8. SPOČETNĚ PLNĚ NORMÁLNÍ PROSTORY

8.1. F-prostor je plně normální, je-li každé jeho otevřené pokrytí normální (definice **5.1**); F-prostor je normální, je-li každé jeho konečné otevřené pokrytí normální (věta **4.10**). Bylo by proto přirozené studovat třídy, které leží „mezi" třídou plně normálních a třídou normálních prostorů, totiž zkoumat F-prostory, jejichž každé otevřené pokrytí mohutnosti $\leqq \mathfrak{m}$ je normální. Omezíme se však jen na případ $\mathfrak{m} = \aleph_0$.

Definice. Pravíme, že F-prostor P je *spočetně plně normální,* je-li každé jeho nejvýš spočetné otevřené pokrytí normální.

Poznámka. Dosud není známo, zda existuje normální prostor, který není spočetně plně normální.*)

8.2. Nechť P je normální prostor. Aby P byl spočetně plně normální, k tomu je nutná a stačí každá z těchto podmínek:

(1) jsou-li G_k otevřené, $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = P$, pak existují otevřené V_k tak, že $\overline{V}_k \subset G_k$, $\{V_k\}$ je lokálně konečné otevřené pokrytí;

(2) ke každému nejvýš spočetnému otevřenému pokrytí existuje jemnější σ-lokálně konečné zakrytí uzavřenými množinami;

(3) jsou-li G_k otevřené, $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = P$, pak existují F_σ-množiny $X_k \subset G_k$ tak, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = P$.

*) Takový příklad byl udán (M. Rudin, Countable paracompactness and Souslin's problem, Canadian Journal of Mathematics, 1955, 7, 543—547) pouze za předpokladu, že neplatí tzv. Souslinova domněnka, která praví, že uspořádaná množina, v níž je každá disjunktní soustava intervalů spočetná, obsahuje spočetnou hustou část.

(4) je-li $\{X_k\}$ nejvýš spočetný lokálně konečný soubor částí P, pak existují otevřené množiny $G_k \supset X_k$ takové, že $\{G_k\}$ je lokálně konečný;

(5) je-li $\{X_k\}$ nejvýš spočetný lokálně konečný soubor částí P, pak existuje spojité zobrazení φ prostoru P do jistého metrického prostoru R takové, že $\{\varphi^1(X_k)\}$ je lokálně konečný v R;

(6) jsou-li $F_k \subset P$ uzavřené, $F_k \supset F_{k+1}$ pro $k = 1, 2, \ldots, \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \emptyset$, pak existují otevřené $G_k \supset F_k$ tak, že $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \emptyset$;

(7) ke každému nejvýš spočetnému otevřenému pokrytí existuje hvězdovitě jemnější nejvýš spočetné otevřené pokrytí.*)

Důkaz. Označme pro stručnost znakem (0) tvrzení, že P je spočetně plně normální.

I. Z **4.3**, (1) vyplývá ihned, že (0) $\Rightarrow$ (1). Implikace (1) $\Rightarrow$ (2) je triviální. — Platí-li (2), nechť $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = P$, G_k jsou otevřené. Existuje σ-lokálně konečný soubor $\{F_\mu\}$ takový, že F_μ jsou uzavřené, $\bigcup F_\mu = P$, $\{F_\mu\}$ je jemnější než $\{G_k\}$; pro každé μ zvolme $k = k(\mu)$ tak, aby $F_\mu \subset G_k$; položme $X_n = \bigcup_{k(\mu)=n} F_\mu$. Potom $X_n \subset G_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = P$, každé X_n je F_σ-množina (to plyne z **1.15**). Tedy platí (3). — Implikace (3) $\Rightarrow$ (0) vyplývá z **2.8.** Dokázali jsme tedy, že podmínky (0), (1), (2), (3) jsou ekvivalentní.

II. Nechť platí (0). Nechť $\{X_k\}$ je nejvýš spočetný lokálně konečný soubor částí P. Pro každé $x \in P$ zvolme jeho otevřené okolí U_x tak, aby množina $\mu(x)$ těch k, pro něž $U_x \cap X_k \neq \emptyset$, byla konečná. Pro každou konečnou neprázdnou množinu μ indexů (přirozených čísel) k položme $V_\mu = \bigcup_{\mu(x)=\mu} U_x$. Potom V_μ je nejvýš spočetné otevřené pokrytí prostoru P a platí: $V_\mu \cap X_k \neq \emptyset$, když a jen když $k \in \mu$. Ježto (0) platí,

*) K této větě viz např. M. J. Mansfield, On countably paracompact normal spaces, Canadian Journal of Mathematics, 1957, *9*, 443—449.

(0) $\Rightarrow$ (1), existuje otevřené $W_\mu \subset V_\mu$ tak, že $\{W_\mu\}$ je lokálně konečný. Označme M množinu všech μ; pro každé k buď $M(k)$ množina těch μ, pro něž $k \in \mu$. Soubor $\{M(k)\}$ je zřejmě bodově konečný; položíme-li $G_k = \bigcup_{k \in \mu} W_\mu$, je tedy podle **1.5** soubor $\{G_k\}$ lokálně konečný. Zřejmě G_k jsou otevřené, $X_k \subset G_k$. Tedy platí (4).

Nechť platí (4). K danému lokálně konečnému souboru $\{X_k\}$ najdeme (ježto též $\{\overline{X}_k\}$ je lokálně konečný) otevřené $G_k \supset \overline{X}_k$ tak, aby $\{G_k\}$ byl lokálně konečný. Ježto P je normální, existují spojité funkce f_k v P takové, že $x \in \overline{X}_k \Rightarrow f_k(x) = 1$, $x \in P - G_k \Rightarrow f_k(x) = 0$. Položíme-li $\varrho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x) - f_k(y)|$ pro $x \in P$, $y \in P$, pak podle **3.4** ϱ je spojitá pseudometrika. Buď R příslušný k ní (viz **3.2**) metrický prostor (jeho metriku značíme též ϱ), φ příslušné (zřejmě spojité) zobrazení. Zřejmě pak platí: $x \in P - G_k \Rightarrow \varrho(\varphi(x), \varphi(\overline{X}_k)) \geqq 1$. Z toho okamžitě plyne, že $\{\varphi(X_k)\}$ je lokálně konečný. Tedy platí (5).

Zjistili jsme, že (4) $\Rightarrow$ (5). Implikace (5) $\Rightarrow$ (4) plyne ihned z toho, že metrický prostor je plně normální, z **5.17** a **1.9.**

Platí-li (4) a F_k mají vlastnosti uvedené v (6), pak zřejmě $\{F_k\}$ je lokálně konečný, tedy existují otevřené $G_k \supset F_k$ tak, že $\{G_k\}$ je lokálně konečný, a tím spíše $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \emptyset$. Tedy (4) $\Rightarrow$ (6).

Nechť konečně platí (6). Buď $\{G_k\}$ nejvýš spočetné otevřené pokrytí prostoru P. Množiny $F_n = P - \bigcup_{n=1}^{\infty} G_k$ jsou uzavřené, $F_n \supset F_{n+1}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, takže existují otevřené $U_n \supset F_n$ takové, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \emptyset$. Ježto P je normální, existují (zjistí se to snadno indukcí) otevřené V_n takové, že $U_n \supset \overline{V}_n \supset V_n \supset F_n$, $V_n \supset V_{n+1}$. Zřejmě je soubor $\{V_n\}$ lokálně konečný. Položme nyní $W_1 = G_1$, $W_n = G_n \cap V_{n-1}$ pro $n = 2, 3, \ldots$ Zřejmě je $\{W_n\}$ lokálně konečný. Když $x \in P$, buď p nejmenší takové, že $x \in G_p$; potom $x \operatorname{non} \in \bigcup_{k=1}^{p-1} G_k$, $x \in F_{p-1} \subset V_{p-1}$, tedy $x \in W_p$. Tedy $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = P$. Z toho plyne, že $\{G_k\}$ je normální. — Dokázali jsme, že (6) $\Rightarrow$ (0); z toho a z předcházejících výsledků vyplývá, že podmínky (0), (4), (5), (6) jsou ekvivalentní.

III. Jestliže platí (7), pak se ke každému nejvýš spočetnému otevřenému pokrytí $\{G_k\}$ indukcí sestrojí posloupnost pokrytí s vlastnostmi, uvedenými v **4.1**, (1); z toho pak plyne, že $\{G_k\}$ je normální. — Platí-li (0), buď $\{G_k\}$ nejvýš spočetné otevřené pokrytí prostoru P. Pak $\{G_k\}$ je normální, tedy podle **4.3**, (1) existují otevřené $G_k^* \subset G_k$ takové, že $\bigcup G_k^* = P$ a soubor $\{G_k^*\}$ je lokálně konečný. Podle **2.6** (s $C_\alpha = \emptyset$) existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{U_\beta\}$ prostoru P, které hvězdovitě zjemňuje $\{G_k^*\}$. Pro každé β označme $\mu(\beta)$ množinu těch k, pro něž $U_\beta \subset G_k^*$; množiny $\mu(\beta)$ jsou zřejmě konečné, neboť $\{G_k^*\}$ je lokálně konečný. Buď nyní M množina všech neprázdných konečných množin indexů k; pro každé $\mu \in M$ buď V_μ sjednocení všech U_β takových, že $\mu(\beta) = \mu$. Je zřejmé, že $\{V_\mu\}$ je spočetné otevřené pokrytí P. Snadno se zjistí, že $\{V_\mu\}$ hvězdovitě zjemňuje $\{G_k^*\}$. Je-li totiž $x \in P$, existuje k takové, že pro $x \in U_\beta$ je $U_\beta \subset G_k^*$; je-li nyní $x \in V_\mu$, pak pro jisté β platí $x \in U_\beta$, $\mu(\beta) = \mu$, avšak potom máme $U_\beta \subset G_k^*$, tedy též $U_{\beta'} \subset G_k^*$ pro každé β' takové, že $\mu(\beta') = \mu(\beta)$, a proto $V_\mu \subset G_k^*$. Dokázali jsme tedy, že (0) a (7) jsou ekvivalentní.

8.3. Je-li prostor P spočetně plně normální, $S \subset P$ je uzavřená, pak S je spočetně plně normální.

To vyplývá ihned z **8.2**, (6).

8.4. Nechť P je normální prostor, $\{X_\alpha\}$ je jeho σ-lokálně konečné zakrytí, X_α jsou uzavřené a spočetně plně normální. Potom P je spočetně plně normální.

Důkaz. Nechť $\{G_n\}$ je nejvýš spočetně otevřené pokrytí prostoru P. Podle **8.2**, (1) existují uzavřené (v X_α, a tedy v P) množiny $F_{\alpha,n} \subset G_n$ takové, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{\alpha,n} = X_\alpha$. Položme $T_n = \bigcup_\alpha F_{\alpha,n}$. Potom T_n jsou F_σ-množiny, $T_n \subset G_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = P$. Podle **8.2**, (3) je tedy P spočetně plně normální.

8.5. Nechť P je normální prostor, $\{X_k;\ k = 1, \ldots, n\}$ je konečné zakrytí P, každá X_k je G_δ-množina. Jsou-li X_k spočetně plně normální, pak P je též spočetně plně normální.

Důkaz. Nechť $F_p \subset P$ jsou uzavřené, $F_p \supset F_{p+1}$ pro $p = 1, 2, \ldots$, $\bigcap_{p=1}^{\infty} F_p = \emptyset$. Ježto X_k jsou spočetně plně normální, existují otevřené v P množiny $G_{k,p}$ takové, že $G_{k,p} \supset X_k \cap F_p$, $\bigcap_{p=1}^{\infty} G_{k,p} \cap X_k = \emptyset$; lze předpokládat, že vždy platí $G_{k,p} \supset G_{k,p+1}$. Nechť $X_k = \bigcap_{p=1}^{\infty} H_{k,p}$, $H_{k,p}$ jsou otevřené, a pro $p = 1, 2, \ldots$ máme $H_{k,p} \supset H_{k,p+1}$; položíme $U_p = \bigcup_{k=1}^{n} (G_{k,p} \cap H_{k,p})$. Potom zřejmě U_p jsou otevřené, $U_p \supset F_p$. Nechť $x \in P$; není-li $x \in X_k$, pak pro velká p je x non $\in H_{k,p}$; je-li $x \in X_k$, pak pro velká p je x non $G_{k,p}$. Pro každé k existuje tedy p tak, že x non $\in G_{k,p} \cap H_{k,p}$; z toho plyne ihned, že x non $\bigcap_{p=1}^{\infty} U_p$. Máme tedy $\bigcap_{p=1}^{\infty} U_p = \emptyset$. Z toho ihned vyplývá podle **8.2**, (6), že P je spočetně plně normální.

8.6. Nechť P je spočetně plně normální, $S \subset P$ je F_σ-množina. Potom S je spočetně plně normální.

Důkaz. Podle **T 5.4.4** S je normální. Nyní použijeme **8.3** a **8.4.**

8.7. Nechť P je F-prostor. Nechť $S \subset P$ a nechť pro každou otevřenou $G \subset P$ takovou, že $S \subset G$, existuje spočetně plně normální T, $S \subset T \subset G$. Potom S je spočetně plně normální.

Důkaz. Nechť $H_n \subset S$ jsou otevřené v S, $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = S$. Zvolme otevřené v P množiny G_n tak, aby $G_n \cap S = H_n$, a položme $G = \bigcup G_n$; zvolme T tak, aby $S \subset T \subset G$, T bylo spočetně plně normální. Potom existují otevřené v T množiny U_n tak, že $U_n \subset G_n \cap T$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = T$, $\{U_n\}$ je lokálně konečná v T. Soubor $\{U_n \cap S\}$ je lokálně konečným otevřeným pokrytím S, $U_n \cap S \subset G_n \cap S = H_n$.

8.8. Je-li prostor P normální a každá řídká uzavřená $S \subset P$ je spočetně plně normální, potom P je též spočetně plně normální.

Důkaz. Nechť $F_k \subset P$ jsou uzavřené, $F_k \supset F_{k+1}$ pro $k = 1, 2, \ldots$; nechť $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \emptyset$. Pro $k = 1, 2, \ldots$ položme $\Phi_k = F_k \cap \overline{P - F_k}$; buď

$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k$. Potom $\{\Phi_k\}$ je lokálně konečný, tedy množina S je uzavřená podle **1.13** a řídká podle **1.18**. Z **8.2**, (4) plyne, že existují otevřené v S množiny $H_k \supset \Phi_k$ takové, že $\{H_k\}$ je lokálně konečný. Zvolme nyní otevřené (v P) množiny $U_k \supset \Phi_k$ tak, aby $\overline{U}_k \cap (S - H_k) = \emptyset$. Pro $p = 1, 2, \ldots$ položme $T_p = \bigcap_{k=p}^{\infty} \overline{U}_k$. Potom $S \cap T_p = \emptyset$; kdyby totiž $x \in S \cap T_p$, pak by $x \in H_k$ pro $k \geqq p$, což není možné. Položme nyní $G_n = (U_n - T_n) \cup (P - \overline{P - F_n})$; pak G_n jsou otevřené, $G_n \supset F_n$. Předpokládejme, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$; nechť $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Ježto $P - \overline{P - F_n} \subset F_n$, zřejmě existuje p takové, že $x \operatorname{non}\in P - \overline{P - F_n}$ pro $n \geqq p$, tudíž $x \in U_n - T_n$ pro $n \geqq p$, tedy $x \in \bigcap_{n=p}^{\infty} \overline{U}_n$, což dává spor. Máme tedy $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$. Z toho plyne podle **8.2**, (6), že P je spočetně plně normální.

8.9. Je-li prostor P buďto plně normální nebo dokonale normální nebo normální a spočetně kompaktní, pak je spočetně plně normální.

Pro plně normální prostory je to evidentní; druhé dva případy plynou z **8.2**, (3) resp. (6).

Poznámka. Lze dokázat, že každý prostor, který se dá vnořit do uspořádaného prostoru (viz **T** def. **6.1.2**), je spočetně plně normální.

CVIČENÍ k § 8

8.1. Nazveme prostor P *dědičně spočetně plně normálním*, je-li každý jeho podprostor spočetně plně normální. Dokažte: k tomu, aby P byl dědičně spočetně plně normální, stačí (a je nutná) každá z těchto podmínek: (1) každá otevřená část P je spočetně plně normální, (2) P je dědičně normální a každá jeho řídká část je spočetně plně normální.

8.2. K tomu, aby byl prostor P dědičně spočetně plně normální, je nutná a stačí tato podmínka: jestliže $G_k \subset P$, $k = 1, 2, \ldots$, jsou otevřené, pak existují otevřené U_k takové, že $\bigcap U_k$ a $\bigcup G_k$ jsou disjunktní a pro každé k platí $\bigcup G_k \subset$ $\subset G_k \cup U_k$.

8.3. Nechť P je normální prostor, $\{X_\alpha\}$ je jeho σ-lokálně konečné zakrytí, X_α jsou uzavřené a dědičně spočetně plně normální. Potom P je dědičně spočetně plně normální.

8.4. Nechť P je plně normální prostor. Je-li P lokálně dědičně spočetně normální, pak je dědičně spočetně normální.