

# Počet integrální

---

## Obsah

In: Karel Petr (author); Vojtěch Jarník (author); Počet integrální. s dodatkem Úvod do teorie množství. (Czech). : Jednota československých matematiků a fysiků, 1931. pp. IX--XXII.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402661>

## Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fysiků

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# OBSAH.

## ČÁST PRVÁ.

### INTEGRÁLY NEURČITÉ (FUNKCE PRIMITIVNÍ).

#### I. ÚVOD.

##### *1. Základní definice a pojmenování.*

Odstavec		Strana
1.	Definice integrálu neurčitého (primitivní funkce) . . . . .	1
2.	O úkolu integrálního počtu . . . . .	3
3.—4.	Některé jednoduché formule vyplývající bezprostředně ze vzorců diferenciálního počtu . . . . .	3

##### *2. Různé metody pro výpočet neurčitých integrálů.*

5.	Metoda rozkladu ve sčítance . . . . .	4
6.	Integrál z potenční řady . . . . .	5
7.	Metoda částečné (parciální) integrace . . . . .	6
8.	Metoda substituce . . . . .	7
9.	Metoda derivace podle parametru . . . . .	12
10.	Cvičení . . . . .	14

#### II. INTEGRÁLY Z RACIONÁLNÝCH FUNKCÍ.

##### *Definice elementárních funkcí pro komplexní hodnoty argumentu.*

11.	Rozklad racionální funkce ve zlomky částečné . . . . .	16
12.—13.	Obecný výpočet při rozkladu se vyskytujícími konstant . . . . .	18
14.	Praktický jejich výpočet . . . . .	19
15.	O důsledku pro rozklad racionální funkce za předpokladu, že koefi- cianty racionální funkce jsou reálné . . . . .	21
16.	Integrace racionální funkce . . . . .	22
17.	O výpočtu racionální části integrálu z racionální funkce . . . . .	24
18.	Několik obecnějších příkladů pro integraci racionálních funkcí . . . . .	27
18a.	Zavedení komplexních čísel za koeficienty racionálních funkcí . . . . .	29
	Definice obecné komplexní funkce, jejího diferenciálu a integrálu . . . . .	31
18b.	Definice logaritmu pro komplexní hodnoty argumentu . . . . .	32
18c.	Definice funkce exponenciální a funkcí goniometrických pro kom- plexní hodnotu argumentu . . . . .	38
	Cvičení . . . . .	39

18d. Funkce cyklometrické pro komplexní argumenty . . . . .	41
Cvičení . . . . .	43
18e. Obecná exponenciální funkce a mocnina v oboru komplexních čísel	44
18f. Elementární funkce transcendentní. Jejich derivace . . . . .	46
18h. Nekonečné řady, jejichž členové jsou čísla komplexní . . . . .	49
18k. Řady potenční komplexní proměnné . . . . .	49
18l. Rozvoj elementárních funkcí komplexní proměnné z v řady mocninné	50
18m. Neurčitý integrál z funkce komplexní proměnné . . . . .	51
Cvičení . . . . .	52

### III. INTEGRÁLY Z FUNKCÍ IRACIONÁLNÍCH.

#### 1. Některé případy jednoduché.

19. Integrály tvaru $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p'}{q'}}, \dots\right] dx$ . . . . .	58
20. Integrály binomické . . . . .	61
21. Redukční vzorce pro integrály binomické . . . . .	62
Cvičení . . . . .	64

#### 2. Integrály $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ .

22. První metoda pro jejich výpočet . . . . .	66
23. Druhá metoda . . . . .	70
24. Integrál $\int \frac{dx}{(x-i)\sqrt{Ax^2+C}}$ . . . . .	72
25. Integrál $\int \frac{(Hx+K) dx}{(b_0x^2+2b_1x+b_2)\sqrt{a_0x^2+2a_1x+a_2}}$ . . . . .	73
26. Přehled výsledků . . . . .	76
Cvičení . . . . .	77

#### 3. O křivkách racionálních a integrálech jim příslušných.

27. Pojem křivky racionální vyložen na křivce o rovnici $y^2=ax^2+bx+c$	79
28. Jiné příklady racionálních křivek . . . . .	80
29. O maximálním počtu dvojných bodů při ireducibilní křivce algebraické	81
30. Křivka alg. ireducibilní mající maximální počet bodů dvojných jest křivkou racionální . . . . .	82
31. Některé vyšší singularity . . . . .	83
32. Příklad . . . . .	83
33. Definice rodu algebraické křivky . . . . .	84
34. Abelovy integrály rodu $p$ . Integrály Abelovy rodu nula lze vyjádřiti integrály z funkcí racionálních . . . . .	85

#### 4. Redukce integrálů hypereliptických (a eliptických).

35. Integrály $\int \frac{x^r dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{dx}{(x-a)^r \sqrt{X}}$ , kde $X$ jest polynom $n$ -tého stupně v $x$	86
35a. Integrály $\int \frac{A dx}{B^m \sqrt{X}}$ , kde $A, B, X$ jsou mnohočleny v $x$ . . . . .	88

36. Redukce integrálů hypereliptických a eliptických na základní tvary integrálů prvního, druhého a třetího druhu . . . . .	89
---	----

### 5. Integrály eliptické.

37. Integrály eliptické lze reálnými substitucemi převést na integrály eliptické, kde polynom pod odmocninou jest třetího stupně s reálnými kořeny . . . . .	91
38. Integrály pseudoeliptické. Příklady . . . . .	94
39. Normální tvar Weierstrassův . . . . .	96
40. Normální tvar Legendreův. Tabulka usnadňující převod na normální tvar Legendreův . . . . .	98
41. Normální tvar Riemannův . . . . .	103
41a. Lineární transformace el. integrálů . . . . .	104
41b. Pokračování; příklady . . . . .	107
41c. Kvadratické transformace el. integr. . . . .	111
41d. Landenova transformace . . . . .	113
Cvičení . . . . .	114

### 6. Abelovy integrály rodu 1.

42. Převod křivek rodu 1 na křivku stupně třetího biracionální transformací	116
43. Vyjádření integrálů Abelových rodu 1 integrály eliptickými . . . . .	118
43a. Biracionální transformace křivky $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ samu v sebe .	119
43b. Biracionální transformace křivky $y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ samu v sebe .	122
44. Příklad (Integrál Abelův patřící ke křivce $y^3 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ) . . . . .	123
45. Poznámka. Integrály Abelovy rodu vyššího než 1 lze v případech zvláštních převést na eliptické integrály . . . . .	124
Cvičení . . . . .	125

## IV. INTEGRÁLY Z NĚKTERÝCH FUNKCÍ TRANSCEDENTNÍCH.

46. Integrály z funkcí tvaru $R(\cos x, \sin x)$ . . . . .	127
47. Zvláštní případy . . . . .	127
48. Integrály tvaru $\int R(e^{ax}) dx$ . . . . .	128
49. Zjednodušení vznikající zavedením komplexních čísel . . . . .	128
50. Příklady . . . . .	129
51. Integrály z polynomu $P(x, e^{ax}, e^{bx}, \dots, \sin ax, \dots)$ . . . . .	133
52. Integrály $\int R(x) \log x dx$ . Funkce $-\int \frac{\log(1-x)}{x} dx$ . . . . .	134
53. Logaritmus integrál a funkce příbuzné . . . . .	135

## V. PŘECHOD OD INTEGRÁLŮ NEURČITÝCH K URČITÝM.

### 1. Obecné výpovědi.

54. Definice . . . . .	137
55. Geometrický význam určitého integrálu . . . . .	138
56. Derivace integrálu určitého podle mezí . . . . .	141
57. Další základní věty o integrálu určitém . . . . .	142
58.—59. Věta o střední hodnotě určitého integrálu . . . . .	143
60. Vyjádření určitého integrálu z funkce spojitě limitou jistého součtu	145
61. Rozšíření pojmu určitého integrálu. Příklady . . . . .	146



Odstavec	Strana
62. Další rozšíření . . . . .	148
63. Některé věty o množstvích zvl. věta Cantor-Bendixonova . . . . .	149
64. Zevšeobecnění pojmu integrálu určitého . . . . .	150
65. Věta o střední hodnotě pro rozšířený pojem integrální . . . . .	152
66. O možnosti dalšího zevšeobecnění pojmu integrálního . . . . .	153
67. Význam symbolu $\int_a^{\infty} f(t) dt$ . Příklady . . . . .	154
68. Poznámky o počítání určitých integrálů . . . . .	156
Cvičení . . . . .	158
Odvození formule Wallisovy pro $\frac{1}{2}\pi$ (příklad 6) . . . . .	161
Integrály $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}$ , $a, b, c$ reálné . . . . .	164
$a, b, c$ komplexní . . . . .	169
$\int_0^{\pi} \log(1 + 2r \cos x + r^2) dx$ . . . . .	166
<i>2. Integrály ze součtů nekonečných řad.</i>	
69. Vhodná úprava vět v „Počtu diferenciálních“ dokázaných . . . . .	173
70. Rozšíření . . . . .	175
Příklady . . . . .	176
$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$ . . . . .	179
71. Rozšíření pro interval nekonečný . . . . .	181
72. Výpočet určitých integrálů pomocí řad. Řada Bernoulliova . . . . .	184
73. Výpočet $\int_0^a e^{-x^2} dx$ řadou asymptotickou . . . . .	186
Cvičení . . . . .	188
Polynomy Legendreovy a jejich zobecnění . . . . .	190
Polynomy Hermiteovy (př. 10) . . . . .	191
Vyjádření Legendreových polynomů integrálem . . . . .	192
<i>3. Výpočet integrálů eliptických.</i>	
74. Výpočet eliptického integrálu prvního druhu v Legendreově nomálním tvaru řadou nekonečnou . . . . .	192
75. Přeměna řad, jestliže $k$ jest blízké 1 . . . . .	193
76. Asymptotické vyjádření, jestliže $k$ se blíží 1 . . . . .	195
77. Výpočet eliptických integrálů 2. druhu řadami . . . . .	196
78. Vyjádření úplných integrálů el. prvního druhu řadami . . . . .	197
79. Totéž pro elipt. integrály druhého druhu . . . . .	199
80. Další zjednodušení numerického výpočtu (pomocí Landenovy transformace) . . . . .	200
81. Střed aritmeticko-geometrický . . . . .	201
82. Výpočet eliptických integrálů úplných pomocí středu aritmeticko-geometrického. Legendreova relace . . . . .	203

83. Kompletní integrály eliptické v normálním tvaru Weierstrassově . . . . .	208
84. Rozvoje pro integrály eliptické v normálním tvaru Weierstrassově . . . . .	211

## ČÁST DRUHÁ.

### INTEGRÁL URČITÝ NA ZÁKLADĚ DEFINICE SOUČTOVÉ (CAUCHY-RIEMANNOVY).

#### VI. DEFINICE A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI URČITÉHO INTEGRÁLU.

##### 1. Definice integrálu omezeného ( $b < a$ ).

85. Součty $S$ a $s$ a čísla $\Sigma$ , $\sigma$ jimi stanovená . . . . .	213
86. Čísla $\Sigma$ a $\sigma$ jakožto limity součtů $S$ a $s$ . . . . .	215
87. Definice určitého integrálu z funkce $f(x)$ v intervalu $(a, b)$ . . . . .	216
Příklady . . . . .	219

##### 2. O funkcích integrace schopných (podle C.-R. v $(a, b)$ ).

88. Některé obecné skupiny funkcí integrace schopných . . . . .	221
89. Součet, součin, podíl, absolutní hodnota funkcí integrace schopných jsou integrace schopny . . . . .	222
90. Délka množství číselného . . . . .	224
91. Oscilace funkce v bodě $c$ . . . . .	226
92.—93. Nutná a postačující podmínka, aby funkce byla v $(a, b)$ podle C.—R. integrace schopna . . . . .	226
94. Rozšíření pojmu určitého integrálu . . . . .	227

##### 3. Základní vlastnosti omezeného integrálu.

95.—96. . . . .	228
97. Věta o střední hodnotě . . . . .	229
98. Integrál jest spojitou funkcí horní i dolní meze . . . . .	232
99.—100. Souvislost integrálu na základě definice Cauchy-Riemannovy s primitivní funkcí . . . . .	233
101. Poznámka . . . . .	235
102. Integrace částečná . . . . .	236
103. Rozšíření věty o integraci částečné . . . . .	237
104. Druhá věta o střední hodnotě (důkaz její ve speciálním případě) . . . . .	238
105. Pomocná věta Abelova . . . . .	239
106. Důkaz věty druhé o střední hodnotě pomocí Abelovy věty . . . . .	240
107. O zavedení nové proměnné do určitého integrálu . . . . .	242
Cvičení . . . . .	244

##### 4. Některá použití věty o střední hodnotě a rovnice pro částečnou integraci.

108. Odvození rovnice Taylorovy . . . . .	250
109.—110. O vzorci Euler-Maclaurinově . . . . .	251
111. Výpočet integrálů pomocí formule Euler-Maclaurinovy . . . . .	255

Odstavec	Strana
112. Použití formule Euler-Maclaurinovy jako sumační . . . . .	257
Odvození Stirlingovy formule pro $n!$ . . . . .	258
Výpočet Eulerovy konstanty . . . . .	259
113. Jiné odvození formule Euler-Maclaurinovy . . . . .	259
114. Použití metody odst. předch. na počítání součtů jiného druhu . . .	261
Výpočet $\log 2$ . . . . .	262
Výpočet čísla $\pi$ . . . . .	264
115.—116. Polynomy Legendreovy . . . . .	264
117. Další věty o polynomech Legendreových . . . . .	266
118. Důkaz, že číslo $e$ jest transcendentním . . . . .	269
Cvičení . . . . .	271
Některé další věty o funkcích a číslech Bernoulliských a jim pří- buzných . . . . .	272
Další věty o polynomech Legendreových . . . . .	275
<i>5. O numerickém počítání určitých integrálů (mechanické kvadratury).</i>	
119. Výklad pojmu mechanické kvadratury . . . . .	277
120. Metoda lichoběžníková . . . . .	278
121. Formule Simpsonova . . . . .	280
122. Interpolace parabolická (Lagrangeův mnohočlen) . . . . .	281
123. Metoda Cotesova . . . . .	283
124. Druhá metoda založená na interpolaci parabolické . . . . .	285
125. Zavedení součtových čísel. Symbol $(a, s)$ . . . . .	288
126. Dva hlavní případy při interpolaci ekvidistantní a příslušné mech. kvadratury . . . . .	290
127. Formule Simpsonova se zbytkem . . . . .	294
128. Interpolace parabolická pro případ, že jsou dány hodnoty funkční a zároveň hodnoty prvých derivací v $r$ bodech . . . . .	297
129. Mechanická kvadratura v případě předch. odstavce . . . . .	298
130. Metoda Gaussova pro mechanickou kvadraturu . . . . .	299
<i>6. O funkcích s variací konečnou.</i>	
131. Definice . . . . .	301
132. Vyjádření pomocí funkcí neklesajících . . . . .	302
133. Funkce spojitě a zároveň s variací konečnou . . . . .	303
134. Integrál určitý jest funkce s variací konečnou své horní meze . . .	304
135. Diskontinuity funkcí s variací konečnou . . . . .	305
136. Další vyšetřování funkcí spojitých a s variací konečnou . . . . .	306
<i>7. Elementární teorie řad Fourierových.</i>	
136a. Pojem řady trigonometrické a Fourierovy . . . . .	307
136b. Řada Fourierova pro funkci $\frac{1}{2}(\pi - x)$ . . . . .	311
136c. Důsledky z odst. předch. . . . .	314
136d, e, f. Řady Fourierovy pro funkce, jež vznikají integrací z funkcí integrace schopných . . . . .	315
Cvičení . . . . .	320
Věty o součtech řad Fourierových sčítaných podle Riemanna . . .	323
Integrál Fresnelův . . . . .	329
Gaussovy součty . . . . .	329

Odstavec	Strana
136g. O aproxiomaci funkcí spojitých pomocí polynomů trigonometrických	330
136h. Věta Weierstrassova o polynomech . . . . .	331
136i. Rozšíření výsledků odst. předch. na funkce nespojité . . . . .	333
136j. Střední chyba (odchylka) . . . . .	334
136k, l. Mnohočleny mající nejmenší střední odchylku. Rozvoj podle Legendreových polynomů . . . . .	335
136m. O přibližném vyjádření eliptických integrálů pomocí polynomů v modulu . . . . .	337
136n. Mnohočleny trigonometrické mající nejmenší střední odchylku od dané funkce. Parsevalův teorem . . . . .	339

## VII. ROZŠÍŘENÍ POJMU URČITÉHO INTEGRÁLU (INTEGRÁLY NEVLASTNÍ).

1. *Funkce integrovaná jest v intervalu integračním nekonečnou, po případě neurčitou.*

137.—138. Obecné poznámky. Funkce stává se neurčitou v jistém množství bodovém na intervalu integr. . . . .	344
139. Definice integrálu nevlastního v případě, že funkce stává se nekonečnou pro horní mez . . . . .	346
140. Konvergence absolutní. Některé podmínky pro absolutní konvergenci	347
141. Příklady . . . . .	351
142.—143. Funkce stává se nekonečnou, resp. neurčitou pro konečný po př. i nekonečný počet hodnot intervalu integračního . . . . .	352

### 2. *Rozšíření pojmu integrálního pro nekonečný interval.*

144. Definice. Absolutní konvergence . . . . .	355
145. Různá kritéria absolutní konvergence . . . . .	357
146. Příklady . . . . .	358
147. Význam symbolů $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ , $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ . . . . .	359
148. Význam pojmenování „integrál nevlastní“ . . . . .	359

### 3. *Základní vlastnosti integrálů nevlastních.*

149. . . . .	360
--------------	-----

### 4. *Zavádění nových proměnných se zřetelem k integrálům nevlastním.*

150. Obecný výklad . . . . .	363
151. Příklady . . . . .	365
152. Integrál Laplaceův . . . . .	368

## VIII. INTEGRÁLY Z FUNKCÍ ZÁVISLÝCH NA PARAMETRU.

1. *Vyšetřování, zda funkce těmito integrály definované jsou spojitě funkce parametru.*

153.—154. Postačující podmínky, aby integrál byl spojitou funkcí parametru v jistém bodě. Příklady . . . . .	370
--	-----

155. Postačující podmínky, aby integrál byl spojitou funkcí parametru v jistém intervalu . . . . .	375
156.—158. Rozšíření těchto výsledků zejména v případě, že funkce integrovaná stává se nekonečnou . . . . .	376
159. Kriterium pro stejnoměrnou konvergenci integrálů k nule . . . . .	381
160. Rozšíření pro nekonečný interval integrační . . . . .	383

### 2. Derivace integrálů podle parametru.

161.—162. Postačující podmínky pro existenci derivace . . . . .	384
163. Derivace integrálu podle parametru, závisí-li též meze integrálu na parametru . . . . .	388

### 3. Užití vět o spojitosti a derivaci integrálů závislých na parametru k výpočtu integrálů.

164. Integrál $\int_0^{\pi} \log(1 + 2r \cos x + r^2) dx$ . . . . .	389
165. Integrál $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ . . . . .	390
166. Integrál $\int_0^{\infty} \frac{x^{b-1} dx}{(a+x)^{k+1}}$ . . . . .	391
167. Integrál $\int_0^{\infty} e^{-Ax^2} \cos bx dx$ . . . . .	392
168. Integrál $\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$ . . . . .	393
169. Integrál $\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx$ . . . . .	394
170. Integrály $\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{a^2 + x^2} dx$ , $\int_0^{\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} dx$ . . . . .	397
171. Integrály $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx^2 dx$ , $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \sin bx^2 dx$ . . . . .	399
172. Integrály $\int_0^{\infty} \sin\left(x^2 \pm \frac{\beta^2}{x^2}\right) dx$ , $\int_0^{\infty} \cos\left(x^2 \pm \frac{\beta^2}{x^2}\right) dx$ . . . . .	401

### 4. O integraci integrálů podle parametru. Integrály dvojnásobné.

173. Definice dvojnásobného integrálu . . . . .	404
174. Stejnomořná konvergence součtových výrazů k hodnotě integrálu . . . . .	405
175. O záměnnosti pořadu integračního . . . . .	406
176. Příklady funkcí, při nichž součet ( $A$ ) stejnoměrně konverguje . . . . .	403
177.—180. Rozšíření pojmu dvojnásobného integrálu . . . . .	409

Odstavec	Strana
181. Integrály dvojnásobné nevlastní . . . . .	413
182. Gaussův důkaz fundamentální věty algebry . . . . .	418
183.—184. O záměnnosti pořadí integračního, jestliže jeden nebo oba intervaly integrační stávají se nekonečnými . . . . .	418

5. Příklady pro výpočet omezených integrálů záměnou pořadu integračního.

185. Integrál $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} (\cos b_1 x - \cos b_2 x)}{x^2} dx$ . . . . .	425
186. Integrál Laplaceův . . . . .	426
187. Integrály Fresnelovy . . . . .	427
188. Integrál $\int_0^{\infty} \frac{\cos y}{a^2 + y^2} dy$ . . . . .	429

6. Rozšíření vět o integrálech z funkcí závislých na parametru.

189. Věta Borelova . . . . .	431
190.—191. Zevšeobecněná věta Borelova . . . . .	432
192. Rozšíření na množství vícerozměrná . . . . .	434
193. Věta o zevnější délce množství bodového (Jarníkova) . . . . .	435
194. Věta Arzelàova . . . . .	437
195. Věta o integraci nekonečných řad a jiné aplikace věty Arzelàovy . . . . .	439
196. Totální diferenciál určitého integrálu závislého na dvou parametrech . . . . .	442

X. KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY A ÚPLNÉ DIFERENCIÁLY.

197.—202. Definice a základní věty . . . . .	444
203. Integrály podle uzavřených křivek . . . . .	450
204. Integrály podle hranice oboru $\Omega$ . . . . .	452
205. Rovnice Greenova pro dvě proměnné . . . . .	454
206. Cauchyova integrální věta. Úplné diferenciály . . . . .	455
207. Výpočet integrálu úplného diferenciálu . . . . .	459
208. Integrály z úplného diferenciálu podél obecnějších křivek integračních . . . . .	462
209. Křivkové integrály při třech a více proměnných . . . . .	463
210. Úplné diferenciály při třech proměnných . . . . .	465

## ČÁST TŘETÍ.

### NĚKTERÁ UŽITÍ URČITÝCH INTEGRÁLŮ.

#### X. UŽITÍ POJMU INTEGRÁLNÍHO K DEFINICI A VYŠETŘOVÁNÍ NĚKTERÝCH FUNKCÍ, ZVLÁŠTĚ PAK GAMMAFUNKCE.

##### 1. Eulerovy integrály.

211. Definice gammafunkce. Integrál Eulerův 1. druhu . . . . .	469
212. První základní vlastnost gammafunkce. Výpočet gammafunkce při celistvém argumentu jakož i výpočet $B(p, q)$ , je-li jedno z čísel $p, q$ celé . . . . .	470

# XVIII

Odstavec	Strana
213. Základní vlastnosti funkce $B(p, q)$ . . . . .	.471
214. Vyjádření gammafunkce limitním výrazem . . . . .	.472
215. Vyjádření gammafunkce nekonečným součinem . . . . .	.474
216. Vyjádření funkce $B(p, q)$ pomocí gammafunkcí . . . . .	.475
217. Odvození předcházejícího výsledku pomocí vět počtu integrálního . . . . .	.476
218. Rozšíření definice funkce gamma i pro záporné argumenty . . . . .	.478
219. Relace Gaussova . . . . .	.479
220. Rozvoje pro numerický výpočet $\log \Gamma(u)$ . . . . .	.480
221. Řada Stirlingova . . . . .	.482
222. Vyjádření funkce $\log \Gamma(u)$ určitým integrálem . . . . .	.484
223. Rozklad výrazu integrálního pro $\log \Gamma(v)$ . . . . .	.486
224. Integrální výraz pro Eulerovu konstantu . . . . .	.488
225. Binetova funkce a její derivace . . . . .	.488
226. Asymptotické řady pro derivace Binetovy funkce . . . . .	.489

## 2. Některá užití gammafunkce.

227. Výpočet některých integrálů pomocí gammafunkce . . . . .	.491
228. Integrál $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x dx$ . . . . .	.492
229. Integrál $\int_0^1 \frac{x^{a-1} (1-x)^{b-1}}{(a+bx)^{a+b}} dx$ . . . . .	.493
230. Integrály $\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x^m} dx, \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x^n} dx$ . . . . .	.493
231. Výpočet řady hypergeometrické pro $x=1$ . . . . .	.494
232. Integrál $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos a\nu \cos^b \nu d\nu$ . . . . .	.495

## 3. Logarithmus integrál a jiné funkce definované určitými integrály.

233. Definice $\text{li}(e^{-x})$ pro $x > 0$ . . . . .	.497
234. Rozvoj funkce $\text{li}(e^{-x})$ pro $x > 0$ . . . . .	.498
235. Definice $\text{li}(e^x)$ pro $x \geq 0$ . . . . .	.499
236. Jiná integrální vyjádření funkcí $\text{li}(e^{-x}), \text{li}(e^x)$ . . . . .	.500
237. Asymptotický rozvoj pro $\text{li}(e^{-x})$ při $x > 0$ . . . . .	.502
238. Asymptotický rozvoj pro $\text{li}(e^x)$ při $x > 0$ . . . . .	.503
239. O užití integrállogaritmu v teorii čísel . . . . .	.505
240. Zobecnění integrállogaritmu . . . . .	.506

# XI. UŽITÍ V GEOMETRII.

## 1. Délka křivých čar.

241. Definice . . . . .	.507
242. Vyjádření analytické za jistých předpokladů o rovnici křivky . . . . .	.507
243. Formule speciální . . . . .	.510
244. Příklady 1.—7. Věta Gravesova . . . . .	.510

245. Nutná a postačující podmínka, aby oblouk spojitě křivky byl rektifikace schopný . . . . .	515
--	-----

2. *O počítání plochy rovinné omezené křivou čarou.*

246. Velikost plochy vypočtená na základě definice integrální Cauchy-Riemannovy . . . . .	517
247.—248. Jiné výrazy pro velikost plošnou . . . . .	518
249. Význam příslušných křivkových integrálů při křivkách uzavřených se protínajících . . . . .	521
250. Příklady pro počítání velikosti plošné (1.—5.) . . . . .	522
251. Příklad 6. Věta Holditchova . . . . .	525
252. Příklad 7. Plochy omezené paralelními křivkami. Délky oblouků těchto křivek . . . . .	527
253.—257. Vyšetřování křivek uzavřených, jimž přísluší velikost plošná . . . . .	529
258. Křivky kvadratury schopné v užším smyslu . . . . .	534
259.—261. Obsah množství bodového vícerozměrného (podle Jordana) . . . . .	536

## ČÁST ČTVRTÁ.

### INTEGRÁLY MNOŽNÉ (INTEGRÁLY Z FUNKCÍ O NĚKOLIKA PROMĚNNÝCH).

#### XII. INTEGRÁLY DVOJNÉ (INTEGRÁLY Z FUNKCÍ O DVOU PROMĚNNÝCH).

1. *Definice a základní vlastnosti.*

262. Obory dvojrozměrné . . . . .	541
263.—267. Horní a dolní součty. Jejich dolní a horní hranice. Základní věty . . . . .	542
268. Definice integrálu dvojného . . . . .	547
269.—270. O funkcích integrace schopných . . . . .	549
271. Věta o střední hodnotě . . . . .	551
272. O výpočtu integrálů dvojných pomocí dvojnásobné integrace (integrálů dvojnásobných) . . . . .	552
273.—274. Rozšíření platnosti získaných vztahů . . . . .	554
275.—277. O výpočtu trojných integrálů . . . . .	556

2. *Zabádění nových proměnných integračních do množných integrálů.*

278. Prvý způsob odvození (u integrálů dvojných) . . . . .	564
279.—280. Druhý způsob odvození . . . . .	570
281. Polární souřadnice . . . . .	574
282. Integrál Laplaceův . . . . .	576
283. Zevšeobecnění substituce polárních souřadnic . . . . .	577
284. Transformace inverzní . . . . .	578



Odstavec	Strana
285. Souřadnice eliptické . . . . .	578
286. Souřadnice ortogonální . . . . .	579
287. Polární souřadnice v oborech trojrozměrných . . . . .	580
288. Souřadnice eliptické v oborech trojrozměrných . . . . .	580
289. Obsah rovnoběžnostěnu v oboru $n$ -rozměrném . . . . .	581
290. Obsah $(n+1)$ -stěnu v oboru $n$ -rozměrném . . . . .	582
290a. Obsah $(n+1)$ -stěnu v oboru $n$ -rozměrném, jsou-li dány rovnice jednotlivých stěn . . . . .	583

*5. Geometrická použití dvojných integrálů.*

291. Krychlový obsah tělesa . . . . .	584
292.—294. Jiné formule pro krychlový obsah . . . . .	585
295. Příklady . . . . .	586
296. Krychlový obsah tělesa omezeného plochou rotační a dvěma rovinami kolmými k ose rotační . . . . .	588
297. Povrch křivé plochy . . . . .	589
298. Další vzorce pro povrch křivé plochy . . . . .	591
299. Povrch rotační plochy. Vivianův problém . . . . .	593
300. Povrch sférického trojúhelníka . . . . .	594
301. Povrch elipsoidu . . . . .	595
302.—304. Odvození vzorce pro velikost povrchu plochy na základě jiné definice . . . . .	597

XIII. RŮZNÁ ROZŠÍŘENÍ POJMU VÍCEROZMĚRNÉHO INTEGRÁLU  
(INTEGRÁLY NEVLASTNÍ, PLOŠNÉ).

*1. Integrály dvojně nevlastní.*

305.—309. Funkce jest nekonečná toliko v okolí jediného bodu . . . . .	605
310. Funkce jest nekonečná toliko v bodech čáry o rovnici $y = \varphi(x)$ . . . . .	614
311. Příklady . . . . .	615
312.—313. Obor integrační jest nekonečný . . . . .	622
314. Příklady . . . . .	625

*2. Integrály plošné.*

315.—318. Definice . . . . .	628
319.—320. Vyjádření integrálů plošných, je-li rovnice plochy dána parametricky . . . . .	632
321. Jiné vyjádření integrálů plošných . . . . .	635
322. O podmínce nutné, aby integrál plošný podle libovolné uzavřené plochy byl roven nule . . . . .	636
323. Podmínka postačující . . . . .	637
324. Věta o střední hodnotě u plošných integrálů . . . . .	639
325. Příklady . . . . .	640
326. O řešení soustavy rovnic dif. $\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = F, \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} = G,$ $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = H$ . . . . .	642
327. Formule Stokesova . . . . .	644

Odstavec	Strana
328. O zavádění nových proměnných do plošných integrálů . . . . .	.645
329. Použití. Ustanovení znaménka dosud neznámého . . . . .	.648
330. Odvození vět předch. odstavců pomocí vět o integrálech trojných . . . . .	.650
331. Rovnice Greenovy . . . . .	.651

## DODATEK.

### ÚVOD DO TEORIE MNOŽSTVÍ.

NAPSAL VOJTĚCH JARNÍK. . . . . .655

#### ODDÍL 1.

##### *Základní pojmy. Ekvivalence.*

1. Úvod . . . . .	.657
2. Základní úkony . . . . .	.659
3. Ekvivalence . . . . .	.662
4. Spočetná množství . . . . .	.663
5. Množství mocnosti kontinua . . . . .	.666
6. Množství nespočetná . . . . .	.669

#### ODDÍL 2.

##### *Množství uspořádaná a dobře uspořádaná.*

1. Množství uspořádaná . . . . .	.671
2. Podobnost množství uspořádaných . . . . .	.673
3. Množství dobře uspořádaná . . . . .	.675
4. Základní věta o množstvích dobře uspořádaných . . . . .	.676

#### ODDÍL 3.

##### *Pořadová čísla.*

1. Úvodní poznámky . . . . .	.680
2. Pořadová čísla první a druhé třídy číselné . . . . .	.681
3. Uspořádání pořadových čísel . . . . .	.683
4. Struktura množství $\aleph_1 + \aleph_2$ . . . . .	.685
5. Transfinitní indukce . . . . .	.688
6. Závěrečné poznámky . . . . .	.690

#### ODDÍL 4.

##### *Množství bodová.*

1. Cartézské prostory . . . . .	.692
2. Množství číselná . . . . .	.693
3. Základní pojmy pro množství v $R_t$ . . . . .	.695
4. Uzavřená množství . . . . .	.699

Odstavec	Strana
5. Otevřená množství . . . . .	.702
6. Derivované množství . . . . .	.703
7. Množství v sobě hustá . . . . .	.704
8. Množství dokonalá . . . . .	.705
9. Kondenzační body . . . . .	.706
10. Množství uzavřená a otevřená v $R_1$ . . . . .	.708
11. Vyšší derivace bodového množství . . . . .	.712
12. Nový důkaz věty Cantor-Bendixonovy. Množství reducibilní . . . . .	.716

### ODDÍL 5.

#### *Dodatky k integrálnímu počtu.*

1. Poznámky k odst. 64 . . . . .	.720
2. Poznámka k odst. 66 . . . . .	.723
3. Poznámka k cvičení 24 na str. 327 . . . . .	.723

---

Literatura k teorii množství . . . . .	.725
--	------

---