7. LOKALISACE VLASTNOSTÍ

7.1. Definice. Nechť P je prostor, $\mathfrak{M}$ je soustava jeho částí. Pravíme, že množina $X \subset P$ *náleží v bodě* $x \in P$ *lokálně* do $\mathfrak{M}$, jestliže existuje okolí U bodu x takové, že $U \cap X \in \mathfrak{M}$; platí-li to pro každé $x \in P$, pravíme, že X *náleží lokálně* do soustavy $\mathfrak{M}$; náleží-li X do $\mathfrak{M}$ lokálně v každém bodě $x \in X$, říkáme, že X *náleží vnitřně lokálně* do soustavy $\mathfrak{M}$. — Zřejmě platí: jestliže $X \in \mathfrak{M}$, pak X náleží lokálně do $\mathfrak{M}$.

Je-li V jistá vlastnost částí prostoru P a je-li $\mathfrak{M}$ soustava všech $Y \subset P$ s touto vlastností, pak někdy říkáme (místo uvedených výrazů) také, že $X \subset P$ má v bodě x lokálně vlastnost V, a podobně (např. říkáme, že „X je lokálně G_δ-množinou“).

7.2. Je-li $\mathfrak{M}$ soustava částí F-prostoru P a je-li $X \subset P$, pak množina těch $x \in P$, v nichž X náleží lokálně do $\mathfrak{M}$, je otevřená.

7.3. Soustavu množin $\mathfrak{M}$ nazýváme *aditivní*, jestliže platí $X \in \mathfrak{M}$, $Y \in \mathfrak{M} \Rightarrow X \cup Y \in \mathfrak{M}$, *multiplikativní*, jestliže platí $X \in \mathfrak{M}$, $Y \in \mathfrak{M} \Rightarrow$ $\Rightarrow X \cap Y \in \mathfrak{M}$.

Soustavu $\mathfrak{M}$ částí prostoru P nazveme

(a) *lokálně určenou*, jestliže platí: náleží-li $X \subset P$ lokálně do $\mathfrak{M}$, pak $X \in \mathfrak{M}$,

(b) *vnitřně lokálně určenou*, jestliže platí: náleží-li $X \subset P$ vnitřně lokálně do $\mathfrak{M}$, pak $X \in \mathfrak{M}$.

7.4. V několika tvrzeních a větách použijeme ještě tohoto (spíše pomocného) pojmu: soustavu $\mathfrak{M}$ částí prostoru P nazveme *částečně dědičnou*, jestliže ke každému $x \in P$ existuje okolí U s touto vlastností:

(*) když $F \subset G \subset U$, F je uzavřená, G je otevřená, pak existuje množina H taková, že $F \subset H \subset G$ a platí: $X \in \mathfrak{M} \Rightarrow H \cap X \in \mathfrak{M}$.

Je zřejmé, že v libovolném topologickém prostoru P je částečně dědičná zejména: každá dědičná*) soustava, soustava všech uzavřených množin, všech otevřených množin, všech G_δ-množin apod.**)

7.5. Nechť $\mathfrak{M}$ je lokálně určená částečně dědičná aditivní soustava částí regulárního F-prostoru P. Potom platí: když $X_\alpha \in \mathfrak{M}$, $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný, pak $\bigcup_\alpha X_\alpha \in \mathfrak{M}$.

Důkaz. Pro každý bod $x \in P$ existuje otevřené okolí U_x s vlastností **7.4**, (*) takové, že množina $\mu(x)$ těch α, pro něž $U_x \cap X_\alpha \neq \emptyset$, je konečná. Nechť V_x je okolí x, $\overline{V}_x \subset U_x$; existuje H_x tak, že $H_x \cap X_\alpha \in \mathfrak{M}$ pro každé α, $\overline{V}_x \subset H_x \subset U_x$. Zřejmě $H_x \cap \bigcup_\alpha X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mu(x)} (H_x \cap X_\alpha)$, takže $H_x \cap \bigcup_\alpha X_\alpha \in \mathfrak{M}$. Tedy $\bigcup_\alpha X_\alpha$ náleží lokálně do $\mathfrak{M}$ a proto $\bigcup_\alpha X_\alpha \in \mathfrak{M}$.

7.6. Nechť prostor P je plně normální. Nechť neprázdná soustava $\mathfrak{M}$ jeho částí je částečně dědičná a nechť platí: když $X_\alpha \in \mathfrak{M}$, $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný, pak $\bigcup X_\alpha \in \mathfrak{M}$. Potom soustava $\mathfrak{M}$ je lokálně určená a aditivní.

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat: když $X \subset P$ náleží lokálně do $\mathfrak{M}$, pak $X \in \mathfrak{M}$. Pro $x \in P$ nechť je U_x okolí x takové, že $U_x \cap X \in \mathfrak{M}$, V_x pak okolí x s vlastností **7.4**, (*). Z toho, že P je plně normální, plyne (viz **5.6**), že existují otevřené množiny W_x^*, W_x takové, že $\bigcup W_x^* = P$, $\overline{W}_x^* \subset W_x \subset U_x \cap V_x$, $\{W_x; x \in P\}$ je lokálně konečný. Dále existují H_x tak, že $\overline{W}_x^* \subset H_x \subset W_x$ a platí: $Y \in \mathfrak{M} \Rightarrow H_x \cap Y \in \mathfrak{M}$, takže $H_x \cap X = H_x \cap (U_x \cap X) \in \mathfrak{M}$. Soubor $\{H_x \cap X\}$ je zřejmě lokálně konečný, takže $X = \bigcup (H_x \cap X) \in \mathfrak{M}$.

7.7. Nechť P je prostor, $\mathfrak{M}$ je soustava jeho částí; buď $\mathfrak{M}_\sigma$ soustava všech $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $X_n \in \mathfrak{M}$, a buď $\mathfrak{M}_\delta$ soustava všech $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, $X_n \in \mathfrak{M}$. Soustava $\mathfrak{M}_\sigma$ je aditivní; je-li $\mathfrak{M}$ multiplikativní, pak je multiplikativní též $\mathfrak{M}_\sigma$. Soustava $\mathfrak{M}_\delta$ je multiplikativní; je-li $\mathfrak{M}$ aditivní, pak je aditivní též $\mathfrak{M}_\delta$.

*) Soustavu množin $\mathfrak{M}$ nazýváme *dědičnou*, když platí: $Y \subset X \in \mathfrak{M} \Rightarrow Y \in \mathfrak{M}$.

**) Je-li soustava $\mathfrak{M}$ částí prostoru P dědičná, pak zřejmě pro každou $Y \subset P$ platí $X \in \mathfrak{M} \Rightarrow Y \cap X \in \mathfrak{M}$. Je-li splněn slabší požadavek, platí-li totiž zmíněná implikace aspoň pro množiny Y z jisté soustavy $\mathfrak{H}$, která je dostatečně ,,bohatá" v tom smyslu, že každé $x \in P$ má okolí U, v němž mezi libovolnou uzavřenou F a otevřenou G, $F \subset G$, lze ,,vložit" množinu ze soustavy $\mathfrak{H}$, nazvali jsme $\mathfrak{M}$ částečně dědičnou. Z této poznámky je snad zřejmější smysl termínu ,,částečně dědičná soustava", kterého se jinak v literatuře dosud nepoužívalo.

Nechť P je plně normální. Je-li $\mathfrak{M}$ lokálně určená částečně dědičná aditivní soustava, pak totéž platí o $\mathfrak{M}_\sigma$ a za předpokladu, že $\mathfrak{M}$ je mimoto multiplikativní, též o $\mathfrak{M}_\delta$.

Důkaz. Tvrzení týkající se aditivnosti a multiplikativnosti jsou zřejmá. Nechť P je plně normální, $\mathfrak{M}$ je lokálně určená částečně dědičná aditivní soustava. Potom tvrzení o $\mathfrak{M}_\sigma$ vyplývá z **7.5, 1.14, 7.6.** K důkazu tvrzení o $\mathfrak{M}_\delta$ (za předpokladu, že $\mathfrak{M}$ je multiplikativní) pak podle **7.6** stačí dokázat: když $X_\alpha \in \mathfrak{M}_\delta$, $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný, pak $\bigcup X_\alpha \in \mathfrak{M}_\delta$.

Z toho, že P je plně normální, vyplyne snadno, že existuje lokálně konečný soubor $\{H_\beta\}$ takový, že $\bigcup H_\beta = P$, množina $\mu(\beta)$ indexů α takových, že $H_\beta \cap X_\alpha \neq \emptyset$, je pro každé β konečná a platí $Y \in \mathfrak{M} \Rightarrow$ $\Rightarrow H_\beta \cap Y \in \mathfrak{M}$.

Položme nyní $T_\beta = \bigcup_{\alpha \in \mu(\beta)} (X_\alpha \cap H_\beta)$. Pak $T_\beta \in \mathfrak{M}_\delta$ (neboť $\mathfrak{M}$ a tedy též $\mathfrak{M}_\delta$ je aditivní), $\bigcup_\beta T_\beta = \bigcup_\alpha X_\alpha$, $T_\beta \subset H_\beta$, $H_\beta \in \mathfrak{M}$, $\{H_\beta\}$ je lokálně konečný. Z **1.16** nyní plyne, že $\bigcup_\alpha X_\alpha = \bigcup_\beta T_\beta \in \mathfrak{M}_\delta$.

7.8. Soustava všech uzavřených (všech otevřených) množin v libovolném prostoru je lokálně určená, částečně dědičná, aditivní a multiplikativní.

Důkaz. Nechť $M \subset P$ a nechť každé $x \in P$ má okolí U takové, že $U \cap M$ je uzavřená. Nechť $x \in \overline{M}$; zvolme okolí U bodu x tak, aby $U \cap M$ byla uzavřená; pak $\overline{M} = \overline{U \cap M} \cup \overline{M - U}$, tudíž $x \in \overline{U \cap M} =$ $= U \cap M \subset M$. Soustava všech uzavřených množin je tedy lokálně určená. Ostatní tvrzení jsou zřejmá.

7.9. Nechť P je normální prostor. Uzavřená množina $F \subset P$ je dokonale uzavřená, když a jen když je zároveň G_δ-množina; otevřená množina $G \subset P$ je dokonale otevřená, když a jen když je zároveň F_σ-množina.

Důkaz stačí provést pro dokonale uzavřené množiny. Je-li F dokonale uzavřená, pak je G_δ-množinou podle **T 9.5.13.** Nechť F je uzavřená G_δ-množina. Buď $P - F = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, S_n uzavřené. Nechť f_n je pro $n =$ $= 1, 2, \ldots$ spojitá funkce v P; nechť $x \in P \Rightarrow 0 \leqq f_n(x) \leqq 1$, $x \in F \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x) = 0,\ x \in S_n \Rightarrow f_n(x) = 1$. Pro $x \in P$ položme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$.

Potom f je spojitá funkce v P, $f^{-1}(0) = F$.

7.10. V plně normálním prostoru F_σ-množiny (G_δ-množiny, dokonale uzavřené množiny, dokonale otevřené množiny, dokonalé F_σ-množiny, dokonalé G_δ-množiny) tvoří lokálně určenou soustavu (která je zároveň částečně dědičná, aditivní a multiplikativní).*)

Důkaz. Pro F_σ-množiny a G_δ-množiny to plyne z **7.8** a **7.7**. Pro dokonale uzavřené a dokonale otevřené množiny použijeme nyní **7.9**, pro dokonalé F_σ-množiny a dokonalé G_δ-množiny pak znovu **7.7.**

Poznámka. V normálním prostoru, který není plně normální, nemusí být soustava všech F_σ-množin ani soustava všech G_δ-množin lokálně určená; viz 10.3.

7.11. V libovolném prostoru tvoří otevřené množiny vnitřně lokálně určenou soustavu. V regulárním F-prostoru tvoří množiny, které jsou průnikem uzavřené a otevřené množiny, vnitřně lokálně určenou soustavu.

Důkaz. První tvrzení je zřejmé. Nechť P je regulární F-prostor; nechť $X \subset P$, X náleží v každém $x \in X$ lokálně do soustavy $\mathfrak{M}$ všech $F \cap G$, kde F je uzavřená, G je otevřená. Je-li $x \in X$, zvolme jeho okolí U_x takové, že $U_x \cap X = F_x \cap G_x$, kde F_x je uzavřená, G_x je otevřená; zvolme dále otevřené okolí V_x bodu x tak, aby $\overline{V}_x \subset U_x \cap$ $\cap\, G_x$. Potom $V_x \cap \overline{X} \subset \overline{V_x \cap X} \subset F_x \cap G_x \subset X$, tedy x neleží v uzávěru $\overline{X} - X$. Z toho ihned plyne, že $\overline{X} - X$ je uzavřená. Ježto $X =$ $= \overline{X} \cap (P - (\overline{X} - X))$, máme $X \in \mathfrak{M}$.

7.12. V dědičně plně normálním prostoru soustava všech množin, které jsou průnikem otevřené množiny a F_σ-množiny, a soustava všech G_δ-množin jsou vnitřně lokálně určenými soustavami.**)

---

*) Věta **7.10** platí obdobně, jak lze snadno ukázat na základě věty **7.7**, pro každou borelovskou třídu množin, jakož i pro obdobné třídy, které dostaneme, když vycházíme z dokonale uzavřených (otevřených) množin. Viz též poznámku pod čárou na str. 416.

**) K této větě (a některým jiným výsledkům z tohoto paragrafu) srovn. práci E. Michaela citovanou na str. 421.

Důkaz provedeme pro případ F_σ-množin. Nechť $X \subset P$ a nechť každé $x \in X$ má okolí V_x takové, že $V_x \cap X = G_x \cap S_x$, kde G_x je otevřená, S_x je F_σ-množina. Z toho, že P je normální, plyne snadno, že každé $x \in X$ má otevřené okolí $U_x \subset V_x \cap G_x$, které je F_σ-množinou; platí pak $U_x \cap X = U_x \cap S_x$, takže $U_x \cap X$ je F_σ-množina. Položme nyní $U = \bigcup_{x \in X} U_x$; pak $X \subset U$, U je otevřená, X je v U lokálně F_σ-množina. Podle **7.10** je tedy X F_σ-podmnožinou prostoru U, a tedy je průnikem U s jistou F_σ-množinou v P.

Pro případ G_δ-množin dospějeme obdobným postupem k tomu, že X je G_δ-množina v U; to však znamená, že X je G_δ-množina též v P.

7.13. Nechť $\mathfrak{M}$ je soustava částí F-prostoru P a nechť (1) když $G \subset P$ je otevřená, $X \in \mathfrak{M}$, pak $G \cap X \in \mathfrak{M}$; (2) když $X \subset Y \subset P$, $\overline{X} = \overline{Y}$, X je otevřená v Y, pak $X \in \mathfrak{M} \Rightarrow Y \in \mathfrak{M}$.

Potom k tomu, aby $\mathfrak{M}$ byla vnitřně lokálně určenou soustavou, je nutná a stačí tato podmínka: když $X_\alpha \in \mathfrak{M}$, $\{X_\alpha\}$ je disjunktní, X_α jsou otevřené v $X = \bigcup X_\alpha$, potom $X \in \mathfrak{M}$.

Důkaz. I. Nechť $\mathfrak{M}$ je vnitřně lokálně určená. Mají-li X_α uvedené vlastnosti, pak zřejmě $X = \bigcup X_\alpha$ náleží vnitřně lokálně do $\mathfrak{M}$, tedy $X \in \mathfrak{M}$. Podmínka je tedy nutná.

II. Nechť podmínka je splněna. Nechť $Y \subset P$ náleží vnitřně lokálně do $\mathfrak{M}$. Buď $\mathfrak{S}$ soustava všech neprázdných otevřených $G \subset P$ takových, že $G \cap Y \in \mathfrak{M}$. Z **T 3.9.1** snadno vyplývá, že existuje maximální disjunktní soustava $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{S}$ (to znamená, že $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}' \subset \mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}'$ disjunktní $\Rightarrow$ $\Rightarrow \mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$). Buď U sjednocení všech $H \in \mathfrak{H}$. Potom (podle předpokládané podmínky) je zřejmě $U \cap Y \in \mathfrak{M}$. Kdyby bylo $Y - \overline{U \cup Y} \neq \emptyset$, existoval by bod $y \in Y - \overline{U \cap Y}$ a (ježto Y náleží vnitřně lokálně do $\mathfrak{M}$) jeho okolí V_0 takové, že $V_0 \cap Y \in \mathfrak{M}$. Je-li nyní G_0 otevřené, $y \in G_0 \subset V_0 - \overline{U \cap Y}$, máme $G_0 \cap Y \in \mathfrak{M}$, tedy $G_0 \in \mathfrak{S}$, při tom však $G_0 \cap \overline{U \cap Y} = \emptyset$, což je ve sporu s tím, že $\mathfrak{H}$ je maximální. Je tedy $Y \subset \overline{U \cap Y}$. Podle vlastnosti (2) dostaneme nyní $Y \in \mathfrak{M}$; z toho plyne, že $\mathfrak{M}$ je vnitřně lokálně určenou soustavou.

7.14. Nechť P je prostor, $X \subset P$ je v každém svém bodu lokálně 1. kategorie (lokálně řídké) v P. Potom X je 1. kategorie (řídká) v P.

Důkaz. Buď $\mathfrak{M}$ soustava všech $X \subset P$, které jsou 1. kategorie (řídké) v P. Zřejmě $\mathfrak{M}$ má vlastnost **7.13**, (1); když $X \subset Y \subset P$, $\overline{X} = \overline{Y}$, X je otevřená v Y, pak zřejmě $Y - X$ je řídká v Y, a tím spíše v P, a proto $X \in \mathfrak{M} \Rightarrow Y \in \mathfrak{M}$. Konečně je zřejmé, že $\mathfrak{M}$ splňuje podmínku z **7.13**; $\mathfrak{M}$ je tedy vnitřně lokálně určená soustava.

7.15. Je-li V určitá vlastnost, definovaná pro topologické prostory, budeme (jako obvykle) říkat, že prostor P *má v bodě x lokálně vlastnost* V, jestliže existuje okolí U bodu x v prostoru P takové, že podprostor U má vlastnost V; má-li P v každém svém bodě lokálně vlastnost V, říkáme, že P *má lokálně vlastnost* V.

7.16. Nechť P je plně normální, $S \subset P$, $\overline{S} = P$, S je spočetně kompaktní. Potom P je kompaktní.

Důkaz. Nechť $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ je nejvýš spočetné otevřené pokrytí P. Podle **5.6** existují otevřené H_α tak, že $\overline{H}_\alpha \subset G_\alpha$, $\bigcup H_\alpha = P$. Ježto S je spočetně kompaktní, existuje konečná $B \subset A$ tak, že $\bigcup_{\alpha \in B} (H_\alpha \cap S) = S$. Máme pak $\bigcup_{\alpha \in B} \overline{H_\alpha \cap S} = P$, tedy $\bigcup_{\alpha \in B} G_\alpha = P$. Z toho plyne, že P je spočetně kompaktní, a tedy podle **5.16** kompaktní.

7.17. Je-li plně normální prostor P lokálně spočetně kompaktní, pak je sjednocením disjunktní soustavy otevřených množin, z nich každá je σ-kompaktním a lokálně kompaktním prostorem.

Důkaz. Pro každé $x \in P$ zvolme spočetně kompaktní okolí U_x; z toho, že P je plně normální, plyne, že existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{V_\alpha; \alpha \in A\}$ prostoru P takové, že $\{\overline{V}_\alpha\}$ je jemnější než $\{U_x\}$. Zřejmě pak $\overline{V}_\alpha$ jsou plně normální, a tedy podle **7.15** kompaktní.

Pro každé $\alpha \in A$ označme nyní $C(\alpha)$ množinu těch $\beta \in A$, pro něž $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$. Každá množina $C(\alpha)$ je konečná; kdyby totiž byla nekonečná, pak $\{V_\alpha \cap V_\beta; \beta \in C(\alpha)\}$ je nekonečný lokálně konečný soubor neprázdných částí kompaktního prostoru $\overline{V}_\alpha$; to však vede ihned ke sporu. Zřejmě platí $\overline{V}_\alpha \subset \bigcup_{\beta \in C(\alpha)} V_\beta$. Pro každé $\alpha \in A$ položme nyní

$$C_1(\alpha) = C(\alpha),\ C_{n+1}(\alpha) = \bigcup_{\beta \in C_n(\alpha)} C(\beta) \text{ pro } n = 1, 2, \ldots,\ D(\alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n(\alpha).$$

Je zřejmé, že každá $D(\alpha)$ je spočetná; dále je zřejmé, že pro libovolná $\alpha_1 \in A$, $\alpha_2 \in A$ buď $D(\alpha_1) = D(\alpha_2)$ anebo platí $\beta_1 \in D(\alpha_1)$, $\beta_2 \in D(\alpha_2) \Rightarrow \Rightarrow V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2} = \emptyset$. Buď nyní $\mathfrak{S}$ soustava všech $\bigcup_{\beta \in D(\alpha)} V_\beta$. Potom $\mathfrak{S}$ je disjunktní otevřené pokrytí P. Ježto vždy $\overline{V}_\alpha \subset \bigcup_{\beta \in C(\alpha)} V_\beta$, a tedy $\gamma \in D(\alpha) \Rightarrow \overline{V}_\gamma \subset \bigcup_{\beta \in C(\alpha)} V_\beta$, dostáváme snadno $\bigcup_{\beta \in D(\alpha)} \overline{V}_\beta = \bigcup_{\beta \in D(\alpha)} V_\beta$. Z toho plyne, že každé $S \in \mathfrak{S}$ je σ-kompaktní lokálně kompaktní.

7.18. Nechť má každý bod plně normálního prostoru P okolí, které je sjednocením spočetného počtu spočetně kompaktních podprostorů. Potom P je sjednocením disjunktní soustavy σ-kompaktních otevřených množin.

Důkaz. Pro každé $x \in P$ zvolme okolí U_x, které je sjednocením spočetné soustavy spočetně kompaktních množin. Ježto P je plně normální, existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{V_\alpha; \alpha \in A\}$ takové, že $\{\overline{V}_\alpha\}$ zjemňuje $\{U_x\}$. Potom pro každé α platí $\overline{V}_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_{\alpha,n}$, kde $X_{\alpha,n}$ jsou spočetně kompaktní; platí pak též $\overline{V}_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{X}_{\alpha,n}$, takže podle **7.16** $\overline{V}_\alpha$ jsou σ-kompaktní.

Nechť nyní $C(\alpha)$, $C_n(\alpha)$, $D(\alpha)$ mají stejný význam jako v důkazu věty **7.17**. Z toho, že $\overline{V}_\alpha$ je σ-kompaktní, snadno vyplyne, že $C(\alpha)$, a tedy též $D(\alpha)$ jsou spočetné. Platí rovněž, že vždy $\overline{V}_\alpha \subset \bigcup_{\beta \in C(\alpha)} V_\beta$ a že pro libovolné $\alpha_1 \in A$, $\alpha_2 \in A$ je vždy buď $D(\alpha_1) = D(\alpha_2)$ nebo $\beta_1 \in D(\alpha_1)$, $\beta_2 \in D(\alpha_2) \Rightarrow V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2} = \emptyset$. Obdobným způsobem jako na konci důkazu **7.17** se zjistí že soustava všech $\bigcup_{\beta \in D(\alpha)} V_\beta$ má žádané vlastnosti.

7.19. Plně normální lokálně $\mathfrak{m}$-metrisovatelný prostor je $\mathfrak{m}$-metrisovatelný.

Důkaz. Nechť každý bod x plně normálního prostoru P má okolí U_x, které je $\mathfrak{m}$-metrisovatelné. Pak existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{V_\alpha; \alpha \in A\}$ takové, že $\{\overline{V}_\alpha\}$ zjemňuje $\{U_x\}$. Ježto $\overline{V}_\alpha$ je $\mathfrak{m}$-metrisovatelný, existuje podle **5.20** jeho otevřená base $\{G_{\alpha,\beta}; \beta \in B_\alpha\}$ taková, že $B_\alpha = \bigcup_{\mu \in M} B_{\alpha,\mu}$, M má mohutnost $\mathfrak{m}$, soubory $\{G_{\alpha,\beta}; \beta \in B_{\alpha,\mu}\}$ jsou lokálně konečné v prostoru $\overline{V}_\alpha$, tedy též v P. Snadno se zjistí, že pro každé $\mu \in M$ soubor $\{V_\alpha \cap G_{\alpha,\beta}; \alpha \in A, \beta \in B_{\alpha,\mu}\}$ je lokálně konečný v P, a soubor $\{V_\alpha \cap G_{\alpha,\beta}; \alpha \in A, \beta \in B_\alpha\}$ je otevřenou basí prostoru P. Z toho podle **5.20** již plyne tvrzení.

7.20. Plně normální lokálně metrisovatelný prostor je metrisovatelný.

Poznámka. Existují normální (dokonce dědičně normální) lokálně metrisovatelné prostory, které nejsou metrisovatelné; viz **10.1.**

7.21. Nechť prostor P je plně normální a nechť každý jeho bod má okolí, které je metrisovatelné a topologicky úplné. Potom P je topologický úplný metrisovatelný prostor.

Důkaz. Podle **7.20** prostor P je metrisovatelný. Zvolme jeho určitou metriku ϱ; buď R úplný obal metrického prostoru (P, ϱ). Je-li $x \in P$, U_x okolí x v P, které je topologicky úplné, pak U_x je podle **T 9.4.21** G_δ-množinou v $\overline{U}_x$, tedy G_δ-množinou v R. Z toho plyne, že P je vnitřně lokálně G_δ-množinou v R, tedy podle **7.12** je G_δ-množinou v R. Podle **T 9.4.20** a **T 9.4.15** je tudíž P topologicky úplný.

Cvičení k § 7

7.1. Je-li P dědičně plně normální, pak Baireovy množiny v P tvoří vnitřně lokálně určenou soustavu.

7.2. Nechť prostor P je plně normální. Je-li lokálně dědičně normální (lokálně dokonale normální, lokálně dědičně plně normální), pak je dědičně normální (dokonale normální, dědičně plně normální).

7.3. Nechť P je plně normální; nechť $\mathfrak{m}$ je nekonečná mohutnost a nechť P má lokálně mohutnost $\leqq \mathfrak{m}$. Prostor P je sjednocením disjunktní soustavy otevřených částí mohutnosti $\leqq \mathfrak{m}$.

7.4. Nechť P je plně normální prostor. Je-li P lokálně separabilní, pak je sjednocením disjunktní soustavy otevřených množin, z nichž každá je separabilním prostorem; jestliže P má lokálně Lindelöfovu vlastnost, pak je sjednocením disjunktní soustavy otevřených podprostorů s Lindelöfovou vlastností.

7.5. Nechť prostor P je plně normální. Nechť funkce f na P je lokálně první třídy (tj. ke každému $x \in P$ existuje okolí U takové, že $f|U$ je funkce první třídy). Potom f je funkce první třídy.