6. DĚDIČNĚ PLNĚ NORMÁLNÍ PROSTORY

6.1. Definice. Prostor P nazveme *dědičně plně normálním*, je-li každý jeho podprostor plně normální.

Je zřejmé, že dědičně plně normální prostor je dědičně normální. Dědičně normální prostor však nemusí být dědičně plně normální, ba dokonce (viz **10.1**) nemusí být ani plně normální.

6.2. Prostor je dědičně plně normální, když a jen když každý jeho otevřený podprostor je plně normální. — To plyne ihned z **5.9.**

Poznámka. Na základě věty **6.2** anebo přímo na základě definice dostaneme snadno z podmínek pro plnou normalitu (viz **5.4**, **5.5**, **5.6**) podmínky pro to, aby prostor byl dědičně plně normální; viz též 6.1.

6.3. Dokonale normální plně normální prostor je dědičně plně normální. — To plyne ihned z **6.2** a **5.7.**

6.4. Metrisovatelný prostor je dědičně plně normální. — Vzhledem k tomu, že podprostor metrisovatelného prostoru je zase metrisovatelný, plyne to přímo z **5.3.**

6.5. Nechť P je dědičně plně normální. Nechť $X_\alpha \subset P$, soubor $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný v $X = \bigcup X_\alpha$. Potom existují otevřené (v P) množiny $G_\alpha \supset X_\alpha$ takové, že soubor $\{G_\alpha\}$ je lokálně konečný v $G = \bigcup G_\alpha$. Při tom lze zvolit G_α tak, aby $G_\alpha \supset \overline{X}_\alpha \cap G$. Jsou-li X_α otevřené v X, pak zase lze zvolit G_α tak, aby $G_\alpha \cap X = X_\alpha$.

Důkaz. Buď U sjednocení všech otevřených (v P) množin V takových, že $V \cap X_\alpha \neq \emptyset$ pouze pro konečně mnoho indexů α. Snadno se zjistí, že $X \subset U$, $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný v U, takže soubor $\{\overline{X}_\alpha \cap U\}$

je rovněž lokálně konečný v U. Existují tedy podle **5.17** otevřené v U množiny $H_\alpha \supset \overline{X}_\alpha \cap U$ takové, že $\{H_\alpha\}$ je lokálně konečný v U. Postačí nyní v obecném případě položit $G_\alpha = H_\alpha$; jsou-li X_α otevřené v X, pak zvolíme nejdříve otevřené (v P) množiny Y_α tak, aby $Y_\alpha \cap X = X_\alpha$, a položíme $G_\alpha = H_\alpha \cap Y_\alpha$.

6.6. Aby regulární F-prostor P byl dokonale normální a plně normální, k tomu je nutná a stačí tato podmínka: když $\{G_\alpha\}$ je soubor otevřených částí P, potom existuje jemnější soubor $\{H_\beta\}$ otevřených množin, který je σ-lokálně konečný v P a takový, že $\bigcup_\beta H_\beta = \bigcup_\alpha G_\alpha$.

Důkaz. I. Nechť podmínka je splněna. Potom nejprve (bereme-li v úvahu $\{G_\alpha\}$ taková, že $\bigcup G_\alpha = P$) vyplývá z **5.6**, (1), že P je plně normální. Je-li $U \subset P$ otevřená neprázdná, zvolme pro každé $x \in U$ otevřenou množinu G_x tak, aby $x \in G_x$, $\overline{G}_x \subset U$. Nechť nyní $\{U_\beta\}$ je σ-lokálně konečný v P soubor otevřených množin, $\bigcup H_\beta = \bigcup G_x = U$, $\{H_\beta\}$ zjemňuje $\{G_x\}$. Potom zřejmě též $\bigcup \overline{H}_\beta = U$; ježto $\{U_\beta\}$, a tedy také $\{\overline{U}_\beta\}$ je σ-lokálně konečný, plyne z toho podle **1.15**, že $U = \bigcup \overline{H}_\beta$ je F_σ-množina.

II. Nechť P je dokonale a plně normální; nechť $G_\alpha \subset P$ jsou otevřené. Položme $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$. Z toho, že P je dokonale normální, vyplývá ihned, že existují otevřené množiny V_n takové, že $\overline{V}_n \subset G$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n = G$. Pro každé n platí, že $\{G_\alpha \cap \overline{V}_n\}$ je otevřené pokrytí prostoru $\overline{V}_n$, takže existuje jeho lokálně konečné otevřené pokrytí $\{X_{n,\beta}; \beta \in B_n\}$, které zjemňuje pokrytí $\{G_\alpha \cap \overline{V}_n\}$. Pro $\beta \in B_n$ položme $H_\beta = V_n \cap X_{n,\beta}$; snadno se zjistí, že $\{H_\beta; \beta \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\}$ má potřebné vlastnosti.

6.7. Nechť P je libovolný topologický prostor, Q je metrisovatelný prostor. Aby $P \times Q$ byl dědičně normální a plně normální, k tomu je nutné a stačí, aby nastal jeden z těchto případů: (1) P je dokonale normální a plně normální (a tedy dědičně plně normální); (2) P je dědičně normální a plně normální, Q je diskrétní. V případě (1) je prostor $P \times Q$ též dokonale normální, a tedy dědičně plně normální.*)

*) Srovnej práci citovanou v poznámce na str. 452.

Důkaz. I. Nechť $P \times Q$ (a tudíž také P) je dědičně normální a plně normální. Předpokládejme, že nenastává případ (1) ani (2), a odvoďme spor. Existuje otevřená $G \subset P$, která není F_σ-množinou. Ježto Q není diskrétní, existuje prostá posloupnost $\{b_n\}$, $b_n \in Q$, a bod b různý od všech b_n tak, že $b_n \to b$. Položme $F = P - G$, $S = (P \times Q) - F \times (b)$. Položme $X_n = F \times (b_n)$, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $Y \doteq G \times (b)$. Potom X, Y jsou uzavřené v S, $X \cap Y = \emptyset$. Ježto $P \times Q$ je dědičně normální, existují podle **T 5.4.9** otevřené v $P \times Q$ množiny $U \supset X$, $V \supset Y$ tak, že $U \cap V = \emptyset$. Buď nyní U_n množina $x \in P$ takových, že $(x, b_n) \in U$; zřejmě $U_n \supset F$, U_n je otevřená v P. Ježto $G = P - F$ není F_σ-množinou, máme $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n - F \neq \emptyset$. Buď $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n - F$; pak máme zřejmě $(a, b) \in \overline{U}$, zároveň však $(a, b) \in Y$, což dává spor.

II. Ježto je jasné, že v případě (2) prostor $P \times Q$ má potřebné vlastnosti, zbývá pouze dokázat: je-li P dokonale normální, plně normální, Q je metrisovatelný, pak $P \times Q$ je dokonale normální plně normální.

Podle **5.21** má Q σ-lokálně konečnou otevřenou basi; z **2.6** vyplývá pak snadno, že Q má σ-diskrétní otevřenou basi $\{H_{n,\alpha};\ \alpha \in A_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$, kde pro každé n soubor $\{H_{n,\alpha}\}$ je diskrétní. Buď nyní $G \subset P \times Q$ otevřená; pro $n = 1, 2, \ldots$, $\alpha \in A_n$ buď $U_{n,\alpha}$ sjednocení všech otevřených $V \subset P$ takových, že $V \times H_{n,\alpha} \subset G$. Je zřejmé, že soubor $\{U_{n,\alpha} \times H_{n,\alpha}\}$ je σ-diskrétní (a tedy σ-lokálně konečný); snadno se zjistí, že $\bigcup_{n,\alpha} (U_{n,\alpha} \times H_{n,\alpha}) = G$. Ježto každá $U_{n,\alpha} \times H_{n,\alpha}$ je F_σ-množina, plyne z toho podle **1.15**, že G je F_σ-množina.

Nechť nyní $\{G_\beta;\ \beta \in B\}$ je otevřené pokrytí prostoru $P \times Q$. Nechť $U_{\beta,n,\alpha}$ značí sjednocení otevřených $V \subset P$ takových, že $V \times H_{n,\alpha} \subset G_\beta$; položme $U^*_{n,\alpha} = \bigcup_\beta U_{\beta,n,\alpha}$. Podle **6.6** pro libovolné $n = 1, 2, \ldots$, $\alpha \in A_n$ existuje σ-lokálně konečný soubor $\{W_{n,\alpha,\gamma};\ \gamma \in G_{n,\alpha}\}$ otevřených částí prostoru P takový, že $\bigcup_\gamma W_{n,\alpha,\gamma} = U^*_{n,\alpha}$; $\{W_{n,\alpha,\gamma};\ \gamma \in C_{n,\alpha}\}$ zjemňuje $\{U_{\beta,n,\alpha};\ \beta \in B\}$. Snadno se nyní zjistí (viz též **1.11**, **1.6**), že soubor $\{W_{n,\alpha,\gamma} \times H_{n,\alpha}\}$ je σ-lokálně konečný, pokrývá $P \times Q$ a zjemňuje $\{G_\beta\}$. Tedy P je plně normální a tím je důkaz dokončen.

6.1. K tomu, aby F-prostor P byl dědičně plně normální, je nutná a stačí každá z těchto podmínek: (1) je-li $\{G_\alpha\}$ soubor otevřených částí P, pak existuje hvězdovitě jemnější soubor otevřených množin $\{H_\beta\}$ takový, že $\bigcup H_\beta = \bigcup G_\alpha$; (2) P je regulární a platí: jsou-li $G_\alpha \subset P$ otevřené, pak existují $X_\alpha \subset G_\alpha$ takové, že $\bigcup X_\alpha = \bigcup G_\alpha$, $\{X_\alpha\}$ je lokálně konečný v $\bigcup X_\alpha$; (3) P je H-prostor a platí: jsou-li $G_\alpha \subset P$ otevřené, pak existují otevřené $H_\alpha \subset G_\alpha$ takové, že $\bigcup H_\alpha = \bigcup G_\alpha$, $\{H_\alpha\}$ je lokálně konečný v $\bigcup H_\alpha$.

6.2. Nechť P je dědičně plně normální. Potom ke každému souboru $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$ částí P takovému, že pro každé α platí $X_\alpha \cap \overline{\bigcup_{\substack{\beta \in A \\ \beta \neq \alpha}} X_\beta} = \emptyset$, existují otevřené v P množiny $U_\alpha \supset X_\alpha$ takové, že $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ pro $\alpha \neq \beta$.

6.3. Každý spočetně kompaktní podprostor dědičně plně normálního prostoru je uzavřený.

6.4. Nechť P je F-prostor. Nechť $\{S_\alpha\}$ je lokálně konečné uzavřené zakrytí P. Jsou-li S_α dědičně plně normální, pak též P je dědičně plně normální; jsou-li S_α dokonale normální, pak též P je dokonale normální.

6.5. Nechť P je normální. Nechť $X_k \subset Y_k \subset P$, $k = 1, 2, \ldots$, $\bigcup X_k = P$, X_k jsou uzavřené, Y_k jsou otevřené. Jsou-li Y_k plně normální, pak též P je plně normální; jsou-li Y_k dědičně plně normální, pak též P je dědičně plně normální.

6.6. Nechť P je dědičně plně normální prostor. Nechť $S \subset P$ a nechť ϱ je spojitá pseudometrika na S. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje hustá otevřená $G \subset P$ taková, že $G \supset S$, $P - G \subset \overline{S} - S$, a spojitá pseudometrika σ na G taková, že $|\varrho(x, y) - \sigma(x, y)| < \varepsilon$ pro $x \in S$, $y \in S$.