $z$ (aneb proměnných $x, y$), *pak říkáme, že funkce* $f(z)$ *komplexní proměnné* $z$ *má v oboru tom* **derivaci podle** $z$ *rovnou* $g(z)$. *Derivaci tu značíme* $f'(z)$, *kladouce tedy* $g(z) = f'(z)$, *a jest zároveň* $\frac{\partial f(z)}{\partial x} = f'(z)$, $\frac{\partial f(z)}{\partial y} = if'(z)$. (Viz DP, 194, rovn. (II.))

Má tedy $e^z$ derivaci v každém bodě roviny komplexní proměnné $z$ a jest $(e^z)' = e^z$. V poznámce 1. odst. 18b dokázáno podobně

$$d \log (x + iy) = \frac{dx + i\,dy}{x + iy} = \frac{dz}{z} \quad \text{a tedy} \quad (\log z)' = \frac{1}{z}$$

pro všechna $z$ neležící na záporné části osy reálných částí: má tedy i $\overline{\log} z$ a rovněž i větve funkce $\log z$ jinak definované derivaci. Obdobné výsledky lze docíliti i pro ostatní elementární funkce. Můžeme však při tomto odvozování často s prospěchem použíti obecných vět pro derivaci, které v následujícím si odvodíme.

1. Nechť jest $w = F(z)$ funkcí proměnné kompl. $z$, mající derivaci $F'(z)$: $z = x + iy$ pak nechť jest dále (komplexní) funkcí další komplexní proměnné $t$, t. j. nechť $z = \varphi(t)$ a nechť i tato funkce má derivaci $\varphi'(t)$. Jest tedy $w$ — prostřednictvím proměnné $z$ — funkcí proměnné $t$ (tudíž t. zv. *funkcí funkce*). Z předpokladu následuje

$$dw = F'(z)\,dz \quad , \quad dz = \varphi'(t)\,dt, \quad \text{odkudž } (DP\ 197,\ \text{rovn. } (IIb))\ dw = F'(z)\,\varphi'(t)\,dt$$

*má tedy* $w$, *pokládáme-li ji, jak naznačeno, za funkci proměnné* $t$, *derivaci podle* $t$ *a derivace ta jest rovna* $F'(z)\,\varphi'(t)$. Tato věta nám dává pravidlo pro derivování funkce funkce, jež jest shodné s pravidlem užívaným při proměnných reálných. Při odvozování jest mlčky předpokládáno, že $z$ i $t$ nacházejí se v oborech, ve kterých derivace předpokládané existují.

2. Nechť $f(z)$ a $\varphi(z)$ jsou funkce k sobě inversní, jako na př. $\sin z$ a $\arcsin z$. Pak jest pro všecka $z$ jistého oboru identicky $z = f(\varphi(z))$. Předpokládejme dále, že pro všecka $z$ toho oboru jest $\varphi(z)$ funkcí spojitou a že příslušné hodnoty $\varphi(z)$ nacházejí se v oboru proměnné $\varphi(z)$, v němž $f(\varphi)$ má derivaci podle $\varphi$ rovnou $f'(\varphi)$. Pak z rovnice $z = f(\varphi(z))$ následuje (podle předcházející úvahy)

$$dz = f'(\varphi(z))\,d\varphi \quad , \quad \text{t. j.} \quad d\varphi = \frac{dz}{f'(\varphi(z))}\ ; \ \text{je-li } f'(\varphi(z)) \neq 0,$$

t. j. *funkce* $\varphi(z)$ *má derivaci podle* $z$, *jež jest rovna* $1/f'(\varphi(z))$, což opět shoduje se s pravidlem pro derivování inversní funkce při proměnné reálné známým z diferenciálního počtu.

3. Je-li $w = F(z_1, z_2, \ldots)$ funkcí několika proměnných komplexních $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2, \ldots$ mající derivaci podle každé z těchto proměnných, pak podle předcházejícího existují částečné diferenciály (DP, 205) funkce $w$ podle jednotlivých proměnných $z_1, z_2 \ldots$ (t. j. existují částečné diferenciály té funkce podle jednotlivých párů $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \ldots$ veličin proměnných reálných). Částečné ty diferenciály označíme (zavádějíce symbol pro částečnou derivaci podle proměnné komplexní)

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} dz_1 \ , \ \frac{\partial F}{\partial z_2} dz_2, \ldots$$

Jsou-li však derivace ve výrazech těchto se vyskytující vesměs funkce spojité proměnných $z_1, z_2, \ldots$ v jistém oboru $\Omega$, pak existuje v $\Omega$ i totální diferenciál (t. j. diferenciál podle všech proměnných v úvahu přicházejících)

$$dw = \frac{\partial F}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial F}{\partial z_2} dz_2 + \cdots$$

(DP, 204). Jestliže dále $z_1 = \varphi_1(t)$, $z_2 = \varphi_2(t), \ldots$, kde funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ jsou funkce mající derivace $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots$ pro všecka $t$ oboru $\omega$, ve kterémžto oboru $z_1, z_2 \ldots$ nabývají právě hodnot oboru $\Omega$, pak $w$ jakožto funkce proměnné $t$ má derivaci podle této proměnné (stejně jako v případu 1., viz DP 207). Neboť pak jest $dz_1 = \varphi_1'(t)\, dt, \ldots$ a derivace zmíněná jest

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial F}{\partial z_1} \varphi'_1(t) + \frac{\partial F}{\partial z_2} \varphi'_2(t) + \cdots$$

(*Pravidlo o derivování funkce funkcí.*) Pravidlo tak získané se shoduje s pravidlem platným při derivování funkce funkcí v oboru reálných proměnných. Jako zvláštní případy pravidla odvozeného lze uvésti pravidla pro derivování součtu, součinu a podílu dvou funkcí.

**PŘÍKLAD 1.** Jest stanoviti derivaci mocniny $z^A$. Jest

$z^A = e^{A \log z}$ a tedy podle 1. $(z^A)' = e^{A \log z} \cdot (A \log z)' = A z^{A-1}$.

**PŘÍKLAD 2.** Derivace $\arcsin z = w$ se vypočte jakožto derivace inversní funkce k funkci $z = \sin w$. Jest podle 2.

$(\arcsin z)' = \dfrac{1}{\cos w} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$. (NB. Proč vzato u odmocniny znaménko $+$?)

**PŘÍKLAD 3.** Ukažte, že elementární funkce transcendentní mají derivace a diferenciály všech řádů. Tak na př. postupné diferenciály funkce exponenciální jsou

$$de^z = e^z . dz \ , \ d^2 z = e^z . dz^2 \ , \ d^3 z = e^z . dz^3, \ldots, \ldots$$

Obecně má $\lambda$-tý diferenciál elementární funkce transcendentní tvar

$$d^\lambda f(z) = f^{(\lambda)}(z)\, dz^\lambda = f^{(\lambda)}(z)\, (dx + i\, dy)^\lambda.$$

Výsledek tento jest platný očividně i pro funkce, které z elementárních transcendent vznikly operacemi racionálnými, inversí a jakožto funkce funkcí. Pokud ovšem funkce takto vznikající jsou jednoznačně definovány a jsou v příslušných oborech spojity.

**18h. Nekonečné řady, jichž členové jsou čísla komplexní.** Nekonečná řada

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots\cdots \tag{1}$$

kde $w_k = u_k + iv_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ a $u_k$, $v_k$ jsou čísla reálná, vzniká formálně sčítáním dvou řad nekonečných s reálnými členy

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots \tag{2}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots\cdots \tag{3}$$

když jsme dříve druhou z těchto řad násobili imaginární jednotkou. Říkáme pak, že řada (1) jest konvergentní a má součet $U + Vi$, jsou-li řady (2) a (3) konvergentní a mají-li zároveň součty $U$ a $V$. Není-li aspoň jedna z řad (2), (3) konvergentní, říkáme, že řada (1) není konvergentní, aneb, že jest divergentní.

Jestliže nekonečná řada z kladných členů

$$|w_1| + |w_2| + |w_3| + \cdots\cdots \tag{4}$$

konverguje, konvergují i řada (2) i řada (3) a to obě absolutně, neboť $|w_k| = \sqrt{u^2_k + v^2_k}$ a tedy

$$|u_k| \leqq |w_k| \qquad |v_k| \leqq |w_k|$$

a naopak, konvergují-li (2) a (3) absolutně, konverguje i řada (4); my pak říkáme, že ř (1) *konverguje absolutně* a jest z předcházejícího patrno, že nutná a postačující podmínka, aby (1) konvergovala absolutně, jest, aby řada (4), řada to kladných čísel, konvergovala.

Jsou-li $u_k$ a $v_k$ funkce jedné nebo i více proměnných a konvergují-li (2) a (3) stejnoměrně v jistém oboru těch proměnných, pak říkáme, že i (1) konverguje stejnoměrně v tom oboru. Z předcházejícího jest rovněž patrno, že postačující (nikoliv však nutná) podmínka, aby řada (1), kde $w_k$ jsou komplexní funkce proměnných $x, y, \ldots$, konvergovala stejnoměrně v oboru $\Omega$, jest, aby v tom oboru stejnoměrně konvergovala řada (4).

**18k. Řady potenční komplexní proměnné.** Je-li $a_0, a_1, a_2, \ldots$ řada čísel komplexních (o nekonečném počtu členů) a $z = x + iy$, sluje

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots \tag{5}$$

(nekonečná) řada potenční proměnné $z$. Budiž k vůli stručnosti $|a_k| = A_k$, $|z| = Z$. Pak jest řada

$$A_0 + A_1 Z + A_2 Z^2 + \cdots\cdots \tag{6}$$

řadou potenční reálné (kladné) proměnné Z. Na základě vět předcházejícího odstavce odvodí čtenář snadno tyto věty: Označíme-li $R$ poloměr konvergence řady (6) — viz DP 142 — pak:

1. Řada (5) konverguje absolutně pro všecka z, jichž abs. hodnota jest menší než $R$ a diverguje pro všecka z, kde $|z| > R$. (V tomto posledním případě nejsou členové řady (6) svrchu ohraničeni a tudíž i členové řady (5) v absolutních hodnotách).

2. Řada (5) konverguje stejnoměrně pro všecka z, při nichž $|z| < R'$, kde $R'$ jest číslo kladné menší než $R$.

*Číslo R sluje též poloměr konvergence řady (5) a ta z, pro něž nastává absolutní konvergence řady (5), vyplňují vnitřek kruhu se středem v počátku a s poloměrem R.*

Řada
$$a_1 + 2a_2 z + 3 a_3 z^2 + 4 a_4 z^3 + \cdots\cdots \tag{7}$$
má týž poloměr konvergence jako řada (5) (viz DP, 144). Označíme-li $f(z)$ součet řady (5), když $|z| < R$, jest součet řady (7) pro uvedená z derivací funkce $f(z)$. Neboť je-li $|z| < R$, lze udati číslo (položené mezi $|z|$ a $R$) takové, že $|z| < R' < R$: avšak pro všecka $|z| < R'$ konverguje řada (7) stejnoměrně: tedy jest pro $|z| < R'$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial y} = ia_1 + 2\, ia_2 z + 3\, ia_3 z^2 + 4\, ia_4 z^3 + \cdots\cdots$$

a tedy $$df(z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots\cdots)(dx + idy).$$

*Má tedy vskutku řada potenční proměnné z pro všecka z uvnitř kruhu konvergenčního se nacházející derivaci podle z, která jest dána řadou (7).*

**181. Rozvoj elementárních funkcí komplexní proměnné** $z$ **v řady mocninné.** Elementární funkce transcendentní dají se v důsledku toho, jak byly definovány, rozvinouti v řady mocninné postupující podle mocnin $x$, $y$, je-li $z = x + iy$, jak čtenář snadno na základě definic těch funkcí dokáže. Koeficienty těch (a i jiných) rozvojů mocninných lze vypočítati pomocí formule Taylorovy (DP, str. 326, rovn. (B)). Tak kdybychom chtěli rozvinouti funkci $f(a + \zeta)$, kde $\zeta = \xi + i\eta$ a $a = b + ic$ (při čemž $\xi$, $\eta$, $b$, $c$ jsou čísla reálná), kladli bychom podle té formule

$$f(a + \zeta) = (f)_a + \frac{(df)_a}{1!} + \frac{(d^2 f)_a}{2!} + \frac{(d^3 f)_a}{3!} + \cdots\cdots,$$

$(d^k f)_a$ značí tu $k$-tý diferenciál funkce $f(z)$ v bodě $z = a$, v němž za přírůstky proměnných $x, y$ voleny hodnoty $\xi, \eta$ (místo obvyklých $dx, dy$). Avšak podle př. 3., odst. 18f jest

$$(d^k f)_a = f^{(k)}(a)\,(\xi + i\eta)^k = f^{(k)}(a)\,\zeta^k,$$

takže rozvoj Taylorův se mění v rozvoj

$$f(a+\zeta) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\zeta + \frac{f''(a)}{2!}\zeta^2 + \cdots\cdots \tag{8}$$

Při tom jest $f(z)$ funkce elementární transc. Může však to býti i funkce, která z elementární transcendentní vznikne operacemi racionálnými, po případě ještě operacemi spočívajícími jednak v inversi, jednak ve tvoření funkce funkcí, má-li jenom $f(z)$ v bodě $a$ derivaci a dovedeme-li jinak zdůvodniti, že $f(a+\zeta)$ se dá rozvinouti v řadu potenční proměnných $\xi, \eta$. Výsledná řada (8) jest řada mocninná jedné proměnné, avšak komplexní, t. j. proměnné $\zeta = \xi + i\eta$. Ke zdůvodnění toho, že $f(a+\zeta)$ lze rozvinouti v řadu mocninnou proměnných $\xi, \eta$, postačí známé věty diferenciálního počtu (DP 216, 233). Když jsme odvodili rozvoj v (8), o kterém jest nám dosud jenom známo, že jest platný pouze pro dosti malou $|\zeta|$, zbývá nám vyšetřiti obor proměnné $\zeta$ — pokud možno největší — pro který rovnice (8) jest platna. V následujícím jednoduchém příkladě naznačím, jak možno postupovati.

**PŘÍKLAD.** Jest odvoditi rozvoj pro $\log(1+\zeta)$. Kdyby $\zeta$ bylo reálné, měli bychom rozvoj

$$\log(1+\zeta) = \frac{\zeta}{1} - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^3}{3} \cdots\cdots \tag{9}$$

platný v intervalu $(-1+0, 1)$. Užijeme-li (8) na $\log(1+\zeta)$, kde tedy $a = 1$, dostaneme pro $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ ...... tytéž hodnoty, ať jest $\zeta$ reálné nebo komplexní a tedy rozvoj (8) se v tomto zvláštním případě redukuje na (9). Běží tedy jenom o to, vyšetřiti obor komplexní proměnné $\zeta$, ve kterém jest platna rovnice (9). Postupovati při tom můžeme takto: Pravá strana má význam, když $|\zeta| < 1$, a nemá význam, je-li $|\zeta| > 1$. Pro všecka $\zeta$, jichž $|\zeta| < 1$, jest derivace pravé strany $1/1+\zeta$ (viz odstavec předch). Derivace levé strany v tomtéž oboru jest rovněž $1/1+\zeta$. Jest tedy rozdíl levé a pravé strany pro $\zeta$, jichž $|\zeta| < 1$, konstanta (DP 202, př. 1), ta konstanta však jest nula, neboť, je-li $|\zeta| < 1$ a $\zeta$ reálné, rozdíl levé a pravé strany jest nula. Jest tudíž (9) platno pro všecka $\zeta$ uvnitř kruhu konvergenčního pravé strany položená, t. j. pro všecka $\zeta$, jichž $|\zeta| < 1$.

**18m. Neurčitý integrál z funkce komplexní proměnné.** Právě tak jako jsme definovali neurčitý integrál (*funkci primitivní*) k funkci proměnné reálné, lze definovati též neurčitý integrál (funkci prim.) k funkci proměnné komplexní. Zavedeme si při tom i stejné označení a bude zejména rovnice

$$F(z) = \int f(z)\, dz \qquad \text{v oboru } \Omega \text{ proměnné } z$$

nám říkati, že $F(z)$ má v oboru $\Omega$ derivaci rovnou $f(z)$ anebo — což jest totéž — že $F(z)$ jakožto komplexní funkce dvou reálných proměnných $x, y$ (je-li ovšem $z = x + iy$) má totální diferenciál v $\Omega$ rovný $f(z)\,dz = f(z)\,(dx + i\,dy)$. Podstatné při tom jest udání oboru $\Omega$, ve kterém vztah vypsaný jest platný. Na př.

$$\int \frac{dz}{z - a} = \log(z - a) + \text{konst.}$$

v oboru, který vznikne z roviny $XY$, rozřízneme-li ji podél polopaprsku vycházejícího z bodu $a$ a rovnoběžného se záporným směrem osy $X$. V oboru tak vzniklém má $\log(z - a) + \text{konst.}$ všady derivaci rovnou $1/(z - a)$ s výjimkou bodů položených na řezu, hraničních to bodů oboru, ve kterýchž bodech jest $\overline{\log}\,(z - a)$ funkcí nespojitou.*)

Pro počítání neurčitých integrálů z elementárních transcendent a potenčních řad, jakož i z funkcí, které z těchto dvou skupin vznikly racionálnými operacemi, inversí, jakožto funkce funkcí, platna jsou tatáž pravidla, která odvozena byla v odstavcích 5., 6., 7., 8. pro funkce reálné. Neboť věty, o které se odvození pravidel těch opíralo, jsou beze změny platny i pro funkce komplexní proměnné. Avšak i metoda derivace podle parametru se dá snadno pro komplexní proměnné rozšířiti, jak čtenář bez nejmenší potíže se může přesvědčiti, užívaje známých vět počtu differenciálního.

## Cvičení.

1. V předcházejících odstavcích jsme definovali elementární funkce čísla $z = x + iy$, kde $x, y$ jsou čísla reálná. V některých případech provedli jsme vyjádření těch funkcí explicitně pomocí $x, y$. Tak na př. jest $e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$. Proveďte toto vyjádření i v jiných případech; zvláště pak dokažte vztahy:

$$\sqrt{x + iy} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)} + i\varepsilon' \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)},$$

$$\overline{\operatorname{arc\,tg}}\,(x + iy) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2 + y^2 - 1 + \sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4y^2}}{2x} + \frac{i}{4} \log \frac{x^2 + (1 + y)^2}{x^2 + (1 - y)^2},$$

*) Avšak i v těchto bodech bychom mohli připustiti existenci derivace, kdybychom je přibírali k horní půlrovině roviny $XY$ (t. j. půlrovině, pro jejíž body jest $y > 0$) a pojem derivace obdobně rozšířili jako při reálných proměnných se stalo zavedením derivací zleva a zprava.

$$\overline{\operatorname{arc\,cotg}}(x+iy)=\operatorname{arc\,cotg}\frac{x^2+y^2-1+\sqrt{(x^2+y^2+1)^2-4y^2}}{2x}+\frac{i}{4}\log\frac{x^2+(1-y)^2}{x^2+(1+y)^2},$$

$$\overline{\arcsin}\,(x+iy)=\arcsin\varepsilon\sqrt{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+1)-\sqrt{\varDelta}}+$$
$$+i\log\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+1)+\sqrt{\varDelta}}+\varepsilon'\sqrt{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2-1)+\sqrt{\varDelta}}\right]$$
$$\overline{\arccos}\,(x+iy)=\arccos\varepsilon\sqrt{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+1)-\sqrt{\varDelta}}+$$
$$+i\log\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+1)+\sqrt{\varDelta}}-\varepsilon'\sqrt{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2-1)+\sqrt{\varDelta}}\right].$$

Při tom jest $\varepsilon=\pm 1$, $\varepsilon'=\pm 1$, takže $\varepsilon x$, $\varepsilon' y$ jsou čísla kladná; je-li $y=0$, jest v prvé rovnici $\varepsilon'=1$; ve vztazích pro arcsin, arccos jest $\varepsilon'=\pm 1$ v případě, že $y=0$, takové, že $\varepsilon' x$ jest záporné. Dále jest při tom

$$\varDelta=\left(\frac{x^2+y^2+1}{2}\right)^2-x^2=\left(\frac{x^2+y^2-1}{2}\right)^2+y^2.$$

*Návod.* Abychom vypočetli na př. $\overline{\arcsin}\,(x+iy)$, klademe jej rovný $u+iv$. Z toho $x+iy=-\frac{1}{2}i(e^{iu}e^{-v}-e^{-iu}e^{v})$; z této rovnice pak přirovnáním části reálné a imaginárné získáváme dvě rovnice, z nichž následuje svrchu uvedená hodnota. Míti na paměti, že na př. $\sqrt{x^2}=\varepsilon x$. Můžeme však také výrazy podané ještě jednodušeji odvoditi, a to z rovnic dávajících příslušné funkce pomocí logaritmu, jako na př. z rovnice ($q$) odst. 18d.

2. Dokažte, že

$$\overline{\arcsin}\,(x+iy)+\overline{\arccos}\,(x+iy)=\frac{1}{2}\pi,\quad \overline{\operatorname{arctg}}\,(x+iy)+\overline{\operatorname{arc\,cotg}}\,(x+iy)=\frac{\pi}{2}.$$

(Hlavní hodnota funkce arccotg $z$ nechť jest definována tak, aby její reálná část byla v intervalu $(0, \pi-0)$).

3. Výrazy pro $\overline{\operatorname{arctg}}$ a $\overline{\arcsin}$ v př. 1. uvedené lze psáti též ve tvaru

$$\overline{\operatorname{arctg}}\,(x+iy)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-(x^2+y^2)}+\frac{i}{4}\log\frac{x^2+(1+y)^2}{x^2+(1-y)^2},\quad \text{je-li}\quad x^2+y^2<1$$

$$=\frac{1}{2}\pi\varepsilon+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-(x^2+y^2)}+\frac{i}{4}\log\frac{x^2+(1+y)^2}{x^2+(1-y)^2},\quad \text{je-li}\quad x^2+y^2>1$$

$$\overline{\arcsin}\,(x+iy)=\arcsin\delta+i\log\left[\sigma+\varepsilon'\sqrt{\sigma^2-1}\right],$$

kde $\varepsilon$ a $\varepsilon'$ má význam vytčený v př. 1. s dodatkem, že $\varepsilon=1$, je-li $x=0$, a kde

$$\delta=\frac{1}{2}\left[\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right],$$

$$\sigma=\frac{1}{2}\left[\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right].$$

Lze ovšem též psáti

$$\overline{\arcsin}\,(x+iy)=\arcsin\delta+i\varepsilon'.\operatorname{arg\,Ch}\sigma,$$
$$\overline{\arccos}\,(x+iy)=\arccos\delta-i\varepsilon'.\operatorname{arg\,Ch}\sigma.$$

Tu jest $\operatorname{arg\,Ch} x$ inversní (reálná) funkce ku hyperbolické funkci Ch definovaná jednoznačně požadavkem $\operatorname{arg\,Ch} x\geqq 0$. Při tom ovšem reálné číslo $x$ jest $\geqq 1$.

4. Ukažte, že čísla $\delta$ a $\sigma$ příkladu 3 hoví podmínkám $|\delta|<1$, $\sigma\geqq 1$. Rovněž, že argument při arcsin resp. arccos na pravé straně rovnic př. 1 jest v abs. hod. $\leqq 1$.

5. *Průběh funkce* $\overline{\operatorname{arctg}}(x+iy)$. Kružnice o rovnici $x^2+y^2+2\lambda x-1=0$, probíhající body $[0, 1]$, $[0, -1]$, rozpadá se těmito body ve dva oblouky, jež jsou různé velikosti, je-li $\lambda \neq 0$. Na obou obloucích jest reálná část funkce $\operatorname{arctg}(x+iy)$ konstantní. Na oblouku menším jest reálná část rovna výrazu $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1/\lambda$, na větším pak $\frac{1}{2}\pi\varepsilon+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1/\lambda$, kde $\varepsilon=-\operatorname{sign}\lambda$. Jak jest tomu na kruhu o rovnici $x^2+y^2-1=0$?

Na kružnici o rovnici $x^2+y^2-2\mu y+1=0$, mající střed na ose $Y$ a protínající ve dvou bodech osu $Y$ tak, že tyto dva body oddělují body $(0, 1)$, $(0, -1)$ harmonicky, jest imaginárná část funkce $\overline{\operatorname{arctg}}(x+iy)$ konstantní a rovna

$$\frac{1}{4}\log\frac{\mu+1}{\mu-1}=\frac{1}{2i}\,\overline{\operatorname{arctg}}\,\frac{i}{\mu}, \qquad \text{číslo reálné } \mu \text{ jest v abs. hodn.} > 1.$$

Na části osy $Y$ vymezené vztahy $x=0$, $y>1$, jakož i na části $x=0$, $y<-1$, nabývá reálná část funkce $\operatorname{arctg}(x+iy)$ hodnoty $\frac{1}{2}\pi$.

Funkce $\overline{\operatorname{arctg}}(x+iy)$ jest funkce spojitá v celé rovině $XY$ s výjimkou bodů splňujících buď podmínky $x=0$, $y\geqq 1$ aneb podmínky $x=0$, $y\leqq -1$. Při tom jest imaginárná část v bodech $[0, 1]$, $[0, -1]$ nekonečnou, jinde všude spojitou; reálná část má pak diskontinuitu pouze na svrchu uvedených částech osy $Y$, takže při překročení těchto částí z pravé půlroviny (půlroviny kladných $x$) do levé, reálná část náhle klesne o $\pi$. Aneb přesněji vyjádřeno (význam označení viz DP, 71),

$$\overline{\operatorname{arctg}}\,(0+0+iy)-\overline{\operatorname{arctg}}\,(0-0+iy)=+\pi; \qquad |y|>1.$$

Budeme v důsledku toho říkati, že $\overline{\operatorname{arctg}}(x+iy)$ *jest spojitou (komplexní) funkcí bodu* $[x, y]$ *v celé rovině* $XY$ *opatřené řezy vycházejícími z bodu* $[0, 1]$ *— resp. z bodu* $[0, -1]$ *— a jdoucími podél osy* $Y$ *ve směru kladném — resp. záporném — do nekonečna.* Podél řezů pak má funkce ta diskontinuitu konstantní v absolutní hodnotě rovnou $\pi$ a v bodech $[0, 1]$, $[0, -1]$ jest nekonečná.

6. Ukažte, že systémy kruhů v předch. př. se vyskytujících o rovnicích

$$x^2+y^2+2\lambda x-1=0 \quad , \quad x^2+y^2-2\mu y+1=0$$

(při čemž rovnice různých kruhů prvého systému vznikají, dáváme-li v prvé rovnici parametru $\lambda$ postupně různé hodnoty intervalu $(-\infty, \infty)$ a obdobně rovnice různých kruhů druhého systému vznikají z druhé rovnice, volíme-li za $\mu$ různé hodnoty, pro něž $|\mu|>1$) jsou dva systémy křivek orthogonálních; t. j. že každý kruh prvého systému protíná každý kruh druhého systému v pravém úhlu.

7. *Průběh funkce* $\arcsin(x+iy)$. Vezmeme v úvahu elipsy a hyperboly o společných ohniskách v bodech $[1, 0]$, $[-1, 0]$. Elipsy a hyperboly ty tvoří dva systémy křivek k sobě orthogonálních. Tak z př. 3 následuje: Na každé větvi hyperboly o ohniskách $[1, 0]$, $[-1, 0]$ jest reálná část funkce $\arcsin(x+iy)$ konstantní a rovna $\varepsilon \arcsin\delta$, kde $\delta$ jest hlavní poloosa té hyperboly a $\varepsilon=\operatorname{sign} x$. Na úsečce osy $X$ vymezené vztahy $y=0$, $x\geqq 1$ (resp. vztahy $y=0$, $x\leqq -1$), kteréžto dvě úsečky lze pokládati za větve limitního případu hyperboly o ohniskách vytčených (a poloose hlavní rovné 1) nabývá reálná část $\arcsin(x+iy)$ hodnoty $\varepsilon\arcsin 1=\pm\frac{1}{2}\pi$.

Na každé polovici elipsy o ohniskách $[1, 0]$, $[-1, 0]$ a rozpůlené osou $X$, jest imaginárná část funkce $\overline{\arcsin}(x+iy)$ konstantní a rovna $i.\varepsilon' \operatorname{arg}\operatorname{Ch}\sigma$, kde $a$ jest hlavní (velká) poloosa té elipsy a $\varepsilon' = \operatorname{sign} y$. Na úsečce spojující body $[1, 0]$, $[-1, 0]$, kteroužto úsečku (dvojmo branou) lze pokládati za limitní případ elips o daných ohniskách, jest imaginárná část $\arcsin(x + iy)$ rovna 0 ($= i\varepsilon' \arg \operatorname{Ch} 1$).

Funkce $\arcsin(x + iy)$ jest spojitou funkcí proměnných $[x, y]$ na celé rovině $XY$ rozříznuté však na úsečkách $(1, \infty)$, $(-1, -\infty)$ osy $X$. Při přechodu těchto úseček mění se nespojitě imaginárná část oné funkce a jest, je-li $|x| > 1$,

$$\lim_{y=+0} \arcsin(x + iy) - \lim_{y=-0} \arcsin(x + iy) = 2i \arg \operatorname{Ch} |x|.$$

8. Ukažte, že

$$\frac{1}{i} \log(zi - \sqrt{1 - z^2}) = \begin{cases} \pi - \arcsin z & , \text{ je-li } \Re(z) \geqq 0 \\ -\pi - \arcsin z & , \text{ je-li } \Re(z) < 0. \end{cases}$$

9. Rozšiřte větu Cauchyovu o násobení řad absolutně konvergentních (DP, 56) i pro případ řad se členy komplexními, absolutně konvergentních.

*Návod.* Rozšířenou větu lze pojímati jako snadný důsledek věty (DP, 56) a vět odst. 18 h.

Odvoďte z věty rozšířené pravidlo o násobení řad potenčních komplexní proměnné a s komplexními koeficienty.

10. Dokažte pro $|z| < 1$ rozvoje

$$\arcsin z = \frac{z}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{z^5}{5} + \cdots\cdots$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots\cdots$$

*Návod.* Oba tyto rozvoje lze dokázati touž cestou, kterou rozvoj logaritmický byl odvozen v textu. Rozvoj pro $\operatorname{arctg} z$ vyplývá nad to ještě z vyjádření $\operatorname{arctg} z$ pomocí logaritmu (rovnice ($d$) v 18d).

11. Dokažte rozvoj binomický

$$\overline{(1 + z)}^A = 1 + \binom{A}{1} z + \binom{A}{2} z^2 + \cdots\cdots \qquad (m)$$

pro komplexní proměnnou $z$ a zároveň při komplexním $A$.

*Návod.* Označíme-li pravou stranu poslední rovnice $w$, levou pak $w_1$, dostaneme snadno tyto vztahy

$$(1 + z) \frac{dw}{dz} = Aw \; , \; (1 + z) \frac{dw_1}{dz} = Aw_1 \; ; \text{ tedy } w_1 \,.\, dw = w \,.\, dw_1 \text{ a tudíž } d\left(\frac{w}{w_1}\right) = 0$$

a to pro všecka $z$, pro něž $|z| < 1$, odkudž a z okolnosti, že $w = w_1$ pro $z = 0$, následuje snadno, že pro $|z| < 1$ jest $w = w_1$,

12. Odvoďte z ($m$) příkl. předcházejícího rozvoje pro $(1 + z)^A \cdot \log^r (1 + z)$, kde $r$ jest celé číslo. Tak jest na př. stále pro $|z| < 1$

$$(1 + z)^A \cdot \log(1 + z) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{A}{k} \left[\frac{1}{A} + \frac{1}{A-1} + \cdots + \frac{1}{A-k+1}\right] z^k,$$

$$\overline{(1+z)^A}\cdot\overline{\log}^2(1+z)=2!\sum_{k=2}^{\infty}\binom{A}{k}\left[\frac{1}{A(A-1)}+\frac{1}{A(A-2)}+\dots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(A-1)(A-2)}+\dots+\frac{1}{(A-k+2)(A-k+1)}\right]z^k.$$

*Návod.* Následuje $z\,(m)$ postupným derivováním podle $A$; při tom jest ovšem oprávněnost derivování náležitě zdůvodniti.

13. Platnost rozvojů docílených pro všecka $z$ uvnitř kruhu konvergenčního dá se často v jednoduchých případech rozšířiti skoro na všecka $z$ položená na obvodě kruhu konvergenčního a to pomocí věty Abelovy (DP, 148). Při tom klademe $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, čímž se daný rozvoj potenční komplexní proměnné $z$ změní v potenční rozvoj proměnné reálné (a kladné) $r$ a my můžeme při pevném $\varphi$ vyšetřovati, používajíce právě věty Abelovy, limitu toho rozvoje pro $\lim r=R$, kde $R$ je poloměr konvergence dané potenční řady v $z$ (a tudíž i odvozené z ní potenční řady v $r$). Tím získáváme jako důsledek věty Abelovy při reálných proměnných **větu Abelovu pro řady potenční komplexní proměnné:** *Budiž*

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots \qquad \text{pro } |z|<R$$

*kde řada potenční má poloměr konvergence $R$, a nechť jest $z_0$ bod na obvodu kruhu konvergenčního* (tedy $|z_0|=R$). *Pak je-li řada nekonečná*

$$a_0+a_1z_0+a_2z_0^2+\dots$$

*konvergentní a má součet $s$, jest*

$$\lim_{z=z_0}P(z)=s;$$

$z$ jest při limitním procesu položeno na úsečce spojující počátek a bod $z_0$.

14. V důsledku uvedené právě věty Abelovy jest

$$\overline{\log}(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}\dots \qquad \text{pro všecka } z, \text{ pro něž } |z|\leq 1,$$

s vyloučením $z=-1$. (DP 51).

15. Ukažte, že z rozvoje pro logaritmus (předch. příkl.) následuje ihned — porovnáme-li reálné i imaginárné části obou stran, kladouce současně $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,

$$\frac{1}{2}\log(1+r^2+2r\cos\varphi)=\frac{r\cos\varphi}{1}-\frac{r^2\cos 2\varphi}{2}+\frac{r^3\cos 3\varphi}{3}-\dots,$$
$$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}=\frac{r\sin\varphi}{1}-\frac{r^2\sin 2\varphi}{2}+\frac{r^3\sin 3\varphi}{3}-\dots$$

pro všecka kladná $r<1$. Je-li pak $r=1$, pak jest pro platnost těchto vztahů nutno a postačitelno, aby $\varphi$ bylo v intervalu $(-\pi+0,\ \pi-0)$. Vztahy ty pro $r=1$ lze psáti ve tvaru

$$\left.\begin{aligned}\log\left(2\cos\frac{1}{2}\varphi\right)&=\frac{1}{1}\cos\varphi-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\cos 3\varphi-\dots,\\ \frac{1}{2}\varphi&=\frac{1}{1}\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\sin 3\varphi-\dots.\end{aligned}\right\}-\pi<\varphi<\pi.$$

**16.** Dokažte rovnice

$$\left.\begin{aligned} -\log\left(2\sin\frac{1}{2}\varphi\right) &= \frac{1}{1}\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \cdots\\ \frac{1}{2}(\pi-\varphi) &= \frac{1}{1}\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \cdots \end{aligned}\right\}\ 0<\varphi<2\pi$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4}\log\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\varphi &= \frac{1}{1}\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi + \cdots\\ \frac{1}{4}\pi &= \frac{1}{1}\sin\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi + \cdots \end{aligned}\right\}\ 0<\varphi<\pi$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4}\pi &= \frac{1}{1}\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi - \cdots\\ \frac{1}{4}\log\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) &= \frac{1}{1}\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi - \cdots \end{aligned}\right\}\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

*Návod.* Prvé dva vztahy následují snadno ze vztahů posledních předcházejícího příkl. Druhé dva vztahy lze odvoditi z řady pro $\overline{\log}\,(1+z/1-z)$ na podkladě věty Abelovy. Poslední dva vztahy pak opět přímo z předcházejících dvou.