3. PSEUDOMETRIKY

3.1. Definice. Buď P množina. *Pseudometrika* v P je funkce ϱ v oboru $P \times P$ taková, že pro $x \in P$, $y \in P$, $z \in P$ platí:

(1) $\varrho(x, x) = 0$,

(2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,

(3) $\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Je zřejmé, že pseudometrika ϱ je metrikou, když a jen když $\varrho(x, y) \neq 0$ pro $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$.

3.2. Nechť ϱ je pseudometrika v množině P. Ježto zřejmě $\varrho(x, y) = 0$, $\varrho(y, z) = 0 \Rightarrow \varrho(x, z) = 0$, existuje (a je jednoznačně určen) rozklad (viz **T 1.3**) $\mathfrak{R}$ množiny P takový, že prvky $x \in P$, $y \in P$ patří do téže množiny soustavy $\mathfrak{R}$, když a jen když $\varrho(x, y) = 0$. Zřejmě platí: když $A \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{R}$, $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $b_1 \in B$, $b_2 \in B$, pak $\varrho(a_1, b_1) = \varrho(a_2, b_2)$. Jestliže nyní pro $A \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{R}$ položíme $\varrho^*(A, B) = \varrho(a, b)$, kde $a \in A$, $b \in B$, pak ϱ^* je metrika v $\mathfrak{R}$. Říkáme, že $\mathfrak{R}$ s metrikou ϱ^* je *metrický prostor, příslušný k pseudometrice* ϱ v P. Mluvíme-li o zobrazení P do tohoto prostoru, rozumíme tím, pokud není řečeno něco jiného, to zobrazení, které přiřazuje každému $x \in P$ množinu $A \in \mathfrak{R}$, v níž leží prvek x.

Obráceně, nechť f je zobrazení množiny P do metrického prostoru s metrikou σ; pro $x \in P$, $y \in P$ položme $\sigma'(x, y) = \sigma[f(x), f(y)]$. Zřejmě σ' je pseudometrika v P.

3.3. Nechť P je topologický prostor, ϱ je pseudometrika v P. Následující vlastnosti pseudometriky ϱ jsou ekvivalentní: (1) ϱ je spojitá jako funkce v prostoru $P \times P$; (2) pro každé $x \in P$ a $\varepsilon > 0$ existuje okolí U bodu x takové, že $\varrho(x, y) < \varepsilon$ pro $y \in U$; (3) zobrazení P na metrický prostor, příslušný k pseudometrice ϱ, je spojité; (4) pro každé $\varepsilon > 0$ množina

$\mathscr{E}_{(x,y)}\,[(x, y) \in P \times P,\ \varrho(x, y) < \varepsilon]$ je okolím množiny $\mathscr{E}_{(x,y)}\,[(x, y) \in P \times P,\ x = y]$ v $P \times P$.

D ů k a z. Nechť platí (2). Buď $(x, y) \in P \times P$, $\varepsilon > 0$. Existují okolí U bodu x, V bodu y tak, že $\varrho(x, x') < \frac{1}{2}\varepsilon$, $\varrho(y, y') < \frac{1}{2}\varepsilon$ pro $x' \in U$, $y' \in V$. Máme $|\varrho(x', y') - \varrho(x, y)| \leqq \varrho(x, x') + \varrho(y, y')$; tedy pro $(x', y') \in U \times V$ jest $|\varrho(x', y') - \varrho(x, y)| < \varepsilon$, takže platí (1). Platí-li (1), pak každá množina $\mathscr{E}_{(x,y)}\,[(x, y) \in P \times P,\ \varrho(x, y) < \varepsilon]$ je otevřená, tedy zřejmě platí (4). Platí-li (4), pak každý bod $a \in P$ má okolí U_a takové, že $U_a \times U_a \subset \mathscr{E}_{(x,y)}\,[\varrho(x, y) < \varepsilon]$, a tedy $x \in U_a \Rightarrow \varrho(a, x) < \varepsilon$. Platí tedy (1). — Snadno se zjistí, že (2) a (4) jsou ekvivalentní.

D e f i n i c e. Pseudometriku ϱ v prostoru P, která má uvedené vlastnosti, nazýváme *spojitou.*

3.4. N e c h ť $\{f_\alpha;\ \alpha \in A\}$ je lokálně konečný soubor spojitých funkcí v prostoru P. Pro $x \in P$, $y \in P$ položme $\varrho(x, y) = \Sigma_\alpha |f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|$. Potom ϱ je spojitá pseudometrika v P.

D ů k a z. Pro $(x, y) \in P \times P$ položme $g_\alpha(x, y) = |f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|$. Je zřejmé, že funkce g_α jsou spojité v $P \times P$. Buď $(a, b) \in P \times P$. Ježto $\{f_\alpha\}$ je lokálně konečný, existuje okolí U bodu a, okolí V bodu b a konečné množiny $\mu \subset A$, $\nu \subset A$ tak, že $\alpha \in A - \mu$, $x \in U \Rightarrow f_\alpha(x) = 0$, $\beta \in A - \nu$, $y \in V \Rightarrow f_\alpha(y) = 0$. Zřejmě pak $(x, y) \in U \times V$, $\alpha \in A - \mu - \nu \Rightarrow g_\alpha(x, y) = 0$. Soubor $\{g_\alpha\}$ je tedy lokálně konečný, takže podle **1.21** ϱ je spojitá funkce v $P \times P$. Snadno se ověří, že ϱ je pseudometrika.

3.5. N e c h ť ϱ_n, $n = 1, 2, \ldots$ jsou pseudometriky v množině P. Pro $(x, y) \in P \times P$ položme $\varrho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\varrho_n(x, y)}{1 + \varrho_n(x, y)}$. Potom ϱ je pseudometrika v P. Je-li P prostor a jsou-li ϱ_n spojité, pak též ϱ je spojitá pseudometrika.

D ů k a z. Elementárním výpočtem se ověří, že každá funkce σ_n, definovaná vztahem $\sigma_n(x, y) = \frac{\varrho_n(x, y)}{1 + \varrho_n(x, y)}$, je pseudometrikou. Zřejmě vždy $\sigma_n(x, y) < 1$. Z toho plyne ihned, že ϱ je pseudometrika. Jsou-li ϱ_n spojité, pak z toho, že řada, kterou je definováno $\varrho(x, y)$, konverguje stejnoměrně, plyne ihned, že ϱ je spojitá.

3.6. Nechť P je množina, f je funkce v $P \times P$ taková, že (1) $f(x, x) = 0$ pro $x \in P$, (2) $f(x, y) = f(y, x)$ pro $x \in P$, $y \in P$, (3) $f(x_0, x_3) \leqq 2 \max\limits_{k=1,2,3} f(x_{k-1}, x_k)$ pro $x_k \in P$.

Potom existuje pseudometrika ϱ v P taková, že

$$\tfrac{1}{2} f(x, y) \leqq \varrho(x, y) \leqq f(x, y)$$

pro libovolné $x \in P$, $y \in P$.*)

Důkaz. I. Snadno se zjistí, že funkce f je nezáporná (stačí v (3) položit $x_0 = x_2 = x$, $x_1 = x_3 = y$). Dokážeme, že pro každé n platí: jestliže $x_k \in P$, $k = 0, 1, \ldots, n$, pak $f(x_0, x_n) \leqq 2 \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1}, x_k)$. Předpokládejme opak; zvolme nejmenší n takové, že pro vhodná x_k jest $f(x_0, x_n) > 2 \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1}, x_k)$; položme $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1}, x_k)$. Zvolme největší $q = 0, 1, \ldots, n$ takové, že $\sum\limits_{k=1}^{q} f(x_{k-1}, x_k) \leqq \frac{1}{2}\alpha$. Kdyby $q = n$, pak zřejmě dostaneme $\alpha = 0$, z čehož vyplyne, že je vesměs $f(x_{k-1}, x_k) = 0$, a tedy také $f(x_0, x_n) = 0$, což je spor. Je tedy $q < n$. Z toho plyne vzhledem k volbě n, že $f(x_0, x_q) \leqq \alpha$. Zřejmě $f(x_q, x_{q+1}) \leqq \alpha$ a $\sum\limits_{k=q+2}^{n} f(x_{k-1}, x_k) \leqq \frac{1}{2}\alpha$, z čehož plyne $f(x_{q+1}, x_n) \leqq \alpha$. To však je již spor, neboť na druhé straně je $f(x_0, x_n) > 2\alpha$.

II. Pro libovolná $x \in P$, $y \in P$ buď nyní $\varrho(x, y)$ infimum všech čísel $\sum\limits_{k=0}^{n} f(x_{k-1}, x_k)$, kde $x_0 = x$, $x_n = y$. Z I vyplývá nerovnost $\frac{1}{2} f(x, y) \leqq \varrho(x, y)$; nerovnost $\varrho(x, y) \leqq f(x, y)$ je evidentní. Snadno se dokáže nerovnost $\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

3.7. Nechť P je množina, $V_k \subset P \times P$, $k = 1, 2, \ldots$ Nechť (1) $(x, x) \in V_k$ pro každé $x \in P$ a $k = 1, 2, \ldots$, (2) pro každé k platí $(x, z) \in V_{k+1}$, $(y, z) \in V_{k+1} \Rightarrow (x, y) \in V_k$. Potom existuje pseudometrika ϱ v P taková, že pro $k = 1, 2, \ldots$ platí $\varrho(x, y) \leqq 2^{-k-1} \Rightarrow$

*) Tato věta úzce souvisí s větou **T 9.2.1**. Viz též (i k některým dalším větám tohoto paragrafu) citovanou (na str. 410) knihu J. Kelleyho, zejména str. 185 a 186, kde je také uvedena další literatura.

$\Rightarrow (x, y) \in V_{2k}$, $(x, y) \in V_{2k+1} \Rightarrow \varrho(x, y) \leqq 2^{-k}$. Jestliže P je prostor a každá V_k je okolím množiny všech $(x, x) \in P \times P$, pak pseudometrika ϱ je spojitá.

Důkaz. Snadno se zjistí, že $(x, y) \in V_{k+1} \Rightarrow (y, x) \in V_k$. Buď V'_k množina (x, y) takových, že $(x, y) \in V_k$, $(y, x) \in V_k$. Pak platí: $(x, y) \in V'_k \Rightarrow$ $\Rightarrow (y, x) \in V'_k$; $(x, y) \in V'_{k+1}$, $(y, z) \in V'_{k+1} \Rightarrow (x, z) \in V'_k$. Položme $f(x, y) =$ $= 1$ pro $(x, y) \in P \times P - V'_2$, $f(x, y) = 2^{-k}$ pro $(x, y) \in V'_{2k} - V'_{2k+2}$, $f(x, y) = 0$ pro $(x, y) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} V'_k$. Snadno se zjistí, že f má vlastnosti, uvedené v **3.6**, takže existuje pseudometrika ϱ taková, že pro $(x, y) \in P \times P$ platí $\frac{1}{2}f(x, y) \leqq \varrho(x, y) \leqq f(x, y)$. Když $\varrho(x, y) \leqq 2^{-k-1}$, pak $f(x, y) \leqq$ $\leqq 2^{-k}$, tedy $(x, y) \in V'_{2k} \subset V_{2k}$; když $(x, y) \in V_{2k+1}$, pak $(x, y) \in V'_{2k}$, tedy $f(x, y) \leqq 2^{-k}$, $\varrho(x, y) \leqq 2^{-k}$.

Poznámka. Jestliže V_k jsou „symetrické", tj. $(x, y) \in V_k \Rightarrow (y, x) \in V_k$, pak lze tvrzení věty **3.7** trochu zostřit a místo implikace $(x, y) \in V_{2k+1} \Rightarrow$ $\Rightarrow \varrho(x, y) \leqq 2^{-k}$ psát implikaci $(x, y) \in V_{2k} \Rightarrow \varrho(x, y) \leqq 2^{-k}$.

3.8. Nechť je dána množina P. Nechť pro $k = 1, 2, \ldots$ soubor $\mathfrak{G}_k$ částí P je zakrytím P, $\mathfrak{G}_{k+1}$ je hvězdovitě jemnější než $\mathfrak{G}_k$. Potom existuje pseudometrika ϱ v P a kladná čísla δ_k, ε_k taková, že (1) $\lim \delta_k = 0$, a každý člen souboru $\mathfrak{G}_k$ má průměr $\leqq \delta_k$; (2) ke každému $x \in P$ a $k = 1, 2, \ldots$ existuje člen G souboru $\mathfrak{G}_k$ takový, že $\varrho(x, y) \leqq \varepsilon_k \Rightarrow y \in G$; zejména lze volit $\delta_k =$ $= 2^{-n}$ pro $k = 2n$, $k = 2n + 1$, $\varepsilon_k = 2^{-n}$ pro $k = 2n - 3$, $k =$ $= 2n - 4$. Jestliže $\mathfrak{G}_k$ jsou otevřená pokrytí, pak pseudometrika ϱ je spojitá.

Důkaz. Buď V_k sjednocení všech $G \times G$, kde G je člen souboru $\mathfrak{G}_k$. Snadno se zjistí, že V_k mají vlastnosti uvedené v **3.7** (vlastnost (2) plyne z toho, že $\mathfrak{G}_{k+1}$ je hvězdovitě jemnější než $\mathfrak{G}_k$); kromě toho zřejmě $(x, y) \in V_k \Rightarrow (y, x) \in V_k$. Tedy podle věty **3.7** (a poznámky k ní) existuje pseudometrika ϱ taková, že $\varrho(x, y) \leqq 2^{-k-1} \Rightarrow (x, y) \in V_{2k}$ a $(x, y) \in$ $\in V_{2k} \Rightarrow \varrho(x, y) \leqq 2^{-k}$. Přitom je-li každý člen každého G_k otevřenou množinou, pak zřejmě každé V_k je otevřené, tedy je okolím množiny všech (x, x), $x \in P$, takže podle **3.7** ϱ je spojitá.

Nechť G je člen $\mathfrak{G}_k$, $k = 2n$ nebo $k = 2n + 1$, $x \in G$, $y \in G$. Potom $(x, y) \in V_k \subset V_{2n}$, a tedy $\varrho(x, y) \leqq 2^{-n}$. Tedy, volíme-li $\delta_k = 2^{-n}$, ϱ má vlastnost (1). Nechť $x \in P$ a nechť je dáno $k = 1, 2, \ldots$; buď $k = 2n - 3$ nebo $k = 2n - 4$. Ježto $\mathfrak{G}_{k+1}$ je hvězdovitě jemnější než $\mathfrak{G}_k$, existuje člen G_0 souboru $\mathfrak{G}_k$ tak, že platí: je-li H člen $\mathfrak{G}_{2n-2}$, $x \in H$, pak $H \subset G_0$. Jestliže $y \in P$, $\varrho(x, y) \leqq 2^{-n}$, pak máme $(x, y) \in V_{2n-2}$, tedy existuje H ze souboru $\mathfrak{G}_{2n-2}$ tak, že $x \in H$, $y \in H$, tedy platí $y \in G_0$. Tedy, volíme-li $\varepsilon_k = 2^{-n}$, ϱ má vlastnost (2).

3.9. Definice. Nechť P je prostor. Říkáme, že množiny $X \subset P$, $Y \subset P$ jsou *normálně oddělené* (v prostoru P), jestliže existuje spojitá funkce f v P taková, že $\overline{f^1(X)} \cap \overline{f^1(Y)} = \emptyset$.

3.10. Nechť P je prostor, $X \subset P$, $Y \subset P$. Aby byly X, Y normálně oddělené, k tomu je nutná a stačí každá z těchto podmínek:

(1) existuje spojitá funkce f v P taková, že $x \in P \Rightarrow 0 \leqq f(x) \leqq 1$, $x \in X \Rightarrow f(x) = 1$, $x \in Y \Rightarrow f(x) = 0$;

(2) existuje spojitá pseudometrika ϱ v P taková, že $\inf\limits_{x \in X, y \in Y} \varrho(x, y) > 0$;

(3) existují otevřená pokrytí $\mathfrak{G}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ prostoru P taková, že $\mathfrak{G}_{k+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathfrak{G}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, a pro vhodné p žádný člen souboru $\mathfrak{G}_p$ neprotíná zároveň X i Y.

Důkaz. I. Nechť X, Y jsou normálně oddělené; nechť φ je spojitá funkce v P, $\overline{\varphi^1(X)} \cap \overline{\varphi^1(Y)} = \emptyset$. Ježto prostor $\mathbf{E}_1$ je normální, existuje funkce g v $\mathbf{E}_1$ tak, že $\xi \in \mathbf{E}_1 \Rightarrow 0 \leqq g(\xi) \leqq 1$, $\xi \in \overline{\varphi^1(X)} \Rightarrow g(\xi) = 1$, $\xi \in \overline{\varphi^1(Y)} \Rightarrow g(\xi) = 0$. Abychom zjistili, že platí (1), stačí nyní pro $x \in P$ položit $f(x) = g(\varphi(x))$. — II. Nechť f má vlastnosti uvedené v (1). Pro $k = 1, 2, \ldots$ buď $\mathfrak{G}_k$ soubor $\{f^{-1}(\xi - 3^{-k}, \xi + 3^{-k}); \xi \in \mathbf{E}_1\}$. Snadno se zjistí, že $\mathfrak{G}_k$ mají vlastnosti uvedené v (3). — III. Nechť platí (3). Podle **3.8** existuje spojitá pseudometrika ϱ v P a číslo $\varepsilon > 0$ tak, že platí: když $(x, y) \in P \times P$, $\varrho(x, y) < \varepsilon$, pak pro vhodné G ze souboru $\mathfrak{G}_p$ je $x \in G$, $y \in G$. Kdyby pro některá $x \in X$, $y \in Y$ bylo $\varrho(x, y) < \varepsilon$, pak by z toho plynulo, že $G \cap X \neq \emptyset$, $G \cap Y \neq \emptyset$, což podle předpokladu není možné. Proto $\varrho(x, y) \geqq \varepsilon$ pro $x \in X$, $y \in Y$, tedy platí (2). — IV. Jestliže platí (2), pak pro $z \in P$ položíme $f(z) = \inf\limits_{x \in X} \varrho(z, x)$. Snadno se zjistí, že f je spojitá, $\overline{f^1(X)} \cap \overline{f^1(Y)} = \emptyset$, takže X, Y jsou normálně oddělené.

3.11. Nechť $\{X_\alpha; \alpha \in A\}$, $\{Y_\alpha; \alpha \in A\}$ jsou soubory částí prostoru P. Nechť $\{Y_\alpha\}$ je lokálně konečný a pro každé α X_α a $P - Y_\alpha$ jsou normálně oddělené. Potom též $\bigcup_\alpha X_\alpha$ a $P - \bigcup_\alpha Y_\alpha$ jsou normálně oddělené.

Důkaz. Podle **3.10** existují spojité funkce f_α v P takové, že $x \in P \Rightarrow \Rightarrow 0 \leqq f_\alpha(x) \leqq 1$, $x \in X_\alpha \Rightarrow f_\alpha(x) = 1$, $x \in P - Y_\alpha \Rightarrow f_\alpha(x) = 0$. Položíme-li pro $x \in P$: $f(x) = \Sigma_\alpha f_\alpha(x)$, je podle **1.20** a **1.21** funkce f definována v P a je spojitá. Zřejmě $x \in \bigcup_\alpha X_\alpha \Rightarrow f(x) \geqq 1$, $x \in P - \bigcup_\alpha Y_\alpha \Rightarrow \Rightarrow f(x) = 0$, takže $\bigcup X_\alpha$ a $P - \bigcup Y_\alpha$ jsou normálně oddělené.

3.12. Nechť prostor P je normální. Množiny $A \subset P$, $B \subset P$ jsou normálně oddělené, když a jen když $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

Cvičení k § 3

3.1. Nechť P je množina. Pro $X \subset P \times P$ označme X^{-1} množinu $(x, y) \in P \times P$ takových, že $(y, x) \in X$; pro $X \subset P \times P$, $Y \subset P \times P$ označme $X \circ Y$ množinu $(x, z) \in P \times P$ takových, že pro vhodné $y \in P$ je $(x, y) \in X$, $(y, z) \in Y$. Nazveme *zobecněnou uniformitou* na P každou neprázdnou množinu $\mathfrak{U}$ částí $P \times P$ splňující tyto podmínky: (1) $x \in P$, $U \in \mathfrak{U} \Rightarrow (x, x) \in U$; (2) $U \in \mathfrak{U}$, $U \subset V \subset P \times P \Rightarrow \Rightarrow V \in \mathfrak{U}$; (3) $U_1 \in \mathfrak{U}$, $U_2 \in \mathfrak{U} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}$; (4) $U \in \mathfrak{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathfrak{U}$; (5) když $U \in \mathfrak{U}$, pak existuje $V \in \mathfrak{U}$ takové, že $V \circ V \subset U$. Jestliže kromě toho platí (6), když $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$, pak existuje $U \in \mathfrak{U}$ takové, že (x, y) non $\in U$, nazveme $\mathfrak{U}$ *uniformitou.* Množinu P s danou na ní (zobecněnou) uniformitou $\mathfrak{U}$ nazveme (*zobecněným*) *uniformním prostorem*;*) označujeme jej $(P, \mathfrak{U})$ anebo stručně P. Dokažte: je-li $\mathfrak{M}$ neprázdná množina pseudometrik v P a je-li $\mathfrak{U}$ množina $U \subset \subset P \times P$ takových, že pro vhodná $\varrho_i \in \mathfrak{M}$, $i = 1, \ldots, n$, a vhodné $\varepsilon > 0$ platí $x \in P$, $y \in P$, $\sum_1^n \varrho_i(x, y) < \varepsilon \Rightarrow (x, y) \in U$, pak $\mathfrak{U}$ je zobecněná uniformita na P; jestliže přitom $\mathfrak{M}$ má tu vlastnost, že pro $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$, vždy existuje $\varrho \in \mathfrak{M}$

*) O teorii uniformních prostorů viz kromě knihy citované na str. 410, zejména tyto knižní práce: A. Weil, Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, 1937; N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Livre III, Topologie générale (zejména kap. II).

s $\varrho(x, y) > 0$, pak $\mathfrak{U}$ je uniformita. (Říkáme pak někdy, že $\mathfrak{U}$ je *vytvořena* množinou pseudometrik $\mathfrak{M}$.)

3.2. Je-li $(P, \mathfrak{U})$ zobecněný uniformní prostor, nazveme pseudometriku ϱ na P *stejnoměrně spojitou* (vzhledem k $\mathfrak{U}$), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ množina $(x, y) \in P \times P$ takových, že $\varrho(x, y) < \varepsilon$, náleží do $\mathfrak{U}$. Dokažte (použitím **3.7**): je-li $\mathfrak{M}$ množina všech pseudometrik na P stejnoměrně spojitých vzhledem k $\mathfrak{U}$ a je-li $\mathfrak{V}$ zobecněná uniformita sestrojená k $\mathfrak{M}$ způsobem popsaným v **3.1**, pak $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}$.

3.3. Nechť $\mathfrak{U}$ je zobecněná uniformita na P. Jsou-li pseudometriky ϱ_i, $i = 1, \ldots, n$ stejnoměrně spojité (vzhledem k $\mathfrak{U}$), pak též $\sum_1^n \varrho_i$ je stejnoměrně spojitá; jsou-li ϱ_k, $k = 1, 2, \ldots$ stejnoměrně spojité a klademe-li

$$\varrho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\varrho_k(x, y)}{1 + \varrho_k(x, y)},$$

pak ϱ je stejnoměrně spojitá pseudometrika.

3.4. Nechť P je množina, $\mathfrak{M}$ je neprázdná množina pseudometrik na P. Sestrojme k $\mathfrak{M}$ zobecněnou uniformitu $\mathfrak{U}$ způsobem, popsaným v **3.1**. Potom pseudometrika σ na P je stejnoměrně spojitá vzhledem k $\mathfrak{U}$, když a jen když existují $\varrho_i \in \mathfrak{M}$, $i = 1, \ldots, n$, takové, že platí: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in P$, $y \in P$, $\sum_{i=1}^{n} \varrho_i(x, y) < \delta$ je vždy $\sigma(x, y) < \varepsilon$.

3.5. Nechť P je množina. Potom množina $\mathfrak{U}$ těch $U \subset P \times P$, pro něž existují $X_i \subset P$, $i = 1, \ldots, n$, taková, že $\bigcup_1^n X_i = P$, $\bigcup (X_i \times X_i) \subset U$, je uniformitou na P. Obecněji: je-li $\mathfrak{m}$ nekonečná mohutnost, pak množina $\mathfrak{U}_{\mathfrak{m}}$ těch $U \subset P \times P$, pro něž existuje $\mathfrak{X} \subset \exp P$ mohutnosti $< \mathfrak{m}$ taková, že $\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} X = P$, $\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} (X \times X) \subset U$, je uniformitou na P. Zřejmě $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{\aleph_0}$. Je-li $\mathfrak{p}$ mohutnost P, $\mathfrak{q}$ nejmenší mohutnost větší než $\mathfrak{p}$, pak platí: když $\aleph_0 \leqq \mathfrak{m} < \mathfrak{n} \leqq \mathfrak{q}$, pak $\mathfrak{U}_{\mathfrak{m}} \neq \mathfrak{U}_{\mathfrak{n}}$; když $\mathfrak{m} \geqq \mathfrak{q}$, pak $\mathfrak{U}_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{U}_{\mathfrak{q}}$.

3.6. Nechť $\mathfrak{U}$ je (zobecněná) uniformita na P. Jestliže $Q \subset P$, pak soustava $\mathfrak{U}_Q$ všech $U \cap (Q \times Q)$, $U \in \mathfrak{U}$, je (zobecněná) uniformita na Q. (Říkáme, že $(Q, \mathfrak{U}_Q)$ je *podprostor* uniformního prostoru $(P, \mathfrak{U})$ nebo *prostor vnořený do* $(P, \mathfrak{U})$.)

3.7. Nechť $(P, \mathfrak{U})$, $(Q, \mathfrak{V})$ jsou zobecněné uniformní prostory. Zobrazení f P do Q nazýváme *stejnoměrně spojitým*, jestliže ke každému $V \in \mathfrak{V}$ existuje $U \in \mathfrak{U}$ takové, že platí: když $(x, y) \in U$, pak $(f(x), f(y)) \in V$. Dokažte: k tomu, aby zobrazení f bylo stejnoměrně spojitým, je nutné a stačí, aby pro každou stejnoměrně spojitou (vzhledem k $\mathfrak{V}$) pseudometriku ϱ v Q platilo: pseudometrika

ϱ' v P, definovaná vztahem $\varrho'(x, y) = \varrho(f(x), f(y))$, je stejnoměrně spojitá (vzhledem k $\mathfrak{U}$).

3.8. Metrický prostor (P, ϱ) budeme vždy (není-li výslovně řečeno něco jiného) považovat za uniformní prostor (s uniformitou vytvořenou metrikou ϱ podle **3.1**). Pro metrický prostor mají podle této úmluvy smysl všechny pojmy definované pro uniformní prostory. Dokažte: zobrazení f metrického prostoru (P, ϱ) do metrického prostoru (Q, σ) je stejnoměrně spojité (v právě zavedeném smyslu), když a jen když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$ (tj. když f je stejnoměrně spojité ve smyslu **T** def. **9.6.1**).

3.9. Nechť $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ jsou zobecněné uniformity na množině P. Je-li $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$, pak říkáme, že $\mathfrak{U}$ je *jemnější* než $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}$ je *hrubší* než $\mathfrak{U}$. Dokažte: (1) identické zobrazení $(P, \mathfrak{U})$ na $(P, \mathfrak{V})$ je stejnoměrně spojité, když a jen když $\mathfrak{U}$ je jemnější než $\mathfrak{V}$; (2) nejjemnější uniformita na P se skládá ze všech $U \subset P \times P$ obsahujících „diagonálu", tj. obsahujících všechny $(x, x) \in P \times P$ (nazýváme tuto uniformitu *diskrétní*); (3) nejhrubší zobecněná uniformita na P se skládá právě jen z množiny $P \times P$.

3.10. Nechť $\mathfrak{U}$ je zobecněná uniformita na množině P. Soustavu $\mathfrak{V}$ částí $P \times P$ nazveme *basí* (resp. *subbasí*) uniformity $\mathfrak{U}$, jestliže $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$ a ke každému $U \in \mathfrak{U}$ existuje $V \in \mathfrak{V}$ takové, že $V \subset U$ (resp. existují $V_i \in \mathfrak{V}$, $i = 1, \ldots, n$, takové, že $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset U$).

Dokažte: je-li $\mathfrak{V}$ neprázdná soustava částí $P \times P$ taková, že (*a*) $x \in P$, $V \in \mathfrak{V} \Rightarrow (x, x) \in V$, (*b*) ke každému $V \in \mathfrak{V}$ existuje $V_1 \in \mathfrak{V}$ takové, že $V_1 \odot V_1 \subset V^{-1}$, pak existuje právě jedna zobecněná uniformita $\mathfrak{U}$, pro niž je $\mathfrak{V}$ subbasí; $\mathfrak{U}$ je uniformita, když a jen když pro $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$, existuje $V \in \mathfrak{V}$ takové, že (x, y) non $\in V$.

3.11. Nechť $\{(P_\alpha, \mathfrak{U}_\alpha); \alpha \in A\}$ je soubor zobecněných uniformních prostorů. Položme $P = \mathfrak{P}_\alpha P_\alpha$. Pro $\beta \in A$, $U \in \mathfrak{U}_\beta$ označme $V(\beta, U)$ množinu (x, y), kde $x = \{x_\alpha\} \in P$, $y = \{y_\alpha\} \in P$, takových, že $(x_\beta, y_\beta) \in U$. Dokažte: existuje právě jedna zobecněná uniformita $\mathfrak{U}$ na P, pro kterou soustava všech $V(\beta, U)$ je subbasí; jsou-li všechny $\mathfrak{U}_\alpha$ uniformitami, pak též $\mathfrak{U}$ je uniformita. — Prostor $(P, \mathfrak{U})$ budeme nazývat *kartézským součinem* prostorů $(P_\alpha, \mathfrak{U}_\alpha)$.

3.12. Říkáme, že uniformní prostor $(P, \mathfrak{U})$ je *metrisovatelný*, jestliže existuje metrika ϱ v P, která vytváří (způsobem, popsaným v **3.1**) uniformitu $\mathfrak{U}$. Dokažte: uniformní prostor $(P, \mathfrak{U})$ je metrisovatelný, když a jen když uniformita $\mathfrak{U}$ má spočetnou basi (nebo: když a jen když $\mathfrak{U}$ má spočetnou subbasi). [Návod: nechť U_n tvoří basi (subbasi); zvolíme stejnosměrně spojité pseudometriky ϱ_n tak, aby $\varrho_n(x, y) < 1 \Rightarrow (x, y) \in U_n$ a položíme $\varrho = \sum \frac{1}{2^n} \frac{\varrho_n}{1 + \varrho_n}$.]

3.13. Nechť $(P, \mathfrak{U})$, $(Q, \mathfrak{V})$ jsou zobecněné uniformní prostory. Zobrazení f prostoru P do Q nazveme *stejnoměrně homeomorfním*, jestliže f je prosté, f a f_{-1} jsou stejnoměrně spojité. Existuje-li stejnoměrně homeomorfní zobrazení P na Q, říkáme, že zobecněné uniformní prostory P a Q jsou *stejnoměrně homeomorfní*. Dokažte: každý uniformní prostor je stejnoměrně homeomorfní s podprostorem kartézského součinu metrisovatelných uniformních prostorů. [Nechť množina pseudometrik $\mathfrak{M}$ vytváří (ve smyslu **3.1**) uniformitu $\mathfrak{U}$. Pro $\varrho \in \mathfrak{M}$ buď R_ϱ metrický prostor, příslušný k ϱ, f_ϱ buď zobrazení P na R_ϱ (viz **3.2**). Pro $x \in P$ buď $f(x) = \{f_\varrho(x)\} \in \mathfrak{P}R_\varrho$.]

3.14. Nechť P je množina, $\mathfrak{U}$ je zobecněná uniformita na P, u je topologie v P. Říkáme, že $\mathfrak{U}$ a u *souhlasí* (anebo že $\mathfrak{U}$ *vytváří* topologii u), jestliže pro $x \in P$, $M \subset P$ platí $x \in uM$, když a jen když pro každé $U \in \mathfrak{U}$ existuje $y \in M$ takové, že $(x, y) \in U$. Dokažte: (1) ke každé uniformitě $\mathfrak{U}$ na P existuje právě jedna topologie která s ní souhlasí; při této topologii je P F-prostorem; (2) je-li $\mathfrak{U}$ zobecněná uniformita, která nesplňuje podmínku (6) z **3.1**, pak neexistuje žádná topologie, která by s ní souhlasila.

Poznámka. Je-li P uniformní prostor, budeme vždy považovat (pokud není výslovně řečen opak) P zároveň za topologický prostor s topologií souhlasící s danou uniformitou na P. V důsledku této úmluvy mají v uniformních prostorech smysl všechny pojmy zavedené pro topologické prostory.

3.15. Všechny uniformity $\mathfrak{U}_\mathfrak{m}$, zavedené v **3.5**, souhlasí s diskrétní topologií v P.

3.16. Dokažte: (1) podprostor uniformního prostoru P je zároveň podprostorem topologického prostoru P (viz úmluvu v poznámce k **3.12**); podrobněji: je-li $(P, \mathfrak{U})$ uniformní prostor, u topologie v P, která souhlasí s $\mathfrak{U}$, pak pro libovolné $Q \subset P$ uniformita $\mathfrak{U}_Q$ souhlasí s topologií prostoru Q vnořeného do (P, u); (2) kartézský součin $\mathfrak{P}P_\alpha$ uniformních prostorů P_α je zároveň kartézským součinem topologických prostorů P_α; (3) stejnoměrně spojité zobrazení (uniformního prostoru do uniformního prostoru) je vždy spojité (jako zobrazení topologického prostoru do topologického prostoru).

3.17. Je-li P uniformní prostor, pak topologický prostor P je úplně regulární. [Stačí dokázat: je-li $F \subset P$ uzavřená, $x \in P - F$, pak existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika ϱ taková, že $\varrho(x, F) > 0$.]

3.18. Nazveme topologický prostor P *uniformisovatelným*, jestliže existuje uniformita, která souhlasí s topologií prostoru P. Dokažte: P je uniformisovatelný, když a jen když je úplně regulární. [Je-li P úplně regulární, pak s jeho topologií souhlasí uniformita vytvořená množinou všech spojitých pseudometrik v P.]

3.19. Nechť P je úplně regulární topologický prostor. Uniformita, vytvořená množinou všech spojitých pseudometrik v P, je nejjemnější ze všech uniformit souhlasících s topologií prostoru P.

Poznámka. V množině všech uniformit souhlasících s topologií úplného regulárního P obecně neexistuje nejhrubší.

3.20. Nechť P je kompaktní FH-prostor. Potom existuje právě jedna uniformita, která souhlasí s topologií P. [Nechť $\mathfrak{M}$ značí množinu všech stejnoměrně spojitých pseudometrik na P. Stačí dokázat: když $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$ a pro $(x, y) \in P \times P$, $x \neq y$ vždy existuje $\varrho \in \mathfrak{M}_1$ s $\varrho(x, y) > 0$, pak ke každému $\sigma \in \mathfrak{M}$ a $\varepsilon > 0$ se najdou $\varrho_i \in \mathfrak{M}_1$ a $\delta > 0$ s $\sum_1^n \varrho_i(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(x, y) < \varepsilon$.]