5. PLNĚ NORMÁLNÍ PROSTORY

5.1. Podle **4.11** je F-prostor normální, když a jen když každé jeho konečné otevřené pokrytí je normální. Podle **4.9** je každé otevřené pokrytí metrisovatelného prostoru normální. Na druhé straně lze snadno udat příklad (viz **10.1**) otevřeného pokrytí normálního prostoru, které není normální. Jeví se proto přirozeným soustavně studovat prostory, jejichž každé otevřené pokrytí je normální; ukáže se pak, že tyto prostory mají četné další důležité vlastnosti.

Definice. Pravíme, že F-prostor P je *plně normální*, je-li každé jeho otevřené pokrytí normální*).

Uvedeme nyní nejdříve dvě věty, které přímo plynou z této definice a dřívějších vět (**4.9** a **4.10**), a pak několik podmínek, které jsou nutné a stačí k tomu, aby prostor byl plně normální.

5.2. Plně normální prostor je normální.

5.3. Metrisovatelný prostor je plně normální.

5.4. Aby F-prostor P byl plně normální, k tomu je nutná a stačí každá z těchto podmínek:

(1) ke každému otevřenému pokrytí prostoru P existuje hvězdovitě jemnější otevřené pokrytí;

(2) ke každému otevřenému pokrytí $\{G_\alpha\}$ prostoru P existuje spojitá pseudometrika ϱ taková, že pro každé $x \in P$ při vhodném α platí $\varrho(x, y) < 1 \Rightarrow y \in G_\alpha$;

(3) ke každému otevřenému pokrytí $\{G_\alpha\}$ prostoru P existuje spojitá pseudometrika ϱ tak, že pro každé $x \in P$ při vhodném α a vhodném $\varepsilon > 0$ platí $\varrho(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in G_\alpha$;

(4) ke každému otevřenému pokrytí prostoru P existuje jemnější otevřené pokrytí $\{f^{-1}(V_\mu)\}$, kde f je vhodné spo-

*) Pro plně normální prostory se velmi často užívá též názvu *parakompaktní*.

jité zobrazení P do metrisovatelného prostoru R, $\{V_\mu\}$ je otevřené pokrytí R.

Důkaz. Platí-li (1), pak se k danému otevřenému pokrytí $\mathfrak{G}_0$ sestrojí ihned indukcí pokrytí $\mathfrak{G}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, taková, že $\mathfrak{G}_{k+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathfrak{G}_k$. Vše ostatní plyne ihned z **4.1**, (1), (4), (5), (6).

5.5. Aby F-prostor P byl plně normální, k tomu je nutná a stačí každá z těchto podmínek:

(1) ke každému otevřenému pokrytí $\{G_\alpha\}$ existuje lokálně konečný soubor spojitých nezáporných funkcí $\{f_\alpha\}$ takový, že $f_\alpha(x) = 0$ pro $x \in P - G_\alpha$, $\Sigma_\alpha f_\alpha(x) > 0$ pro každé $x \in P$;

(2) ke každému otevřenému pokrytí $\{G_\alpha\}$ existuje soubor spojitých nezáporných funkcí $\{f_\alpha\}$ tak, že $f_\alpha(x) = 0$ pro $x \in P - G_\alpha$, součet $\Sigma_\alpha f_\alpha$ existuje (viz **1.20**) a je spojitou kladnou funkcí v P.

To plyne bezprostředně z **4.3.**

5.6. Aby F-prostor P byl plně normální, k tomu je nutná a stačí každá z těchto podmínek:

(1) P je regulární a ke každému jeho otevřenému pokrytí existuje jemnější σ-lokálně konečné otevřené pokrytí;

(2) P je regulární a ke každému jeho otevřenému pokrytí existuje jemnější lokálně konečné zakrytí (libovolnými množinami);

(3) ke každému otevřenému pokrytí prostoru P existuje jemnější lokálně konečné uzavřené zakrytí;

(4) P je H-prostor a ke každému jeho otevřenému pokrytí existuje jemnější lokálně konečné otevřené pokrytí;

(5) je-li $\{G_\alpha\}$ otevřené pokrytí P, pak existují otevřené U_α tak, že $\overline{U}_\alpha \subset G_\alpha$, $\{U_\alpha\}$ je lokálně konečné pokrytí P.*)

---

*) K této větě (a větám **5.4**, **5.5**) viz E. Michael, A note on paracompact spaces, Proceedings of the American Mathematical Society, 1953, *4*, 831—838.

Důkaz. I. Nechť platí (1). Buď $\{G_\alpha\}$ otevřené pokrytí P. Existuje σ-lokálně konečné otevřené pokrytí $\{H_\beta; \beta \in B\}$, které je jemnější než $\{G_\alpha\}$. Nechť $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $\{H_\beta; \beta \in B_n\}$ jsou lokálně konečné; položme $U_n = \bigcup_{\beta \in B_n} H_\beta$; zřejmě $\bigcup U_n = P$, U_n jsou otevřené. Pro každé β zvolme $n = n(\beta)$ tak, aby $\beta \in B_n$; položme $X_\beta = H_\beta - \bigcup_{k=1}^{n-1} U_k$, kde $n = n(\beta)$. Nechť $x \in P$; zvolíme nejmenší p takové, že $x \in U_p$, a zvolme $\beta \in B_p$, pro něž $x \in H_\beta$; zřejmě $x \in X_\beta$. Tedy $\{X_\beta\}$ je zakrytí P. Nechť $x \in P$. Zvolme p tak, aby $x \in U_p$; pro $k = 1, \ldots, p$ zvolme okolí V_k bodu x tak, aby $V_k \cap H_\beta \neq \emptyset$ pouze pro konečně mnoho indexů $\beta \in B_k$. Položme $V = U_p \cap V_1 \cap \ldots \cap V_p$. Snadno se zjistí, že $V \cap X_\beta \neq \emptyset$ pouze pro konečně mnoho $\beta \in B$. Tedy $\{X_\beta; \beta \in B\}$ je lokálně konečný. Platí tedy (2).

II. Nechť platí (2). Nechť $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ je otevřené pokrytí P. Pro každé x zvolme otevřenou U_x tak, aby $x \in U_x$ a $\overline{U}_x \subset G_\alpha$ pro vhodné α (to je možné, neboť P je regulární). Nechť nyní lokálně konečné zakrytí $\{X_\beta; \beta \in B\}$ je jemnější než $\{U_x\}$. Potom podle **1.10** soubor $\{\overline{X}_\beta\}$ je lokálně konečné uzavřené zakrytí. Je-li $\beta \in B$, buď $x \in P$, $X_\beta \subset U_x$, dále buď $\alpha \in A$, $\overline{U}_x \subset G_\alpha$. Zřejmě máme $\overline{X}_\beta \subset G_\alpha$. Tedy $\{\overline{X}_\beta\}$ zjemňuje $\{G_\alpha\}$.

III. Nechť platí (3). Nechť $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ je otevřené pokrytí P. Existuje lokálně konečné uzavřené zakrytí $\{F_\beta; \beta \in B\}$, které zjemňuje $\{G_\alpha\}$. Pro každé $\beta \in B$ zvolme $\alpha = \alpha(\beta) \in A$ tak, aby $F_\beta \subset G_\alpha$. Pro každé $x \in P$ zvolme nyní jeho otevřené okolí U_x tak, aby (a) $U_x \cap F_\beta \neq \emptyset$ pouze pro konečně mnoho β; (b) když $U_x \cap F_\beta \neq \emptyset$, pak $U_x \subset G_{\alpha(\beta)}$. Ježto $\{U_x\}$ je otevřené pokrytí, existuje jemnější lokálně konečné uzavřené zakrytí $\{K_\gamma; \gamma \in C\}$. Zřejmě platí: pro každé $\gamma \in C$ jest $K_\gamma \cap F_\beta \neq \emptyset$ pouze pro konečně mnoho β. Pro $\beta \in B$ označme nyní $C(\beta)$ množinu $\gamma \in C$ takových, že $F_\beta \cap K_\gamma \neq \emptyset$; soubor $\{C(\beta)\}$ je zřejmě bodově konečný. Položme $S_\beta = \bigcup_{\gamma \in C(\beta)} K_\gamma$. Zřejmě $\{S_\beta; \beta \in B\}$ je zakrytí P, a to lokálně konečné podle **1.5**. Položme nyní konečně $V_\beta = P - \bigcup_{\gamma \in C - C(\beta)} K_\gamma$. Zřejmě pak V_β jsou otevřené (podle **1.13**), $F_\beta \subset V_\beta \subset S_\beta$, takže $\{V_\beta\}$ je lokálně konečné otevřené pokrytí. Dokážeme nyní, že vždy platí $S_\beta \subset G_{\alpha(\beta)}$; z toho ihned vyplyne, že $\{V_\beta\}$ zjemňuje $\{G_\alpha\}$. Skutečně, je-li $\gamma \in C(\beta)$, pak $K_\gamma \cap F_\beta \neq \emptyset$; pro vhodné $x \in P$ však máme

$K_\gamma \subset U_x$, tedy $U_x \cap F_\beta \neq \emptyset$, tedy $U_x \subset G_{\alpha(\beta)}$; tedy platí $K_\gamma \subset G_{\alpha(\beta)}$. Z toho pak vyplývá, že $S_\beta = \bigcup_{\gamma \in C(\beta)} K_\gamma \subset G_{\alpha(\beta)}$.

Zbývá ještě dokázat, že (za předpokladu (3)) P je H-prostor.

Dokážeme dokonce, že P je normální. Nechť $T_1 \subset P$, $T_2 \subset P$ jsou uzavřené, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Existuje lokálně konečné uzavřené pokrytí $\{F_\beta; \beta \in B\}$ prostoru P takové, že pro každé β buď $F_\beta \subset P - T_1$ nebo $F_\beta \subset P - T_2$. Buď B_i množina $\beta \in B$ takových, že $F_\beta \subset P - T_i$; buď $K_i = \bigcup_{\beta \in B_i} F_\beta$. Pak K_1, K_2 jsou uzavřené (podle **1.13**), $K_1 \cup K_2 = P$, $T_i \cap K_i = \emptyset$. Když položíme $U_i = P - K_i$, pak U_i jsou otevřené, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $T_i \subset U_i$. Tedy P je normální, a tím spíše H-prostor. Platí tedy (4).

IV. Nechť platí (4). Dokážeme nejdříve, že P je regulární. Nechť $F \subset P$ je uzavřené, $a \in P - F$. Pro $x \in F$ zvolme otevřené H_x tak, aby $x \in H_x$, $a \in P - \overline{H}_x$; pro $x \in P - F$ položme $H_x = P - F$. Nechť lokálně konečné otevřené pokrytí $\{V_\beta\}$ zjemňuje $\{H_x\}$. Zřejmě platí $V_\beta \cap F \neq \emptyset \Rightarrow a \in P - \overline{V}_\beta$. Buď V sjednocení těch V_β, která protínají F. Snadno se zjistí, že $F \subset V \subset \overline{V} \subset P - (a)$. Z toho plyne, že P je regulární.

Nechť nyní $\{G_\alpha\}$ je otevřené pokrytí P. Pro každé x zvolme jeho otevřené okolí W_x tak, aby $\overline{W}_x \subset G_\alpha$ pro vhodné α. Nechť lokálně konečné otevřené pokrytí $\{S_\gamma; \gamma \in C\}$ prostoru P zjemňuje $\{W_x\}$. Pro každé γ lze zvolit $\alpha = \alpha(\gamma)$ tak, aby pro vhodné x bylo $S_\gamma \subset W_x$, $\overline{W}_x \subset G_\alpha$. Pro každé α buď nyní U_α sjednocení S_γ pro γ takové, že $\alpha(\gamma) = \alpha$. Snadno se zjistí, že $\{U_\alpha\}$ má vlastnosti uvedené v (5).

V. Ježto z podmínky (5) plyne triviálně podmínka (1), dokázali jsme, že podmínky (1) až (5) jsou navzájem ekvivalentní a že tedy z každé z nich vyplývá, že P je normální. Z **4.10** nyní plyne, že P je plně normální, když a jen když platí (4). Tím je důkaz celé věty dokončen.

5.7. Nechť P je plně normální; nechť $S \subset P$ je F_σ-množina v P. Potom S je plně normální.

Důkaz. Nechť $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, S_k jsou uzavřené v P. Nechť $\{G_\alpha\}$ je otevřené pokrytí prostoru S (tj. $G_\alpha \subset S$, G_α jsou otevřené v S, $\bigcup G_\alpha = S$). Nechť H_α jsou otevřené v P, $H_\alpha \cap S = G_\alpha$. Pro každé $k = 1, 2, \ldots$ platí: $\bigcup_\alpha H_\alpha \cup (P - S_k) = P$, tedy podle **5.6**, (4) existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{U_\beta; \beta \in B_k\}$ prostoru P tak, že pro každé β buď $U_\beta \subset H_\alpha$ při vhodném α anebo $U_\beta \subset P - S_k$. Označme nyní B'_k množinu indexů β takových, že $U_\beta \subset H_\alpha$ při vhodném α; položme $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B'_k$. Potom, jak se snadno zjistí, $\{U_\beta \cap S; \beta \in B\}$ je σ-lokálně konečné otevřené pokrytí prostoru S, které zjemňuje $\{G_\alpha\}$. Protože $\{G_\alpha\}$ bylo libovolné, plyne z toho podle **5.6**, (1), že S je plně normální.

5.8. Nechť P je F-prostor. Nechť $\{S_\alpha; \alpha \in A\}$ je lokálně konečné zakrytí P; nechť S_α jsou uzavřené. Jsou-li S_α plně normální, pak též P je plně normální.

Důkaz. Nechť $\{G_\beta; \beta \in B\}$ je otevřené pokrytí P. Podle **5.6**, (3) existuje pro každé α lokálně konečný v S_α soubor $\{X_{\alpha,\gamma}; \gamma \in C_\alpha\}$ uzavřených v S_α množin, který zakrývá S_α a zjemňuje $\{G_\beta \cap S_\alpha; \beta \in B\}$. Z **1.8**, **1.6** vyplývá, že $\{X_{\alpha,\gamma}; \gamma \in C_\alpha, \alpha \in A\}$ je lokálně konečný v P; zřejmě tento soubor zjemňuje $\{G_\beta\}$. Z **5.6**, (3) nyní plyne, že P je plně normální.

5.9. Nechť P je FH-prostor. Nechť $S \subset P$ a nechť pro každou otevřenou $G \supset S$ existuje T tak, že $G \supset T \supset S$, T je plně normální. Potom S je plně normální.

Důkaz. Nechť $\{H_\alpha\}$ je otevřené pokrytí prostoru S. Pro každé α buď G_α otevřená v P, $G_\alpha \cap S = H_\alpha$; buď $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$. Nechť $G \supset T \supset S$, T je plně normální. Potom existuje lokálně konečné (v T) otevřené pokrytí $\{U_\beta\}$ prostoru T, které zjemňuje $\{G_\alpha \cap T\}$. Zřejmě soubor $\{U_\beta \cap S\}$ zjemňuje $\{H_\alpha\}$ a je lokálně konečným otevřeným pokrytím S. Z toho plyne podle **5.6**, (4), že S je plně normální.

5.10. Nechť P je plně normální, $S \subset P$ a pro každou otevřenou v P množinu $G \supset S$ existuje σ-lokálně konečný soubor $\{X_\alpha\}$ uzavřených částí P tak, že $G \supset \bigcup_\alpha X_\alpha \supset S$. Potom S je plně normální.

To plyne z **5.7**, **5.8**, **5.9**.

5.11. Lze-li z každého otevřeného pokrytí regulárního F-prostoru P vybrat spočetné pokrytí, pak P je plně normální.

To plyne ihned z **5.6**, (1).

5.12. Kompaktní FH-prostor je plně normální. — To plyne ihned např. z **5.11** a **T 8.3.19.**

5.13. Definice. Topologický prostor P nazýváme *σ-kompaktním*, existují-li kompaktní P_k tak, že $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$.

5.14. Z každého otevřeného pokrytí σ-kompaktního prostoru lze vybrat spočetné pokrytí. — To plyne ihned z definice **5.13.**

5.15. Regulární σ-kompaktní F-prostor je plně normální. — To vyplývá z **5.14** a **5.6**, (1).

Poznámka. Existují lokálně kompaktní normální prostory, které nejsou plně normální, viz **10.1.**

5.16. Spočetně kompaktní plně normální prostor je kompaktní.

Důkaz. Nechť $\{G_\alpha\}$ je otevřené pokrytí spočetně kompaktního plně normálního prostoru P. Nechť lokálně konečné otevřené pokrytí $\{H_\beta\}$ zjemňuje $\{G_\alpha\}$; lze předpokládat (je-li $P \neq \emptyset$), že $H_\beta \neq \emptyset$ pro každé β. Tvrdím, že soubor $\{H_\beta\}$ je konečný; skutečně, kdyby platil opak, zvolíme $x_\beta \in H_\beta$, načež existuje (neboť P je spočetně kompaktní) bod $x \in P$ takový, že pro každé jeho okolí U je $x_\beta \in U$ pro nekonečně mnoho β, tj. $U \cap H_\beta \neq \emptyset$ pro nekonečně mnoho β; to však je spor. Z toho, že $\{H_\beta\}$ je konečný, plyne ihned, že z $\{G_\alpha\}$ lze vybrat konečné pokrytí.

5.17. Nechť P je plně normální, $\{F_\alpha\}$ je lokálně konečný soubor jeho uzavřených částí. Potom existuje lokálně konečný soubor otevřených množin $\{G_\alpha\}$ takový, že $G_\alpha \supset F_\alpha$.

Důkaz. Pro každý bod $x \in P$ zvolme jeho otevřené okolí U_x tak, aby $U_x \cap F_\alpha \neq \emptyset$ pouze pro konečně mnoho indexů α. Ježto P je plně normální, existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{H_\beta; \beta \in B\}$, které zjemňuje $\{U_x\}$. Pro každý index α buď nyní B_α množina $\beta \in B$ takových, že $H_\beta \cap F_\alpha \neq \emptyset$. Soubor $\{B_\alpha\}$ je bodově konečný, neboť pro každé β je $H_\beta \cap F_\alpha \neq \emptyset$ pouze pro konečný počet indexů α. Položme nyní $G_\alpha = \bigcup_{\beta \in B_\alpha} H_\beta$. Podle **1.5** soubor $\{G_\alpha\}$ je lokálně konečný; zřejmě $G_\alpha \supset F_\alpha$.

5.18. Nechť P je plně normální, $\{F_\alpha; \alpha \in A\}$ je lokálně konečný soubor jeho uzavřených částí. Potom existuje spojité zobrazení f prostoru P do jistého metrického prostoru R takové, že platí: když $\mu \subset A$ je konečná, $\bigcap_{\alpha \in \mu} F_\alpha = \emptyset$, pak pro každé $y \in R$ existuje $\alpha \in \mu$ tak, že $\varrho(y, f^1(F_\alpha)) \geqq 1$ (a tím spíše $\bigcap_{\alpha \in \mu} \overline{f^1(F_\alpha)} = \emptyset$).

Důkaz. Pro každé $x \in P$ buď T_x sjednocení těch F_α, pro něž x non $\in F_\alpha$; položme $U_x = P - T_x$. Z **1.13** plyne, že U_x jsou otevřené; zřejmě $\bigcup_{x \in P} U_x = P$. Zřejmě platí: když $F_\alpha \cap U_x \neq \emptyset$, pak $x \in F_\alpha$. Ježto P je plně normální, je $\{U_z; z \in P\}$ normální otevřené pokrytí, takže podle **4.1**, (4) existuje spojitá pseudometrika ϱ v P taková, že ke každému $x \in P$ existuje $z \in P$, pro něž platí, že $y \in P$, $\varrho(x, y) < 1 \Rightarrow y \in U_z$. Nechť nyní $\mu \subset A$ je konečné, $\bigcap_{\alpha \in \mu} F_\alpha = \emptyset$. Kdyby existoval bod $x \in P$ takový, že $\varrho(x, F_\alpha) < 1$ pro každé $\alpha \in \mu$, pak by pro vhodné $z \in P$ platilo $U_z \cap F_\alpha \neq \emptyset$ pro každé $\alpha \in \mu$, tedy $z \in F_\alpha$ pro každé $\alpha \in \mu$, což je spor.

Nyní je zřejmé, že zobrazení P do metrického prostoru příslušného k ϱ (viz **3.2**) má potřebné vlastnosti.

5.19. Definice. Je-li $\mathfrak{m}$ mohutnost, $\mathfrak{m} \geqq 1$, říkáme, že prostor P je $\mathfrak{m}$-*metrisovatelný*, když je homeomorfní s podmnožinou kartézského součinu $\mathfrak{m}$ metrisovatelných prostorů; je-li prostor 1-metrisovatelný, říkáme prostě, že je metrisovatelný (to je ve shodě s definicí **T 9.1.7**).

Zřejmě platí: je-li $1 \leqq \mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$ a je-li P $\mathfrak{m}$-metrisovatelný, pak je též $\mathfrak{n}$-metrisovatelný. Z **T 9.1.10** plyne ihned: je-li P $\aleph_0$-metrisovatelný, pak je metrisovatelný.

5.20. Nechť $\mathfrak{m}$ je nekonečná mohutnost. Prostor P je $\mathfrak{m}$-metrisovatelný, když a jen když je úplně regulární a existuje jeho otevřená base, která je sjednocením $\mathfrak{m}$ lokálně konečných soustav otevřených množin.

Důkaz. I. Nechť je podmínka splněna. Potom existuje soubor $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$, který je otevřenou basí prostoru P, množina M mohutnosti $\mathfrak{m}$ a soubor $\{A_\mu; \mu \in M\}$ takový, že $\bigcup_{\mu \in M} A_\mu = A$ a každý soubor $\{G_\alpha; \alpha \in A_\mu\}$ je lokálně konečný. Pro $\alpha \in A$, $\nu \in M$ buď $V_{\alpha,\nu}$ sjednocení těch G_β, $\beta \in A_\nu$, pro něž G_β a $P - G_\alpha$ jsou normálně oddělené (neexistuje-li takové G_β, je ovšem $V_{\alpha,\nu} = \emptyset$). Podle **3.11** množiny $P - G_\alpha$ a $V_{\alpha,\nu}$ jsou normálně oddělené. Z toho, že P je úplně regulární, snadno vyplývá, že pro každé α je $G_\alpha = \bigcup_{\nu \in M} V_{\alpha,\nu}$.

Pro $\alpha \in A$, $\nu \in M$ buď nyní $f_{\alpha,\nu}$ spojitá funkce v P taková, že $x \in P \Rightarrow 0 \leqq f_{\alpha,\nu}(x) \leqq 1$, $x \in V_{\alpha,\nu} \Rightarrow f_{\alpha,\nu}(x) = 1$, $x \in P - G_\alpha \Rightarrow f_{\alpha,\nu}(x) = 0$. Je zřejmé, že pro každé $\mu \in M$, $\nu \in M$ soubor funkcí $\{f_{\alpha,\nu}; \alpha \in A_\mu\}$ je lokálně konečný. Pro $\mu \in M$, $\nu \in M$, $x \in P$, $y \in P$ položíme nyní $\varrho_{\mu,\nu}(x, y) = \sum_{\alpha \in A_\mu} |f_{\alpha,\nu}(x) - f_{\alpha,\nu}(y)|$. Potom podle **3.4** funkce $\varrho_{\mu,\nu}$ je spojitá pseudometrika v P. Ježto pro každé α je $G_\alpha = \bigcup_{\nu \in M} V_{\alpha,\nu}$, platí zřejmě:

(*) je-li $x \in G_\alpha$, pak existují $\mu \in M$, $\nu \in M$ tak, že

$$y \in P - G_\alpha \Rightarrow \varrho_{\mu,\nu}(x, y) \geqq 1 .$$

Buď nyní $R_{\mu,\nu}$ metrický prostor příslušný k pseudometrice $\varrho_{\mu,\nu}$ a buď $\varphi_{\mu,\nu}$ příslušné zobrazení P na $R_{\mu,\nu}$ (viz **3.2**). Položme $R = \mathfrak{P}_{\mu,\nu} R_{\mu,\nu}$; nechť zobrazení φ prostoru P do R je definováno tak, že (μ, ν)-souřadnice bodu $\varphi(x) \in R$ je právě $\varphi_{\mu,\nu}(x)$. Zobrazení $\varphi_{\mu,\nu}$ jsou spojitá (neboť pseudometriky $\varrho_{\mu,\nu}$ jsou spojité) a proto podle **T 7.4.6** je spojité též zobrazení φ. Ježto je R kartézským součinem $\mathfrak{m}$ metrisovatelných prostorů, zbývá dokázat, že φ je prosté, φ^{-1} je spojité. To však plyne ihned, vzhledem k tomu, že $\{G_\alpha\}$ je otevřená base, ze vztahu (*).

II. Dokážeme nyní, že každý metrisovatelný prostor má σ-lokálně konečnou otevřenou basi. Buď tedy P metrisovatelný; zvolme v něm určitou metriku ϱ. Pro $n = 1, 2, \ldots$ buď $\mathfrak{U}_n$ soustava všech otevřených $G \subset P$, které mají (při metrice ϱ) průměr*) menší než $\frac{1}{n}$. Ježto P je podle **5.3** plně normální, existuje podle **5.6**, (4) pro každé $n = 1, 2, \ldots$ lokálně konečné otevřené pokrytí $\{G_\alpha; \alpha \in A_n\}$ jemnější než $\mathfrak{U}_n$. Soubor $\{G_\alpha; \alpha \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}$ je σ-lokálně konečný. Tvrdím, že je otevřenou basí prostoru P. Skutečně, je-li $x \in P$ a je-li V okolí x, existuje m tak, že $\varrho(x, y) < \frac{1}{m} \Rightarrow y \in V$. Zvolme $\alpha \in A_m$ tak, aby $x \in G_\alpha$; pak zřejmě

*) *Průměr* $d(M)$ množiny M v metrickém prostoru (P, ϱ) definujeme takto: je-li $M = \emptyset$, pak $d(M) = 0$; je-li $M \neq \emptyset$, pak $d(M)$ je supremum čísel $\varrho(x, y)$, kde $x \in M$, $y \in M$.

$G_\alpha \subset V$ (neboť G_α má průměr $< \frac{1}{m}$); z toho plyne, že $\{G_\alpha\}$ je otevřená base.

III. Nechť nyní P je $\mathfrak{m}$-metrisovatelný. Pak především P je podle **T 8.4.5** úplně regulární. Ježto P je $\mathfrak{m}$-metrisovatelný, můžeme předpokládat, že $P \subset \mathfrak{P}_{\alpha\in A} R_\alpha$, kde R_α jsou metrisovatelné, A má mohutnost $\mathfrak{m}$. Buď nyní (pro $\alpha \in A$) $\mathfrak{G}_\alpha$ σ-lokálně konečná otevřená base prostoru R_α. Pro $\alpha \in A$ označme ψ_α zobrazení (zřejmě spojité) prostoru R na R_α, které přiřazuje každému $x \in P$ jeho α-souřadnici. Pro každou konečnou neprázdnou $\mu \in A$ označme $\mathfrak{H}_\mu$ soustavu všech množin $\bigcap_{\alpha\in\mu}\psi_\alpha^{-1}(G_\alpha)$, kde G_α je množina ze soustavy $\mathfrak{G}_\alpha$. Je zřejmé, že každá $\mathfrak{H}_\mu$ je σ-lokálně konečná soustava otevřených částí P. Systém všech $\mathfrak{H}_\mu$ má mohutnost $\mathfrak{m}$; jeho sjednocení (tj. soustava všech H náležejících do některého $\mathfrak{H}_\mu$) je otevřenou basí P a dá se vyjádřit jako sjednocení $\mathfrak{m}$ lokálně konečných soustav.

5.21. F-prostor je metrisovatelný, když a jen když je regulární a má σ-lokálně konečnou otevřenou basi.*)

Důkaz. Podmínka je nutná podle **5.20.** Podmínka stačí podle **5.6,** (1) a **5.20.**

Poznámka. Věta **5.21** se ovšem dá dokázat také přímo; viz 5.15.

5.22. Kartézský součin plně normálního prostoru a kompaktního FH-prostoru je plně normální.

Důkaz. Nechť P je plně normální, Q je kompaktní FH-prostor. Nechť $\{G_\alpha\}$ je otevřené pokrytí $P \times Q$. Pro každé (x, y) zvolme otevřenou v P množinu $U(x, y)$ a otevřenou v Q množinu $V(x, y)$ tak, aby $(x, y) \in U(x, y) \times V(x, y)$, $U(x, y) \times V(x, y) \subset G_\alpha$ pro vhodné α.

Pro každé x máme $\bigcup_y V(x, y) = Q$; ježto Q je kompaktní, pro každé x existuje konečná množina $K(x) \subset Q$ taková, že $\bigcup_{y\in K(x)} V(x, y) = Q$. Pro $x \in P$ položme $W(x) = \bigcap_{y\in K(x)} U(x, y)$. Ježto $\{W(x); x \in P\}$ je zřejmě

*) K této větě viz zejména J. Nagata, On a necessary and sufficient condition of metrizability, Journal of the Institute of Polytechnics, Osaka City University, Series A, Mathematics, 1950, *1*, 93—100, Ю. Смирнов, Необходимое и достаточное условие метризуемости топологического пространства, Доклады Академии наук СССР, 1951, 77, 197—200.

otevřené pokrytí P, existují podle **5.6**, (5) otevřené $W^*(x) \subset W(x)$ tak, že $\{W^*(x); x \in P\}$ je lokálně konečné otevřené pokrytí prostoru P. Snadno se zjistí, že pak soubor $\{W^*(x) \times V(x, y); y \in K(x), x \in P\}$ zjemňuje $\{G_\alpha\}$ a je lokálně konečným otevřeným pokrytím prostoru $P \times Q$. Ježto $P \times Q$ je zřejmě FH-prostor, plyne z toho podle **5.6**, (4), že $P \times Q$ je plně normální.

5.23. Kartézský součin plně normálního prostoru a regulárního σ-kompaktního F-prostoru je plně normální.

Důkaz. Nechť P je plně normální, Q je regulární σ-kompaktní F-prostor. Z **5.15** plyne, že Q je normální, takže podle **T 8.4.3** a **T 8.4.7** existují kompaktní FH-prostor R, do něhož je vnořen prostor Q. Buď $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ kde F_n jsou kompaktní. Potom $P \times R$ je plně normální podle **5.22**, $P \times Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \times F_n)$, $P \times F_n$ jsou kompaktní, tedy uzavřené v $P \times R$, takže $P \times Q$ je F_σ-množina v $P \times R$ a tedy plně normální podle **5.7.**

Cvičení k § 5

5.1. Dokažte tvrzení, která vznikají z vět **5.7**, **5.8**, **5.9**, **5.10**, když v nich píšeme všude „normální" místo „plně normální".

5.2. Nechť P je plně normální, množina $S \subset P$ je uzavřená, $F_\alpha \subset G_\alpha \subset S$, F_α jsou uzavřené, G_α jsou otevřené v S, $\bigcup F_\alpha = S$, soubor $\{G_\alpha\}$ je lokálně konečný. Potom existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}$ prostoru P takové, že vždy $F_\alpha \subset S \cap U_\alpha \subset G_\alpha$.

5.3. Nechť $\{U_\alpha\}$ je normální otevřené pokrytí prostoru P. Potom existují spojité funkce f_α v P takové, že $x \in P - U_\alpha \Rightarrow f_\alpha(x) = 0$, $x \in P \Rightarrow f_\alpha(x) \geqq 0$, soubor $\{f_\alpha\}$ je lokálně konečný a pro každé $x \in P$ platí $\Sigma_\alpha f_\alpha(x) = 1$.

5.4. Nechť P je plně normální, $S \subset P$ je uzavřená. Nechť ϱ je spojitá pseudometrika na S; nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje spojitá pseudometrika σ na P taková, že $x \in S$, $y \in S \Rightarrow |\varrho(x, y) - \sigma(x, y)| < \varepsilon$ a jestliže $\varrho(x, y) \leqq \gamma$ pro všechna $x \in S$, $y \in S$, pak $x \in P$, $y \in P \Rightarrow \sigma(x, y) \leqq \gamma$. [Existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{G_\alpha\}$ prostoru S takové, že $x \in G_\alpha$, $y \in G_\alpha \Rightarrow \varrho(x, y) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Nechť $\{U_\alpha\}$ je lokálně konečné otevřené pokrytí P, $S \cap U_\alpha \subset G_\alpha$. K $\{U_\alpha\}$ zvolme $\{f_\alpha\}$ podle 5.3. Zvolme $a_\alpha \in S \cap U_\alpha$ (lze předpokládat, že vždy $S \cap U_\alpha \neq \emptyset$). Položme

$$\sigma(x, y) = \sup_{z \in S} |\Sigma_\alpha f_\alpha(x)\, \varrho(a_\alpha, z) - \Sigma_\alpha f_\alpha(y)\, \varrho(a_\alpha, z)|\ .]$$

5.5. Nechť P je plně normální prostor, množina $S \subset P$ je uzavřená. Ke každé spojité pseudometrice ϱ na S existuje spojitá pseudometrika σ na P, která se na S shoduje s ϱ.*)

5.6. Nechť R je FH-prostor, $P \subset R$, P není uzavřené v R, P je plně normální. Potom existuje spojitá pseudometrika ϱ v P taková, že pro žádnou spojitou pseudometriku σ v R neplatí $x \in P$, $y \in P \Rightarrow \sigma(x, y) = \varrho(x, y)$. [Buď $x_0 \in \overline{P} \subset R$, x_0 non $\in P$. Existuje lokálně konečné otevřené pokrytí $\{G_\alpha\}$ prostoru P takové, že x_0 non $\in \overline{G}_\alpha$. Buď ϱ pseudometrika v P s vlastností z **4.1**, (4).]

5.7. Nechť $P \subset R$ je normální prostor s Lindelöfovou vlastností a nechť $P \subset R$, P není uzavřené v R, R je FH-prostor. Potom existuje spojitá funkce v P, která se nedá rozšířit (jako konečná spojitá funkce) na R. [Je-li $x_0 \in \overline{P} - P$, nechť $\{G_k\}$ je spočetné lokálně konečné otevřené pokrytí P, x_0 non $\in \overline{G}_k$; nechť $F_k \subset G_k$ jsou uzavřené, $\bigcup F_k = P$. Nechť f_k jsou nezáporné spojité funkce na P, $f_k(x) = k$ pro $x \in F_k$, $f_k(x) = 0$ pro $x \in P - G_k$. Klademe $f = \Sigma_k f_k$.]

Poznámka. Tvrzení platí za mnohem obecnějších předpokladů o P. Není však známo, zda platí pro každý plně normální prostor P (ba dokonce ani, zda platí pro diskrétní P libovolné mohutnosti).**)

5.8. Pseudometriku ϱ na množině P nazveme *totálně omezenou*, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná $K \subset P$ taková, že $x \in P \Rightarrow \min_{y \in K} \varrho(x, y) < \varepsilon$. Dokažte: prostor P je pseudokompaktní (viz 4.4), když a jen když každá spojitá pseudometrika na P je totálně omezená.

5.9. Nechť P je normální, $S \subset P$ je uzavřená. Nechť ϱ je totálně omezená pseudometrika na S. Potom existuje pseudometrika σ na P, která se na S shoduje s ϱ. [Použijeme toho, že pro každé $\delta > 0$ existuje konečné otevřené pokrytí $\{G_k\}$ prostoru S takové, že pro $x \in G_k$, $y \in G_k$ máme $\varrho(x, y) < \delta$, a pak postupujeme obdobně jako u 5.4.]

5.10. Nechť P je úplně regulární prostor. Každou totálně omezenou spojitou pseudometriku ϱ na P lze rozšířit na spojitou pseudometriku na $\beta(P)$. [Dokážeme, že každý bod $x \in \beta(P)$ má pro každé $\varepsilon > 0$ okolí U takové, že $x \in U \cap P$, $y \in U \cap P \Rightarrow \varrho(x, y) < \varepsilon$. Pro $x \in \beta(P)$, $y \in \beta(P)$ položme $\sigma(x, y) = \sup_{U,V} \inf_{\substack{x \in U \cap P \\ y \in V \cap P}} \varrho(x, y)$, kde U, V probíhají všechna okolí x, y v prostoru $\beta(P)$.]

*) Viz k tomu např. R. Arens, Extension of coverings..., Canadian Journal of Mathematics, 1953, *5*, 211—215.

**) Viz k tomu mj. M. Katětov, Measures in fully normal spaces, Fundamenta Mathematicae, 1951, *38*, 73—91.

5.11. Odvoďte přímo z **2.9**, že každý metrisovatelný prostor má σ-lokálně konečnou otevřenou basi.

5.12. Nechť P je normální prostor. Nechť $\{G_\alpha\}$ je σ-lokálně konečný soubor otevřených F_σ-množin v P. Potom existuje spojitá pseudometrika ϱ v P taková, že pro každé α a každé $x \in G_\alpha$ při vhodném $\varepsilon > 0$ platí $\varrho(x, y) < \varepsilon \Rightarrow y \in G_\alpha$. [Sestrojte spojité funkce f_α tak, aby $f_\alpha(x) = 0$ pro $x \in P - G_\alpha$, $f_\alpha(x) > 0$ pro $x \in G_\alpha$; použijte **3.4** a **3.5**.]

5.13. Odvoďte z **5.12**, že normální prostor P, který má σ-lokálně konečnou otevřenou basi, je metrisovatelný. [Nejdříve dokažte, že P je dokonale normální.]

5.14. Nechť P je prostor, $F_1 \subset P$, $F_2 \subset P$ jsou disjunktní uzavřené. Nechť $\{G_\alpha\}$ je σ-lokálně konečný soubor otevřených částí P a nechť pro každé $x \in F_1$ (resp. $x \in F_2$) existuje α takové, že $x \in G_\alpha$ a $\overline{G}_\alpha \cap F_2 = \emptyset$ (resp. $\overline{G}_\alpha \cap F_1 = \emptyset$). Potom existují disjunktní otevřené $U_1 \supset F_1$, $U_2 \supset F_2$.

5.15. Z **5.11**, **5.13**, **5.14** odvoďte znovu větu **5.21**.

5.16. Nechť P je plně normální prostor. Nechť $\mathfrak{U}$ je nejjemnější uniformita, která souhlasí s topologií prostoru P. Potom $\mathfrak{U}$ se skládá právě ze všech okolí „diagonály“ v topologickém prostoru $P \times P$.