3. KONSTRUKCE DVOU SPOČETNĚ KOMPAKTNÍCH FR-PROSTORŮ, JEJICHŽ KARTÉZSKÝ SOUČIN NENÍ SPOČETNĚ KOMPAKTNÍ

Definice **3.1.** Nechť R je množina a nechť $\mathfrak{C}$ je soustava podmnožin $C \subset R$. Prvky soustavy $\mathfrak{C}$ slují *nezávislé*, jestliže průnik $\bigcap_{k=1}^{n} C_k^{k^*} \neq \emptyset$ pro každé přirozené n, pokud $C_k \in \mathfrak{C}$ jsou navzájem různé množiny, při čemž $k^* = \pm 1$ a $C_k^1 = C_k$, kdežto $C_k^{-1} = R - C_k$.

3.1. Existuje soustava $\mathfrak{N}$ mohutnosti $\exp \aleph_0$ nezávislých množin, jež jsou podmnožinami množiny N všech přirozených čísel, taková, že průnik $\bigcap_{k=1}^{n} N_k^{k^*}$ je nekonečná množina pro každé přirozené číslo n, pokud N_k jsou navzájem různé prvky soustavy $\mathfrak{N}$.

Důkaz. Nechť $U = \mathfrak{P}P(n)$, $n \in N$, je kartézský součin, při čemž $P(n) = E_1$ pro každé $n \in N$. Bod $\{x_n\} \in U$ nazveme *racionálním*, jestliže každé číslo x_n je racionální a jestliže $x_n \neq 0$ jen pro konečný počet indexů n. Podle **T 2.2.6** je to spočetná množina. Existuje tudíž prosté zobrazení $\psi(n)$, $n \in N$, množiny N na množinu všech racionálních bodů v množině U. Pro reálné číslo t, $0 < t < 1$, a racionální bod $\{x_n\} \in U$ položme $F_t(\{x_n\}) = \sum_{i=1}^{\infty} t^{i-1} x_i$. Tento součet je konečný, neboť $x_n = 0$ pro skoro všecka n. Definujme nyní podmnožinu $N_t \subset N$, $0 < t < 1$, jako množinu všech přirozených čísel m takových, že $F_t(\psi(m)) \geqq 0$.

Nechť t_1 a t_2 jsou dvě různá čísla intervalu $(0, 1)$. Zvolme racionální čísla r_n taková, že $-t_1 r_2 < r_1 < -t_2 r_2$ a že $r_n = 0$ pro $n \geqq 3$. Pak je $F_{t_1}(\{r_n\}) > 0$, kdežto $F_{t_2}(\{r_n\}) < 0$. Proto $m \in N_{t_1} - N_{t_2}$, kde m je určeno vztahem $\psi(m) = \{r_n\}$. Odtud vyplývá, že $N_{t_1} \neq N_{t_2}$. Soustava $\mathfrak{N}$ všech podmnožin N_t má tudíž podle **T 2.3.4** mohutnost $\exp \aleph_0$.

Nechť $N_{t_k} \in \mathfrak{N}$, $0 < t_k < 1$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, při čemž $t_k \neq t_j$ pro $k \neq j$. Dokážeme, že průnik $\bigcap_{k=1}^{n} N_{t_k}^{t_k^*}$ je nekonečnou množinou. Nechť tedy jsou dána čísla $t_k^* = \pm 1$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Nechť

$$G_{t_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} t_k^{i-1} x_i = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

je n rovnic nadrovin v n-rozměrném eukleidovském prostoru E_n. Každá z nich obsahuje bod $(0, 0, \ldots, 0) \in E_n$. Jelikož $t_k \neq t_j$ pro $k \neq j$, dostáváme

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & \ldots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & \ldots & t_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_n & \ldots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{k<j\leqq n} (t_k - t_j) \neq 0 \, .$$

Proto všechny tyto nadroviny jsou lineárně nezávislé v E_n a množina D všech bodů $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in E_n$, kde r_k jsou racionální čísla taková, že $t_k^* \, G_{t_k}(r_1, r_2, \ldots, r_n) > 0$ současně pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, je nekonečná. Poněvadž

$$G_{t_k}(r_1, r_2, \ldots, r_n) = F_{t_k}(\{r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots\}) \, ,$$

platí

$$\psi^{-1}(r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots) \in \bigcap_{k=1}^{n} N_{t_k}^{t_k^*}$$

pro každý bod $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ nekonečné množiny D. Tím je důkaz proveden.

3.2. Nechť $f_t(x)$, $x \in N$, $0 < t < 1$, značí charakteristickou funkci množiny N_t v isolovaném (a proto normálním) prostoru N. Je tedy $f_t(x) = 1$ pro $x \in N_t^1$ a $f_t(x) = 0$ pro $x \in N_t^{-1}$. Jelikož N je isolovaný prostor, je podle **T 7.1.2** každá reálná funkce, zejména každá charakteristická funkce $f_t(x)$, $0 < t < 1$, spojitá. Mohutnost soustavy všech těchto funkcí $f_t(x)$ je stejná jako mohutnost soustavy $\mathfrak{N}$, to jest $\exp \aleph_0$.

Nechť nyní $f_z(x)$, $x \in N$, $0 < z < 2$, značí všechny reálné, omezené a spojité funkce v oboru N, při čemž $f_z(x)$, $0 < z < 1$, jsou všechny charakteristické funkce množin N_z. Nechť $P(z) = \langle \inf f_z(x), \sup f_z(x) \rangle$, takže pro $0 < z < 1$ je $P(z) = \langle 0, 1 \rangle$. Kartézský součin $R = \mathfrak{P}P(z)$ $(0 < z < 2)$, kde $P(z)$ jsou podle **T 8.3.28** kompaktní prostory, je sám podle **T 8.3.18** kompaktním prostorem. Jelikož každá množina $P(z)$ jest FH-prostorem, je podle **T 6.2.10** a **T 6.2.19** kartézský součin R také FH-prostorem. Podle **T 8.3.19** je R normálním prostorem. Snadno se pozná, že R je homeomorfní se základním kvádrem dimense $\exp \aleph_0$. Zobrazení $\varphi(x) = \{\xi_z\}$, kde $x \in N$, $\{\xi_z\} \in \mathfrak{P}P(z)$ $(0 < z < 2)$ a $\xi_z = f_z(x)$ pro $z \in (0, 2)$, je podle **T 8.4.8** (viz Důkaz II) homeomorfním zobrazením isolovaného normálního prostoru N na podmnožinu $\varphi^1(N) \subset R$. Můžeme tudíž identifikovat body $x \equiv \varphi(x)$, $x \in N$. Pak je $\overline{N} \equiv \overline{\varphi_1(N)} \subset R$. Prostor $\overline{\varphi^1(N)}$, jenž je vnořen do kartézského kompaktního FH-prostoru R, je podle **T 8.4.8** (viz Důkaz III) kompaktní β-obal, tj. $\overline{\varphi^1(N)} = \beta(N)$.

3.2. N e c h ť $\{\zeta_t\} \in \mathfrak{P}Q(t)$ $(0 < t < 1)$, k d e $Q(t)$ s e s t á v á z e d v o u čísel 0 a 1 p r o $t \in (0, 1)$. P a k e x i s t u j e b o d $\{\xi_z\} \in \beta(N) - N$ t a k o v ý, ž e $\xi_z = \zeta_z$ p r o k a ž d é $z \in (0, 1)$.

D ů k a z. Nechť $\{\zeta_t\}$, $\zeta_t = 0$ nebo $= 1$, je libovolný bod množiny $\mathfrak{P}Q(t)$ $(0 < t < 1)$. Nechť $\mathfrak{S}$ je soustava všech množin tvaru $\overline{N}_t^{t^*} - N$, kde $t \in (0, 1)$ a $t^* = 1$, jestliže $\zeta_t = 1$, kdežto $t^* = -1$, jestliže $\zeta_t = 0$. Jelikož N je normální prostor a každá množina (n) obsahující jediný bod $n \in N$ je uzavřená v N, platí podle **T 8.4.11**, že $\overline{(N - n)} \cap (n) = \emptyset$; poněvadž $\overline{N - (n)} \cup (n) = \beta(N)$, je každý bod $n \in N$ otevřený v $\beta(N)$, takže množina $\overline{N}_t^{t^*} - N$ je uzavřená v $\beta(N)$.

Soustava $\mathfrak{S}$ je centrovaná v $\beta(N)$. Nechť $\overline{N}_{t_k}^{t_k^*} - N \in \mathfrak{S}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Je-li $t_k = t_j$, pak zřejmě $t_k^* = t_j^*$. Proto můžeme uspořádat reálná čísla t_k do vzestupné posloupnosti bez opakování $0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_m$, kde $m \leqq n$. Podle **3.1** je průnik $\bigcap_{j=1}^{m} N_{u_j}^{u_j^*}$ nekonečný, a tudíž podle **T 8.3.1** je jeho uzávěr v R nekonečnou kompaktní množinou. Jelikož v N jsou kompaktní jen konečné podmnožiny, platí

$$\emptyset \neq \overline{\bigcap_{j=1}^{m} N_{u_j}^{u_j^*}} - N \subset \bigcap_{j=1}^{m} \overline{N}_{u_j}^{u_j^*} - N = \bigcap_{j=1}^{m} (\overline{N}_{u_j}^{u_j^*} - N) = \bigcap_{k=1}^{n} (\overline{N}_{t_k}^{t_k^*} - N) .$$

Jelikož tedy soustava $\mathfrak{S}$ je centrovaná a podle předešlého odstavce je $\overline{N_t^{t*}} - N = \overline{\overline{N_t^{t*}} - N}$, platí podle **T 8.3.6**: $\emptyset \neq \bigcap \mathfrak{S} \subset \beta(N) - N$.

Zvolme nyní bod $\{\xi_z\} \in \bigcap \mathfrak{S}$. Kdyby existoval index $v \in (0, 1)$ s vlastností $\xi_v \neq \zeta_v$, pak okolí $V(\{\xi_z\}) = \mathfrak{P}V(z)$ $(0 < z < 2)$ zvoleného bodu $\{\xi_z\}$ v prostoru R, kde $V(z) = P(z)$ pro $0 < z < 2$, $z \neq v$, kdežto $V(v) = \langle 0, \frac{1}{2})$, jestliže $\zeta_v = 1$, nebo $V(v) = (\frac{1}{2}, 1\rangle$, jestliže $\zeta_v = 0$, by neobsahovalo žádný bod množiny N_v^{v*}. Proto by bod $\{\xi_z\}$ nenáležel do množiny $\overline{N_v^{v*}} - N$, a tedy ani do $\bigcap \mathfrak{S}$, což je spor. Proto $\xi_z = \zeta_z$ pro každé $z \in (0, 1)$.

3.3. Mohutnost prostoru $\beta(N)$ je $\exp \exp \aleph_0$.

Důkaz[4]). Z **3.2** vyplývá, že dvěma různým bodům $\{\zeta_t\} \neq \{\zeta'_t\}$ kartézského součinu $\mathfrak{P}Q(t)$ $(0 < t < 1)$ odpovídají dva různé body $\{\xi_z\} \neq \{\xi'_z\}$ prostoru $\beta(N)$ takové, že $\xi_z = \zeta_z$ a $\xi'_z = \zeta'_z$ pro $0 < z < 1$.

Proto moh $\mathfrak{P}Q(t)$ $(0 < t < 1) \leqq$ moh $\beta(N) \leqq$ moh R.

Přiřadíme-li bodu $\{\zeta_t\} \in \mathfrak{P}Q(t)$ $(0 < t < 1)$ množinu $M\{\zeta_t\} \subset (0, 1)$ takovou, že $t \in M\{\zeta_t\}$, když a jen když $\zeta_t = 1$, dostaneme prosté zobrazení kartézského součinu $\mathfrak{P}Q(t)$ $(0 < t < 1)$ na soustavu všech podmnožin otevřeného intervalu $(0, 1)$. Z **T 2.3.4** pak snadno vyplývá, že mohutnost této soustavy je $\exp \exp \aleph_0$. Na druhé straně z **T 1.5** a ze cvičení **T 2.4.7** usoudíme, že tutéž mohutnost má také prostor R, a tudíž i $\beta(N)$.

3.4. V kompaktním β-obalu $\beta(N)$ existují dvě spočetně kompaktní množiny A_1 a A_2 takové, že $A_1 \cap A_2 = N$ a $A_1 \cup A_2 = \beta(N)$.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{T}$ značí soustavu všech spočetných (nekonečných) podmnožin $T \subset \beta(N)$ a nechť $\mathfrak{S}$ je soustavou všech podmnožin tvaru $N \cup (x)$, kde $x \in \beta(N) - N$. Pak je $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}$ a moh $\mathfrak{S}$ = moh $(\beta(N) - N)$. Proto

$$\text{moh}\,(\beta(N) - N) \leqq \text{moh}\,\mathfrak{T} \leqq \text{moh}\,(N \times \beta(N))\,,$$

takže podle **3.3** a **T 3.7.9** je moh $\mathfrak{T} = \exp \exp \aleph_0$. Existuje tudíž prosté

[4]) Jiným způsobem dokázal tuto větu B. Pospíšil. Viz [5].

zobrazení soustavy $\mathfrak{T}$ na množinu $\beta(N) - N$. Uspořádejme normálně soustavu $\mathfrak{T}$ takto:

$$T_0, T_1, \ldots, T_\xi, \ldots \quad (\text{moh}\ \xi < \exp\exp\aleph_0)$$

a množině T_ξ přiřazený bod označme $x_\xi \in \beta(N) - N$. Transfinitní indukcí sestrojíme podmnožiny P_ξ a Q_ξ v množině $\beta(N) - N$. Předpokládejme, že už každému prvku $T_\eta \in \mathfrak{T}$ jsou přiřazeny dvě podmnožiny P_η a Q_η v množině $\beta(N) - N$ takové, že

$$P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_\eta \subset \ldots, \quad Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_\eta \subset \ldots,$$
$$P_\eta \cap Q_\eta = \emptyset$$

pro všecka $\eta < \alpha$, kde moh $\alpha < \exp\exp\aleph_0$, při čemž moh $P_\eta =$ $=$ moh $Q_\eta < \exp\exp\aleph_0$. Pak přiřadíme prvku $T_\alpha \in \mathfrak{T}$ dvě podmnožiny P_α a Q_α takto: Jelikož podle **T 3.7.10** jest

$$\text{moh} \bigcup_{\eta<\alpha} (P_\eta \cup Q_\eta) < \exp\exp\aleph_0\,,$$

vyplývá z **T 12.3.8**, že podmnožina

$$\bar{T}_\alpha - (N \cup T_\alpha) - \bigcup_{\eta<\alpha} (P_\eta \cup Q_\eta) \subset \beta(N) - N \tag{1}$$

je nekonečná. Můžeme tudíž zvolit v této podmnožině dva různé body x_μ a x_ν s nejmenšími možnými indexy μ a ν. Položme pak

$$P_\alpha = x_\mu \cup \bigcup_{\eta<\alpha} P_\eta \quad \text{a} \quad Q_\alpha = x_\nu \cup \bigcup_{\eta<\alpha} Q_\eta\,.$$

Zřejmě pro všecka $\eta \leqq \alpha$ platí: $P_\eta \subset P_\alpha \subset \beta(N) - N$; $Q_\eta \subset Q_\alpha \subset \beta(N) -$ $- N$; $P_\eta \cap Q_\eta = \emptyset$. Jelikož moh $P_\eta =$ moh Q_η pro $\eta < \alpha$, snadno se vidí, že je také moh $P_\alpha =$ moh $Q_\alpha < \exp\exp\aleph_0$.

Tak jsou transfinitní indukcí sestrojeny dvě podmnožiny $P =$ $= \bigcup_\xi P_\xi \subset \beta(N) - N$ a $Q = \bigcup_\xi Q_\xi \subset \beta(N) - N$ takové, že $P \cap Q = \emptyset$, při čemž moh $\xi < \exp\exp\aleph_0$.

Z podmínky, aby indexy μ a ν byly nejmenší, vyplývá, že $P \cup Q =$ $= \beta(N) - N$. Vskutku, je-li libovolný bod $a \in \beta(N) - N$, pak $a = x_\varrho$ pro vhodný pořadový index ϱ mohutnosti $< \exp\exp\aleph_0$. Uvažujme o těch množinách $T_{\xi_\lambda} \in \mathfrak{S}$ tvaru $N \cup (x)$, $x \in \beta(N) - N$, pro něž $x \neq a$. Nechť x_{μ_λ} a x_{ν_λ} je dvojice bodů, jež jsou podle (1) přiřazeny prvku T_{ξ_λ}. Kdyby $x_\varrho \in \beta(N) - (P \cup Q)$, pak by vzhledem k minimálním pořadovým číslům μ a ν platil pro všecka λ vztah: $\mu_\lambda < \varrho$, $\nu_\lambda < \varrho$. Jelikož však moh $\varrho < \exp\exp\aleph_0$, měla by soustava $\mathfrak{S}$ mohutnost $< \exp\exp\aleph_0$, což je spor.

Zbývá dokázat, že podmnožiny $A_1 = P \cup N \subset \beta(N)$ a $A_2 = Q \cup N \subset \beta(N)$ jsou spočetně kompaktní. Zvolme tedy jakoukoliv nekonečnou podmnožinu $M \subset A_1$ a v ní spočetnou podmnožinu $M_0 \subset M$. Pak $M_0 = T_\alpha \in \mathfrak{T}$, kde α je vhodné pořadové číslo. Této spočetné množině podle (1) přiřazený bod $x_\mu \in A_1$ náleží do množiny $\overline{T}_\alpha - T_\alpha = \overline{M}_0 - M_0$ a je tudíž vzhledem k **T 4.1.4** a **T 4.1.8** hromadným bodem množiny M v A_1. Proto je množina A_1 spočetně kompaktní. Stejné tvrzení o množině A_2 se dokáže analogicky.

3.5. Kartézský součin $A_1 \times A_2$ dvou spočetně kompaktních F-prostorů $A_1 = P \cup N$ a $A_2 = Q \cup N$ není spočetně kompaktní.

Důkaz. A_1 i A_2 jsou podmnožiny regulárního F-prostoru $\beta(N)$. Podle **T 4.6.10**, **T 5.3.2** a **3.4** jsou to tedy spočetně kompaktní FR-prostory. Označme písmenem D množinu všech bodů $(x, y) \in A_1 \times A_2$, kde $x = y$. Jelikož $A_1 \cap A_2 = N$, náleží bod (x, y) do množiny D, když a jen když $x = y \in N$. Jelikož každý bod $x \in N$ je otevřený, je D nekonečná isolovaná podmnožina v prostoru $A_1 \times A_2$.

Množina D nemá hromadného bodu v $A_1 \times A_2$. Předpokládejme naopak, že množina D má hromadný bod $(a, b) \in \overline{D} - D$. Pak je $a \in \beta(N)$, $b \in \beta(N)$, $a \neq b$. Jelikož $\beta(N)$ je H-prostor, existují v něm dvě disjunktní okolí $V(a)$ bodu a a $V(b)$ bodu b. Rovněž okolí $A_1 \cap V(a)$ bodu a v prostoru A_1 a $A_2 \cap V(b)$ bodu b v prostoru A_2 jsou disjunktní, takže okolí $(A_1 \cap V(a)) \times (A_2 \cap V(b))$ bodu (a, b) v prostoru $A_1 \times A_2$ neobsahuje žádný bod množiny D. To je spor.

Podle **T 8.2.6** není tudíž prostor $A_1 \times A_2$ spočetně kompaktní[5]).

---

[5]) Viz NOVÁK [10].